第3章　運動学

光速度不変の原理によって, 異なる速度で運動する慣性系の間の変換はガリレイ変換とは異なり, 時間さえも観測者ごとにことなる座標となる。このように時間の概念が変わったことにより, 速度や加速度などの運動に関する物理量もニュートン力学とは違うものになる。 本節では, 光速度不変の原理に基づき速度と加速度の変換を導き, 運動量や運動エネルギーについて考察する。

3.1　速度変換

速度変換とは, 別の慣性系から観測したときの速度を算出するための変換公式である。ある慣性系 K から観測していた物体を別の慣性系 K' から見ると, K 系から見た速度とは異なって観測される。速度が異なって観測されることはガリレイ変換でも成立する。ガリレイ変換の場合, K' 系から観測される速度は, K 系から見た物体の速度と K' 系の速度の加減算で計算できる。しかし, ローレンツ変換では単純な加減算で速度を変換できないことが簡単に予想できる。それは光速不変の原理を思い起こせば明らかである。光速不変の原理を速度変換則に置き換えると, 光速にどのような速度を加減算しても得られる速度は常に光速に等しいことになる。このような結果を得るには, 単純な加減算でなく, 多少, 複雑な変換則であることが予想される。本節では, 異なる慣性系から見た速度を得るための変換則を導出しよう。

簡単なことと思うかもしれないが, 速度とは何かを考えてみよう。速度とは, 単位時間当たりの物体の変位量である。単位時間あたりと書いているが, 物体の速度が変化しても成立するように, 微小時間 $\mathrm{d}t$ の間の変位 $[\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z]$ を計測し,

$$\boldsymbol{u} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right],$$

によって速度を計算するのである。注意しなければならないのは, 観測者が存在する慣性系が異なると, 位置の尺度も時間の尺度も異なることである。

ある物体 P を K 系から見たときの座標を $[ct, x, y, z]$, K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動する K' から見たときの座標を $[ct', x', y', z']$ とする。K 系から見たとき, この座

標が微小変化をして $[c\,(t+\mathrm{d}t), x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z]$ となったとする。一方, K′ 系から見たとき, この座標は $[c\,(t'+\mathrm{d}t'), x'+\mathrm{d}x', y'+\mathrm{d}y', z'+\mathrm{d}z']$ と書くことにする。この微小変位に対してもローレンツ変換:

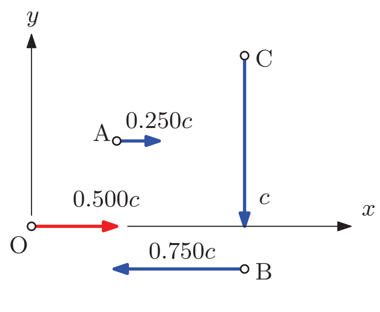
$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - (v/c^2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z, \tag{3.1}$$

が成り立つ。この関係は, $[c\,(t+\mathrm{d}t), x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z]$ のローレンツ変換が $[c\,(t'+\mathrm{d}t'), x'+\mathrm{d}x', y'+\mathrm{d}y', z'+\mathrm{d}z']$ になることから容易に導かれる。または, ローレンツ変換を微分しても同一の結果が得られる。

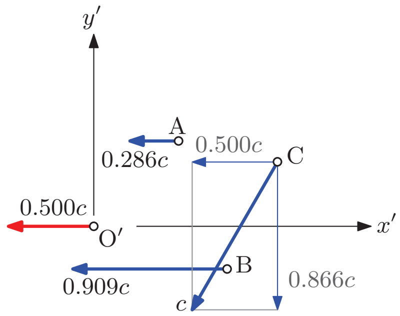
ここで, 物体 P の速度について考えてみよう。K 系から見たときの速度を $[u_x, u_y, u_z] = [\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z]/\mathrm{d}t$ とする。K′ 系に関しては, これまでと同様に, プライムをつけて表記する。微小変位のローレンツ変換より, 速度変換は,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \tag{3.2}$$

となる。この相対速度は, 第 2.5.3 項で予想した相対速度と同一の結果である。速度変換の例を図示すると, 図 3.1 のようになる。この図では, K′ 系が K 系に対し, 右方向に $v = 0.500c$ で等速度運動していることを仮定した。特に, 物体 B がガリレイ変換では K′ 系から見た速度が光速を超えるのだが, ローレンツ変換では $0.909c$ となっている。さらに, 物体 C は



(a) Observed from K frame.



(b) Observed from K′ frame.

