

第2章 アインシュタインの相対性原理

前の章で紹介したように、互いに相対速度をもつ慣性系間の座標変換であるガリレイ変換に対して、ニュートン力学の基本法則は不変であったが、19世紀に発表された電磁気学に関するマクスウェルの方程式はガリレイ変換に対して不変ではない。しかも、マイケルソンとモーレーの努力もむなしく、電磁場の媒質と考えられたエーテルと地球の相対速度を検出することもできなかった。ローレンツはマクスウェルの方程式を不変にする座標変換を導出し、運動する物体の長さが収縮することによってマイケルソン・モーレーの実験が失敗した理由を説明したが、依然とエーテル仮説が続いていた。これに対して、アインシュタインはエーテルの存在を否定し、マイケルソン・モーレーの実験の失敗を物理の基本原理として受け入れる、いわゆる光速不変の原理によって相対性原理を修正した。

2.1 光速不変の原理

アインシュタインの相対性原理においても、ガリレイの相対性と同様、等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できないことを原理としている。つまり、ある慣性系 K で成り立つ物理法則は、それとは相対速度をもつ慣性系 K' でも形を変えずに成り立つのである。それに加えて、アインシュタインの相対性原理では光速不変の原理が追加される。それは、等速運動をしている限り、いかなる観測者が見ても、その速度によらず光速はある一定の値になるという原理である。

慣性系 K から光を発射したとする。その光の速度を K 系から計測すると c であったとする。別の慣性系 K' が速度 v で遠ざかっているとする。ガリレイの相対性原理では K' 系からみた光の速度は $c - v$ となるはずであるが、アインシュタインの相対性原理では c となる。当然、 K' 系が速度 v で近づいていたとしても、観測される光の速度は c である。

光速不変の原理は、我々の日常からかけ離れた大胆な主張である。いかなる観測者から見ても、必ず、光速は一定の値になるという主張は正しいのか？ しかし、マイケルソン・モーレーの実験では、30 km/s という地球の公転速度をまったく検出できず、光速が一定値として計測された事実がある。「だから、仕方ないではないか。光速は誰から見ても同じ値なのだ。」というのが、光速不変の原理である。開き直りにも思える理屈であるが、我々が計測

する速度や長さ、そして、時間は光の速度が基準となっているということである。言い換えると、等速運動する観測者から見たとき、光の速度が一定値 $c (= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s})$ となるように宇宙ができていているということである。そうすることで、もはやエーテルの存在を必要とはしないのである。

光速不変の原理は、強引にとって付けられた原理に思えるかもしれないが、相対性原理を確かなものとするには必要な原理である。なぜなら、相対性原理によると、上で述べたように、等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できない。しかし、光速がある基準となる慣性系に対する相対速度に依存して変化するのであれば、光速を計測することによって、基準となる慣性系に対する相対速度が特定できるのである。つまり、光速不変の原理がなければ、宇宙には絶対静止系が存在することとなり、相対性原理が成り立たないことになる。アインシュタインの相対性原理においても、ガリレイの相対性と同様、等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できないことを原理としている。つまり、ある慣性系 K で成り立つ物理法則は、それとは相対速度をもつ慣性系 K' でも形を変えずに成り立つのである。それに加えて、アインシュタインの相対性原理では光速不変の原理が追加される。それは、等速運動をしている限り、いかなる観測者が見ても、その速度によらず光速はある一定の値になるという原理である。

アインシュタインの相対性理論は、光速不変の原理から始まる。光速不変の原理は、宇宙がそのようにできているという基本原理であり、証明することはできない。本書で扱う物理現象はすべて、光速不変の原理が成立することを認めたうえでの議論である。

