

第4章 電磁気学

特殊相対性理論は古典物理学として電磁気学を完全に記述するためにはなくてはならない理論である。電磁気学におけるマクスウェルの方程式によって電場と磁場が統合され、光速で伝搬する電磁波の存在が予言された。しかし、マクスウェルの方程式には観測者の運動速度が現れないため、マクスウェルの方程式が成り立つのは絶対静止系のみであるか、または、どの観測者から見ても光速が一定であるかのどちらかになる。そのうち、どの観測者から見ても光速が一定である立場は特殊相対性理論の原点となる。本章では、マクスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変であることを示し、特殊相対性理論における電磁気学を展開していく。電磁気学に特殊相対性理論を組み込むことにより、電場に対する磁場の正体さえも明らかになってくる。

4.1 電磁場のローレンツ変換

アインシュタインの相対性原理によると、宇宙には絶対静止系は存在せず、それぞれの慣性系に存在する観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを区別することはできない。つまり、他の慣性系との相対速度に関わらず、慣性系では物理法則が全く同じ方程式で記述されなければならない。この相対性原理からの要請は電磁気学におけるマクスウェルの方程式についても成立しなければならない。

4.1.1 電場と磁場

すでに説明したように、互いにゼロではない相対速度をもつ慣性系の間では、ローレンツ変換によって互いの座標が変換される。電磁場に対する相対性原理からの要請とは、その座標変換をしたとしても、マクスウェルの方程式が形を変えずに成立することである。ある慣性系 K から観測した電場 \mathbf{E} 、電束密度 \mathbf{D} 、磁場 \mathbf{H} 、磁束密度 \mathbf{B} に関するマクスウェルの方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (4.2)$$

となる。ここで、 ρ は電荷密度、 \mathbf{j} は電流密度である。マクスウェルの方程式のうち、(4.1)の左側はガウスの法則、右側はアンペールの法則である。もう一方、(4.2)の左側は磁束密度保存の法則、右側はファラデーの法則である。アインシュタインの相対性原理より、異なる慣性系 K' から観測した場合についても、マクスウェルの方程式は全く同じ表現形式で成立しなければならない。そのような条件を求めるため、これまでと同じように、 K' 系は K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動していると仮定し、 K' 系から見た微分演算子を求めておくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right), & \frac{\partial}{\partial x} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'}, \end{aligned}$$

となる。この式において、簡単のため $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ とおいた。これらの演算子の関係に注意して、まず、(4.1)について、ガウスの法則を変換すると、

$$-\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial D_x}{\partial t'} + \left(\gamma \frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} \right) = \rho, \quad (4.3)$$

を得る。次に、アンペールの法則を成分別に書き直すと、

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial D_x}{\partial t'} + \gamma v \frac{\partial D_x}{\partial x'} = j_x, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x'} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial H_z}{\partial t'} - \gamma \frac{\partial D_y}{\partial t'} + \gamma v \frac{\partial D_y}{\partial x'} = j_y, \quad (4.4b)$$

$$\gamma \frac{\partial H_y}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial H_y}{\partial t'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial t'} + \gamma v \frac{\partial D_z}{\partial x'} = j_z, \quad (4.4c)$$

が得られる。さらに、(4.4a)を v/c^2 倍して (4.3) から減じると t' についての偏微分の項を消去することができる。その結果は、

$$\frac{\partial D_x}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial z'} \left(D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right) = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x \right), \quad (4.5)$$

のようになり、ガウスの法則と同形の方程式を得る。つまり、これが K' 系から見たガウスの法則と考えられる。同様に、(4.3)を v 倍して (4.4a) から減じれば x' についての偏微分の項を消去できる。その結果に併せて、(4.4b)と (4.4c)を整理した式を並べて書くと、

$$\gamma \frac{\partial}{\partial y'} (H_z - v D_y) - \gamma \frac{\partial}{\partial z'} (H_y + v D_z) - \frac{\partial D_x}{\partial t'} = \gamma (j_x - v \rho), \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial}{\partial x'} (H_z + v D_y) - \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right) = j_y, \quad (4.6b)$$

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x'} (H_y - v D_y) - \frac{\partial H_x}{\partial y'} - \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right) = j_z, \quad (4.6c)$$

が得られるが、これらの式はアンペールの法則と同形であることがわかる。つまり、K' から観測される電荷密度 ρ' 、電流密度 \mathbf{j}' 、電束密度 \mathbf{D}' 、さらに、磁場 \mathbf{H}' 、に関して、

$$\rho' = \frac{\rho - v j_x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x - v \rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z, \quad (4.7)$$

$$D'_x = D_x, \quad D'_y = \frac{D_y - v H_z / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad D'_z = \frac{D_z + v H_y / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.8)$$

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \frac{H_y + v D_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad H'_z = \frac{H_z - v D_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.9)$$

が成立すればガウスの法則とアンペールの法則はローレンツ変換に対して不変であることが導かれる。相対性理論を取り扱ううえで、光速不変の原理から導かれるローレンツ変換は成立が必須である。したがって、電荷密度、電流密度、電束密度、磁場の変換はこれらの数式にしたがわなければならないのだ。

電束密度不変の法則とファラデーの法則 (4.2) についても同様の座標変換をすれば、電束密度不変の法則と同形の方程式:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial z'} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = 0, \quad (4.10)$$

および、ファラデーの法則と同形の方程式:

$$\gamma \frac{\partial}{\partial y'} (E_z + v B_y) - \gamma \frac{\partial}{\partial z'} (E_y - v B_z) + \frac{\partial B_x}{\partial t'} = 0, \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial}{\partial x'} (E_z - v B_y) + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) = 0, \quad (4.11b)$$

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x'} (E_y + v B_y) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = 0, \quad (4.11c)$$

が得られる。つまり、これらの式が K' 系から見たときの磁束密度不変の法則、および、ファラデーの法則である。よって、これらの法則が慣性系によらず同じ形で記述できるためには、K' 系から観測した電場 \mathbf{E}' と磁束密度 \mathbf{B}' が、

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.12)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + v D_z / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - v D_y / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.13)$$

のように変換されなければならない。言い換えると、これらの数式で変換されるのであれば、マクスウェルの方程式はローレンツ変換に対して不変となるのである。

上のような手順によって得られた (4.7), (4.8), (4.9), および, (4.12), (4.13) が K' 系からみた電磁気的な観測量である。K 系に対する K' 系の相対速度を \mathbf{v} と書くと、これらの電

磁気的な観測量は次のような形で表現することができる。

$$\rho' = \frac{\rho - \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{j}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{j}_{\parallel} - \rho \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{j}'_{\perp} = \mathbf{j}_{\perp}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}, \quad \mathbf{D}'_{\perp} = \frac{\mathbf{D}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}, \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.18)$$

これらの式において、添え字 \parallel を付したベクトルは \mathbf{v} と平行な成分 (ここでは x 成分) を表し、添え字 \perp を付したベクトルは \mathbf{v} に垂直な成分 (ここでは y, z 成分) を表す。これらが相対原理の要請から導き出される電磁場の変換式である。真空の誘電率と透磁率を、それぞれ、 ϵ_0, μ_0 とすると、真空では $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ が成り立つ。また、マクスウェルの方程式から得られる波動方程式によって $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ であることがわかっているので、真空の場合においては、変換式 (4.15) と (4.16) は、変換式 (4.17) と (4.18) と同一であることが容易にわかる。しかし、物質内においては誘電率と透磁率の積が $1/c^2$ とはならないため、同様の関係は成り立たない。実は、相対性理論において、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ は厳密には成り立たないということになるが、これについては第 4.6 節で考察する。

ところで、ここで導出した電磁場の変換式から、空間を伝搬する電磁波の位相はローレンツ変換に対して不変であることがただちにわかる。例えば、 z 軸方向に伝搬する電磁波を仮定し、電界が、

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E \exp i(kz - \omega t + \phi),$$

のように、 x 軸方向に偏波しているとする。すると、マクスウェルの方程式によって磁速密度ベクトル \mathbf{B} は、

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{e}_y E}{c} \exp i(kz - \omega t + \phi),$$

となるので、電界と磁界は同一位相であることがわかる。その上で (4.17) を見ると、 \mathbf{E}' と \mathbf{E} は同一位相であることがわかる。よって、 K 系と K' 系で観測した電磁波の位相は互いに等しい。電磁波の位相が異なる慣性系で不変であることは、後に、ドップラ効果の議論をする際に利用する。

4.1.2 電荷と電流

電流が電荷の流れであることに基づき、異なる慣性系から観測した電流と電荷について考察しよう。その結果、電荷が観測者によらず定数となることが導かれる。

電流は電荷の流れを表す量である。電流密度ベクトル \mathbf{j} と電荷密度 ρ を用いると、電流と電荷の関係は連続の方程式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

で表現できる。連続の方程式は特に新しい要請ではなく、マクスウェルの方程式に含まれるアンペールの法則 (4.1) の発散をとれば容易に導出できる。つまり、マクスウェルの方程式は、電流を電荷の流れだと主張しているのだ。マクスウェルの方程式から導出されるということは、当然、連続の方程式もローレンツ変換に対して不変となる。確認のため、電荷密度と電流密度の変換式 (4.7) を K' 系の座標で微分すると、ただちに、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial j'_x}{\partial x'} + \frac{\partial j'_y}{\partial y'} + \frac{\partial j'_z}{\partial z'} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z},$$

が得られる。確かに、 K' 系においても、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \mathbf{j}' = 0,$$

なる連続の方程式が成立することが確認された。ここで、 ∇' は K' 系におけるナブラ演算子とする。

K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動する K' 系から見たとき、電荷密度 ρ_0 が K' 系に対して静止しているとする。また、 K' 系から見たときに電流は存在しないものとする。この電荷密度を K 系から観測すると変換式 (4.7) より

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j_x = \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j_y = 0, \quad j_z = 0,$$

となる。ここで現れた電流密度は、自由電子による伝導電流ではなく、帯電した物質が運動することによる運搬電流とよばれる電流である。また、この式は電荷密度の運動方向を x 方向に規定しているが、一般の速度ベクトル \mathbf{u} について成立するように拡張することは容易である。つまり、静止電荷密度 ρ_0 が K 系に対して速度 \mathbf{u} で運動している場合、これを K 系から観測した電荷密度 ρ と、その電荷密度による運搬電流密度 \mathbf{j} は、

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{u},$$

となることがわかる。運動する電荷密度は静止していたときの電荷密度とは異なる量になっていることがわかる。しかし、その都度観測される電荷密度 ρ を使えば、運搬電流密度は相対性理論以前の関係式と一致している。

ところで、この電荷密度が、それと併走する慣性系から見たとき、ある微小体積片 dV_0 に含まれているとする。この微小体積片は K 系から見ると、その運動方向にローレンツ収縮を受けて $dV = \sqrt{1 - u^2/c^2} dV_0$ となっているはずである。よって、微小体積片に含まれる電荷は

$$\rho dV = \rho_0 dV_0,$$

となり、ローレンツ変換に対して不変である。さらに、微小体積片 dV に含まれる電荷という意味で $de (\equiv \rho dV)$ という記号を用いると、微小体積片に含まれる電荷の変換則は

$$de = de_0,$$

と書くこともできる。これは、電子や陽子のような荷電粒子がその運動速度によって電荷を変化させないことを意味している。もし、電荷の量が運動速度によって変化するならば、原子内部が電気的中性を保てなくなる。例えば、ある時点で電気的中性を保っている原子において、最外殻電子が励起されて外側の電子軌道に移動した場合、電子の周回速度が変化するので、電子の電荷が変化し、その結果、原子内部の中性が破られることになる。実際には、電子の励起による電気的中性の破れ、または、原子自体の高速運動による電気的中性の破れが観測された例がないで、上で述べたように電荷がローレンツ変換に対して不変であるということとは理にかなっている。

4.2 磁場と相対性理論

第 4.1 節で導出した電磁場の変換で、特に電場 \mathbf{E} の変換にローレンツ力に類似した要素が現れていたことに気付いた読者がいるのではないだろうか。その数式に現れていたように、ローレンツ力は相対論的な力である。ローレンツ力は、磁石の N 極と S 極が引き合う力の正体であるので、磁場の存在は相対論的效果である。

K 系に対して速度 \mathbf{v} で等速度運動する慣性系 K' を考えよう。 K' 系の原点に電荷密度 ρ' が静止しているとする。電荷密度は K' の微小体積 dV' に収められているとする。 K' 系の任意の位置 \mathbf{r}' では、その微小体積内の電荷によって、

$$d\mathbf{E}' = \frac{\rho' dV'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3},$$

なる電場が観測されるはずである。電荷が K' 系で静止しているのだから、 K' 系では磁場は観測されず $d\mathbf{B}' = 0$ である。ところが、ローレンツ変換によって K 系では磁場:

$$d\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}' + \mathbf{v} \times d\mathbf{E}'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho' dV'}{4\pi c^2 \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r'^3},$$

