

付録B 電気回路理論

熱雑音を取り扱う際に必要な電気回路の理論を説明する。熱雑音を取り扱うには、抵抗、キャパシタ、インダクタのような電気部品を用いた電気回路の振る舞いを知っておく必要がある。ここでは、本書の熱雑音で必要な情報を短く書いてあるので、詳しく勉強したい読者は専門書で学習することを勧める。

B.1 電気回路の構成部品

電気回路に用いられる部品について説明する前に、電気回路で取り扱う重要な観測値として、電圧と電流について説明する。電圧とは選ばれた2点間に生じる電磁気的なポテンシャルエネルギーの差である。そのポテンシャルエネルギーは電位と呼ばれる。その理由で電圧は電位差と呼ばれることもある。電流は、単位時間に流れる電荷である。後に詳細に取り扱うが、断面積 A の導体を単位体積当たりの電荷の個数が n で、1個あたり電荷 e をもつ荷電粒子が速度 u で移動する場合、電流は $J = Ane u$ となる。もう一つの例として、電荷 Q が蓄えられた部品があるとする。その部品に電線を接触させて電荷を逃がした(放電させた)とき、蓄えられた電荷の減少率 $J = dQ/dt$ が放電によって生じた電流となる。

電気回路は様々な電気部品を組み合わせて特定の機能を実現するための仕組みである。電気回路は図B.1に示すように、電源(voltage source)、抵抗(resistor)、インダクタ(inductor)、キャパシタ(capacitor)で構成される¹。図に示す記号は、電気回路図を描く際に使用する記号であり、電気回路図によって電氣的な配線と部品の配置を表現できる。続いて、構成部品について説明しよう。

電圧源 電圧源とは、電圧を発生させる部品である。電圧源が電気回路に電圧を印加することによって電気回路に電流が発生し、電気回路が動作するのである。電圧とは、電気回路内に選ばれた二つの点の電位の差を意味する。電位とは電磁気的なポテンシャルエネルギーである。ポテンシャルエネルギーの差を発生する方法として、化学変化によるエネルギー

¹電圧源以外に、ここで取り上げた部品は受動素子と呼ばれる部品である。受動素子は、供給された電力を消費、蓄積、放出する部品である。受動素子の例は他にもあり、電圧、電力の変換をする能動素子と呼ばれる部品もあるが、ここでは取り扱わない。

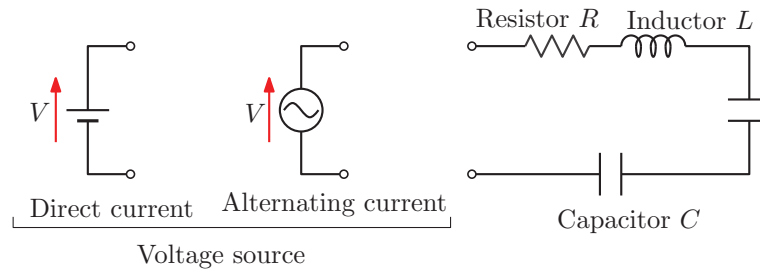


図 B.1: 電気回路を構成する部品

ギーを利用する方法, 電磁誘導を利用する方法, 温度差で電磁気的なポテンシャル差を発生する方法などがある。これらの方法を利用した電圧源として, 乾電池, 発電機, 熱電対などがある。電池のような直流 (direct current) 電源は, 長さの異なる平行線で図示される。平行線のうちの長い線が正電極を意味する。交流 (alternating current) 電圧源の場合, 正弦波を囲んだ円によって電源が図示される。交流では, 電圧の正と負が時間経過とともに交互に切り替わる。

抵抗 抵抗とは, 電気の流れを妨げる部品である。選ばれた2点間の電圧を V , 流れる電流を J とすると, 比較的小さい電流において $V = RJ$ が成立することが経験的に知られている。比例係数 R は電気抵抗と呼ばれる。電気抵抗はどのような物質にも存在し, 電流を流す銅線にさえも電気抵抗がある。しかし, 銅線の電気抵抗は非常に小さいため通常は無視する。また, 抵抗の逆数 $1/R$ はコンダクタンスと呼ばれる。つまり, 電圧は電流に比例し, その比例係数は電気抵抗であり, 一方, 電流は電圧に比例し, その比例係数はコンダクタンスである。抵抗は, 図 B.1 に示すような折れ線によって図示される。