2.2 時計合わせ

いかなる慣性系から見ても光の速度が一定値になるという原理によって、速度や長さ、時間の尺度はニュートン力学で扱っていたものとは異なると予想される。しかも、すべての慣性系によって一律に異なるのではなく、その速度によって異なると考えたほうがよい。つまり、互いに相対速度をもつ慣性系の間では速度、長さ、時間の尺度が異なるということである。よって、アインシュタインの相対性原理では時間、特に、同時性の取り扱いには注意が必要である。

例えば、ある観測者 A から見て電車が7時に駅に到着したという事象が観測されたとする。この事象は、 A がもっている時計の針が7時を指したのと同時に電車が駅に着いたことを意味する。これを別の観測者 B から見るとどうであろうか？ 観測者 A と B の相対速度が互いにゼロで、しかも、時計合わせができているならば、 B から見ても電車が7時に駅に到着したことになるだろう。しかし、その時計が合っているかどうかは注意を要する。観

測者 A が B の時計を調べるために、いったん、B がいる場所まで歩いていき、時計を調べるという方法が考えられるが、それはよくない。なぜなら、歩いていく間、および、歩いて戻る間に運動状態が変化するため時間の尺度が変わってしまい、確認したことが台無しになってしまうからである。

時計を合わせを定義しよう。時計合わせは、アインシュタインの第1論文の冒頭でもしっかりと定義されている。当時、その論文を読んだ人は何を主張しているのかと首をかしげたかもしれないが、その内容を筆者なりの表現でアレンジして書くと次のようになる。

観測者間で時計を合わせるために、観測者が移動することなく、光に時間情報を載せ、互いの時計の読みを比較することを考えてみる。その時計合わせを、図 2.1 のような世界線を描いて説明しよう。この図は、時間の進行方向を下から上に流れるように描いている。横方向は空間的な位置を表す。このような座標設定において観測者や対象物の座標をプロットした曲線が世界線である。この図は、観測者 A からみた世界線を示している。観測者 B は、観測者 A に対して任意の運動をしているものとする。さて、A から B の時刻を確認するには、まず、時刻 t_{A0} に B に向かって時刻要求の光を送る。図では、A から B に伸びる右上がりの直線が時刻情報を載せた光の世界線である。B は時刻要求の光を受けると、自分

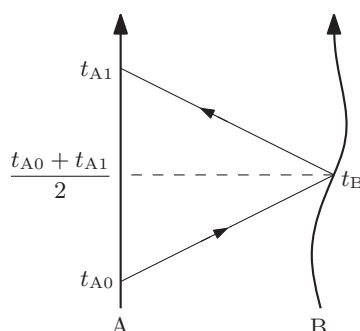


図 2.1: 観測者 A による時計合わせの世界線

の時刻情報 t_B を乗せた光を A に返信する。その返信信号の世界線は、図中の左上がりの直線である。A はその返信を時刻 t_{A1} に受信する。光速不変の原理より、送信した光と受信した光の速度は、ともに一定値 c である。よって、図 2.1 に示すように、観測者 A から見たとき、光が行きに要した時間と戻りに要した時間は等しい。したがって、 $t_{A0} + t_{A1} < 2t_B$ ならば B の時計は進んでいる。一方、 $t_{A0} + t_{A1} > 2t_B$ ならば B の時計は遅れている。そうではなく、 $t_{A0} + t_{A1} = 2t_B$ が成り立つ場合に、A と B の時計は合っている。時計を合わせるということは、このような行為によって互いの時計の読みを調整することである。なお、このように時計が調整された場合、

$$t_A = t_B = \frac{t_{A0} + t_{B1}}{2},$$

の条件で時計合わせされている、という。しかし、残念なことに、時計が合っていることは、

その瞬間でしか保証されない。A と B がゼロでない相対速度をもつのであれば、後に示すように、A と B の時計は互いに進むペースが異なるのである。

2.3 慣性系の中の座標変換

光速不変の原理を含む相対性原理を満たすように、ガリレイ変換の代わりとなる座標変換を求めてみよう。光速不変の原理を追加したとはいえ、物理学を記述するための座標変換であるので、光速より十分に小さな速度においては近似的にガリレイ変換と一致する結果を得るはずである。