となる。電荷密度と微小体積の積 ρdV はローレンツ変換に対して不変であることがわかっているのので、観測される磁場は、

$$d\mathbf{B} = \frac{\rho dV}{4\pi c^2 \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r'^3} = \frac{\rho S dl}{4\pi c^2 \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r'^3},$$

のように書き換えられる。ここで、 $dV \equiv S dl$ とおいた。新たに用いた記号について、 S は速度 v に垂直な断面積であり、 dl は微小体積の速度 v 方向の長さである。それらの記号を用いると、断面積 S を通過する電流は $\mathbf{J} = \rho S \mathbf{v}$ と書くことができる。電流 \mathbf{J} を用いて、変換された磁束密度を計算すると、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r'^3} dl,$$

となる。ここで、 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ の関係を利用した。この数式は何かに似ていないだろうか？速度が小さい条件 $v \rightarrow 0$ で近似すると、

$$d\mathbf{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dl,$$

が得られる。すなわち、ビオ・サバルの法則である。本節の考察によって、磁場が電場から相対論的に創り出されることがわかるだろう。次節では、我々が磁場を観測する原理について解明していきたい。

4.3 磁場の発生原理

既に見たように、座標系が変わると電場や磁場は個別にはではなく、互いに関係しあって変換される。例えば、慣性系 K から見たときに磁場が存在しなくても、その系に対して相対速度をもつ K' 系から見れば磁場が存在する。この節では、磁場が発生する仕組みを考察してみよう。

磁石が引き合ったり、反発し合ったりする力の正体はローレンツ力である。電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を仮定すると、電荷 e に作用する力は、

$$\mathbf{K} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

なるローレンツ力で表される。その力に見られるように、磁束密度は運動する荷電粒子に作用する力の強さを規定するための比例係数と解釈することもできる。見方を変えると、磁場の存在は、運動している荷電粒子がなければわからないのである。静止していれば、荷電粒子は磁場の影響を受けないのだ。磁場の影響を受けるには、荷電粒子が観測者に対してゼロではない相対速度をもっていることを意味するので、運動する荷電粒子に作用する力、すなわち、磁場には相対性理論が関係しそうである。本節では、ローレンツ収縮に

よって運動する荷電粒子が感じる電場が観測者と異なることを示す。荷電粒子は自身が感じる電場にしがたって力を受けるが、観測者にとっては、その力が電場とは一致しないため、磁力という別の力が存在しているように見える、ということが本節で実証したい内容である。

本節では、無限直線電流のそばを通過する荷電粒子が受ける力を、磁場の概念を使用せずに考察し、その力が非相対論近似においてローレンツ力と一致することを示す。観測者はK系に静止しており、無限直線電流が流れる直線導体はK系の z 軸上に存在するとする。この直線電流に対して、平行に運動する荷電粒子、距離方向に運動する荷電粒子、接線方向に運動する荷電粒子の三つパターンに対して荷電粒子が受ける力を考察する。

4.3.1 考察の準備

準備段階として、運動する荷電粒子がつくる電場について考察しよう。まず、簡単な場合として、K系に対して x 軸方向に等速運動する荷電粒子がつくる場を考えてみる。この荷電粒子と併走する慣性系を K' とし、荷電粒子は常にこの座標系の原点に存在するという状況を設定する。その場合、 K' 系の任意の観測点 \mathbf{r}' から観測した電場は、

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3},$$

のように表される。この式の分子だけをK系の座標を用いて書き換えると、

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \left[\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right],$$

となる。電場 \mathbf{E}' をK系から見た電場 \mathbf{E} に変換してみよう。電場にローレンツ変換を適用するのである。 K' 系から見て磁場が存在しないので電場は、

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

のように変換される。この変換式を用いると、電場 \mathbf{E} は、

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^3 \sqrt{1-\beta^2}} \left[x-vt, y, z \right],$$

となることがわかる。ところで、荷電粒子は K' 系の原点に静止しているのだから、K系から見ると時刻 t とき、荷電粒子は $\mathbf{s} = [vt, 0, 0]$ に存在することになる。ここで、特別な場合として、荷電粒子がK系の原点に位置する瞬間の電場を求めてみよう。その電場は、上の式に $t=0$ を代入すればよいので、

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2)\mathbf{r}}{[x^2 + (1-\beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}}, \quad (4.19)$$

となる。ここで改めて r' を K 系の座標を用いて展開しておいた。ここでは、相対論的な座標変換から x 軸方向に等速運動する荷電粒子がつくる電場を計算したが、実は、電磁力学における遅延ポテンシャルを点電荷に応用したリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルを用いても同じ結果が得られる。つまり、(4.19) には電磁作用が無限遠まで一瞬に届くのではなく、光速で伝搬することに起因する遅延が考慮されている。しかしながら、電場のベクトルが荷電粒子の過去の位置ではなく、図 4.1 に示すように、現在位置に向かっているのは電磁作用に引きずりのような作用¹があることを意味する。

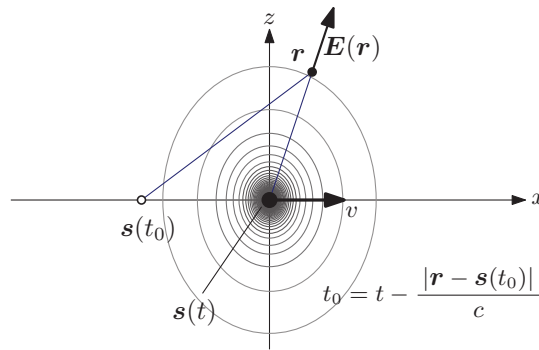


図 4.1: 等速運動する荷電粒子による電場

次に、荷電粒子が xz 平面上を等速度運動している場合に、(4.19) を拡張してみよう。荷電粒子の速度ベクトルを、

$$\mathbf{u} = \left[-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2} \right],$$

としよう。この速度は、K 系に対して x 軸方向に速度 $-v$ で運動する慣性系 K' 系の z' 軸方向に速度 u で等速度運動する荷電粒子を想定している。この荷電粒子が K 系の原点に存在する瞬間における電場を求めてみる。ここでも、やはり電磁作用の引きずり作用があるため、電場は荷電粒子の現在位置 (すなわち、原点) を向いている。しかし、問題は (4.19) の分母である。分母がこのような形をしているのは、等位ポテンシャル面が荷電粒子の速度方向にローレンツ収縮しているからである。つまり、(4.19) を適用するには、荷電粒子の速度と一致する座標軸 x^* を想定した座標系 K* を考えればよい。そのような都合のよい座標系から見れば、電場は、

$$\mathbf{E}^* = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\tilde{\beta}^2)\mathbf{r}^*}{\left[x^{*2} + (1-\tilde{\beta}^2)(y^{*2} + z^{*2})\right]^{3/2}}, \quad (4.20)$$

となるであろう。ここで、 $\tilde{\beta}$ は荷電粒子の速さを表し、 $\tilde{\beta}^2 = \beta^2 + \beta_u^2 - \beta^2\beta_u^2$ が成り立つ。

¹電場ベクトルが荷電粒子の現在位置を正確に向いているのは荷電粒子が等速度運動をしている場合だけである。つまり、この引きずり作用は荷電粒子の軌跡の 1 次微分に対応する効果しか含まれていない。荷電粒子が加速度をもつ場合、この引きずり作用に誤差が現れ、その誤差ゆえに電磁は放射が現れると解釈できる。

この式の分母を, K 系の座標で表すには,

$$x^* = \frac{\beta x - \beta_u \sqrt{1 - \beta^2} z}{\tilde{\beta}}, \quad y^* = y, \quad z^* = \frac{\beta_u \sqrt{1 - \beta^2} x + \beta z}{\tilde{\beta}},$$

のような座標回転をすればよい。この座標変換を適用すると, 電場 \mathbf{E} は,

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \tilde{\beta}^2) \mathbf{r}}{\left\{ [1 - \beta_u^2(1 - \beta^2)] x^2 + (1 - \beta^2)[(1 - \beta_u^2) y^2 + z^2] + 2\beta\beta_u \sqrt{1 - \beta^2} xz \right\}^{3/2}}, \quad (4.21)$$

のように書くことができる。分母が多少, 複雑になっているが後の項で議論を展開する際に有用な数式を得ることができた。この数式を用いて, 次項以降で運動方向が直線電流と平行である荷電粒子と, 垂直である荷電粒子が, それぞれ, 電場から受ける力を調べる。

4.3.2 直線電流と平行に運動する荷電粒子

直線電流と平行に運動する荷電粒子が, 直線導体からの電場によって作用される力について調べよう。静止系 K からみると, 電流が流れる直線導体は電気的中性を保っていて, 電場が生じないはずである。荷電粒子から見ると, 相対論的效果で直線導体の電気的中性が破れ, 電場が発生すると推測する。荷電粒子が直線電流に平行に運動する場合, 前節の式において $\beta = 0$ とすればよい。運動方向の速度は, 直線電流中の電荷との相対速度 u によって表現できる。その場合, 前節で求めた電場 (4.21) は,

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta_u^2) \mathbf{r}}{[(1 - \beta_u^2) x^2 + (y^2 + z^2)]^{3/2}},$$

のように記述できる。ここで, 線方向に含まれる電荷の長さ方向の密度を ρ とすると, 微小長さ dz_0 による電場は, 上式の e を ρdz_0 に置き換えればよいので,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho dz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta_u^2) \mathbf{r}}{[(1 - \beta_u^2) x^2 + z_0^2]^{3/2}},$$

となる。ただし, ここで, 対象とする微小長さ dz_0 の位置を z_0 , 観測点の位置を $\mathbf{r} = [x, 0, 0]$ とした。この微小電場 $d\mathbf{E}$ を z_0 について積分すれば, 直線導体中の電荷による電場:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta_u^2) \mathbf{r}}{[(1 - \beta_u^2) x^2 + z_0^2]^{3/2}},$$

が計算できる。この積分は, 静止した直線電荷がつくる電場と同じ式なので, 容易に計算することができる,

$$E_x = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x}, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0, \quad (4.22)$$

が得られる。ここで、 E_x, E_y, E_z は電場 \mathbf{E} の各座標成分である。

現実の直線導体には原子核や電子が存在し、そのうち、自由電子が電流を担っている。ある基準となる慣性系 K_0 から見たとき、直線導体は電氣的に中性であるとする。つまり、原子核の電荷密度を ρ としたとき、自由電子の電荷密度は $-\rho$ となる²。また、自由電子は、原子核に対して z_0 軸方向に速度 u で等速度運動しているとする。

上で述べた直線導体に対して、観測者が存在する慣性系 K は z_0 軸方向に速度 v で等速運動しているとする。K 系から見たときの原子核と電子の相対速度を、それぞれ、 u_+, u_- とすると、相対論における速度の加法則より、

$$u_+ = -v, \quad u_- = \frac{u - v}{1 - \beta\beta_u},$$

となる。ここで、 $\beta = v/c, \beta_u = u/c$ とおいた。このように、原子核と自由電子の相対速度が K_0 系から見た場合と異なるため、それらの電荷密度も変化していると考えられる。原子核と自由電子のそれぞれについて、相対的に静止している状態から見た静止電荷密度を ρ_{0+} と ρ_{0-} であるとする。すると、それらの電荷密度は、

$$\rho_{0+} = \rho, \quad \rho_{0-} = -\sqrt{1 - \beta_u^2} \rho,$$

のようになるだろう。この静止電荷密度と K 系から見た相対速度を用いて、K 系から見たときの電荷密度 ρ_+ と ρ_- は、

$$\rho_+ = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \rho_- = -\frac{(1 - \beta\beta_u)\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

となる。この電荷密度を、それぞれ、(4.22) に代入し、原子核による電場 \mathbf{E}_+ 、および、自由電子による電場 \mathbf{E}_- を計算すると、

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{1 - \beta\beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{e}_x,$$

が得られる。実際に観測される電場 \mathbf{E} は、これらの和であるはずなので、

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{\beta\beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{e}_x,$$

である。もし、この観測点に電荷 q が存在しているなら、その電荷は、

$$\mathbf{K} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{q\beta\beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{e}_x,$$

²厳密に言うと、自由電子の電荷密度を $-\rho$ 、原子核を周回する電子の電荷密度を $-\rho^{(0)}$ とする。そのとき、原子核の電荷密度は $\rho + \rho^{(0)}$ となる。そのうち、周回電子は原子核中の、電荷密度 $\rho^{(0)}$ に対応する陽子と常に電氣的中性を保っている。周回電子は常に原子核の近傍にいたので、これらの中性関係はいかなる慣性系から見ても成り立つ。よって、電荷密度 $\rho^{(0)}$ に対応する成分は相殺され、原子核の電荷密度を ρ 、自由電子の電荷密度を $-\rho$ と考えてもよい。