図 3.1: 相対速度の変換

二つの慣性系の間で速度成分が異なっているが, 速度ベクトルの大きさ (速さ) はどちらも c である。この変換結果は光速不変の原理と合致する。また, 図 3.1 における物体 A, B, C の位置は, 第 2.5.3 項で取り扱った斜めローレンツ変換に基づいて計算した結果である。面白いことに, 図 3.1 (a) では物体 B と C の x 座標が一致しているのに, 図 3.1 (b) では一致していない。この現象は, 前章で説明したように, 異なる慣性系では同一性が一致しないことが原因である。この例では, K 系と K′ 系の原点が重なる時刻を $t = t' = 0$ となるように時計合わせしている。K 系ではその時刻と同時に, 物体 B と C の x 座標が等しくなる。しかし, K′ 系では同時性が異なるため, $t' = 0$ のとき物体 B と C の x 座標が異なるのだ。

続いて, 変換された速度の大きさに注目しよう。その目的は, 光速不変の原理と, 変換された速度が絶対に光速を超えないことを検証するためである。変換された速度の大きさを比べるために各座標成分の自乗和を計算すると,

$$\frac{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}{c^2} = 1 - \frac{(1-\beta^2)\left[1-(u_x^2+u_y^2+u_z^2)/c^2\right]}{(1-vu_x/c^2)^2}, \tag{3.3}$$

が得られる。例えば、K 系から見たときの速さが c であれば, $u_x^2+u_y^2+u_z^2=c^2$ であるから, 右辺の第 2 項がゼロとなる。したがって, K$'$ 系から見た速度も c に等しい。したがって, 速度変換は光速不変の原理と矛盾しない。

座標系の速さ v と, 物体の速さ $(u_x^2+u_y^2+u_z^2)^{1/2}$ がともに光速より小さい場合, 変換される速さは, 必ず, 光速より小さくなる。変換式 (3.3) が正であり, 右辺の第 2 項も正であるので, (3.3) はゼロ以上で 1 未満の値となるはずだ。つまり, 光速度より小さな速度を他の慣性系から見ても光速より速くなることはあり得ない。

速度変換を応用すると, どんなに加速しても光速を超えられないと推測できる。その理由を説明しよう。K 系に対して速度 $c/2$ で運動する観測者が, さらに, 自分から見た相対速度が $c/2$ になるまで加速したとする。わかりにくい表現なので, ある場面を想像しよう。運動中の自分を, ある物体が追い越した。その物体の相対速度を計測すると $c/2$ だった。次に, その物体と同一速度になるまで加速する。追いつくまでではない。同一速度になるまで, すなわち, 相対速度がゼロになるまでだ。速度の速度変換則によると, 自分の速度が $c/2$ のとき相対速度 $c/2$ で自分を追い抜く物体の速度は $4c/5$ である。つまり, 最終的に, 自分は K 系から見ると速度 $4c/5$ まで加速するのだ。その速度からさらに, 自分から見た相対速度が $c/2$ になるまで加速すると, K 系から見た観測者の速度は $13c/14$ となる。その結果を図示すると図 3.2 が得られる。信じがたいが, 隣り合う速度はすべて, 相対速度が $c/2$ である。また, 図のもっとも下に描いた光速は, 図に示したどの速度の観測者から見ても c なのである。この考察のように, 加速の操作をどんなに繰り返しても, 速度変換則による

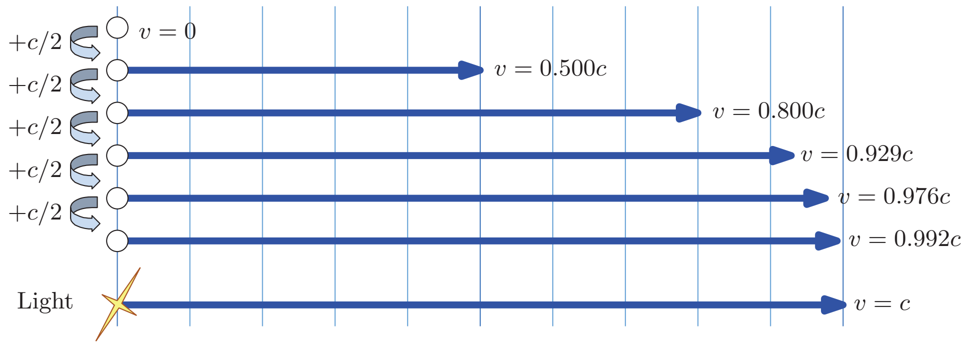


図 3.2: K 系から見た加速の結果

と c を超えることはできないと言えそうだ。つまり, 加速をして光速を超えることは不可

能のようだ。次節で加速度変換を用いて, 光速を超えることが厳密に不可能であることを検証する。

座標回転との関係　速度変換則の x 座標成分に, 数学公式との類似性に気がついただろうか? 正接関数 (tangent), 正確には双曲正接関数 (tangent hyperbolic) との類似性がある。双曲正接関数の加法定理は,