二つの慣性系 K と K' について考えよう。K' 系は K 系に対して x 軸方向に等速度 v で運動している。K 系の時計で $t = 0$ のときに二つの座標系の原点が一致し、そのときに K' 系の時計が $t' = 0$ となるように時計合わせされているとする。

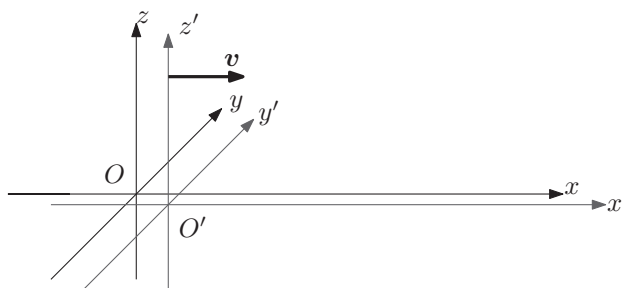


図 2.2: 運動する座標系

ここで議論する座標変換は線形変換である。そうでなければ、等速度運動をしているにもかかわらず、非線形項が加速度をつくり出すため、相対性原理に矛盾してしまうからである。また、速度 v とは垂直な y 軸, z 軸方向は速度に依存しないと考えられ、 $y' = y, z' = z$ となる。一方、 t と x は速度に依存して、

$$\begin{aligned} ct' &= a_{00}ct + a_{01}x, \\ x' &= a_{10}ct + a_{11}x, \end{aligned} \tag{2.1}$$

のように変換される。これから、簡単な物理的な考察によって、これら 4 つの未知係数 a を求め、具体的な座標変換を導出しよう。

K 系の原点を K' 系から観測すると、その位置が $x' = -vt'$ となることは直感的にわかる。そこで、(4.65) に $x = 0$ を代入して K 系の原点を K' から観測した座標を計算すると、 $x' = (a_{10}/a_{00})ct'$ となるので、

$$\frac{a_{10}}{a_{00}} = -\frac{v}{c}, \tag{2.2}$$

なる条件が導かれる。逆に K' 系の原点を K 系から見た場合、その位置は $x = vt$ となっているはずである。先ほどと同様に、(4.65) に $x' = 0$ を代入すると、 $x = -(a_{10}/a_{11})ct$ が得られるので、もう一つの条件:

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = -\frac{v}{c}, \quad (2.3)$$

が得られる。さらに、(2.2) と (2.3) を比較すると、 $a_{00} = a_{11}$ であることがわかる。ここで、後に利用するため、 $a_{00} = a_{11} \equiv \gamma$ と書いておく。

次に、 $t = t' = 0$ のときに原点から x 軸方向に放射された光線について考える。光速不変の原理より、 $x = ct$ と $x' = ct'$ が同時に成り立つ。そこで、(4.65) に $x = ct$ を代入すると、

$$\begin{aligned} ct' &= (a_{00} + a_{01})ct, \\ x' &= (a_{10} + a_{11})ct, \end{aligned} \quad (2.4)$$

となるが、同時に $x' = ct'$ も成り立つので、 $a_{01} = a_{10} \equiv -\gamma v/c$ であることがわかる。つまり、変換式 (4.65) は、

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x, \\ x' &= -\gamma \frac{v}{c} ct + \gamma x, \end{aligned} \quad (2.5)$$

のような形をしている。この変換の逆変換を計算すると、

$$\begin{aligned} ct &= \frac{1}{\gamma^2(1 - v^2/c^2)} \left(\gamma ct' - \gamma \frac{v}{c} x' \right), \\ x &= \frac{1}{\gamma^2(1 - v^2/c^2)} \left(-\gamma \frac{v}{c} ct' + \gamma x' \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