電気抵抗を複数接続した電気回路は, 抵抗を一つだけ接続した等価回路で置き換えることができる。図 B.2 を例に説明しよう。図 B.2 (a) が本来の回路であるとする。この回路は, 抵抗 R_{21} と R_{22} が並列に接続され, それと直列に R_1 が接続されている。回路の両端には直流電源によって電圧 V が印加されている。この回路に流れる電流 J を計算するには, 全体を合成した抵抗 R (図 B.2 (c)) を知る必要がある。まず, 並列に接続された抵抗を合成するには, コンダクタンスの和を計算する。その和が合成された抵抗のコンダクタンスである。したがって, 図 B.2 の (a) から (b) への変換には,

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}},$$

を計算する。この数式の逆数をとると,

$$R_2 = \frac{R_{21}R_{22}}{R_{21} + R_{22}},$$

が得られる。これが並列接続された抵抗を合成したときの電気抵抗である。続いて, 直列接続された抵抗を合成する。直列接続の場合は, 電気抵抗の和が合成抵抗となる。つまり,

図 B.2 (c) に書かれた抵抗 R は,

$$R = R_1 + R_2 = R_1 + \frac{R_{21}R_{22}}{R_{21} + R_{22}},$$

である。このような計算によって、電気回路を抵抗 1 個のみで構成される回路まで簡略化できた。これで回路を流れる電流が計算できる。

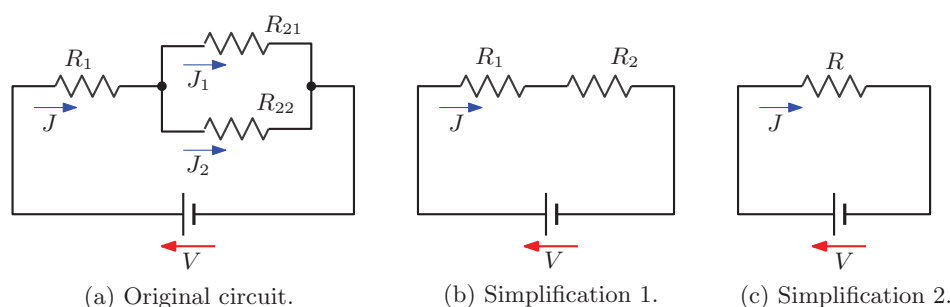


図 B.2: 等価回路による回路の簡略化

図 B.2 (c) は、回路全体に流れる電流を議論する上で、図 B.2 (a) と等価であるので、回路に流れる電流は容易に計算でき、

$$J = \frac{R_{21} + R_{22}}{R_1 (R_{21} + R_{22}) + R_{21}R_{22}} V,$$

が得られる。さらに、抵抗 R_{21} と R_{22} に流れる電流を、それぞれ、計算することができる。基本的に忠実に計算するには、それら二つの抵抗の両端の電圧を計算し、オームの法則を用いて電流 J_1 と J_2 を計算する。実際には、もう少し簡単に計算できる。電流 J が J_1 と J_2 に分岐していることから、 $J = J_1 + J_2$ が成立するはずである。抵抗 R_{21} と R_{22} の両端が短絡されているので、それぞれの抵抗の両端の電圧は互いに等しい。既に述べたように、電流は電圧に比例し、その比例係数がコンダクタンスである。つまり、

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{1/R_{21}}{1/R_{22}} = \frac{R_{22}}{R_{21}},$$

が成立する。この関係からただちに、

$$J_1 = \frac{R_{22} V}{R_1 (R_{21} + R_{22}) + R_{21}R_{22}}, \quad J_2 = \frac{R_{21} V}{R_1 (R_{21} + R_{22}) + R_{21}R_{22}},$$

が得られる。基本的に忠実に計算しても同じ結果が得られる。

インダクタ インダクタとは、ファラデーの法則 $\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ を利用した部品である。早い話が、インダクタとはコイルのことである。例えば、断面積が S 、長さ l のソレノイドを考えよう。そのソレノイドは、単位長さあたり電線を n 回転巻きつけているとす

る。つまり、ソレノイド全体で電線を nl 回転巻きつけているということだ。そのソレノイドに電流 J を流したとき、導出を省略するが、ソレノイドの内部では $B = n\mu J$ の磁束密度が発生する。なお、 μ はコイル内部の透磁率である。電流 J が時間に対して変動する場合、ファラデーの法則によると、

$$\nabla \times \mathbf{E} + n\mu \frac{dJ}{dt} = 0,$$

が成立する。この数式の両辺を円形コイルの内部で面積分すると、

$$\iint \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = -n\mu \iint \frac{dJ}{dt} \, dS,$$