の力を受けるはずである。慣性系 K_0 から見ると原子核と自由電子の間で電氣的に中性であるが、運動する荷電粒子から見ると予想通り、相対論的効果のため直線導体の電氣的中性が破れるのだ。その結果として、荷電粒子は電流の経路から電場による力の作用を受けるのだ。

4.3.3 直線電流と垂直に運動する荷電粒子

直線電流と垂直に運動する荷電粒子についても、静止系 K_0 から見たとき直線導体が保っている電氣的中性が破れ、電場を受けるといふ推測で議論を進める。

直線導体に対する静止系 K_0 と相対的に、距離方向に速度 v で運動する慣性系 K から見た電場について考察しよう。ここで、観測者は K 系の座標 $[x, y, 0]$ に存在するとしよう。この系から見ると、直線導体中の原子核は速度 $\mathbf{u}_+ = [-v, 0, 0]$ であるが、原子核に対して導体の長さ方向に速度 u で運動する自由電子は、 K 系から見ると $\mathbf{u}_- = [-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2}]$ の速度で運動している。

準備として、原子核と自由電子を特に指定せず、直線導体中の荷電粒子が K 系に対して、速度 $\mathbf{u} = [-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2}]$ で運動しているとして計算してみよう。その結果をそのまま使えば自由電子による電場 \mathbf{E}_- が得られ、 $u = 0$ とすれば原子核による電場 \mathbf{E}_+ が得られるはずである。電場を観測する時点で座標 $[0, 0, z_e]$ に存在する直線導体の微小長さ dz_e に含まれる微小電荷 ρdz_e による電場 $d\mathbf{E}$ は、

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho dz_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \tilde{\beta}^2) \mathbf{r}}{\left\{ [1 - \beta_u^2(1 - \beta^2)] x^2 + (1 - \beta^2)[(1 - \beta_u^2)y^2 + z_e^2] - 2\beta\beta_u\sqrt{1 - \beta^2} x z_e \right\}^{3/2}}, \quad (4.23)$$

のようになる。ただし、上でも述べたように観測点の位置を $[x, y, 0]$ とした。この微小電場を直線導体上の座標 z_e について積分すれば、直線導体中の電荷による電場が計算できるので、

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \tilde{\beta}^2) \mathbf{r} dz_e}{\left\{ [1 - \beta_u^2(1 - \beta^2)] R^2 + (1 - \beta^2)[(1 - \beta_u^2)y^2 + z_e^2] - 2\beta\beta_u\sqrt{1 - \beta^2} R z_e \right\}^{3/2}},$$

が形式的に成り立つ。ただし、 \mathbf{r} は対象とする微小電荷に対する観測点の相対位置であり、 $\mathbf{r} = [x, y, -z_e]$ となっている。この積分は複雑そうに見えるが、

$$\xi = \sqrt{1 - \beta_u^2} x, \quad \eta = \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_u^2)} y, \quad \zeta = \sqrt{1 - \beta^2} z_e - \beta\beta_u x,$$

なる置き換えをすると、

$$E_x = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \frac{\xi d\zeta}{1 - \beta^2},$$

$$E_y = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \frac{\eta d\zeta}{(1 - \beta^2)\sqrt{1 - \beta_u^2}},$$

$$E_z = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \left(\zeta + \frac{\beta\beta_u\xi}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} \right) \frac{d\zeta}{1 - \beta^2},$$

のような形に書き換えることができる。ここで、 E_x, E_z は電場 \mathbf{E} の x 成分、および、 z 成分である。この積分は、静止した直線電荷密度による電場を求める積分と同じ形をしているので、即座に計算することができる、

$$E_x = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_u^2)} \xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$E_y = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta_u^2} \xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$E_z = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_u^2)} \beta\beta_u \xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

が得られる。さらに、置き換えた変数 ξ をもとに戻すと、

$$E_x = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} x}{x^2 + (1 - \beta^2)y^2}, \quad (4.24a)$$

$$E_y = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} y}{x^2 + (1 - \beta^2)y^2}, \quad (4.24b)$$

$$E_z = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \beta\beta_u x}{x^2 + (1 - \beta^2)y^2}, \quad (4.24c)$$

が得られる。この結果を z 軸上に伸びる直線導体について応用し、前節と同様に、導体中の原子核と自由電子による電場 \mathbf{E}_+ と \mathbf{E}_- を計算しよう。

原子核の電荷密度は、導体に対して静止する K_0 系から見たとき、 ρ に等しい。観測者が存在する K 系は直線導体に対して垂直方向に運動しているため、長さ方向にはローレンツ収縮を受けていない。よって、原子核の電荷密度は K 系から見ても $\rho_+ = \rho$ である。これにより、原子核による電場は、

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{x^2 + (1 - \beta^2)y^2} \begin{bmatrix} x, & y, & 0 \end{bmatrix},$$

のように記述できる。

自由電子の電荷密度も、導体に対して静止する K_0 系から見ると ρ に等しい。 K 系から見ると自由電子は $\mathbf{u} = [-v, 0, u\sqrt{1 - \beta^2}]$ の速度をもっているため、直線導体の長さ方向に対して、

$$\tan \theta = \frac{\beta}{\beta_u \sqrt{1 - \beta^2}},$$

となる角度 θ だけ傾いた方向にローレンツ収縮を受ける。斜めのローレンツ収縮は第 2.5.3 項で取り扱った。同様に考えると、今回の例は図 4.2 のような状態を考えればよい。この図の (a) はローレンツ収縮がない状態を表している。半径 1 の球形の荷電粒子が一直線上に並んでいる。これに対して、速度 $\mathbf{u} = [-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2}]$ で導体内部の電荷が運動している場合、(b) のように、荷電粒子の形状は速度方向にローレンツ収縮する。ここで、図中の導体中央に z 軸方向に伸びる補助線を入れてみる。すると、補助線は、隣り合う荷電粒子との接点を通る。簡単な計算によって、この接点間の距離は $\sqrt{1-\beta_u^2}$ となることがわかる。これは、各荷電粒子間の距離と一致するはずである。ローレンツ収縮を受けない場合には、荷電粒子間の距離は 1 であったので、その荷電粒子の静止電荷密度が ρ_0 であるならば、この斜め方向のローレンツ収縮によって電荷密度は $\rho_0/\sqrt{1-\beta_u^2}$ となる。自由電子の電荷密度は K_0 系から見たときに $-\rho$ であるが、この系に対して導体の長さ方向に速度 u をもっているので、自由電子の静止電荷密度は $-\rho\sqrt{1-\beta_u^2}$ である。よって、 K 系から見た自由電子の電荷密度も $-\rho$ になる。

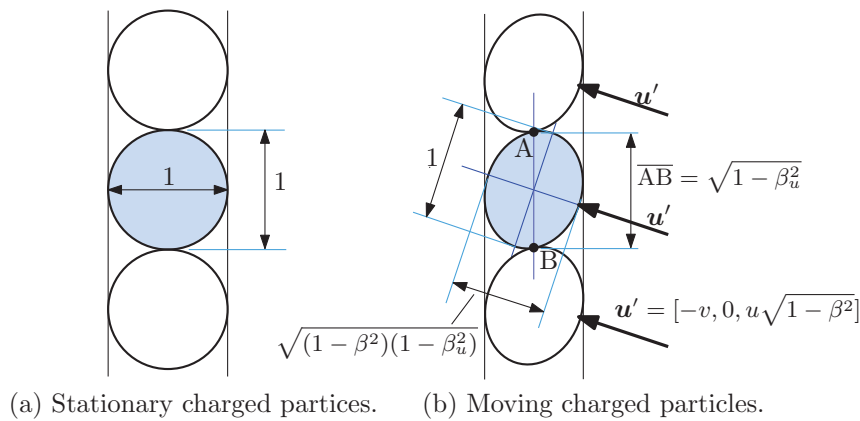


図 4.2: 斜めに運動する電荷密度のローレンツ収縮

考察を開始したときに書いた推測は正しくなく、荷電粒子から見ても直線導体の電気的中性は維持されることがわかった。自由電子の電荷密度 $-\rho$ を代入すると、直線導体に含まれる自由電子による電場は、

$$\mathbf{E}_- = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{x^2 + (1-\beta^2)y^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \beta\beta_u x \end{bmatrix},$$

となる。実際に観測される電場 \mathbf{E} は、 \mathbf{E}_+ と \mathbf{E}_- の重ね合わせであるので、

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1-\beta^2} \beta\beta_u x}{x^2 + (1-\beta^2)y^2} \mathbf{e}_z,$$

となり、ゼロとはならない。重ね合わせた電場がゼロにならなかったのは、 \mathbf{E}_- にゼロでない z 成分が存在するからである。導体内の自由電子と、観測者となる荷電粒子との相対速

度によって z 成分が生成されたのだ。もっとも、その性質は遅延ポテンシャルから導き出されているので、電磁作用が有限速度で伝搬することに起因する。

荷電粒子が直線導体から受ける電場によって、

$$\mathbf{K} = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{q\sqrt{1-\beta^2}\beta\beta_u x}{x^2 + (1-\beta^2)y^2} \mathbf{e}_z,$$

なる力の作用を受ける。ここで、 x 軸方向にローレンツ収縮した回転楕円体が、

$$\frac{x^2}{1-\beta^2} + y^2 = r'^2,$$

なる数式で書けることに注目しよう。この数式に含まれる r' は回転楕円体の長半径である。長半径 r' を用いると、荷電粒子に作用する力は、

$$\mathbf{K} = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{q\beta\beta_u x}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{e}_z,$$

のように書き換えることができる。驚くことに、その力の大きさは、荷電粒子が直線電流と平行に運動する場合と等しいのだ。

電場に z 成分が現れる理由 荷電粒子の運動が直線電流と垂直であるとき、非相対論的な電磁気学では予想できないことが起きている。それは、直線導体が z 軸と平行であるにも関わらず、電場に z 成分が現れることである。そのような現象が発生する理由が、計算の結果そうなるでは面白くないだろう。その理由を図解してみよう。

直線導体の外部を運動する荷電粒子から見ると、既に述べたように、直線導体内の自由電子は、図 4.3 (a) に示すようにローレンツ収縮している。ローレンツ収縮は、外部の荷電粒子から見た自由電子の相対速度の方向に発生するはずだ。なお、自由電子の相対速度をベクトル表記すると、 $\mathbf{u}' = [-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2}]$ である。その図は、既に描いた図 4.2 (b) と同一である。その自由電子の配置を、ローレンツ収縮を戻して描くと図 4.3 (b) のようになる。当然、自由電子の相対速度の方向に沿ってローレンツ収縮を戻すのである。その結果、図 4.3 (b) に示すように、自由電子の配列は z 軸とは異なる方向を向くのだ。ローレンツ収縮を戻した自由電子の配列方向が z 軸との間になす角を ϕ とすると、計算過程を省略するが、

$$\tan \phi = \frac{\beta\beta_u [1 - \sqrt{(1-\beta^2)(1-\beta_u^2)}]}{\beta_u^2 \sqrt{1-\beta^2} + \beta^2 \sqrt{1-\beta_u^2}},$$

が成立する。この自由電子の配置が、外部の荷電粒子に作用していると考え、荷電粒子が観測する電場は図に示すように z 成分をもっていることになる。これが直線電流と垂直に運動する荷電粒子に作用する力が z 成分をもっている理由である。おそらく、この図解から計算を始めても同一の結果が得られるだろう。筆者は図解からの計算も試みたが、予想以上に計算が複雑になったため途中でやめたことを注釈しておく。

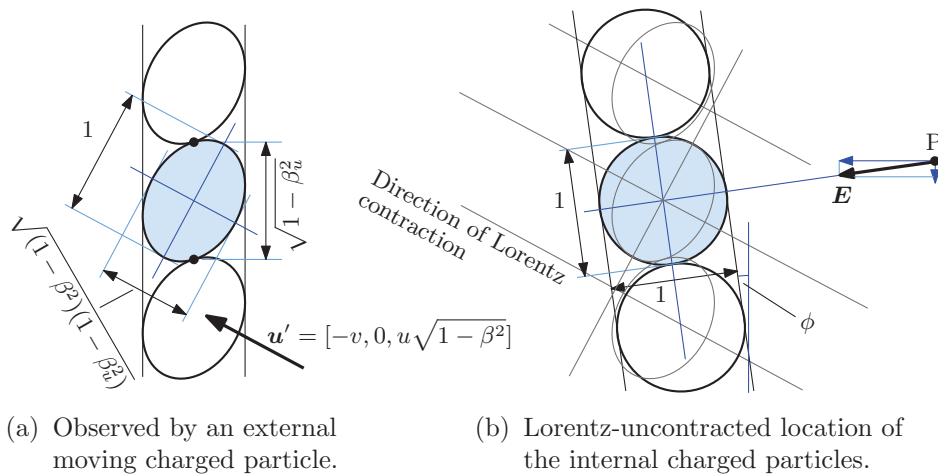


図 4.3: 自由電子のローレンツ収縮を戻した配置

考えればさらに疑問が出てくる。導体中の原子核のように、観測者から見た相対速度が z 成分をもっていない場合、 z 軸に平行に配列した電荷からの電場を考えればよかった。しかし、自由電子のように相対速度が z 成分をもつ場合、 z 軸とずれた方向に配列する電荷からの電場を考えなければならないことに疑問が生じるのだ。外部の荷電粒子から見ると、あたかも、自由電子が直線導体から逸脱しているようではないか。いや、実のところ、そのような不可思議な現象は発生していないので心配無用だ。外部の荷電粒子から見た自由電子は、あくまでも、図 4.3 (a) のように配置されている。決して、自由電子は直線導体から逸脱していない。図 4.3 の (a) と (b) は、同一の観測者から見たときに同一時刻ではないのだ。異なる速度で運動する観測者の間には同時性が一致しないことは前にも述べた。そのため、導体内の原子核と自由電子は、互いに異なる時刻での位置から外部の荷電粒子に電場を作用させると考えればよい。つまり、直線導体と垂直に運動する荷電粒子は、相対性理論における同時性の不一致によって、直線導体と平行な方向に電場の作用を受けるのである。