$$\tanh(A-B)=\frac{\tanh A-\tanh B}{1-\tanh A\,\tanh B},$$

である。つまり, $\tanh A\equiv u_x$, $\tanh B=v/c$ とおけば x 軸方向の速度変換則が双曲正接関数の加法定理と一致するのだ。さらに, $\tan iA=-i\tanh A$ であることを利用すれば, 双曲正接関数の加法定理は,

$$\tan i\,(A+B)=\frac{i\,(\tan iA-\tan iB)}{1+\tan iA\,\tan iB},$$

に書き換えられる。これはまぎれもなく正接関数の加法定理であるが, 変数が虚数である。この数式が意味しているものは, ローレンツ変換が虚数角度での時空の座標回転であるということである。ローレンツ変換が座標回転であることは, 前章でも説明した。速度変換則は, ローレンツ変換を複数回実行することによっても得られるはずであり, ローレンツ変換が座標回転ならば, 回転を複数回実行した結果が速度変換則を導くのである。

3.2　加速度変換

相対性理論では光速は究極の速度であり, 決して超えることのできない速度らしいことが前節までにわかってきた。見方を変えると, ある物体が加速度運動をしていたとすると, その物体との相対速度が大きな慣性系から見ると, 加速度は小さく観測される。速度が光速に近いほど, 観測される加速度はゼロに近づいていくはずだ。

前節と同様に, 加速度とは何かを考え直しておこう。加速度とは単位時間あたりに生じる速度変化の割合である。原理的には, 非常に短い時間間隔 $\mathrm{d}t$ を隔てて 2 回だけ, 物体の速度を計測する。その速度の差が $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ であったとすると, $\boldsymbol{a}\equiv\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$ によって加速度が計算できるのだ。なお, 前節で確認したように, 観測者が存在する慣性系が異なれば速度が変わるし, 時間の尺度も変わる。そこに注意が必要である。

加速度の変換式は, (3.2) を微分することによって導出できる。慣性系 K から見た加速度を $[a_x,a_y,a_z]$, K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動する K$'$ 系から見た加速度を

$[a'_x, a'_y, a'_z]$ とする。すると, 加速度の変換は,

$$
\begin{aligned}
a'_x &= \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-vu_x/c^2)^3}\, a_x, \\
a'_y &= \frac{1-\beta^2}{(1-vu_x/c^2)^3}\left[\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)a_y + \frac{va_x}{c^2}u_y\right], \\
a'_z &= \frac{1-\beta^2}{(1-vu_x/c^2)^3}\left[\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)a_z + \frac{va_x}{c^2}u_z\right],
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

によって与えられる。この式の導出にあたり, 前節のように

$$
\mathrm{d}t' = \frac{1-vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{d}t,
$$

の関係を用いた。その関係式によって, 時間の尺度の違いを補正しているわけである。得られた数式 (3.4) は, K 系と K′ 系から観測される加速度を変換する公式である。速度変換に比べ, 加速度変換 (3.4) は複雑な形をしている。微分の階数が増えたのだから, 複雑な形になるのは当然である。その変換式には, 座標系の相対速度 v だけでなく, 物体の速度 $[u_x, u_y, u_z]$ の依存性も含まれている。速度の依存が含まれているので, 加速度の変換則は複雑に見え, その物的意味がつかみにくいかもしれない。

特別な例として, K′ 系に対して瞬間的に静止している物体について考えてみよう。K′ 系に対して静止しているということは, $u'_x = u'_y = u'_z = 0$ である。また, それは $u_x = v$, $u_y = u_z = 0$ である。その物体について, 加速度の変換式を適用すると,

$$
a_x = (1-\beta^2)^{3/2}a'_x, \qquad a_y = (1-\beta^2)a'_y, \qquad a_z = (1-\beta^2)a'_z,
$$

が得られる。この場合, K′ 系での加速度は加速している観測者自身の加速度であり, K 系での加速度はそれを基準となる慣性系から観測した加速度である。観測者自身の加速度とは何かを考えておこう。自分自身の加速度とは, どうやって計測するのか? 基準となる系との相対速度を計測し, その速度の時間変動の割合を計測する方法ではどうか? いや, その方法では自分の加速度はわからないのである。なぜなら, どんなに加速しても他の系との相対速度は光速 c を超えないからだ。つまり, ある特定の系を基準とすると, 時々刻々と計測の尺度が変化し, 真の加速度が特定できないだろう。

何を自身の加速度と考えるか? 加速すれば慣性力を感じるではないか。慣性力を計測すれば観測者自身の加速度が特定できるはずだ。もしくは, このように考えてもよいだろう。相対性理論では異なる速度の観測者と長さと時間の尺度が異なるとはいえ, ほとんど等しい速度の観測者どうしなら同じ尺度と考えてもよいだろう。つまり, 加速度を定義する際, 微小時間だけ過去の自分の速度の系を基準の系に選べばよいのである。加速する観測者は, 短い時間間隔で基準とする慣性系を切り替えていき, その都度, 加速度を計算すれ