が得られる。逆の立場として、 K' から観測すると K 系が x 軸方向に速度 $-v$ で運動しているように見えるはずなので、逆変換 (2.6) は変換式 (2.5) の速度 v を $-v$ に置き換えたものと同一になるはずである。その条件より、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ が得られるので、ガリレイ変換に代わる座標変換は、

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (2.7)$$

であることが導き出された。ここで、 $\beta = v/c$ とする。この変換は $v/c \ll 1$ の極限のもとでガリレイ変換と一致する。光速不変の原理を含む相対性によって求めたこの座標変換は、アインシュタイン変換とは呼ばれず、ローレンツ変換と呼ばれる。なぜなら、マクスウェルの方程式を不変にするために導かれたローレンツ変換と一致するからである。つまり、ローレンツ変換は、マクスウェルの方程式が不変にするだけでなく、光速不変の原理を含む相対性原理に基いた座標変換なのだ。

ローレンツ変換と同一の座標変換を得たとはいえ、アインシュタインの相対性原理はエーテルの概念を捨て、マイケルソン・モーレーの実験結果をそのまま受け入れることに

よって、慣性系ごとに時間や長さの尺度が異なるという独自の姿勢をとったことが物理学における革新である。その結果得られるローレンツ変換は、単なる数学的記述ではなく、慣性系における時間や長さの尺度を規定する法則である。

2.4 同時性と因果性

ローレンツ変換によると、あらゆる観測者に対する共通の同時性が成立しなくなる。言い換えると、ある観測者が同時に観測した事象 A と B は、等速度運動する別の観測者から見ると、その 2 つの事象は同時発生していないのである。例えば、事象 A が $x = x_A$ で、事象 B が $x = x_B$ で、K 系の同一時刻 $t = 0$ のときに発生したとしよう。ローレンツ変換にそれらの座標を代入すると、K' 系で観測した事象発生時刻は、

$$t'_A = \frac{-vx_A/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_B = \frac{-vx_B/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

のように算出される。ただし、 $\beta = v/c$ である。つまり、 $x_A \neq x_B$ である限り、2 つの事象は、K' 系では異なる時刻に発生していることになる。この同時性の不一致は、図 2.3 に示すように、原点から $-x$ 方向と $+x$ 方向に照射された光線で説明できる。K 系の $x = -a$ と $x = +a$ に、それぞれ、感光センサ A と B があった場合、K 系から見たとき、2 つセンサは同時に光線を検出するだろう。しかしながら、K' から見たとき、センサ B のほうが先に感光するのである。



図 2.3: 同時性の不一致

同時性が成り立たなくなることから、因果性を狂わせることはないのであろうか。上であげた 2 つの感光センサの例において、もし、K' 系の運動方向が逆、すなわち、K 系に対する速度が x 軸方向に $-v$ であったなら、上の例とは逆にセンサ A が先に感光するのである。つまり、観測者によって事象の発生時刻が異なって見えるのである。これは、原因と結果の発生順序の入れ替わり、すなわち、因果性の破綻を意味しないのか。

K 系と K' 系で事象の発生順序が入れ替わる条件とは、事象 A と B の発生時刻について、 $t_B - t_A$ の符号が $t'_B - t'_A$ と異符号であるということである。これを形式的に書くと、

$$(t_B - t_A)(t'_B - t'_A) < 0,$$

となる。これにローレンツ変換を適用すると、

$$(t_B - t_A) \frac{(t_B - t_A) - v(x_B - x_A)/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} < 0,$$