が成立するはずである。ここで、 \mathbf{n} はコイルの断面に対する法線ベクトルであり、 dS はコイル内部の微小な面積素である。左辺はストークスの定理によってコイルに沿った線積分に変換でき、コイル内部の磁束密度が一様であるので、右辺は被積分関数にコイルの断面積を乗じた積と等しい。したがって、

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -n^2 \mu S l \frac{dJ}{dt},$$

が得られる。ソレノイドの内部で磁束密度が一様であるので、右辺の面積分は磁束密度にソレノイドの断面積を乗じればよい。右辺には、さらに電線の回転数 nl が乗じられている。それは、左辺がソレノイド全体の電線に沿った積分になっているからである。ソレノイドの入口から出口までたどる経路で、ソレノイドの断面を nl 回転していることがその理由だ。しかも、左辺の線積分はコイルに沿って、電場を線積分した値であるので、コイルに沿って単位電荷をコイルの入り口から出口まで移動するのに要するエネルギーを意味する。そのエネルギーは、コイルの起電力に他ならない。一般的な記法として、 $L \equiv n^2 \mu l$ とおくと、コイルの起電力 V は、

$$V = -L \frac{dJ}{dt}, \quad (\text{B.1})$$

と書くことができる。この数式は、電流が増加するとその増加を抑えるようにインダクタに起電力が発生することを意味している。その意味でインダクタに発生する起電力を逆起電力と呼ぶことがある。新たに定義した L はインダクタンスと呼ばれるパラメータである。インダクタンスは、コイルの材質、形状、電線の巻き数などに依存したパラメータである。電流が一定（つまり直流電流）であればインダクタンスの両端の電圧はゼロである。時間変動する場合には電圧が生じる。つまり、時間変動する電流に対して電気抵抗としてふるまう。

キャパシタ キャパシタは電気を蓄える部品である。原理的には2枚の導体板を向かい合わせ、正と負の電荷を帯電させることによって電気を蓄える。導体板の面積を S 、それらの距離を d としよう。一方の導体版に電荷 Q が、もう一方に電荷 $-Q$ が帯電しているとす。表面積と導体板の間の距離について $S \gg d$ の関係があるならば、正電荷 $Q/S\epsilon$ の電場

が発生している。距離 d を隔てた導体板の間で引き合っている電荷 Q によって導体板の間には電場が存在する。その電場の強さが $E = Q/\epsilon S$ であるので、導体板の間の電圧は、

$$V = \frac{Qd}{\epsilon S},$$

となる。ここで、 $C \equiv \epsilon S/d$ を定義すると、キャパシタの両端の電圧 $V = Q/C$ が得られる。このように定義された C は**電気容量**と呼ばれる。電流が単位時間あたりに通過する電荷であるので、 $J = dQ/dt$ である。上に示した電圧を時間について微分すると、

$$J = C \frac{dV}{dt}, \quad (\text{B.2})$$

が導かれる。この数式は、

$$V(t) = \frac{1}{C} \int^t J(t') dt',$$

と書いてもよい。これらの数式から、変動しない電圧（つまり、直流電圧）の場合、キャパシタに電流は流れない。もともと、導体でつながっていないので当然である。しかし、時間変動する電圧を印加するとキャパシタに電流が流れる。

B.2 交流理論

インダクタやキャパシタを用いた電気回路では、電圧と電流の間に微分や積分を伴った関係があるので、厳密には微分方程式を解く操作が必要になる。しかし、定常状態になると、わざわざ微分方程式を解かなくても四則演算だけで回路を流れる電流や、部品の両端に生じる電圧を計算することができる。

フェーザ表示 定常状態での回路の解析を簡単にする鍵はフーリエ変換である。フーリエ変換によると、任意の信号は異なる周波数の信号の重ね合わせで表現してもよい。そこで、角周波数 ω の信号に注目し、電圧の瞬時値を $v(t) \equiv A \cos(\omega t + \phi)$ としよう。複素数におけるオイラーの関係式に注意すると、

$$v(t) = \text{Re } V e^{i\omega t}, \quad \text{where } V \equiv A e^{i\phi},$$

が成立する。このように定義された V は**フェーザ**と呼ばれる。上に示したように、フェーザは一般的に複素数である。フェーザによる表示を用いると、インダクタやキャパシタを用いた回路の定常的な電流が微分方程式を解く代わりに、四則演算だけで計算できるのだ。四則演算で回路計算をするにはインピーダンスの概念を説明しなければならない。インピーダンスを次の段落で説明する。