ばよい。微小時間での加速度と, 速度変化ならニュートン力学が成立し, $F = -m\boldsymbol{a}$ によって観測者自身に作用する慣性力が決まる。つまり, 短い時間間隔で基準の慣性系を切り替えるモデルは, 自身に作用する慣性力から加速度を決定することと等価である。

現時点で数式を見るだけなら, ここまで考察しなくてもよいかもしれないが, この先の展開のために, 数式が何を意味するかを考えておくのはよいことである。得られた加速度の変換公式によると, 運動している物体の加速度を慣性系から観測すると, 運動している物体自身が感じるよりも小さな値が観測される。速度が大きいほど加速度の収縮は深くかかり, 速度が光速度に達すると加速度は必ずゼロになる。よって, 光速度を超えることは不可能である。

3.3 等加速度運動

前節までに速度, および, 加速度の変換則が導出されたので, 等加速度運動について考察してみよう。ただし, 既に示したように, 相対性理論では, 同じ物体を観測したとしても, 観測者によって観測される加速度が異なる。よって, ここで議論する等加速度運動は, ニュートン力学の等加速度運動とは定義を変えなければならない。

既に見たように, 観測する慣性系によって長さや時間の尺度が異なる以上, 加速度も同じように異なる値に変換されることを学んだ。つまり, 等加速度といった場合, ある特定の観測者から見たときに等加速度であるに過ぎず, 別の観測者から見た場合, 等加速度ではない。では, 特定の観測者は誰にするか, という疑問が起きる。相対性理論では, 相対速度によって長さと時間の尺度が変わるのであるから, 観測者を加速する本人としてしまえばよい。加速する本人がどうやって加速度がわかるのか, という疑問も問題はない。前節で述べたように, 自身に作用する慣性力を計測すればよいのだ。つまり, 加速度運動する観測者自身が, 一定の慣性力を受けるような運動を等加速運動と定義する。

簡単のため, 加速度運動する物体 P の運動方向は x 軸方向に限定し, 加速度の方向も x 軸方向であるとする。物体 P は x 軸方向に一定加速度 a で加速している。ある時点で物体 P の速度が, K 系から見て u である場合, K 系から見た加速度は, 前節の結果より,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} a,$$

となる。この式は変数分離型の微分方程式であるので容易に解くことができ, 速度 u の時間 t に関する依存性:

$$u = \frac{a(t - t_0)}{\sqrt{1 + a^2(t - t_0)^2/c^2}}, \tag{3.5}$$

が得られる。ただし, t_0 は速度 u がゼロとなる時刻を表す。例えば, $t = 0$ のときの速度が

u_0 であることを条件とすれば,

$$t_0 = -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}\;a},$$

のように t_0 が選ばれる。また, 得られた数式 (3.5) が,

$$\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = a\,(t-t_0), \tag{3.6}$$

のように書き換えられることに注意すべきである。後に学ぶ 4 元速度に関係するが, この式によると, 等加速度運動とは 4 元速度の時間微分が一定になるような運動である。

さらに, (3.5) を時間 t について積分すれば物体 P の変位:

$$x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2(t-t_0)^2}{c^2}} - 1\right) + x_0, \tag{3.7}$$

が得られる。ただし, x_0 は $t=0$ における物体 P の変位である。この式は,

$$x = \frac{c^2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right) + x_0,$$

のように書き換えることができる。この式から, 加速度 a による等加速度運動では, 速度ゼロから u までの加速の間に物体 P は,

$$x|_{u=u} - x|_{u=0} = \frac{c^2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\right),$$

の距離を移動することがわかる。また, 速度ゼロの状態から現在の速度に加速するまでに物体に作用させた仕事が物体の運動エネルギーであるので, 物体 P の質量が m ならば, 速度 u で運動する物体 P は,

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - mc^2,$$

の運動エネルギーをもつことになる。ここでは運動方向を x 軸方向, しかも, 等加速度運動に限定しているが, この運動エネルギーは最も有名な相対論的効果 $E = mc^2$ に関係する数式である。後の節で, 任意の加速度・軌跡をもつ運動に関してもこの式が成立することは証明されている。また, 変位 x の式は,

$$\frac{a^2}{c^4}\left(x+\frac{c^2}{a}\right)^2 - \frac{a^2t^2}{c^2} = 1, \tag{3.8}$$

のように変形できる。ただし, 簡単のため, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ とした。この式は, 図 3.3 に示すような双曲線になる。この双曲線は, 速度 u が十分に小さい範囲では, ニュートン力学における等加速度運動する物体の変位 $x = at^2/2$ に近似的に一致する。

