付 録A　電磁気学

電磁気学はマクスウェルの方程式によって完成され, その方程式から電磁波が予言され, 後の実験でその存在が実証された。黒体放射を考えるにあたり, 電磁気学の知識は必要不可欠である。本稿では, マクスウェルの方程式から導かれる知識のうち, 黒体放射に必要なものを説明する。

A.1　波動方程式

本節では真空中のマクスウェルの方程式から波動方程式を導き, 電磁場の存在を明らかにする。さらに, 電磁場の構成要素である電場と磁束密度の関係を調べる。

マクスウェルの方程式は 4 つの方程式: ガウスの法則, アンペールの法則, 磁束密度のガウスの法則, ファラデーの法則によって記述される。それらを書くと,

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho, \qquad \nabla\times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j},$$
$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla\times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0,$$

となる。ここで, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は, それぞれ, 電場と磁束密度である。さらに, ρ と $\boldsymbol{j}$ は電荷密度と電流密度, $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$ は電束密度と磁場である。第 1 行目の方程式が, それぞれ, ガウスの法則とアンペールの法則である。第 2 行目の方程式が, それぞれ, 磁束密度のガウスの法則とファラデーの法則である。特に, 真空では真空中の誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 を用いて, $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ なる簡単な関係が成立するので, アンペールの法則とファラデーの法則は,

$$\nabla\times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0,$$

のように書き換えることができる。ここで, 真空中なので $\boldsymbol{j} = 0$ とした。まず, アンペー

ルの法則の左辺に回転演算子 $(\nabla\times)$ を作用させると,

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2},$$

が得られる。ここで, $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$ とおき, ベクトル公式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}$ を利用した。さらに, 磁束密度に関するガウスの法則に注意すると,

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0,$$

なる波動方程式が得られる。同様の操作をファラデーの法則に適用すると,

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0,$$

が得られる。これらの方程式は波動方程式であり, 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が速さ c で伝搬することを意味している。なお, c は光速である。このことからマクスウェルは電磁波の存在を予言し, 乱暴ではあるが光が電磁波の一種と提唱したのである[1]。

マクスウェルの方程式を満たす電磁波の解を計算しよう。ここで, 電磁波の伝搬方向と電場ベクトルの方向が直交するという知識を前借しておく。座標軸は勝手にとってもよいから, 電場を x 軸方向に, 電磁波の伝搬方向を z 軸方向になるように座標軸を設定する。そのとき, 電場は,

$$\boldsymbol{E}=Ee^{i\,(-kx+\omega t)}\,\boldsymbol{e}_x,$$

のように書くことができる。ここで, E は電場の振幅, ω は電磁波の角周波数, $k\ (=\omega/c)$ は波数[2], $\boldsymbol{e}_x$ は x 軸方向の単位ベクトルである。なお, 電場が正弦波であることを仮定している。任意波形の場合, 異なる周波数の正弦波の重ね合わせ (フーリエ変換) で表現できるため, 正弦波と仮定して議論しても問題はない。この電場をファラデーの法則に代入すると,

$$-ikEe^{i\,(-ikx+\omega t)}\,\boldsymbol{e}_y+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}=0,$$

が得られる。この方程式を解くと,

$$\boldsymbol{B}=\frac{\omega}{k}Ee^{i\,(-ikx+\omega t)}\,\boldsymbol{e}_y=\frac{E}{c}e^{i\,(-ikx+\omega t)}\,\boldsymbol{e}_y,$$

が得られ, 電場と磁束密度の振幅の間に $|\boldsymbol{E}|=c\,|\boldsymbol{B}|$ の関係が成立することが判明した。しかも, 電場, 磁束密度, 電磁波の伝搬方向が, この順で右ねじの法則にしたがって直交していることも導かれた。

---

[1] この乱暴な推測は間違っていなかったのであるが。

[2] 一般的に, 波数は波長 λ を用いて $k\equiv 2\pi/\lambda$ のように定義される。物理的には, 単位長さあたりの位相変化量を意味する。

A.2　エネルギーの流れ

前節で電磁波が速さ c で伝搬することが導かれた。電磁波は電磁場のエネルギーを運ぶと考えられ, エネルギーの流れはポインティングベクトルで記述される。本節ではポインティングベクトルを導出し, エネルギー流れを調べよう。

ここでは真空に限らず一般の媒質についても議論できるように, 電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ を含んだマクスウェルの方程式を用いる。まず準備段階として, アンペールの法則に発散演算子 $(\nabla\cdot)$ を作用させると,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

が得られる。この方程式を得るには, ベクトル公式 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$ に注意しなければならない。得られたこの方程式は電荷に関する流れの方程式であり, 電荷の流れが電流であることを表現している。必ずしも単純な表現が可能なわけではないが, 例えば, 電荷密度 ρ が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している場合, $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ のような関係がある。

予備知識がそろったところで, 議論を本題に戻そう。アンペールの法則に $\boldsymbol{E}$ を内積し, ファラデーの法則に $\boldsymbol{H}$ を内積すると,

$$\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0,$$

が得られる。ここで, ベクトル公式:

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},$$

に注意しながら, マクスウェルの方程式から得られた 2 つの方程式の差をとると,

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}, \tag{A.1}$$

が得られる。この結果を得るにあたり, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ の関係を利用した。なお, ε と μ は, それぞれ, その媒質での誘電率と透磁率である。この数式は, 予備知識として説明した流れの方程式と同じ形をしている。右辺が電場 $\boldsymbol{E}$ の中で電流密度 $\boldsymbol{j}$ によって消費される電力を表している。つまり, この方程式は単位時間あたりのエネルギー密度の増加分と考えればよい。たしかに左辺の第 2 項は, 電磁場のエネルギー密度の時間微分である。したがって, 左辺の第 1 項に含まれる $\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ は**ポインティングベクトル**とよばれ, 運動量密度の流れを意味するベルトルである。

真空中のエネルギー密度の流れの速さを (A.1) から計算してみよう。真空中では (A.1) の右辺はゼロとなる。電場の振幅を E としたとき, 真空中の電磁場のエネルギー密度は,

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 |\boldsymbol{E}|^2 + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{E^2}{c^2\mu_0}\right) = \varepsilon_0 E^2,$$

のように計算される。エネルギー密度に対する電場の寄与と磁束密度の寄与が当分配されていることがこの結果からわかる。一方, ポインティングベクトルの大きさは,

$$|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}| = E\cdot\frac{E}{c\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2,$$

のように計算される。つまり, 真空では $|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}| = uc$ が成立するのだ。電流密度と電荷密度の関係 $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ からの類推によって, 真空ではエネルギー密度が光速 c で伝搬すると考えることができるだろう。この結果は, 波動方程式が予想していた電磁波の伝搬速度と一致する。

A.3　マクスウェルの応力

電磁場のでは, 電荷密度は電場から力が作用し, 電流密度には磁束密度から力が作用する。その力は, いわゆるローレンツ力である。電磁場, または, 電荷密度や電流密度にひずみがあれば, 受ける力にもひずみが生じ, 流体力学で応力と呼ばれる力が発生する。つまり, 電磁場も流体力学と同様の力の解析ができるのである。

ここでは真空でない一般の媒質を考え, 媒質中の微小体積に作用する力を計算する。媒質中の微小体積には電荷密度 ρ や, 電流密度 $\boldsymbol{j}$ が存在するものとする。すると, その微小体積は, ローレンツ力の密度:

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B},$$

が作用する。このローレンツ力の密度は, 単位体積当たりに作用する力であり, MKSA 単位系では $\mathrm{N/m^3}$ の単位で記述される。マクスウェルの方程式を参照しながらローレンツ力密度を計算すると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} &= (\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} + \left(\nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{B}\\ &= (\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{B}\times\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{D}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{D}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ &= (\nabla\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{D}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}), \qquad \text{(A.2)}\end{aligned}$$

が得られる。得られた数式 (A.2) を見通しをよくするためベクトルの成分に分解しよう。表記を見やすくするため, カルテシアン座標の成分を $[x_1, x_2, x_3] \equiv [x, y, z]$ のように 1 か

ら 3 の添え字を用いて表記することにしよう。例えば, 電場の x 成分を E_1, y 成分を E_2 のように記述する。まず, (A.2) の右辺の第 1 項のベクトルの成分表示は,

$$
\begin{aligned}
((\nabla\cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{E})_1 &= E_1\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + E_1\frac{\partial D_2}{\partial x_2} + E_1\frac{\partial D_3}{\partial x_3},\\
((\nabla\cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{E})_2 &= E_2\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + E_2\frac{\partial D_2}{\partial x_2} + E_2\frac{\partial D_3}{\partial x_3},\\
((\nabla\cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{E})_3 &= E_3\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + E_3\frac{\partial D_2}{\partial x_2} + E_3\frac{\partial D_3}{\partial x_3},
\end{aligned}
$$

となる。第 2 項のベクトルの成分表示は,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{B}\times(\nabla\times \boldsymbol{H}))_1 &= B_2\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - B_2\frac{\partial H_1}{\partial x_2} - B_3\frac{\partial H_1}{\partial x_3} + B_3\frac{\partial H_3}{\partial x_1},\\
(\boldsymbol{B}\times(\nabla\times \boldsymbol{H}))_2 &= B_3\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - B_3\frac{\partial H_2}{\partial x_3} - B_1\frac{\partial H_2}{\partial x_1} + B_1\frac{\partial H_1}{\partial x_2},\\
(\boldsymbol{B}\times(\nabla\times \boldsymbol{H}))_3 &= B_1\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - B_1\frac{\partial H_3}{\partial x_1} - B_2\frac{\partial H_3}{\partial x_2} + B_2\frac{\partial H_2}{\partial x_3},
\end{aligned}
$$