インピーダンス インピーダンスは、交流回路におけるフェーザ表示で用いる電気抵抗に相当する物理量である。本来、理想的なインダクタやキャパシタに電気抵抗は存在しないが、交流理論ではインダクタやキャパシタにも電気抵抗に相当するインピーダンスを設定する。インピーダンスを設定することによって、四則演算で交流回路に流れる電流を計算できるのだ。

交流回路に印加される電圧のうち、角周波数が ω の成分に着目しよう。そのとき、インダクタにおける電圧と電流の関係を導いてみる。フェーザ表記を使って、電圧と電流の瞬時値が $\text{Re } Ve^{i\omega t}$, $\text{Re } Je^{i\omega t}$ とする。そのとき、インダクタに生じる逆起電力に関して、

$$Ve^{i\omega t} = L \frac{d}{dt} Je^{i\omega t},$$

が成立する。なお、右辺に負の符号がないのは、逆起電力による電圧降下を正にとったからである。右辺に記述したように t についての微分を実行すると、

$$Ve^{i\omega t} = i\omega L Je^{i\omega t},$$

が得られる。さらに、インピーダンスと呼ばれる新たなパラメータ $Z \equiv V/J$ を定義すると、

$$Z = i\omega L,$$

が得られる。定義式から明らかなように、このパラメータは電気抵抗と同様の意味をもっている。しかも、直流 ($\omega = 0$) では電気抵抗がまったくない。周波数が大きくなるほど値が大きくなるので、電流が制限されてしまう。また、 $Ve^{i\omega t} = i\omega L Je^{i\omega t} = \omega L Je^{i(\omega t + \pi/2)}$ であることから、電流よりも電圧の位相が $\pi/2$ だけ先行することがわかる。

キャパシタについても同様である。角速度 ω の信号に対して前項で導出した電圧を電流の関係を示す微分方程式を適用する。すると、

$$Ve^{i\omega t} = \frac{1}{C} \int Je^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega C} Je^{i\omega t},$$

が得られるので、キャパシタのインピーダンスは、

$$Z \equiv \frac{V}{J} = \frac{1}{i\omega C}, \quad (\text{B.3})$$

となる。キャパシタの場合、インダクタとは逆に電流の方が電圧よりも位相が $\pi/2$ だけ先行する。得られたインピーダンスから容易にわかるように、直流ではインピーダンスが無限大、すなわち、切断された状態となる。それとは逆に、交流ではキャパシタも電流を伝える。しかも、高周波になるほどインピーダンスが小さくなるので、多くの電流が流れるようになる。

インピーダンスは抵抗の場合、 $Z = R$ として取り扱ってよい。これまでに考察によって、インダクタンスの場合 $Z \equiv i\omega L$ を、キャパシタの場合 $1/i\omega C$ を電気抵抗と同様に取り扱

例えば電気回路に流れる電流を、微分方程式を解くことなく、算出することが可能になる。一般的に、インピーダンスは $Z = R + iX$ のような複素数である。そのとき、インピーダンスの虚部はリアクタンスと呼ばれる。既に説明したように、リアクタンス成分はインダクタンスに起因するものか、キャパシタに起因するものに分かれる。

インピーダンス計算の例として、抵抗 R とキャパシタ C を直列に接続し、その両端を交流電源に接続した場合を考えよう。印加する交流電圧の角速度を ω とする。この電気回路の合成インピーダンスは、

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C},$$

であるので、印加電圧を V としたとき、回路に流れる電流は、

$$J = \frac{V}{R + 1/i\omega C} = \frac{i\omega RC V}{1 + i\omega RC},$$

となる。この回路のキャパシタの両端から出力端子を取り付け、その電圧を出力したとする。そのとき、出力電圧は、

$$V_{\text{out}} = \frac{1}{i\omega C} \frac{i\omega RC V}{1 + i\omega RC} = \frac{RV}{1 + i\omega RC},$$

となる。この結果によると、出力電圧 V_{out} は角速度 ω に依存する。角速度が大きくなると、分母の絶対値が大きくなるので、 V_{out} の絶対値が小さくなる。つまり、この回路は高周波の成分を抑圧する機能があり、低域通過フィルタ (ローパスフィルタ) と呼ばれる。

消費電力 電気回路において、抵抗 R に電流 J が流れているとき、単位時間あたりに抵抗 R に熱量 RJ^2 が発生する。その熱量はイギリスの物理学者ジュールが発見したことにより **ジュール熱** と呼ばれる。また、電気工学では回路に発生するジュール熱は消費電力、または、電力と呼ばれる。