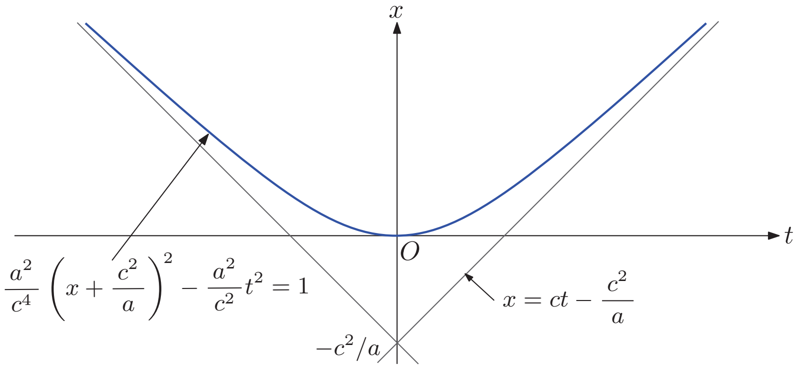


図 3.3: 等加速度運動する物体の変位

ところで, この図に示した双曲線に対する漸近線 $x = ct - c^2/a$ は物体 P の後方 c^2/a の距離から追いかける光の変位に他ならない。つまり, 物体を光速まで加速することは不可能ではあるが, 加速度 a で等加速度運動する物体を距離 c^2/a 以上隔てた後方から光が追いかけたとしても, その光は物体 P に追いつくことができない。

等加速度運動について考察したが, 一つ注意をしておく。ここで計算した内容は, あくまでも, 慣性系から等加速度運動をした場合に限る。 等加速度運動をしている観測者が慣性系に静止する物体を観測した場合には, この節の計算結果を適用することはできない。なぜなら, 慣性系とは異なり, 加速度運動する観測者には, その加速度に応じた慣性力が作用しているため, 慣性系に対して相対的ではないからである。加速度運動する観測者から見た状態を厳密に記述するには一般相対性理論が必要になる。

3.4　運動量

前節で説明したように, ある慣性系から見て相対的に運動する物体の加速度は, その速度に依存して小さく観測される。そのため, 運動量はニュートン力学での表記とは異なることが予想される。 ここでは, ニュートン力学における運動量の定義にローレンツ変換を適用して相対論的な運動量を算出する。

ニュートン力学における運動量とは, 物体を静止状態から速度 $\boldsymbol{u}$ に加速するまでに要した力を時間について積分した量 (いわゆる力積) である。 すなわち, 物体を加速するための力を $\boldsymbol{K}$ とすると, 運動量 $\boldsymbol{p}$ は,

$$\boldsymbol{p} = \int_{\boldsymbol{v}=0}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}t, \tag{3.9}$$

で定義される。この量を計算するために力を相対論的に考える必要がある。相対性理論を考慮した力については, 第 4 章で説明する電磁気学の考察が必要となる。

慣性系 K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動している慣性系 K′ 系から見たとき, ある時点で静止している物体が存在したとする。この物体に, K′ 系から見て力 $\boldsymbol{K}'$ が作用しているとする。第 4 章で導出する変換式 (4.37) によると, 力は,

$$K_x = K'_x, \qquad K_y = \sqrt{1-\beta^2}\,K'_y, \qquad K_y = \sqrt{1-\beta^2}\,K'_z,$$

のように変換される。この式は物体の運動方向が x 軸方向に限定した場合を表しているが, 慣性系の座標軸のとり方は自由のであるので, 物体の運動方向が x 軸方向でなくても同様に変換されるはずである。その場合, 力 $\boldsymbol{K}$ を物体の速度 $\boldsymbol{v}$ に平行な成分 $\boldsymbol{K}_{/\!/}$ と垂直な成分 $\boldsymbol{K}_{\perp}$ に分離すれば, 力の変換式は,

$$\boldsymbol{K}_{/\!/} = \boldsymbol{K}'_{/\!/}, \qquad \boldsymbol{K}_{\perp} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\boldsymbol{K}'_{\perp}, \tag{3.10}$$

のように書くことができる。この変換則は電磁気力を対象とする[1]変換式であるが, 電磁気力以外の力もこの変換則にしたがうと考えるのが自然である。なぜなら, ある慣性系から見たとき, 2 つの力がつり合っているならば, 別の慣性系から見てもそれらの力はつりあっているはずだからだ。当然, 一方が電磁気力で, もう一方が他の力であっても, 慣性系によらず成立するということは, すべての力が電磁気力と同じ変換にしたがうということである。

まず, 考察する物体の質量を m_0 とする。 この物体が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとき, 瞬間的にこの物体と併走する慣性系 K′ が存在すると仮定する。K′ 系から見るとその物体は静止しているので, ニュートン力学的な近似が成り立ち,

$$\boldsymbol{K}' = m_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'},$$

となる。 さらに, 前項で算出した加速度の変換則より,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'_{/\!/}}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{/\!/}}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'_{\perp}}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.11}$$