となる。同様に, 第 3 項のベクトルの成分表示は,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{D}\times(\nabla\times \boldsymbol{E}))_1 &= D_2\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - D_2\frac{\partial E_1}{\partial x_2} - D_3\frac{\partial E_1}{\partial x_3} + D_3\frac{\partial E_3}{\partial x_1},\\
(\boldsymbol{D}\times(\nabla\times \boldsymbol{E}))_2 &= D_3\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - D_3\frac{\partial E_2}{\partial x_3} - D_1\frac{\partial E_2}{\partial x_1} + D_1\frac{\partial E_1}{\partial x_2},\\
(\boldsymbol{D}\times(\nabla\times \boldsymbol{E}))_3 &= D_1\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - D_1\frac{\partial E_3}{\partial x_1} - D_2\frac{\partial E_3}{\partial x_2} + D_2\frac{\partial E_2}{\partial x_3},
\end{aligned}
$$

となる。この成分表示を利用してローレンツ力密度の第 1 成分 (x 成分) を計算すると,

$$
\begin{aligned}
f_1 = &-\left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\right]_1 + E_1\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + E_1\frac{\partial D_2}{\partial x_2} + E_1\frac{\partial D_3}{\partial x_3}\\
&\quad - B_2\frac{\partial H_2}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + B_3\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - B_3\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\\
&\quad - D_2\frac{\partial E_2}{\partial x_1} + D_2\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + D_3\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - D_3\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\\
= &-\left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\right]_1 + E_1\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + E_1\frac{\partial D_2}{\partial x_2} + E_1\frac{\partial D_3}{\partial x_3}\\
&\quad - D_2\frac{\partial E_2}{\partial x_1} + D_2\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + D_3\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - D_3\frac{\partial E_3}{\partial x_1} + D_1\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - D_1\frac{\partial E_1}{\partial x_1}\\
&\quad - B_2\frac{\partial H_2}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + B_3\frac{\partial H_1}{\partial x_3} - B_3\frac{\partial H_3}{\partial x_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+H_1\frac{\partial B_2}{\partial x_2}-H_1\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+H_1\frac{\partial B_3}{\partial x_3}-H_1\frac{\partial B_3}{\partial x_3}\\
&+H_1\frac{\partial B_1}{\partial x_1}-H_1\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+B_1\frac{\partial H_1}{\partial x_1}-B_1\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\\
=&-\left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\right]_1+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}(E_1D_m+H_1B_m)-\sum_{m=1}^{3}\left(D_m\frac{\partial E_m}{\partial x_1}+B_m\frac{\partial H_m}{\partial x_1}\right),
\end{aligned}
$$

のように計算できる。なお, 最終行への数式変形のおいて,

$$
H_1\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+H_1\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+H_1\frac{\partial B_3}{\partial x_3}=H_1\,\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,
$$

なる関係を利用した。さらに, 電磁場が等方性, すなわち, $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ が成立する場合, 最終行の第 3 項となる総和は,

$$
\sum_{m=1}^{3}\left(D_m\frac{\partial E_m}{\partial x_1}+B_m\frac{\partial H_m}{\partial x_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}),
$$

となる。すると, ローレンツ力の密度は,

$$
\begin{aligned}
f_n&=-\left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\right]_n+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}(E_nD_m+H_nB_m)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_n}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\\
&=-\left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\right]_n+\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\sum_{m=1}^{3}(E_nD_m+H_nB_m)-\frac{\delta_{nm}}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\right],
\end{aligned}
$$

のように書くことができる。ここで, 新たに,

$$
T_{nm}=\frac{\delta_{nm}}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})-(E_nD_m+H_nB_m), \tag{A.3}
$$

なるテンソルを定義すると, ローレンツ力密度は,

$$
\left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})\right]_n+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial T_{nm}}{\partial x_m}=-f_n, \tag{A.4}
$$

のようにすっきりした形で書き換えられる。新たに定義したテンソル T_{nm} は, その定義から明らかなように, $T_{nm}=T_{mn}$ なる対称性をもっている。テンソルを用いているのでわかりにくいかもしれないが, 導出された数式 (A.4) は流れの方程式である。方程式の左辺が f_n であることから, この方程式は単位体積当たりの力を表す。力が運動量の時間微分であることを思い出すと, $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$ は電磁場の運動量密度である。さらに, テンソル $[T_{nm}]$ の第 n 行である列ベクトル $[T_{n1},T_{n2},T_{n3}]$ は, 運動量の第 n 成分の流れベクトルである。実は, (A.4) は流体力学における運動方程式と同一の形式である。しかも, T_{nm} は, 流体力学の応力テンソルに相当する。その意味で, T_{nm} は**マクスウェルの応力テンソル**と呼ばれる。

前節と同様に, 真空中での運動量密度の大きさも計算することができ,

$$
|\varepsilon_0\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}|=\varepsilon_0E\cdot\frac{E}{c}=\frac{\varepsilon_0E^2}{c}=\frac{u}{c},
$$

が得られる。つまり, 真空の電磁場の運動量密度はエネルギー密度の $1/c$ 倍である。