直流回路で消費される電力は、 $RJ^2 = V^2/R = VJ$ と計算されるように、抵抗の両端の電圧と流れる電流の積で表される。抵抗、インダクタ、キャパシタのうち、電力を消費するのは抵抗だけ²である。その理由は、自由電子が導体を構成する原子に衝突することで生じる電流の抵抗力が電気抵抗であり、そのときに交換されるエネルギーの仕事率が電力であるからである。交流理論において、消費電力は、

$$P = VJ^*, \tag{B.4}$$

で計算される。ここで、右肩のアスタリスクは複素共役を与える。抵抗 R を考えると、電圧と電流の関係は $V = RJ$ となるので、必ず、電圧は電流の実数倍である。上の定義式にしたがって抵抗 R で消費される電力を計算すると、 $P = RJ \cdot J^* = R|J|^2 = |V|^2/R$ となる。

²言うまでもなく理想的な場合に限る。

フェーザを定義したときのように、電圧の瞬時値を $v(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ とすると、電力の平均値は、

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{A^2}{R^2} \cos^2(\omega t + \phi) dt \\ &= \frac{2\pi A^2}{\omega R^2} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1 + \cos 2(\omega t + \phi)}{2} dt \\ &= \frac{A^2}{2R^2} = \frac{|V|^2}{2R^2}, \end{aligned}$$

のような計算ができる。なお、この数式は抵抗 R で消費される電力の平均値を計算する積分である。さらに、 V は電圧のフェーザ表示 $V \equiv Ae^{i\phi}$ である。よって、フェーザによる積 $P = VJ^*$ は消費電力の平均値の2倍の数値を与えることがわかった。

インダクタやキャパシタのようにインピーダンスが純虚数 $Z = iX$ となる場合、フェーザ表示による電力計算は、

$$P = V \cdot (iXV)^* = V \cdot (-iXV^*) = -iX |V|^2,$$

のように純虚数になる。インダクタやキャパシタが電力を消費しないので、このような虚数電力は消費されない電力である。フェーザ表示によって計算した電力 $P = VJ^*$ は一般的に複素数になる。そのうち、実部 $\text{Re } P$ は、実際に消費される電力であり、**有効電力**と呼ばれる。虚部 $\text{Im } P$ は、消費されない電力であり、**無効電力**と呼ばれる。さらに、絶対値 $|P|$ は**皮相電力**と呼ばれる。電力を表現する単位は、MKSA 単位系で、有効電力にはワット (W)、無効電力にはバール (Var)、皮相電力はボルト・アンペア (VA) が用いられる。さらに、皮相電力に対する有効電力の比 $\cos \phi = \text{Re } P / |P|$ は**力率**と呼ばれる

B.3 整合回路

電気回路においてインピーダンスを整合させることは重要である。インピーダンスを整合させることによって、電気回路から最大限に電力を取り出すことができるのだ。それでは、インピーダンスを整合させるとはどういうことを意味するのか？

図 B.3 の回路のように、インピーダンス $Z_0 = X + iY$ に負荷 $Z_L = a + ib$ を直列接続する場合を考えよう。ここで、 Z_0 は内部の回路であり、負荷 Z_L が外部の回路であるとする。その外部の回路 Z_L に最も大きな電力を出力できる条件を求めてみよう。電源電圧を V とすると、負荷 Z_L の両端の電圧と、流れる電流は、それぞれ、

$$V_L = \frac{a + ib}{A + a + i(Y + b)} V, \quad J_L = \frac{V}{A + a + i(Y + b)},$$

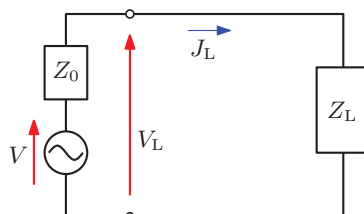


図 B.3: 直列に接続された不可回路

である。これらからただちに、負荷 Z_L で消費される電力 (有効電力) が,

$$\operatorname{Re} P = \operatorname{Re} \frac{a + ib}{(A + a)^2 + (Y + b)^2} |V|^2$$