4.3.4 非相対性理論との比較

直線導体の近傍を運動する荷電粒子 P について、磁場の概念を用いず、相対性理論におけるローレンツ収縮 (および、遅延ポテンシャル) によって、その荷電粒子が受ける力を求めた。それでは、その結果を、相対性理論より前の電磁気学における磁場の概念から求めた力と比較してみよう。

表 4.1 に比較のための情報を記載してある。まず、第 1 列は荷電粒子 P の速度である。第 2 列は直線導体を流れる電流である。第 3 列は直線導体から見たときの荷電粒子 P の最短距離となる相対位置を表している。第 4 列はアンペールの法則によって決定される磁束

密度, そして, 第5列がローレンツ力である。この第5列目が, これまでに相対論的効果として導出した荷電粒子に作用する力と一致することを確認すればよい。

表 4.1: 相対論効果による磁場発生の検証結果

速度 \mathbf{v}	電流 \mathbf{J}	相対位置 \mathbf{r}	磁束密度 \mathbf{B}	$q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
$v\mathbf{e}_z$	$-\rho u\mathbf{e}_z$	$r\mathbf{e}_x$	$-\frac{\mu_0\rho u}{2\pi r}\mathbf{e}_y$	$\frac{\mu_0 q\rho uv}{2\pi r}\mathbf{e}_x$
$v\mathbf{e}_x$	$-\rho u\mathbf{e}_z$	$x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$	$\frac{\mu_0\rho u}{2\pi r^2}(y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y)$	$-\frac{\mu_0 q\rho uv x}{2\pi r^2}\mathbf{e}_z$

磁束密度は $\mathbf{B} = (\mathbf{J}/2\pi r) \times (\mathbf{r}/r)$ で計算される。

表の各行は荷電粒子の運動方向に対応している。第1行目が直線電流と平行の運動, 第2行目が垂直でしかも動径方向, 第3行目が垂直でしかも接線方向の運動に対応している。表の第5列目に示したベクトルは, 磁場の概念を用いずに相対論的効果として計算した力と, 非相対論的近似の範囲で一致している。非相対論的近似の範囲とは, $\sqrt{1-\beta^2} \simeq 1$ を想定した近似を意味する。

この考察結果によって, 磁場は, 荷電粒子の運動によるローレンツ収縮によって電氣的な中性に狂いが生じた結果, 受ける電氣的な力である。言い換えると, ある観測者から見たときに電氣的に中性であっても, 相対速度をもつ荷電粒子から見ると電氣的中性ではないので, 電氣力を受けるのである。その観測者にとっては, 電氣的中性であるにも関わらず, 荷電粒子が力を受けるため, 磁場という概念を用いてその力を説明してきたわけである。

磁場が実在する場ではなく, 概念的な場に過ぎないということは, 物理学の記述において磁場は不必要なのだろうか? いや, 決してそうではない。確かに, ローレンツ収縮を細かく適用していけば磁場の概念は不要かもしれない。しかし, ここで見た直線導体の近傍を等速運動する荷電粒子程度の基本的な問題ですら, 数ページを必要とする計算をすることになったのだ。磁場の概念さえあれば, 荷電粒子から見た座標系など考えることもなく, 数行の計算で答えが得られるであろう。つまり, 物理学の手段として磁場の概念はあるべきである。

4.4 光行差とドップラ効果

第4.1節で述べたように電磁波の位相はローレンツ変換に対して不変になる。電磁波の位相には波数ベクトルと角周波数が含まれるので, 位相の性質から波数ベクトルと角周波数のローレンツ変換を導くことができる。それらは, それぞれ, 光行差とローレンツ変換

と呼ばれる。光行差は、異なる慣性系からみると光の到来方向が異なって見える現象であり、ドップラ効果は周波数が異なって見える現象である。

4.4.1 位相の不変性からの導出

波数ベクトル \mathbf{k} と角周波数 ω が与えられたとき、電磁波の位相は、 $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ となる。カルテシアン座標系について成分表示すると、

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad k_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad k_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad k_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z},$$

のように角周波数と波数ベクトルを定義できる。K' 系からみた観測量についても同様に定義できるはずなので、角運動量と波数ベクトルの x 成分は、

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \\ k'_x &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \end{aligned}$$

のように変換される。他の波数ベクトルの各成分も同様である。ここで、位相 ϕ がローレンツ変換に対して不変であるので、 $\phi' = \phi$ とした。具体的に角周波数と波数ベクトルのローレンツ変換を計算すると、

$$\omega' = \frac{\omega - vk_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_x = \frac{k_x - v\omega/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z,$$

が得られる。分子の形が多少違うものの、角周波数と波数ベクトルが、時間座標と空間座標とほぼ同じ形に変換されることが導かれた。

角周波数と波数ベクトルの変換から、光行差とドップラ効果という現象が導かれる。そのために、まず、 $k_x = -k \cos \theta$ とおいてみよう。これは、 x 軸と角度 θ をなす方向から到来する光を表している。もう一つ、 $k = \omega/c$ という関係を使う。この関係が成り立つのは、光の伝搬方向にとった座標を s としたとき、光の位相が $\varphi = \omega t - ks$ となるが、この位相が $\varphi = -k(s - ct)$ と書ける³からである。これらの関係を用いると、角周波数と波数ベクトルに関するローレンツ変換は、

$$\omega' = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega, \quad \omega' \cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega,$$

のように書き換えられる。これらの式をさらに変形すると、

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}, \quad (4.25)$$

$$\omega' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta'} \omega, \quad (4.26)$$

³座標 s の方向に速度 c で伝搬する波の波動関数は、一般的に、 $f(s - ct)$ のような関数で表される。そのため、位相が $\varphi = -k(s - ct)$ のように表されるはずである。

なる結果が得られる。これらの結果は、それぞれ、光行差とドップラ効果を表している。これらの式において、 θ が K 系から見た光の到来方向で、 θ' が K' から見た光の到来方向である。さらに、 ω が K 系から見た光の角周波数、 ω' が K' 系から見た光の角周波数である。

光行差は、運動する観測者から見たときに、その速度に依存して光の到来方向が異なって見える現象である。光行差の現象は、図 4.4 に示すように、観測者が見た光の相対速度と関係している。光の速度はどのような慣性系から見ても一定値 c でしかありえないが、到来方向が θ のとき (図 4.4 (a)), 光の速度の x 方向成分は $c_x = -c \cdot \cos \theta$ である。これを K' 系から観測した場合 (図 4.4 (b)) の速度 c'_x は、速度の変換則によって、

$$c'_x = -\frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta} c,$$

となることが計算される。当然、K' 系から見ても光速は c であるので、この系から見た光の到来方向は (4.25) のように変換される。このように速度変換を用いても、(4.25) を導くことができる。光行差によって、K' 系から見た景色の位置関係は、K 系から見た景色とは異なっている。速度 v が正であれば、必ず、 $\cos \theta' > \cos \theta$ となるので、K' 系から見た光の到来方向は K 系から見た方向に比べて前方に寄っている。極端な場合として、 $v = c$ の場合、 θ に依らず、必ず、 $\cos \theta' = 1$ となる。例として、 $v = 0.8c$ のときの光行差による景色の変換を図 4.4(c) に示す。観測者は図の原点に存在し、基準となる慣性系 K に対して x 軸方向に速度 $v = 0.8c$ で運動している。図示する球面は観測者が見た天球であり、天球上に描いた緯線のような複数の円は K 系から見たときの光の到来方向を示す。この図によると、K 系から見たときに側面 ($\theta = 90^\circ$) から到来する光が、運動する観測者から見ると、前方 37 度の方向から到来していることになる。つまり、ある基準の慣性系に対して相対速度をもつ観測者が見る景色は、基準の慣性系から見た景色に比べ前方に寄っている。この前方寄りの度合いは速度が大きくなるほど激しくなり、速度が極めて光速に近づくと、景色は前方の 1 点に集結する。

ドップラ効果は、観測者と波源の相対速度によって現れる周波数変化の現象である。日常では、救急車が通り過ぎた後、サイレンの音が低くなるような例で音波のドップラ効果を認識できる。これと同様に、光についてもドップラ効果が発生し、その周波数変化は (4.26) で与えられる。この式は、 $v \rightarrow 0$ の近似において、ニュートン力学における光のドップラ効果と一致する。特別な場合として、前方から到来する光を想定し、 $\theta' = 0$ を (4.26) に代入すると、

$$\omega' \Big|_{\theta'=0} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \omega, \quad (4.27)$$

となる。電磁波のドップラ効果は、スピードガンでも応用されているように、自動車の運行速度程度の速さを十分に検出できる。ただし、その速度は光速に比べて非常に小さいのでニュートン力学における近似 $\omega' = (1 + v/c)\omega$ と一致する。このときの、 ω から ω' への

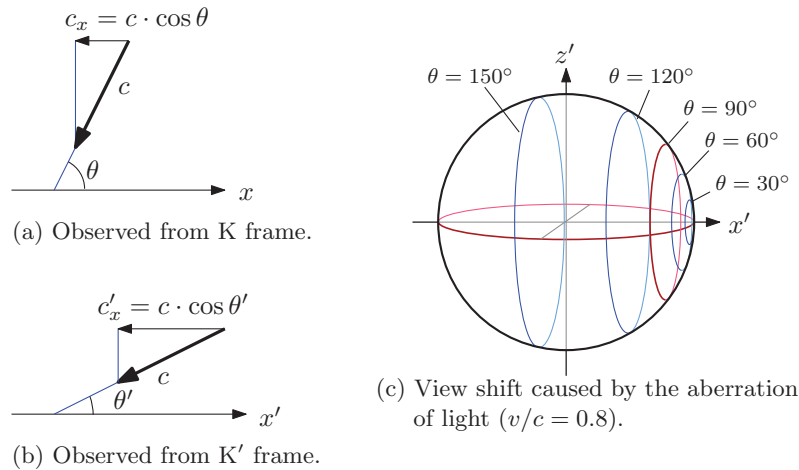


図 4.4: 相対論的な光行差による光の到来方向の変化

増分 $(v/c)\omega$ をドップラ周波数と呼ぶことがあるが、対象となる速度が光速と比較できるようになると、ドップラ周波数は、もはや、速度 v には比例しなくなる。

もう一つの特別な場合として側面から到来する光を考えよう。その場合、 $\theta' = \pi/2$ を (4.26) に代入すればよいので、

$$\omega' \Big|_{\theta'=\pi/2} = \sqrt{1-\beta^2} \omega, \quad (4.28)$$

が得られる。ニュートン力学では側面から到来する光にはドップラ効果が現れないのだが、相対性理論では、側面から到来する光の周波数が $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍される (周波数は小さくなる) のである。これは、横ドップラ効果と呼ばれる相対論的な現象である。横ドップラ効果は、運動する波源の時間がゆっくり進むことに起因して現れる現象である。

4.4.2 ドップラ効果と光量子仮説

特定の体積に含まれる光のエネルギーをローレンツ変換し、その結果をドップラ効果と比較すると、光量子仮説に矛盾しない興味深い関係が得られる。正確に言うと、特定の体積に含まれる光のエネルギーを異なる2つの慣性系で観測した場合、エネルギーは各慣性系で測定した周波数に比例するのである。対象とする体積を光子が1個しか入れない体積とすれば、それは光子1個のエネルギーである。光量子仮説によると角周波数 ω に対応する光子のエネルギーは、 $E_{\text{em}} = \hbar\omega$ のように周波数に比例する。それでは、光量子仮説との関連を連想させる興味深い関係式を導出しよう。

伝搬する体積の変換 対象とする体積片は、K系からみて x 軸と角度 θ をなす方向から光速で到来する半径1の球とする。体積片の中心が原点を通過する時刻を $t = 0$ とすると、