となるので、

$$|t_B - t_A| < \frac{v}{c^2} |x_B - x_A|,$$

が順序入れ替わりの条件である。さらに、 $v/c \leq 1$ という条件をつけると、

$$|t_B - t_A| < \frac{|x_B - x_A|}{c},$$

という条件が得られる。事象 A と B に因果性があるならば、座標 x_A で事象 A が発生した情報が座標 x_B に伝達した後に事象 B が発生するはずである。光より速い情報伝達手段が存在しないならば、因果性のある 2 つの事象は必ず $|t_B - t_A| \geq |x_B - x_A|/c$ を満たしている。その場合、因果性のある事象の順序は決して入れ替わることがない。順序が入れ替わる条件を満たす組み合わせは、因果性のない事象である。感光センサの例では、一方のセンサが感光したことと、もう一方のセンサが感光したことには因果性がない。どちらが先に感光しても物理的に不都合はないのである。一方、原点から光線が照射されたこととセンサが感光したことは因果関係がある。K 系の時計で $t = 0$ のときに照射された光線が $x = a$ のセンサで検出される時刻は $t = a/c$ である。この例では、 $|t_B - t_A| = |x_B - x_A|/c$ となり、順序が入れ替わることはない。

仮に光より速い伝達手段が存在するならば、因果性は破綻してしまうことになる。後に示すように、光速度より遅い物体を超光速に加速することは不可能であるが、それに加えて、因果性が保持されるためにも光より速い情報伝達は不可能と考えるべきであろう。

2.5 ローレンツ収縮

相対論的な効果の一つとしてローレンツ収縮と呼ばれる長さや時間の収縮がローレンツ変換から導かれる。ローレンツ変換を見れば、慣性系 K とそれに対して速度 v で運動する別の慣性系 K' には、長さや時間の尺度が違っていることがわかる。特に時間に対するローレンツ収縮は、科学小説などでも引き合いに出されるのでなじみが深いだろう。本節ではローレンツ変換からローレンツ収縮を導いてみる。

2.5.1 長さの収縮

まずは、長さの測定方法について考えてみよう。長さは、対象となる 2 つの点 (例えば、点 A と点 B) を選び、この 2 点にもものさしを当てれば測定できる。しかし、運動している対

象の長さを測る場合には注意が必要である。点 A の位置を記録してから、点 B の位置を記録するまでの間に点 A が移動するからである。よって、運動する物体の長さを測定するには、両端の位置を同時に記録しなければならない。

図 2.4 のように速度 v で運動する物体の長さを測定する場合を考えてみよう。その物体と併走する慣性系を K' 、長さを測定する観測者が存在する慣性系を K とする。この運動する対象物体の midpoint には時限式の発光装置が設置され、特定の時刻になると発光装置から左右にパルス状の光を発射する。その光は同時に両端 (点 A と点 B) に到達し、その場所に設置されている反射鏡によって進路を直角に曲げられて、 K 系に備え付けられている感光紙に位置を記録する。そうすることで物体の長さを正確に測定できるように思える。しかしそれは K' 系から見たときの話 (図 2.4 (a)) である。光速不変の原理によると、 K 系から見たとき、物体の midpoint から発射された光は先に点 A に到達 (図 2.4 (b)) する。点 B に光が到達する頃には、物体はさらに移動しているので、感光紙に記録された 2 点間の距離は物体の長さより長いはずである。つまり、 K 系から見た物体の長さは K' 系が主張する長さより短いはずである。

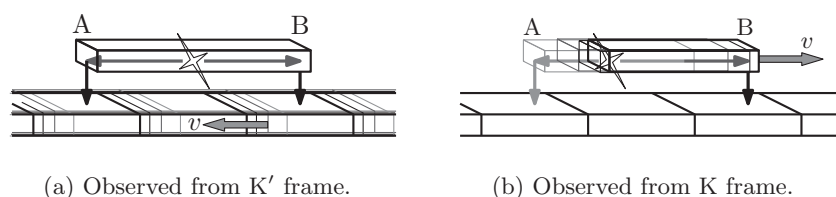


図 2.4: 運動する物体の長さ測定

K' 系が主張する長さより短いというだけではよくわからないので、どれくらい短くなるのかを数式で表現してみよう。 K' 系における微小長さ dx' を K 系から測定した長さを dx とする。まず、ローレンツ変換を微分すると、