であることがわかる。ここで、 X と a は抵抗成分なので正の数である。それに対し、リアクタンス成分である Y と b は正でも負でも構わない。そのことに注意して数式を変形すると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P &= \frac{a|V|^2}{(A + a)^2 + (Y + b)^2} = \frac{a|V|^2}{X^2 + 2Xa + a^2 + (Y + b)^2} \\ &= \frac{|V|^2}{X^2/a + 2X + a + (Y + b)^2} = \frac{|V|^2}{X^2/a - 2X + a + 4X + (Y + b)^2} \\ &= \frac{|V|^2}{(X/\sqrt{a} - \sqrt{a})^2 + 4X + (Y + b)^2}, \end{aligned}$$

が得られる。このように分子から a と b を排除したので、分母が最小になる条件を求めればよい。その条件を満たすのは,

$$\frac{X}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} = 0, \quad Y + b = 0,$$

である。すなわち、負荷 Z_L で最大の電力を取り出す条件は,

$$a = X, \quad b = -Y, \tag{B.5}$$

である。この条件は,

$$Z_L = Z_0^*, \tag{B.6}$$

と書き直してもよい。つまり、内部回路のインピーダンスと負荷のインピーダンスが複素共役の関係にあるとき、負荷で消費する電力が最大になるのだ。このインピーダンスの関係を整合と呼ぶ。

B.4 分布定数回路

これまで回路の電線はインピーダンスがゼロとして取り扱ってきた。しかし、電線も物質であるからにはインピーダンスをもっている。取り扱う周波数において、電線が波長よ

り十分に長くなると、電線のインピーダンスも無視できなくなる。本項では電線のインピーダンスの考慮が必要な場合を取り扱う。

長い電線は電気抵抗が存在するし、電線に電流が流れるので周囲に磁場が発生し、インダクタンスが存在する。さらに、往復の電線間に電荷が蓄えられキャパシタを構成する。場合によっては、絶縁体である被服を通して微量の電流も流れる。つまり、長い電線のモデルを図B.4のように考えることができる。図B.4 (a) が一般的な伝送系とその伝送線路の

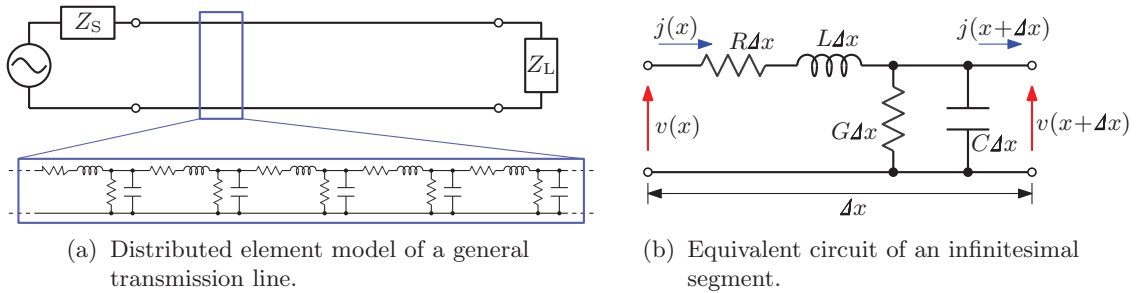


図 B.4: 伝送線路の分布定数回路モデルによる等価回路

等価回路のモデルである。端子の左側の電源と Z_S が信号発生源である。特に、インピーダンス Z_S は信号発生源の内部インピーダンス (または、出力インピーダンス) である。一方、図の右端に位置する Z_L が負荷である。負荷とは、信号の伝送先の系を意味する。さらに、伝送線路は図B.4 (a) の下部に示すモデルで表現される。その等価回路のモデルは**分布定数回路**と呼ばれる。このモデルにしたがい、長さ Δx の区間に注目したとき、図B.4 (b) に示すように、抵抗成分 $R\Delta x$ 、インダクタンス成分 $i\omega L$ 、コンダクタンス成分 G 、キャパシタンス成分 $i\omega C$ のモデルを考える。また、電線のある特定の位置 x における電圧と電流を、それぞれ、 $v(x)$ 、 $j(x)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} v(x + \Delta x) &= v(x) - Rj(x)\Delta x - i\omega Lj(x)\Delta x, \\ j(x + \Delta x) &= j(x) - Gv(x)\Delta x - i\omega Cv(x)\Delta x, \end{aligned}$$

が成立する。これらの数式の左辺をテイラー級数で1次近似すると、

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= -Rj(x) - i\omega Lj(x), \\ \frac{dj}{dx} &= -Gv(x) - i\omega Cv(x), \end{aligned}$$

なる連立微分方程式が得られる。この連立微分方程式は電信方程式と呼ばれる。電信方程式の第1式をさらに x で微分すると、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -(R + i\omega L) \frac{dj}{dx} = (R + i\omega L)(G + i\omega C)v(x), \quad (\text{B.7})$$