その球の表面は,

$$(x + ct \cos \theta)^2 + (y + ct \sin \theta)^2 + z^2 = 1,$$

なる数式で表される。なお, 簡単のため, 体積片の運動方向を xy 平面内に限定した。座標軸の方向を任意に選べることを考えると, この限定は一般性を欠くものではない。ローレンツ変換:

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

によって K' 系からみた場合に変換すると, 球面は,

$$\left[\frac{(1 + \beta \cos \theta)x' - (\cos \theta + \beta)ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]^2 + \left[y' + \frac{(ct' + \beta x') \sin \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]^2 + z'^2 = 1,$$

のようになる。計算を簡略化するため, 光の伝搬方向 θ を光行差の式によって K' 系から見た角度 θ' に書き換えると, 上の数式は

$$\left[\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta'} \bar{x}' \right]^2 + \left[\bar{y}' + \frac{\beta \sin \theta'}{1 - \beta \cos \theta'} \bar{x}' \right]^2 + \bar{z}'^2 = 1,$$

のように変換される。ただし, $\bar{x}' \equiv x' + ct' \cos \theta'$, $\bar{y}' \equiv y' + ct' \sin \theta'$, $\bar{z}' \equiv z'$ とおいた。つまり, $[\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}']$ は, K' 系からみた光の中心を原点とした座標である。この数式を計算して整理すると,

$$\frac{1 + \beta \cos \theta'}{1 - \beta \cos \theta'} \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \frac{2\beta \sin \theta'}{1 - \beta \cos \theta'} \bar{x}' \bar{y}' + \bar{z}'^2 = 1, \quad (4.29)$$

となる。この数式は図 4.5 に示すような傾いた回転楕円体の表面を表す。この図は, 回転楕円体を $\bar{z}' = 0$ の平面で切断したときの断面を表している。後に数式で示すが, 回転楕円体は \bar{z}' 軸について時計回りに角度 $\theta'/2$ だけ傾いている。図 4.5 の太い矢印は光の伝搬方向を示す。また, (4.29) について $\bar{x}' = 0$ とすればわかるように, 観測者の速度や光の伝搬方向に関係なく, 回転楕円体が $\bar{y}' = 1$ で \bar{y} 軸と交わることも特徴である。

数式 (4.29) が示す楕円の大きさと傾きを得るため, 楕円の長軸と短軸を, それぞれ, ξ' 軸, η' 軸のように設定する。もう一つ必要な座標軸を ζ' 軸とし, これは \bar{z}' 軸と同一であるとする。それら座標軸方向の回転楕円体の半径を $A_{\xi'}$, $A_{\eta'}$, $A_{\zeta'}$ としよう。この座標系の $\xi'\eta'$ 平面が, $\bar{x}'\bar{y}'$ 平面を反時計回りに角度 φ だけ回転した平面だとすれば, 回転楕円体の表面は,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2 \varphi}{A_{\xi'}^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{A_{\eta'}^2} \right) \bar{x}'^2 + \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_{\xi'}^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_{\eta'}^2} \right) \bar{y}'^2 \\ & + 2 \left(\frac{1}{A_{\xi'}^2} - \frac{1}{A_{\eta'}^2} \right) \bar{x}' \bar{y}' \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\bar{z}'^2}{A_{\zeta'}^2} = 1, \end{aligned}$$

となる。この数式と, ローレンツ変換から求めた回転楕円体 (4.29) の係数を比較すると, 回転楕円体の大きさと傾きは,

$$A_{\xi'} = \sqrt{\frac{1 - \beta \cos \theta'}{1 - \beta}}, \quad A_{\eta'} = \sqrt{\frac{1 - \beta \cos \theta'}{1 + \beta}}, \quad A_{\zeta'} = 1, \quad \varphi = \frac{\theta'}{2},$$

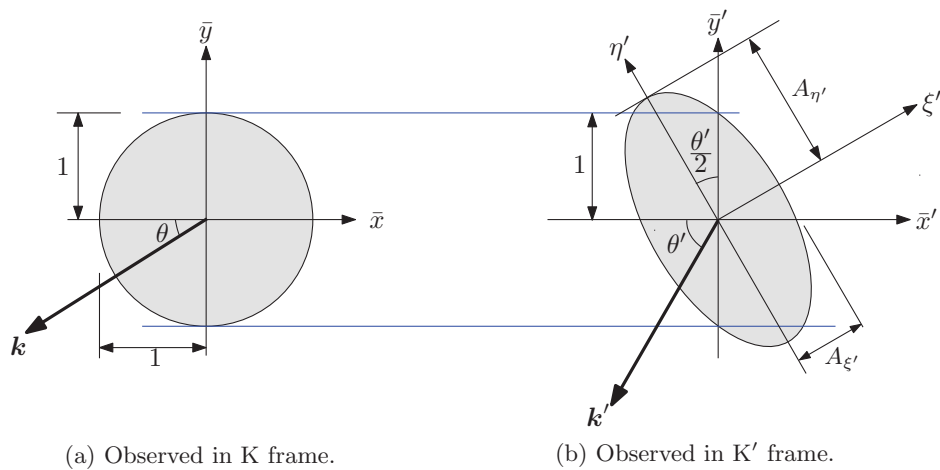


図 4.5: 光とともに伝搬する体積の変換

となることがわかる。回転楕円体を $\zeta' = 0$ の平面で切断した断面となる楕円の長軸と短軸の比は、 $A_{\xi'}/A_{\eta'} = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$ となり、光の伝搬方向 θ' には無関係である。また、回転楕円体は、 K' 系からみた光の伝搬方向の 2 分の 1 の角度だけ傾いている。先ほど求めた楕円球のパラメータから、 K 系からみた球の体積を V としたとき、 K' 系からみた楕円球の体積 V' は、

$$V' = \frac{1 - \beta \cos \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} V = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta} V,$$

となり、ドップラ効果を受けた周波数に反比例する。この計算の最後で、再び光行差の公式を適用し、 K 系からみた到来方向 θ を用いた表現に戻している。ここで導出した結果を用いて、観測者の周囲から到来する光の塊の形状を図 4.6 に示す。静止系 (K 系) からみた場合に光の塊が球としたときの形状変化を図示している。中央に描かれた三角形が観測者である。 K' 系の速度が $\beta = 0.6$ であることから、 K' 系からみた光の塊は、短軸に対する長

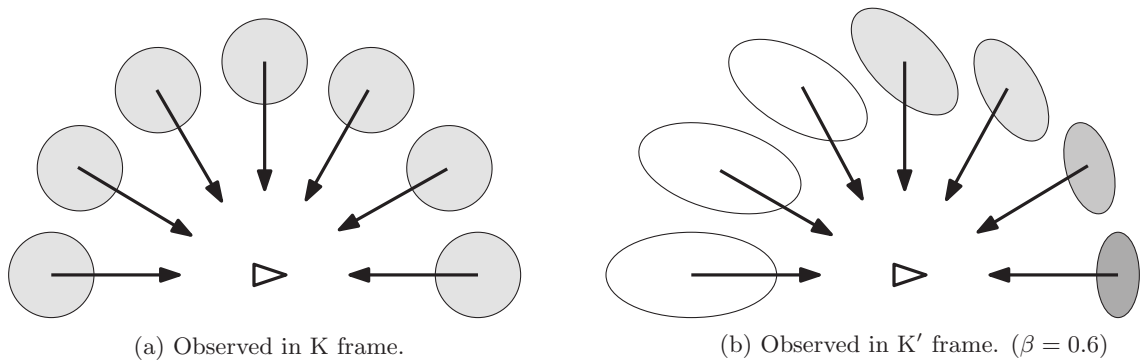


図 4.6: 周囲から到来する光の形状

軸の比が 2 である楕円球である。しかも、楕円球の中心を通る $\eta\zeta$ 平面で切断した断面が

必ず同じ大きさの円になる。楕円球は光の到来方向に応じて、図 4.6 に示すように向きを変えながら、大きさも変化している。

電場の振幅の変換 マクスウェルの方程式によると、電場、磁束密度、電磁波の伝搬方向は右ねじの法則にしたがって直交している。しかも、磁束密度の大きさ B は、電場の大きさ E と $B = E/c$ の関係で結ばれている。ここでは、電磁波が、 K 系からみて xy 平面上を x 軸と角度 $\pi + \theta$ をなす方向に伝搬している (θ の方向から到来している) とする。この条件では、電場の振動方向は一意的に定まらず、電磁波の伝搬方向を軸として回転した任意の方向に設定できる。その電場が任意の方向を向いていることを偏波と呼ぶ。一般の偏波は次の 2 つの偏波を一次結合すれば得られる。

E 波 電場が z 軸方向を向き、磁束密度が xy 平面上を這っている。

B 波 磁束密度が z 軸方向を向き、電場が xy 平面上を這っている。

これら二つの設定を描くと図 4.7 のようになる。この図において、 z 軸は紙面の裏から表に抜ける方向である。また、中央に黒点がある白丸は、同様に紙面の裏から表に抜けるベクトルを示している。図中のベクトル \mathbf{k} が光の伝搬方向である。

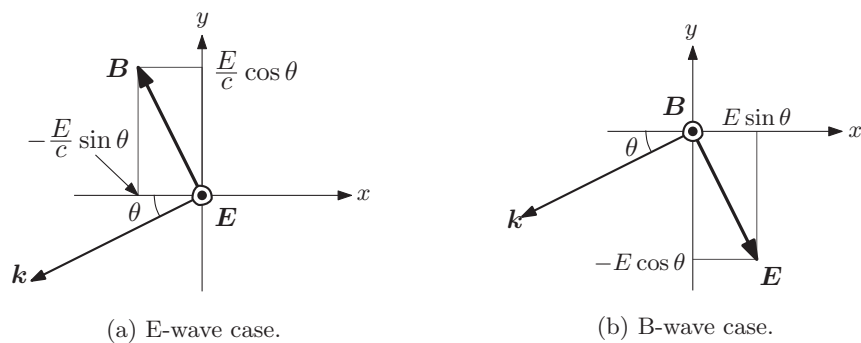


図 4.7: 伝搬方向が与えられたときの電場の偏波方向成分

E 波の場合、電磁場のベクトルは図 4.7 (a) のような方向を向いている。この図に基づいて電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を成分表示すると、

$$\mathbf{E} = \left[0, 0, E \right],$$

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{E}{c} \sin \theta, \frac{E}{c} \cos \theta, 0 \right],$$

である。この場の成分に対し、電磁場のローレンツ変換を適用して K' 系からみた電場を計算すると、

$$\mathbf{E}' = \left[0, 0, \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E \right],$$

が得られる。これより、 K' 系からみた電場の大きさ E' は、

$$E' = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E,$$

となり、ドップラ効果を受けた周波数に比例する。

B波の場合、電磁場のベクトルは図 4.7 (b) のような方向を向いている。この図に基づいて電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を成分表示すると、

$$\mathbf{E} = \left[E \sin \theta, -E \cos \theta, 0 \right],$$

$$\mathbf{B} = \left[0, 0, \frac{E}{c} \right],$$

である。この場の成分に対し、電磁場のローレンツ変換を適用して K' 系からみた電場を計算すると、

$$\mathbf{E}' = \left[E \sin \theta, -\frac{\cos \theta + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E, 0 \right],$$

が得られるので、 K' 系からみた電場の振幅 E' は

$$E' = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E$$

となり、E波と同様にドップラ効果を受けた周波数に比例する。

E波においても、B波においても、 K' 系からみた電場の大きさはともに同じ大きさになっている。つまり、どのような比率で一次結合しても E' と E の関係は同じ関係式で表される。したがって、偏波方向とは無関係に、

$$E' = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E,$$

が成立し、電場の振幅はドップラ効果を受けた周波数に比例するのである。

特定の体積中の電磁エネルギー 体積と電場の振幅を異なる慣性系の間で変換することができたので、特定の体積中に含まれる光のエネルギーを評価しよう。電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} が与えられたとき、真空中でのエネルギー密度 ε_{em} は、

$$\varepsilon_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \right) = \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2,$$

となる。右辺への数式変形において、 $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ と、伝搬する場の振幅の関係 $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ を用いた。エネルギー密度に体積を乗じれば体積中に含まれるエネルギーが計算できる。すなわち、電磁エネルギーは $E_{\text{em}} = \varepsilon_{\text{em}} V$ で計算できる。 K' 系からみた電磁エネルギーを

計算するにあたり、体積がドップラ効果を受けた周波数に反比例し、電場の振幅がドップラ効果を受けた周波数に比例することを利用する。すると、 K' 系からみた電磁エネルギーは、

$$E'_{\text{em}} = \varepsilon_0 E'^2 V'^2 = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \varepsilon_0 V E^2 = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E_{\text{em}},$$

となる。改めて結果を書くと、

$$E'_{\text{em}} = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E_{\text{em}},$$