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

となる。上で述べたように、 K 系から長さを測定するときは、 K 系の時計において同時に両端の位置を記録する必要があるので $dt = 0$ とする。その結果、

$$dx = \sqrt{1 - \beta^2} dx', \tag{2.8}$$

となるので、 K 系から測定される長さは K' 系が主張する長さより短くなっている。当然、微小ではない長さを考えるのであれば、(2.8) を積分すればよいので、 K' 系から見た運動物体の長さを L' とすると、 K 系の観測者にとっては、 $L = \sqrt{1 - \beta^2} L'$ に収縮して見える。

逆に、 K' 系から見ると、 K 系が x' 軸方向に速度 $-v$ で運動しているので、感光紙の長さが短くなっているように見える。これもローレンツ変換から導くことができる。ここでも、

ローレンツ変換の微分を書いておくと、

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dt' = \frac{dt - (v/c^2) dx}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

である。今度は K' 系から長さを測定するので $dt' = 0$ が条件となる。その条件から容易にわかる関係 $dt = (v/c^2) dx$ を、 dx' の式に代入すると $dx' = \sqrt{1 - \beta^2} dx$ が得られ、結局、K' 系から見ると K 系の長さが収縮しているように見えるのである。

この収縮現象がローレンツ収縮と呼ばれるのは、アインシュタインが相対性理論を発表する前にローレンツがこの収縮に気づいたからである。ローレンツは、エーテル内を運動する物体はその運動方向に $\sqrt{1 - \beta^2}$ の割合で長さが縮むことを主張し、それが理由でマイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったとした。ローレンツの主張による収縮の割合がアインシュタインの理論とは一致するが、物理的な解釈はまったく異なる。ローレンツの主張によるとエーテルに対して運動する物体は、物体を構成する原子が、運動する荷電粒子として振舞うため、分子間力となる電気的な力が変化し、速度方向の長さが縮むのである。この主張によると、運動する物体の長さは本当に縮むのであるが、長さを測る物差しも同様に縮むので、この収縮を検証できない。これに対してアインシュタインの主張によると、ある慣性系 K から相対速度をもつ別の慣性系 K' を見たとき、K' 系の長さが速度方向に縮んで見えるのであって、K' 系の長さが本当に縮むわけではない。この収縮現象は、相対速度による座標変換によって生じる観測の不一致であるため、逆に、K' 系から見ると K 系の長さが速度方向に縮んで見えるのである。

もうひとつローレンツ収縮について補足しておこう。ローレンツ収縮は単に物体の長さが縮むだけではない。座標変換によってもたらされる収縮であるので、物体の長さというよりも宇宙全体が縮んでいると解釈したほうがよい。例えば、地球から月までの距離は約 38.4 万 km であるが、地球とは相対的に光速の 87 % で運動する観測者から見ると、地球と月の距離は約 19.2 万 km となる。

2.5.2 時間の収縮

相対性理論において時間を議論するとき、必ず、座標系の定点に張り付いた時計を考えなければならない。既に見たように、運動が長さや時間の尺度を変化させる現象であるので、時計が座標系の中を動き回った場合、その運動のため時計の読みが狂ってしまうかもしれない。

K' 系の時計の読みを K 計の時計と比較してみよう。そのために、再び、ローレンツ変換の微分:

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dt' = \frac{dt - (v/c^2) dx}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

を用いる。K'系の定点に張り付いた時計ならば、 $dx' = 0$ が条件となるはずである。この条件から容易に $dx = v dt$ が導かれるので、

$$dt' = \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

なる関係が得られる。この式が主張するのは、K系から見たとき K'系の時計が $\sqrt{1 - \beta^2}$ の割合で遅れて見えるということである。例えば、K'系がK系に対して光速の50%で運動しているとする。K系から見ると、1時間たつ間に、K'系ではその86.7%にあたる52分しか経過したように見えないということである。当然、相対性原理のため、K'系から見るとK系の時計が遅れて見える。上に書いたローレンツ変換の微分に対し、 $dt = 0$ という条件を適用すると、 $dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt'$ が得られるはずである。