なる2階の常微分方程式が得られる。この微分方程式の解は、

$$v(x) = K_0 e^{-\gamma x} + K_1 e^{\gamma x}, \quad (\text{B.8a})$$

のように書くことができる。ここで、 K_0 と K_1 は任意の係数である。実際の回路において、それらの係数は境界条件から定める必要がある。この解を電信方程式の第2式に代入すると、

$$j(x) = \frac{1}{Z_0} (K_0 e^{-\gamma x} - K_1 e^{\gamma x}), \quad (\text{B.8b})$$

が得られる。これらの解を記述するためのパラメータとして、

$$\gamma \equiv \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)}, \quad (\text{B.9a})$$

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}, \quad (\text{B.9b})$$

とおいた。第1のパラメータ γ は**伝搬定数**、第2のパラメータ Z_0 は**特性インピーダンス**と呼ばれる。伝搬定数 γ は複素数の平方根なので、一般的には複素数となる。そこで、 $\gamma \equiv \alpha + i\beta$ とおいてみる。これを得られた $v(x)$ に代入すると、

$$v(x) = K_0 e^{-\alpha x} e^{-i\beta x} + K_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$

が得られる。この数式の右辺の第1項は、 x の正の方向に伝搬する波を表していて、距離 $1/\alpha$ だけ伝搬するごとに振幅が e^{-1} 倍に減衰することがわかる。同様に、第2項は x の負の方向に伝搬する波を表していて、距離 $1/\alpha$ だけ伝搬するごとに振幅が e^{-1} 倍に減衰する。しかも、第1項も第2項も単位長さあたり位相が β だけ変化することもわかる。その理由で、 α と β は、それぞれ、減衰定数と位相定数と呼ばれる。なお、 $\alpha = 0$ のとき、伝送線路上で振幅が減少しない。そのような線路は無損失線路と呼ばれる。無損失線路では、 $\alpha = 0$ とするため γ^2 が負の実数になることが条件となる。その条件を具体的に調べてみると、

$$\gamma^2 = RG - \omega^2 LC + i\omega(RC + LG),$$

である。回路の定数 R, G, L, C がすべて正の実数であるので、 γ^2 が負の実数であるためには、 $R = G = 0$ でなければならない。また、無損失線路では、 $Z_0 = \sqrt{i\omega L / i\omega C} = \sqrt{L/C}$ のように、特性インピーダンスが実数となり、リアクタンス成分をもっていない。

信号の反射 分布定数回路における電圧の解(B.8a)は、負荷が存在する方向を x の正とすると、第1項が負荷への入射波、第2項が負荷からの反射波を表す。電流の解(B.8b)も同様である。ここで、電圧の反射を表すパラメータとして、 $\rho(x) \equiv K_1 e^{\gamma x} / K_0 e^{-\gamma x}$ なる電圧反射係数を定義しよう。さらに、伝送線路上の位置 x から負荷側を観測したときのインピーダンスを x の関数として、

$$Z(x) \equiv \frac{v(x)}{j(x)} = \frac{K_0 e^{-\gamma x} + K_1 e^{\gamma x}}{K_0 e^{-\gamma x} - K_1 e^{\gamma x}} Z_0,$$

を定義しておく。この数式に $\rho(x)$ の定義式を代入すると、

$$Z(x) = \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)} Z_0, \quad \rho(x) = \frac{Z(x) - Z_0}{Z(x) + Z_0}, \quad (\text{B.10})$$

なる関係式が得られる。ここで、伝送線路の終端(または、負荷の入力端子)での反射を考察しよう。その場所では $Z(0) = Z_L$ となるはずである。なお、座標 x は伝送線路の終端を $x = 0$ となるようにとった。そのとき、電圧反射係数は、

$$\rho(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0},$$

が成立する。この結果から明らかなように、 $Z_L = Z_0$ 、すなわち、負荷のインピーダンスが伝送線路の特性インピーダンスと等しいとき、反射が存在しない。言い換えると、 $Z_L = Z_0$ であれば、伝送された電力がすべて負荷で消費されるのだ。

他の典型的な例として、負荷が開放されている ($Z_L = \infty$) 場合、 $\rho(0) = 1$ となり、負荷が短絡されている ($Z_L = 0$) 場合、 $\rho(0) = -1$ となる。双方とも信号が全反射することを意味している。ただし、短絡しているときの反射係数が負になっていることから、伝送線路の終端を短絡したとき、反射波の位相が π だけシフトする(位相反転する)ことを意味している。これは、波動力学における固定端反射と同じ現象である。線路の終端を開放した場合は自由端反射に相当する。