が成り立つことにも注意しておく。これらの式はそれぞれ, 速度 $\boldsymbol{v}$ と平行な成分と垂直な成分に分けたときの加速度の変換式である。しかし, この加速度の変換式は力の変換 (3.10) とは異なる形をしている。ニュートン力学における力と加速度の関係 $\boldsymbol{K} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ からの類推によって, これらの加速度変換と力の変換を結び付けるには,

$$m_{/\!/} = \frac{m'_{/\!/}}{(1-\beta^2)^{3/2}}, \qquad m_{\perp} = \frac{m'_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

[1]一般力学における力は, 重力を除き, すべて電磁気力である。それらの力には, 弾性力, 張力, 摩擦力などがあるが, その力はすべて物質を構成する分子の分子間力を起因とする。分子間力は分子間で作用する電気力である。

のように, 質量が速度ベクトルに対して平行な成分と垂直な成分で, 別々に変換される必要がある。古い文献では前者を縦質量, 後者を横質量と呼んでいた。アインシュタインの第 1 論文でも縦質量と横質量という記述[2]が現れている。

さすがに, 縦質量, 横質量のように質量が方向成分をもつのは具合が悪い。実は, この節で導こうとする相対論的な運動量は, 質量の再定義への試みである。話を戻して, 運動量の定義式 (3.9) を計算してみると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \int \boldsymbol{K}\mathrm{d}t = \int (\boldsymbol{K}_{/\!/} + \boldsymbol{K}_{\perp})\mathrm{d}t = \int \left(\boldsymbol{K}'_{/\!/} + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\boldsymbol{K}'_{\perp}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int \left[m_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'_{/\!/}}{\mathrm{d}t'} + m_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'_{\perp}}{\mathrm{d}t'}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int \left[\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{/\!/}}{\mathrm{d}t} + \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。ここで, 速度方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_v$ とすると, 速度ベクトルが $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_v$ であることに注意して, 加速度ベクトルを速度ベクトルと平行な成分と, 垂直な成分に分割してみる。平行な成分は,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{/\!/}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

となるので, 速度ベクトルと平行な成分は速さ (速度ベクトルの大きさ) を変化させる成分であることがわかる。 一方, 垂直な成分は,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\perp}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\!/} = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_v}{\mathrm{d}t},$$

となることから, 速さ一定のもとで速度の方向を変える成分であることがわかる。 これらの成分を用いて (3.12) を書き換えると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= m_0\int_{\boldsymbol{v}=0}^{\boldsymbol{u}}\left(\frac{\boldsymbol{e}_v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_v}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \\ &= m_0\left[\int\frac{\boldsymbol{e}_v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \left(\frac{u\boldsymbol{e}_u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \int\frac{\boldsymbol{e}_v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right)\right] \\ &= \frac{m_0\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

が得られる。 力と加速度の関係とは異なり, 運動量 $\boldsymbol{p}$ は速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ と同一方向に向かうベクトルとなっている。これを質量の定義として使えないだろうか? つまり, ニュートン力学と同様に, 速度 $\boldsymbol{u}$ で運動する物体の運動量が $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$ であるなら, その物体の質

[2]アインシュタイン, “相対性理論,” 内山龍雄 訳・解説, 岩波文庫, 青 934-1, p. 58, 1988.

量は m である, という具合だ。この定義によると, 相対的に静止しているときの質量が m_0 ならば, 運動する物体の質量は,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \tag{3.14}$$

のように増大する。なお, m_0 は静止しているときの質量であることから, 静止質量と呼ばれる。加速度変換から運動する物体の加速度が小さく観測されることが導かれたが, その事実は, 運動すると失業が増大するので大きな力を加えても加速度を大きくできないと解釈してもよい。同一の力を作用させると, 加速とともに, 加速度が小さくなる。極端な例では, 光速に達すると質量が無限大となり, それ以上の加速が不可能になるのだ。

3.5 相対論的 運動エネルギー

相対論的な運動エネルギーを導出してみよう。ニュートン力学における運動エネルギーとは, 静止状態から力を加えてある速度 $\boldsymbol{u}$ まで加速したとき, その加速に要した仕事量である。すなわち, 物体を加速するための力を $\boldsymbol{K}$ とすると, 運動エネルギー E_{k} は

$$E_{\mathrm{k}} = \int_{\boldsymbol{v}=0}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{3.15}$$

と定義される。ここで, $\boldsymbol{r}$ は物体の位置ベクトルとする。

前項と同様に, 質量を m_0 とし, この物体が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとき, 瞬間的にこの物体と併走する慣性系 K' が存在すると仮定する。K' 系から見ると物体は静止しているので, ニュートン力学的な近似が成り立ち,

$$\boldsymbol{K}' = m_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'}$$

となる。 前項の力の変換則を用いて運動エネルギーの定義式 (3.15) を計算していくと,

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{k}} &= \int \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t \\
&= \int (\boldsymbol{K}_{/\!/} + \boldsymbol{K}_{\perp}) \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t = \int K_{/\!/}\, v\, \mathrm{d}t = \int K'_{/\!/}\, v\, \mathrm{d}t = m_0 \int \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} \mathrm{d}t \\
&= m_0 \int \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\, v\, \mathrm{d}t = m_0 \int_0^u \frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \mathrm{d}v \\
&= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