のように変換されることがわかる。したがって、特定の体積中に含まれる電磁エネルギーはドップラ効果を受けた周波数に比例する。つまり、この結果を

$$\frac{E'_{\text{em}}}{\omega'} = \frac{E_{\text{em}}}{\omega},$$

のように書いてもよい。相対性の原理より、観測された光の周波数がドップラ効果を受けた周波数かを知るすべはないので、特定の体積に含まれる電磁エネルギーは周波数に比例するといったほうがよいであろう。注目する体積が、光子1個分の体積だったとすると、光子1個のエネルギーは周波数に比例する。この推察は $E_{\text{em}} = \hbar\omega$ なる光量子仮説と矛盾しない。

4.5 力の変換

電磁場の変換則を用いて、荷電粒子に作用する力を考察してみよう。質量が m で、かつ、電荷 e をもつ荷電粒子が、ある時点で K' 系に対して瞬間的に静止していたとする。そのとき、荷電粒子に働く力はニュートン力学が近似的に成立するので、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = e \mathbf{E}', \quad (4.30)$$

が成り立つ。ここで、 \mathbf{r}' は K' 系における位置ベクトルである。また、電荷 e にあえてプライム (') をつけていないのは、前節で導出したように、電荷がローレンツ変換に対して不変であることによる。

それでは、(4.30) にローレンツ変換を適用し、相対論的な力を定義してみよう。具体的には左辺に加速度の変換式 (3.11) を適用し、右辺に電場の変換式 (4.17) を適用する。すると、

$$\frac{m}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{d^2 x}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x, \quad (4.31a)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d^2 y}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_y, \quad (4.31b)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d^2 z}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_z, \quad (4.31c)$$

が得られる。右辺のベクトルに付加した添え字 x, y, z は、それぞれ、ベクトルの x, y, z 成分であることを意味する。これは、ある時点で K' 系に対して相対的に静止する荷電粒子を K 系から観測したときの運動方程式である。別の見方をすれば、この方程式は K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動する荷電粒子の運動方程式である。その荷電粒子の速度は x 軸方向に限定されているが、その速度を任意のベクトル \mathbf{u} に拡張することは容易である。すなわち、 K 系に対して任意の速度 \mathbf{u} で運動する荷電粒子の運動方程式は、

$$\frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{d^2 \mathbf{r}_{\parallel}}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_{\parallel}, \quad (4.32)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d^2 \mathbf{r}_{\perp}}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_{\perp}, \quad (4.33)$$

となることが推測できる。ここで、ベクトルに付した添え字 \parallel は速度ベクトル \mathbf{u} に平行な成分、添え字 \perp は \mathbf{u} に垂直な成分を表す。この運動方程式の右辺はともにローレンツ力となっている。ローレンツ力は、1895年にローレンツが彼の電子論において紹介した力であり、それはマクスウェルの方程式の原文におけるファラデーの法則⁴から導かれる。アインシュタインが特殊相対性理論を発表した1905年においても、ローレンツ変換は検証されていなかった。しかし、相対性理論ではマクスウェルの方程式をローレンツ変換した結果、ローレンツ力は必然的に現れるので、相対性理論はローレンツの電子論を後援する存在となったことだろう。相対性理論によらない電磁力学におけるローレンツ力の解釈は、運動する荷電粒子が磁場によってその進路を曲げられるということである。しかし、相対性理論を導入すれば、磁場が荷電粒子の進路を曲げるしくみが見えてくる。ある慣性系 K に対して相対速度をもつ荷電粒子から見た電場は、 K 系から見た電場とは異なっている。そのため、荷電粒子は電場による力を受けているに過ぎないのだが、 K 系から見ると、荷電粒子があたかも電場以外の何かによって力を受けているように見える。その電場以外の何かを、磁場と定義するのである。

どの立場でローレンツ力を解釈するにせよ、 K 系に対して任意の速度 \mathbf{u} で運動する荷電粒子に作用する力は、

$$\mathbf{K} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (4.34)$$

であると考えるのが理にかなっている。この力を速度 \mathbf{u} に平行な成分 \mathbf{K}_{\parallel} と垂直な成分 \mathbf{K}_{\perp} に分離すると、

$$\mathbf{K}_{\parallel} = \frac{m \mathbf{a}_{\parallel}}{(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{K}_{\perp} = \frac{m \mathbf{a}_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (4.35)$$

のように書くことができる。ここで、 $\mathbf{a} \equiv d^2 \mathbf{r} / dt^2$ は加速度ベクトルである。この方程式はニュートン力学における $\mathbf{K} = m\mathbf{a}$ に対応する方程式である。

⁴本書に記載しているマクスウェルの方程式は、1884年にヘビサイド (heaviside) が書き直した方程式である。マクスウェルの原文におけるファラデーの法則は、 $\mathbf{E} = \mu \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ のように記述されていた。

さて、(4.35)で与えられる力 \mathbf{K} に対する変換を求めてみよう。そのためには、(4.35)が任意ベクトル \mathbf{u} の方向に依存した形で書かれているのが不便なので、

$$\mathbf{K} = \frac{m \mathbf{a}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m \mathbf{u}}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2}, \quad (4.36)$$

のように書き直しておく。この式は、単純に $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\parallel} + \mathbf{K}_{\perp}$ を計算すれば導出できる。相対性の原理より、当然、異なる慣性系 K' でも同じ規則性:

$$\mathbf{K}' = \frac{m \mathbf{a}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} + \frac{m \mathbf{u}'}{(1 - u'^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{u}'}{c^2},$$

が成立すべきである。この式の x, y, z すべての成分について、すでに求めた速度と加速度のローレンツ変換を代入していけば力の変換が導出できるはずである。すべての成分に共通して現れる速度と加速度の内積 $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{u}'$ は、

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{u}' = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - vu_x/c^2)^4} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) va_x \right],$$

のように変換される。さらに速度と加速度の変換を代入していくと、

$$\begin{aligned} K'_x &= \frac{1}{1 - vu_x/c^2} \left[\frac{m a_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m u_x}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2} - \frac{m v}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right], \\ K'_y &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \left[\frac{m a_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m u_y}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right], \\ K'_z &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \left[\frac{m a_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m u_z}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right], \end{aligned}$$

が得られる。この結果を整理して書くと、力の変換則は

$$K'_x = \frac{K_x - v P/c^2}{1 - vu_x/c^2}, \quad K'_y = \frac{K_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad K'_z = \frac{K_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad (4.37)$$

という形で表すことができる。力の x 成分に関する変換則に現れる P は、

$$P = \frac{m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}},$$

であり、物理的には(3.17)で既に紹介されている単位時間当たりのエネルギー増加率、すなわち、仕事率を意味する量である。

ところで、力の変換を求めるにあたり、ローレンツ力が運動する荷電粒子に作用する力であると仮定した。そのローレンツ力は本当に、導出した力の変換式にしたがうのだろうか？ したがわないのであれば、ローレンツ力が荷電粒子に作用する力である仮定は正しく

ないことになるし、力の変換式さえも誤りである可能性が出てくる。その仮定を確かめる意味で、ローレンツ力を変換してみると、

$$\begin{aligned} e(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')_x &= \frac{e[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}]_x - v(e\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})/c^2}{1 - vu_x/c^2}, \\ e(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')_y &= \frac{e[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}]_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \\ e(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')_z &= \frac{e[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}]_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \end{aligned}$$

が得られる。ローレンツ力の x 成分に関して、 $e\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$ は電荷 e をもつ荷電粒子に作用する仕事率であるので、ローレンツ力も力の変換則にしたがうことがわかる。よって、この節で導出した力の変換則には矛盾がないことが示された。

4.6 運動する物質内の電磁場

これまで真空中に点在する荷電粒子による電磁場を議論してきた。これに対して、物質内部の電磁場を取り扱うには、誘電率 ϵ 、透磁率 μ といった物質固有のパラメータが必要となる。これらのパラメータは電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu, \quad (4.38)$$

のような関係によって電束密度 \mathbf{D} と磁場 \mathbf{H} に変換することができる。一方、伝導率 σ を用いると、オームの法則:

$$\mathbf{j}_c = \sigma\mathbf{E}, \quad (4.39)$$

によって物質内部の伝導電流密度 \mathbf{j}_c を表現できる。伝導電流密度とは自由電子による電流の密度である。これに対して、電荷密度 ρ をもつ物質自体が速度 \mathbf{v} で運動することによる電流密度 $\rho\mathbf{v}$ を運搬電流密度という。マクスウェルの方程式に現れる電流密度は、

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \rho\mathbf{v},$$

のように伝導電流密度と運搬電流密度の和である。

しかしながら、第 4.1 節で電磁場の変換を導出した際に、真空以外では $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H} = \epsilon\mathbf{B}/\mu$ が成り立たないことを述べた。これから導出するが、実は、物質内部における電場と電束密度、または、磁束密度と磁場の関係には速度に関する項が含まれる。観測者の運動速度によって変換則が異なるのは相対性の原理に反するようにも聞こえるが、そうではない。確かに、真空では自分が静止しているかを判定するすべがないのであらゆる慣性系は同じ物理法則が成り立つと考えるのが自然である。しかし、空気や水のような物質中で

は、物質に対してゼロでない相対速度で運動すると、その相対速度に依存した抵抗力が働くため、媒質内に性質する観測者と運動する観測者は相対的でなく、相対性原理の適用外である。

相対性原理が成立しないが、K系に対して速度 \mathbf{u} で運動する物質内の電場と電束密度、磁場と磁束密度の関係を導出しよう。第4.1節で導出した結果によると、この物質と併走する慣性系 K^* から見た電磁場は、

$$\mathbf{E}_{//}^* = \mathbf{E}_{//}, \quad \mathbf{E}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.40a)$$

$$\mathbf{B}_{//}^* = \mathbf{B}_{//}, \quad \mathbf{B}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.40b)$$

$$\mathbf{D}_{//}^* = \mathbf{D}_{//}, \quad \mathbf{D}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{D}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{H}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.40c)$$

$$\mathbf{H}_{//}^* = \mathbf{H}_{//}, \quad \mathbf{H}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{D}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (4.40d)$$

のように変換される。ここで、速度 \mathbf{u} の方向は任意であり、添え字 $//$ を付したベクトルはその速度と平行な成分、 \perp を付したベクトルは速度と垂直な成分を表す。慣性系 K^* から見ると物質は静止しているので、非相対論的な関係 $\mathbf{D}^* = \varepsilon \mathbf{E}^*$ 、 $\mathbf{H}^* = \mathbf{B}^*/\mu$ が成立すると考える。この関係は、

$$\mathbf{D} + \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{H} = \varepsilon (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (4.41a)$$

$$\mathbf{H} - \mathbf{u} \times \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{E} \right), \quad (4.41b)$$

のように書くことができる。この連立方程式を解けばK系から見たときの電界と電束密度、磁束密度と磁界の変換を得ることができる。この方程式を解くには、次のような操作をすればよい。まず、(4.41a)の両辺に左から \mathbf{u} を外積すると、

$$\mathbf{u} \times \mathbf{D} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \mathbf{H} = \varepsilon \left[\mathbf{u} \times \mathbf{E} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{u} - u^2 \mathbf{E} \right], \quad (4.42)$$

が得られる。一方、(4.41a)の両辺に \mathbf{u} を内積した場合、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}$ が得られるので、(4.42)は

$$\mathbf{u} \times \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{u} \times \mathbf{E} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} - \varepsilon u^2 \mathbf{B} + \frac{u^2}{c^2} \mathbf{H},$$

のように変形できる。これを(4.41b)に代入すれば \mathbf{D} を消去できるので、 \mathbf{H} を \mathbf{B} と \mathbf{E} の関係式で表現することができる。同様の操作をすれば、 \mathbf{D} についても解くことができる。その結果として、

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left\{ \left(\varepsilon - \frac{u^2}{c^4 \mu} \right) \mathbf{E} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) \left[\mathbf{u} \times \mathbf{B} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} \right] \right\}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left\{ \left(\frac{1}{\mu} - u^2 \varepsilon \right) \mathbf{B} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) [\mathbf{u} \times \mathbf{E} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u}] \right\}, \quad (4.44)$$

が得られる。これが等速運動する物質内の電磁場の関係式である。この関係を逆に解けば、

$$\mathbf{E} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - u^2 \mu \right) \mathbf{D} + \left(\frac{1}{c^2 \varepsilon} - \mu \right) [\mathbf{u} \times \mathbf{H} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{u}] \right\}, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left\{ \left(\mu - \frac{u^2}{c^4 \varepsilon} \right) \mathbf{H} + \left(\frac{1}{c^2 \varepsilon} - \mu \right) [\mathbf{u} \times \mathbf{D} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}) \frac{\mathbf{u}}{c^2}] \right\}, \quad (4.46)$$

なる関係を得ることができる。非相対論では電荷密度 \mathbf{D} は単純に電場 \mathbf{E} に比例していたが、相対性理論では電荷密度 \mathbf{D} は電場 \mathbf{E} にも磁束密度 \mathbf{B} にも依存し、観測者に対する物質の相対速度 \mathbf{u} の依存性が含まれている。特別な場合として、誘電率が ε_0 、透磁率が μ_0 のときは速度 \mathbf{u} についての依存性が消える。一般の誘電率と透磁率の場合について、 u/c の 1 次近似をとると、

$$\mathbf{D} \simeq \varepsilon \mathbf{E} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} \simeq \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{E},$$