無損失線路における定在波 分布定数回路の特別な例として無損失線路を考えよう。既に述べたように、無損失線路は抵抗成分とコンダクタンス成分がゼロである線路である。線路が比較的短く、高周波の信号を取り扱う場合、近似的に無損失線路となる。無損失線路では、 $\gamma = i\beta$ となるので、電圧と電流は、

$$\begin{aligned} v(x) &= K_0 e^{-i\beta x} + K_1 e^{i\beta x} = K_0 e^{-i\beta x} (1 + \rho(0) e^{2i\beta x}), \\ j(x) &= \frac{K_0}{Z_0} e^{-i\beta x} (1 - \rho(0) e^{2i\beta x}), \end{aligned}$$

となる。なお、数式変形において、 $\rho(0) = K_1/K_0$ であることを利用した。また、パラメータ β は線路における波数であり、伝搬する信号の波長を λ とすれば、 $\beta \equiv 2\pi/\lambda$ となる。得られた電圧と電流の絶対値は、

$$\begin{aligned} |v(x)| &= |K_0| \sqrt{1 + |\rho(0)|^2 + 2|\rho(0)| \cos(2\beta x + \phi)}, \\ |j(x)| &= \left| \frac{K_0}{Z_0} \right| \sqrt{1 + |\rho(0)|^2 - 2|\rho(0)| \cos(2\beta x + \phi)}, \end{aligned}$$

のように、 x の関数となる。絶対値を計算するには、 $1 \pm \rho(0) e^{2i\beta x}$ を複素平面に描き、余弦定理を利用すればよい。この結果から、電圧と電流は極限と極小を $\lambda/4$ の間隔で繰り返すことがわかる。なお、 ϕ は $\rho(0)$ の偏角である。言い換えると、 $\rho(0) \equiv |\rho(0)| e^{i\phi}$ とおいた。

入射波と反射波の和である $v(x)$ と $j(x)$ は定在波と呼ばれる。その絶対値は定在波分布と呼ばれる。定在波分布の最大値と最小値の比は定在波比と呼ばれ、

$$\Gamma = \frac{|v(x)|_{\max}}{|v(x)|_{\min}} = \frac{|j(x)|_{\max}}{|j(x)|_{\min}} = \frac{1 + |\rho(0)|}{1 - |\rho(0)|}, \quad (\text{B.11})$$

となる。この数式からわかるように、定在波比は電圧に注目しても、電流に注目しても同一の値となる。

入力インピーダンス 引き続き無損失線路を考え、 $Z_0 \equiv R_0$, $\gamma \equiv i\beta$ とする。線路の任意の場所 x から見た負荷側のインピーダンスは、

$$Z(x) = \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)} Z_0,$$

で計算される。さらに、反射係数が、

$$\rho(x) = \frac{K_1 e^{i\beta x}}{K_0 e^{-i\beta x}} = \rho(0) e^{2i\beta x},$$

であり、 $\rho(0) = (Z_L - Z_0)/(Z_L + Z_0)$ であることに注意すると、インピーダンス $Z(x)$ は、

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{Z_L + Z_0 + (Z_L - Z_0) e^{2i\beta x}}{Z_L + Z_0 - (Z_L - Z_0) e^{2i\beta x}} Z_0 \\ &= \frac{Z_0 (1 - e^{2i\beta x}) + Z_L (1 + e^{2i\beta x})}{Z_0 (1 + e^{2i\beta x}) + Z_L (1 - e^{2i\beta x})} Z_0 \\ &= \frac{Z_L \cos \beta x - Z_0 \sin \beta x}{Z_0 \cos \beta x - Z_L \sin \beta x} Z_0 = \frac{Z_L - Z_0 \tan \beta x}{Z_0 - Z_L \tan \beta x} Z_0, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

のように計算される。これを利用して伝送線の始点 $x = -l$ から見たときのインピーダンス $Z(-l)$ を調べよう。

まず、伝送線路と負荷が整合している場合 $Z_L = Z_0$ を考えよう。この条件を (B.12) に代入すると、 $Z(x) = Z_0$ が得られる。無反射負荷が接続されている場合、伝送線路のどこから見ても負荷側に向かうインピーダンスが Z_0 となる。言うまでもなく、伝送線路の始点から見たインピーダンスも $Z(-l) = Z_0$ となる。