が得られる。このエネルギーは v/c について 1 次近似をとると, $E_{\mathrm{k}} \simeq m_0 v^2/2$ となり, ニュートン力学における運動エネルギーと一致する。つまり, 相対性理論が真実を表しているの

ならば, ニュートン力学は 1 次近似だったことになる。光速 c が日常に体験する速度よりも非常に速いため, 1 次近似にすぎないニュートン力学は, 十分に物理現象を記述できていたのである。また, このエネルギーを時間について微分した導関数 $P \equiv \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ は物体に作用する力が単位時間あたりになす仕事, すなわち, 仕事率を表す。その仕事率は,

$$P = \frac{m_0\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}, \tag{3.17}$$

となる。ここで, $\boldsymbol{a} \equiv \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ とする。

導かれた運動エネルギー (3.16) は, 物体の速度がゼロであるときのエネルギーがゼロとなるように積分定数を選んでいる。物理的な解釈が必要とはなるが, 積分定数を選びなおすことによってエネルギーを,

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \tag{3.18}$$

のように書くこともできるだろう。この数式は有名な方程式である。端的に表現するため, 前節で導出した質量増大の法則を用いると, この方程式は,

$$E = mc^2, \tag{3.19}$$

のように書き換えられる。これが特殊相対性理論で最も有名な方程式である。質量に光速の自乗を乗じた積がエネルギーに等しい。これは, エネルギーと質量が等価であることを意味している。言うまでもなく, この量の 1 次近似をとると $E \approx m_0c^2 + m_0v^2/2$ となるので, m_0c^2 は静止する物体がもっている静止エネルギーであると解釈することもできるだろう。さらに, (3.18) のように定義されたエネルギーは, 前節で計算した運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ の大きさ p を用いて,

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2c^2, \tag{3.20}$$

のように書けることは容易にわかる。特に静止質量がゼロの物体に関しては $E/c = p$ が成り立つ。この関係は, 質量がゼロである光量子のエネルギーと運動量の関係[3]と一致している。

3.6 質量とエネルギー

相対論的な運動量とエネルギーは, 前節で導いたように $E^2/c^2 = p^2 + m_0^2c^2$ なる関係が成立する。この関係を $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (E/c)^2 = m_0^2c^2$ のように書き, 右辺が座標変換に対して定数であることに注意すると, ミンコフスキー時空の線素 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - (c\,\mathrm{d}t)^2$

[3] 角周波数 ω の光波に対応する光量子は $E = \hbar\omega$ のエネルギー ($\hbar = 1.0546 \times 10^{-34}$ J·s/rad はプランク定数) をもち, 運動量は $p = \hbar\omega/c$ で表される。

がローレンツ変換に対して不変であることからの類推で, 運動量とエネルギーが, 空間座標と時間に類似した関係をもつと考えても不自然ではない。その関係をもう少し調べてみると, エネルギーが質量に変換できるという最も有名な相対論的効果を再確認できる。

ある慣性系 K から見たとき, 質量 m_0 の物体が速度 $\boldsymbol{u}$ で運動しているとする。すでに導出した結果を用いると, その物体の運動量 $\boldsymbol{p}$ とエネルギー E は,

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0 \boldsymbol{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

となる。ただし, $u = |\boldsymbol{u}|$ とする。次に, この物体を K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動する K$'$ 系から見た運動量を考えてみよう。K 系から見た物体の速度 $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} \equiv [u_x, u_y, u_z]$ のように成分ごとに書いた場合, K$'$ 系から見た速度は, 速度の合成則より

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x v/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x v/c^2},$$

となる。このようにして算出された $\boldsymbol{u}'$ を運動量とエネルギーの式に代入すると,

$$p'_x = \frac{m_0(u_x - v)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}, \quad p'_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad p'_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$
$$E' = \frac{m_0(c^2 - u_x v)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}},$$

が得られる。この結果をさらに書き直すと, K 系から K$'$ 系への座標変換に対して運動量とエネルギーは,

$$p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - v p_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.21}$$

のように変換されることが導かれる。この変換式は座標のローレンツ変換に類似している。運動量 $\boldsymbol{p}$ とエネルギーを $1/c^2$ 倍した E/c^2 は, まさに, 空間座標と時間座標の変換とまったく同じ形で記述されるのである。