となるので、非相対論的電磁気学における \mathbf{E} と \mathbf{D} 、または、 \mathbf{B} の \mathbf{H} 関係は、 u/c の 0 次近似にすぎないことがわかる。

次にその物質内の電荷密度と電流密度を考えてみよう。K 系から観測した電流密度は、物質自体が K 系に対して相対速度 \mathbf{u} で運動しているため、

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \rho \mathbf{u},$$

のように伝導電流と運搬電流の和で表される。それを考慮して物質と併走する K^* 系から観測した電荷密度を求めると、

$$\rho^* = \sqrt{1 - u^2/c^2} \rho - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j}_c)/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

が得られる。これを K 系から見た電荷密度 ρ について解くと、

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j}_c)/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.47)$$

となる。ここで、静止電荷密度の意味で $\rho_0 \equiv \rho^*$ という記号に置き換えた。相対速度をもつ別の慣性系から見ると、伝導電流が電荷密度に変換されてしまうことがこの結果からわかる。すると、当然、その変換は運搬電流密度にも当てはまることなので、電流密度を伝導電流と運搬電流に分けた場合、その混合率は観測者の速度によって異なるということである。

一方、電流密度に関して変換則を書いてみると、

$$\mathbf{j}_{\parallel}^* = \frac{(\mathbf{j}_{c\parallel} + \rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{j}_{\perp}^* = \mathbf{j}_{\perp},$$

となる。慣性系 K^* は物質と併走しているので、この系から見ると運搬電流が存在しない、すなわち、 $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}_c^*$ である。よって、伝導電流密度は、

$$\mathbf{j}_{c\parallel}^* = \frac{\mathbf{j}_{c\parallel}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{j}_{c\perp}^* = \mathbf{j}_{c\perp}, \quad (4.48)$$

のような変換則にしたがうことがわかる。さらに、物質と併走する K^* 系からの観測量は非相対論的な近似が成り立つので、オームの法則 $\mathbf{j}_c^* = \sigma \mathbf{E}'$ が成り立つ。これを K 系から見た観測量に変換すると、

$$\mathbf{j}_c = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} \right], \quad (4.49)$$

となる。これが運動する物質におけるオームの法則である。

4.7 分極ベクトルと磁化ベクトル

物質内部の誘電率と透磁率が ε_0 と μ_0 でないのは、物質内部で電気分極と磁化が発生するからである。電気分極は、物質分子が電場の影響を受けて物質内部に電氣的な偏りが現れる現象である。磁化は、磁場によって物質の電子軌道、または、電子スピンの影響を受ける現象である。この節では、相対性理論的な分極と磁化を扱う。

前節と同じように、ある物質が K 系に対して速度 \mathbf{u} で運動している。この速度は x 軸方向とは限らない任意のベクトルであるとする。この物質と併走する慣性系を K^* とし、この慣性系から観測される電場や磁束密度のような観測量は \mathbf{E}^* , \mathbf{B}^* のようにアスタリスク(*)を右肩に付した記号で表すものとする。この物質内部に発生する分極と磁化を、それぞれ、 \mathbf{P}^* , \mathbf{M}^* とすれば、物質と併走する慣性系 K^* から見れば非相対論的な近似が成り立つので、

$$\mathbf{D}^* = \varepsilon_0 \mathbf{E}^* + \mathbf{P}^*, \quad \mathbf{H}^* = \frac{\mathbf{B}^*}{\mu_0} - \mathbf{M}^*, \quad (4.50)$$

と書くことができる。

ところで、分極ベクトルと磁化ベクトル以外の観測量は既に座標変換に対してどのように変換されるのかがわかっている。電場 \mathbf{E}^* と磁束密度 \mathbf{B}^* を速度ベクトル \mathbf{u} に平行な成分と垂直な成分に分離すると、

$$\mathbf{E}_{\parallel}^* = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.51a)$$

$$\mathbf{B}_{\parallel}^* = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.51b)$$

のように、K系から観測される量との関係を表すことができる。当然、(4.50)は、

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{D}_{\perp} = \frac{\mathbf{D}_{\perp}^* - \mathbf{u} \times \mathbf{H}^*/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.52a)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H}_{\perp}^* + \mathbf{u} \times \mathbf{D}^*}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.52b)$$

によってK系から見た観測量に変換できる。それでは、(4.52a)を適用して、K系から見ると分極がどのように観測されるかを導出してみよう。まず、(4.52a)に(4.50)を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\parallel} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\parallel}^* + \mathbf{P}_{\parallel}^*, \\ \mathbf{D}_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}_{\perp}^* + \mathbf{P}_{\perp}^* - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \left(\frac{\mathbf{B}^*}{\mu_0} - \mathbf{M}^* \right) \right], \end{aligned}$$

が得られる。この式の右辺に含まれる \mathbf{E}^* と \mathbf{B}^* に(4.51a)と(4.51a)を代入すると、

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{P}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{D}_{\perp} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{P}_{\perp}^* + \mathbf{u} \times \mathbf{M}^*/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.53)$$

であることが導かれる。磁場 \mathbf{H} についても同様の数式変形をすると、

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \frac{\mathbf{B}_{\parallel}}{\mu_0} - \mathbf{M}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp}}{\mu_0} + \frac{\mathbf{M}_{\perp}^* - \mathbf{u} \times \mathbf{M}^*}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.54)$$

が得られる。これらの結果を見ると、速度 \mathbf{u} に対する平行成分と垂直成分はともに、右辺第2項がK系から見た分極ベクトル、磁化ベクトルであると考えられる。よって、これらの式を単純に

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (4.55)$$

のように書き換えても構わない。この関係式は(4.50)と同じ形であり、しかも、速度ベクトル \mathbf{u} の任意性から、どの慣性系から見ても、(4.55)が成り立つことがわかる。さらに、結果の予想はつくだろうが、(4.55)を(4.15)と(4.16)に代入すれば、K系に対して x 軸方向に速度 v で運動するK'系から見た分極ベクトルと磁化ベクトル:

$$\mathbf{P}'_{\parallel} = \mathbf{P}_{\parallel}, \quad \mathbf{P}'_{\perp} = \frac{\mathbf{P}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{M}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{M}'_{\parallel} = \mathbf{M}_{\parallel}, \quad \mathbf{M}'_{\perp} = \frac{\mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{P}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.57)$$

を得ることができる。この関係は、(4.54)と(4.54)の右辺第2項に現れる分極ベクトルと磁化ベクトルとも矛盾しない変換式になっている。

4.8 電磁放射

荷電粒子が印加される交流電場などによって加速度運動すると、荷電粒子は電磁波を周囲に放射し、エネルギーを失うことが電磁気学によってわかっている。放射される電磁波こそが光である。本節では、電磁波の放射に関わる物理現象を調べる。

4.8.1 荷電粒子のエネルギー損失

加速する荷電粒子は、電磁波の形で電磁エネルギーを放射する。その放射によって、荷電粒子はエネルギーを失う。単位時間あたりにどれくらいのエネルギーを失うのか、本項で考察してみよう。

電磁場のエネルギーの収支は、電荷と電流の関係と同様に、流れの方程式で記述できる。真空中では、電磁場のエネルギーに関する流れの方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0,$$

なる方程式で記述できる。ここで、 u は電磁エネルギー密度、 \mathbf{S} はポインティングベクトルであり、

$$u = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \right), \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0},$$

のように定義される。流れの方程式を積分形式に書き換えると、

$$-\frac{dW}{dt} = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.58)$$

なる形で記述できる。ここで、右辺の積分域は荷電粒子を中心とする半径が無限大の球面であり、 W は球の内部に含まれるエネルギー (u を球の内部でタイ積分した量) である。左辺は単位時間あたりの W の減少率である。言い換えると、左辺は単位時間あたりに荷電粒子が失うエネルギーである。一方、右辺に含まれる \mathbf{n} は積分域である球面の法線ベクトルである。そのベクトルは同時に電磁波の伝搬方向であると考えてもよい。

放射電場と放射磁束密度は、非相対論近似で、

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{R}, \quad \mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{e\mu_0}{4\pi} \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{R},$$

である。放射場の振幅は、放射源からの距離に反比例するのだ。ポインティングベクトルは、

$$\mathbf{S} = \frac{|\mathbf{E}_{\text{rad}}|}{c\mu_0} \mathbf{n} = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{R^2} \mathbf{n},$$

のように計算される。ポインティングベクトルをエネルギーの放射率 (4.58) に代入して具体的に計算しよう。ただし、積分範囲は半径 R の球面とするので、水平角 φ と天頂角 θ を積分変数として用いる。座標の設定としては、図 4.8 に示すように、加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が z 軸になるように設定している。速度 $\boldsymbol{\beta}$ の方向については特に気にしなくてよい⁵。このとき、

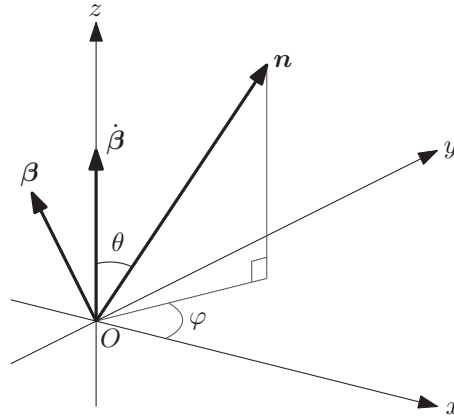


図 4.8: 放射電磁場のベクトルの関係

電磁波の放射方向として、水平角 φ と天頂角 θ を設定する。すると、球面上の微小面積が $dS = R^2 d\theta d\varphi$ となるので、

$$\begin{aligned}
 -\frac{dW}{dt} &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 \sin\theta d\theta \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_0^\pi |(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \sin\theta d\theta \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_0^\pi |\dot{\beta} \cos\theta \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \sin\theta d\theta \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_0^\pi \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2\theta) \sin\theta d\theta \\
 &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_{-1}^1 \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2\theta) d\cos\theta = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \dot{\beta}^2,
 \end{aligned}$$

のように数式変形できる。第 2 行目への数式変形には、 φ についての積分を実行し、さらに、ベクトル公式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C},$$

を利用した。第 3 行目への数式変形では、 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ と \mathbf{n} が θ の角度をなすことを利用した。得られた数式は、

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{u}^2, \quad (4.59)$$

⁵この時点で相対論的効果を考慮する場合、被積分関数に速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ が含まれるので、 $\boldsymbol{\beta}$ の方向を気にしなければならない。

と書き換えることができる。この数式は、加速度運動する荷電粒子が単位時間に放射する電磁エネルギーの非相対論近似である。この数式は単位時間に放射されるエネルギーであるので、この量は無線工学の分野で放射電力と呼ばれる。無線機から放射される電磁波のエネルギーは(4.59)にしたがうのだ。放射される電磁波は交流電磁場である。交流電磁場をつくるには、荷電粒子の往復運動が必要になる。往復運動するということは、荷電粒子に加速度が生じているため、電磁放射をするのである。

素粒子物理学の検証に用いる粒子加速器では、電子や陽子がほぼ光速まで加速され、加速器内を周回するため、その加速度で強烈な電磁放射が発生する。粒子加速器で発生する電磁放射は相対論的効果を見捨てることはできない。上で導出した(4.59)を相対論的な数式に書き換えよう。書き換えるには、加速度の自乗 $\dot{\beta}^2$ を相対論的な量に書き換えればよい。第3.2節で導出した加速度の変換公式をベクトル形式に書き直すと、

$$\dot{\beta}'_{u\parallel} = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_u)^3} \dot{\beta}_{u\parallel},$$

$$\dot{\beta}'_{u\perp} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_u)^3} \left[(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_u) \dot{\beta}_{u\perp} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_u) \boldsymbol{\beta}_{u\perp} \right],$$

が得られる。この数式では、速度も加速度も光速 c で正規化している。この数式は、二つの慣性系 K と K' の間の加速度変換であり、 K 系に対して K' 系が正規化速度 $\boldsymbol{\beta}$ で運動している。 K 系と K' 系から見た荷電粒子の正規化速度が $\boldsymbol{\beta}_u$ と $\boldsymbol{\beta}'_u$ 、正規化加速度が $\dot{\boldsymbol{\beta}}_u$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}'_u$ である。また、添え字 \parallel と \perp は、それぞれ、正規化速度 $\boldsymbol{\beta}$ に平行な成分と垂直な成分を表す。