エネルギーを質量に変換するという有名な相対論的効果の一例を示してみよう。K 系の y 軸方向に沿って運動する質量 $m/2$ の物体 A^+ と A^- が衝突する場合を考えよう。物体 A^+ は y 軸方向に $+u$ の速度で運動し, 物体 A^- は y 軸方向に $-u$ の速度で運動している。これらの物体は衝突後, 一体化して物体 A になる。ただし, 衝突前の運動エネルギーは熱として放出されず, 物体 A に吸収されたとする。

この様子を K 系から眺めると, 図 3.4 (a) のように, 物体 A^+ と A^- は y 軸方向のみに速度成分をもっているので, 運動量の x 軸成分と z 軸成分はゼロである。簡単のため, $\gamma_u \equiv (1-u^2/c^2)^{-1/2}$ という記号を用いると, 物体 A^+ の運動量 y 軸成分は $mu\gamma_u/2$ であり, 物体 A^- の運動量 y 軸成分は $-mu\gamma_u/2$ である。つまり、これらの運動量の和はゼロであ

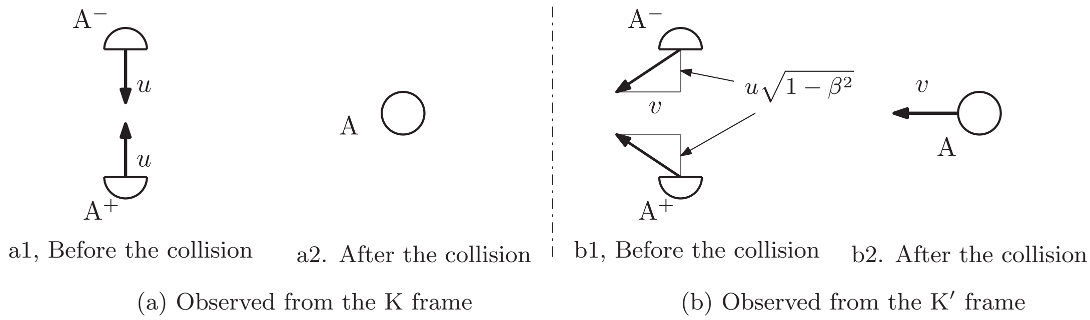


図 3.4: 衝突による運動量保存

る。運動量保存の法則より, 衝突後の運動量の総和もゼロであるので, 衝突して一体になった物体 A は K 系のある一点に静止する。

それでは, K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動する K$'$ 系から見た場合を考えてみよう。その衝突の様子は図 3.4 (b) に示す。 物体 A$^+$ と A$^-$ の運動量は, (3.21) を用いて座標変換すればよい。まず, 運動量の y 軸成分は変化を受けないので, 運動量 y 軸成分の総和はゼロである。これに対して, 変換式 (3.21) よると, 衝突前の物体 A$^+$ と A$^-$ は x 軸方向に, ともに, $-\gamma vE/c^2$ の運動量をもつ。この E は $E = mc^2/2$ のように定義されるエネルギーである。つまり, これらの物体の運動量の総和は x 軸方向に $-mv\gamma_u\gamma$ という量になる。衝突後に一体化した物体 A は K 系から見ると静止しているのだから, K$'$ 系から見ると x 軸方向に速度 $-v$ で等速運動しているはずである。この物体 A の質量を M とすれば, K$'$ 系における運動量保存の法則は,

$$-\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -\frac{mv}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/v^2)}},$$

と書くことができる。この方程式を解いて物体 A の質量 M を求めると,

$$M = m + \frac{1}{c^2}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - mc^2\right),$$

が得られる。もともと, 質量 $m/2$ の物体が 2 個一体化したのであるから, ニュートン力学では物体 A の質量は m となるはずであるが, この結果には余分な項が含まれている。その余分な項とは, (3.16) を見ると, 衝突前の物体の運動エネルギーに対応していることがわかる。つまり, 衝突前の物体の運動エネルギーの和を E_k とおけば, 衝突後の物体の質量は,

$$M = m + \frac{E_\mathrm{k}}{c^2},$$

と書くことができるのである。つまり, 衝突によって運動エネルギーが質量に変換されてしまうのである。このようなエネルギーから質量への変換は, 特殊相対性理論における最も偉大な発見である。衝突後, 運動エネルギーからの変換分だけ質量が増えているため, 質量保存の法則が破られているように見えるかもしれない。しかしながら,

$$mc^2 + E_\mathrm{k} = Mc^2,$$

という関係が成り立つため, エネルギー保存の法則は成り立っている。また, 運動エネルギー E_k が質量 E_k/c^2 と等価であると考えれば質量も保存していることとなり, エネルギー保存の法則と質量保存の法則が同一法則であるという解釈もできる。現代では, 電子と陽電子の対生成, 対消滅といった現象によってエネルギーから質量へ, または, その逆の変換が起きることも既に確認されている。