電磁放射エネルギーの数式(4.59)に相対論効果を入れるには次のように考える。 K' 系はある時点で(おそらく一瞬だけ)荷電粒子と並走している。その時点の短い期間で、 K' から見ると荷電粒子の速度はゼロか非常に小さいので非相対論近似が成立する。つまり、電磁波の放射電力が、

$$P'_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \dot{\beta}'^2,$$

となるのである。この量を K 系の変数で書き換えるのである。荷電粒子が K' と並走していることから、 $\boldsymbol{\beta}_u = \boldsymbol{\beta}$ である。当然ながら、 $\boldsymbol{\beta}_{u\perp} = 0$ であることにも注意しておこう。すると、加速度の変換公式は、

$$\dot{\beta}'_{u\parallel} = \frac{\dot{\beta}_{\parallel}}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad \dot{\beta}'_{u\perp} = \frac{\dot{\beta}_{\perp}}{1 - \beta^2},$$

となるはずである。この変換公式を用いて正規化加速度の自乗を計算すると、

$$\dot{\beta}'^2 = \frac{\dot{\beta}_{\parallel}^2}{(1 - \beta^2)^3} + \frac{\dot{\beta}_{\perp}^2}{(1 - \beta^2)^2} = \frac{\dot{\beta}^2 - \beta^2 \dot{\beta}_{\perp}^2}{(1 - \beta^2)^3} = \frac{\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1 - \beta^2)^3},$$

が得られる。右辺を得るためには、二つのベクトルの外積の大きさがベクトルによって貼られる平行四辺形の面積と等しいことを利用した(図4.9)。したがって、相対論的効果を

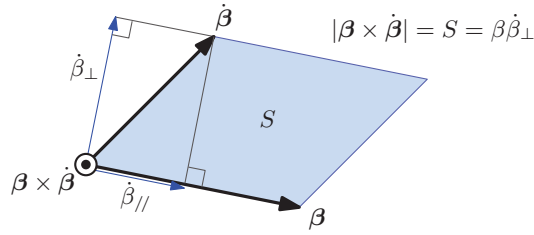


図 4.9: 外積ベクトルの大きさ

考慮した電磁波の放射電力は,

$$P_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1 - \beta^2)^3}, \quad (4.60)$$

なる数式で表現できる。実は、電磁気学に特殊相対性理論の効果が対応しているので、電磁気学から導かれる放射電磁場の数式から近似を用いずに厳密に計算すると同一の数式が得られる。しかし、直接的に計算すると、同じ結果を得るにしても本書の何倍もの計算労力を要する。計算労力の面から、相対性理論の効果を実感することができるという例であった。

サイクロトロン放射 ここでサイクロトロン放射について述べておこう。サイクロトロン放射とは、円運動する荷電粒子による電磁波の放射である。円運動をすれには、向心力による加速度が必要であるので、その加速度によって電磁放射が起きるのである。ここでは、荷電粒子が等速円運動をしていると仮定しよう。その場合、速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ は必ず直交するので、

$$P_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta^2)^2}, \quad (4.61)$$

となる。さらに円運動の回転半径を r とすると、 $\dot{\beta} = c\beta^2/r$ であるので、サイクロトロン放射によって荷電粒子が単位時間当たり失うエネルギーは、

$$P_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{c\beta^4}{r^2(1 - \beta^2)^2},$$

となる。特に、荷電粒子の周回速度が光速に近い場合、この現象はサイクロトロン放射と区別し、シンクロトロン放射と呼ばれる。シンクロトロン放射は、素粒子物理学の実験設備である粒子加速器で発生する。先ほど導出した式によって半径が小さいほど荷電粒子が失うエネルギーが大きくなるので、それを避けるため、高エネルギーの粒子加速器は大きな敷地⁶を要する。

⁶欧州原子核研究機構 (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire; CERN) の世界最大の円形粒子加速器 (large hadron collider; LHC) は、全周 27 km の規模である。

古典論による水素原子の寿命 正の電荷をもった原子核の周りを負の電荷をもった電子が運動する原子モデルは、量子力学によって安定性が保証されている。量子力学が提唱される前、周回運動する電子は電磁波を放射することによってエネルギーを失い、原子核に向かって落下すると考えられていた。つまり、すぐに原子が崩壊してしまうので電子が原子核を周回するモデルは受け入れられなかったのである。ここでは、量子力学を無視し、水素原子が崩壊するまでの時間を計算してみよう。

水素原子の中心には電荷 e の原子核が存在し、その周りを電荷 $-e$ をもつ電子が周回している。電子の質量を m 、速度を v 、電子と原子核の距離を r としよう。電子の速度が光速に比べて無視できる程度とすると、電子のエネルギーは

$$E = \frac{2}{m}v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

となる。この式の第1項が運動エネルギー、第2項がポテンシャルエネルギーである。また、原子核と電子の間に作用するクーロン力が、電子を円運動させるための向心力となっているとすると、

$$m\dot{v} = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

となる。この関係式から v を消去すると、電子のエネルギーは

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.62)$$

のように変形される。ところが、電子が周回運動をするとこのエネルギーは電磁放射によって失われていく。非相対論近似で、単位時間に電子が失うエネルギーは

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e^4}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \right)^2, \quad (4.63)$$

である。電子がエネルギーを失うと、電子は徐々に原子核に向かって落下していくはずである。初期状態で r_0 の距離にあった電子が原子核に衝突するまでの時間 T を算出しよう。時間 T は

$$T = \int_{r=r_0}^{r=0} dt = \int_{r_0}^0 \frac{dt}{dr} dr, \quad (4.64)$$

のように計算できる。この計算に必要な dr/dt はエネルギー (4.62) を r について微分し、その結果を (4.63) と比較すれば得られる。結果を書くと、

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^3 r^2},$$

となる。これを (4.64) に代入すると、

$$T = -\int_{r_0}^0 \frac{3}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 m^2 c^3 r^2 dr = \frac{1}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 m^2 c^3 r_0^3,$$

となる。初期状態での原子核までの距離 r_0 として、ボーア半径:

$$r_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m} \approx 0.529 \times 10^{-10} \text{ m},$$

を設定し、さらに、数式を簡略化するために、微細構造定数:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

を用いて T を書くと、

$$T = \frac{\hbar}{4mc^2\alpha^5},$$

となる。この時間を具体的に計算すると 1.56×10^{-11} 秒という非常に短い時間になる。つまり、量子力学が提唱される前、このように原子が一瞬のうちに崩壊するため、原子核を電子が周回するモデルは支持されなかったのである。

4.8.2 電磁放射の反作用

これまで学んだように、加速する荷電粒子は電磁波を放射するため、エネルギーを失う。エネルギーを失うことは運動エネルギーが失うことであるので、荷電粒子は減速するのである。端的に言うと、加速する荷電粒子は放射によって減速する力の作用を受けるのである。その減速のための力の作用は電磁放射の反作用と呼ばれる。

次の手段によって電磁放射の反作用を計算してみよう。荷電粒子には時刻 t_0 から t_1 にわたって力 \mathbf{K} が印加されているとする。しかし、時刻 t_0 と t_1 において、荷電粒子の速度がゼロとなるように \mathbf{K} は制御されているとする。それ以外の時刻における速度は任意であるが、非相対論近似が適用できる程度の小さな速度とする。そのような荷電粒子は (4.59) で記述される仕事率でエネルギーを失う。この場合、エネルギー保存則は、

$$\begin{aligned} E_k(t_1) - E_k(t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} dt - \left[\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{K} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt, \end{aligned} \quad (4.65)$$

のように書かれる。この数式変形において、 $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}(t_1) = 0$ を仮定した。右辺において、第2項が荷電粒子に作用する減速する力を表している。その減速する力は、(4.65) の右辺がいかなる速度 v に対してもゼロとなる条件として、

$$\mathbf{K}_{\text{dec}} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \quad (4.66)$$

でなければならない。導出した電磁波の放射の反作用は、非相対論近似であるため、速度 \boldsymbol{v} が小さいときのみ成立する。

導出した (4.66) は速度が小さい場合の近似式であるので、光速と比較できる程度の速度にも対応できるように (4.66) を拡張してみよう。つまり、電磁放射の反作用を相対論に対応させようということだ。そのために、次のように考えてみる。対象とする荷電粒子は、静止系 (K 系) からみて x 軸方向に速度 v で運動している。もう一つの慣性系 K' 系を考える。 K' 系は K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動している。ある時点において、荷電粒子は K' 系からみると静止している。同時に、K 系からみると荷電粒子は x 軸方向に速度 v で運動している。荷電粒子の加速度は xy 平面上となるように座標軸が選ばれている。このような設定において、 K' 系からみると、荷電粒子に作用する放射の反作用は非相対論近似が成り立つので、 K' 系からみた放射の反作用を \boldsymbol{K}' とおくと、

$$\boldsymbol{K}' = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\boldsymbol{u}}',$$

が成り立つ。ここで、 \boldsymbol{u}' は K' 系からみた荷電粒子の速度とする。同様に、K 系からみた荷電粒子の速度を \boldsymbol{u} とおくと、上記の条件設定より、 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}' = 0$ である。K 系からみた放射の反作用は、速度成分と平行成分と垂直成分に分離すると力のローレンツ変換より、

$$\boldsymbol{K}_{\parallel} = \boldsymbol{K}'_{\parallel}, \quad \boldsymbol{K}_{\perp} = \sqrt{1-\beta^2} \boldsymbol{K}'_{\perp},$$

となる。K 系からみた放射の反作用を計算するには、加速度の時間微分 $\ddot{\boldsymbol{u}}'$ をローレンツ変換し、 $\boldsymbol{K}'_{\parallel}$ と \boldsymbol{K}'_{\perp} を K 系からみた物理量で記述する。その後、力のローレンツ変換によって K 系からみた力に変換する。

加速度の時間微分の変換を導出するため、加速度のローレンツ変換を書いておこう。加速度のローレンツ変換は、座標のローレンツ変換を時間について 2 階微分すれば得られる。そのうち、 x 軸と y 軸方向の成分について結果を書くと、

$$\begin{aligned} \dot{u}'_x &= \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-vu_x/c^2)^3} \dot{u}_x, \\ \dot{u}'_y &= \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-vu_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \dot{u}_y + \frac{v\dot{u}_x}{c^2} u_y \right], \end{aligned}$$

である。また、座標のローレンツ変換から、時間微分を与える演算子は、

$$\frac{d}{dt'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-vu_x/c^2} \frac{d}{dt},$$

のように変換される。この規則性を利用して加速度のローレンツ変換を時間について微分すると、

$$\ddot{u}'_x = \frac{(1-\beta^2)^2}{(1-vu_x/c^2)^5} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \ddot{u}_x + \frac{3v(\dot{u}_x)^2}{c^2} \right],$$

$$\ddot{u}'_y = \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-vu_x/c^2)^3} \left[\frac{3vu_x}{c^2} \dot{u}_y - \frac{3v^2 \dot{u}_x^2}{c^4(1-\beta^2)} u_y + (1-\beta^2) \ddot{u}_y + \frac{v \ddot{u}_x}{c^2} u_y \right],$$

が得られる。ここで、速度ベクトルに関する設定条件 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{u}' = 0$ を代入し、加速度の時間微分を、速度に対して平行成分と垂直成分としてベクトル表記すると、

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{v}}'_{\parallel} &= \frac{(\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{v^2(1-\beta^2)^2} \mathbf{v} + \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2 v^2 (1-\beta^2)^3} \mathbf{v}, \\ \ddot{\mathbf{v}}'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\frac{\ddot{\mathbf{v}}}{1-\beta^2} + \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{c^2(1-\beta^2)^2} \dot{\mathbf{v}} - \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2 v^2 (1-\beta^2)^2} \mathbf{v} - \frac{3(\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{v^2(1-\beta^2)} \mathbf{v} \right], \end{aligned}$$

のようになる。ここで、 K' 系からみた放射の反作用が、

$$\mathbf{K}'_{\parallel} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{u}}'_{\parallel}, \quad \mathbf{K}'_{\perp} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{u}}'_{\perp},$$

であることに注意し、力のローレンツ変換によって K 系からみた放射の反作用が、

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\parallel} + \mathbf{K}_{\perp} = \mathbf{K}'_{\parallel} + \sqrt{1-\beta^2} \mathbf{K}'_{\perp},$$

によって計算できるので、

$$\mathbf{K} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 (1-\beta^2)} \left\{ \ddot{\mathbf{v}} + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{v}}}{c^2(1-\beta^2)} + \frac{\mathbf{v}}{c^2(1-\beta^2)} \left[(\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}}) + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)} \right] \right\}, \quad (4.67)$$

が得られる。この数式は、光速 c で正規化した速度、加速度、その導関数で記述することもできる。正規化した量を用いると、

$$\mathbf{K} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 (1-\beta^2)} \left\{ \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1-\beta^2)} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\beta^2} \left[(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{1-\beta^2} \right] \right\}, \quad (4.68)$$

と数式に現れる係数が少しだけ簡素になる。得られた数式 (4.67) と (4.68) が、相対論的な放射の反作用である。この数式は、相対性理論前の電磁気学からも導出することができるが、これくらいの計算では導出できないだろう。