時間収縮は、相対性理論から導かれる現象の中で最も理解しがたいことかもしれない。飛行機の数をもつても、その速度は光速の100万分の1であるので、1時間の移動あたりで遅れる時間は 1.8×10^{-9} 秒に過ぎない。ところが、宇宙から降り注ぐ宇宙線によって相対性理論による時計の遅れが観測されている。宇宙線と大気原子核の衝突によって生じたミュー粒子が地表に到達していることが観測され、相対論的な時計の遅れが実証されるのだ。大気の上層で何が起きているかを、図2.5を用いて説明しよう。大気中で発生する変化の一例であるが、ほぼ光速で降り注ぐ宇宙線 (cosmic ray) が大気原子核¹と衝突することによって、中性子 (n) だけでなく、パイ中間子 (π^+) を放出する。パイ中間子の寿命は0.026マイクロ秒のように非常に短いため、間もなくミュー粒子 (μ^+) とミューニュートリノ (ν_μ) に崩壊する。ミュー粒子 (μ^+) も2マイクロ秒程度の短寿命であり、崩壊する

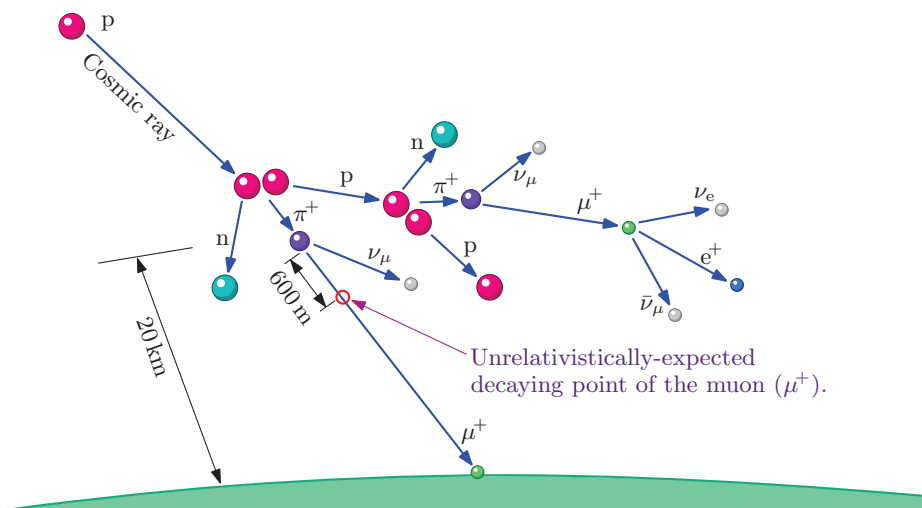


図 2.5: 宇宙線によって生成されたミュー粒子の地表への到達

と、陽電子 (e^+) と反ミューニュートリノ ($\bar{\nu}_\mu$) と電子ニュートリノ (ν_e) に変化する。この

¹宇宙船のほとんどが陽子であり、原子核との衝突は陽子どうしの衝突が重要であるため、図中では、宇宙線と原子核ともに陽子を意味する記号 p を付してある。

ような衝突は、地表から約 20 km の高度で起きていて、非相対論的な予想では生成されたミュー粒子は寿命までに 600 m 程度しか移動できないので地表に到達できないはずである。それにも関わらず、ミュー粒子が地表に到達するのは、高速運動するミュー粒子の時計が遅れているからである。仮に、ミュー粒子の速度が光速の 99.99 % であるならば、地表から見たミュー粒子の寿命は 70 倍長くなり、崩壊するまでにミュー粒子は 42 km 移動することができる。だから、地表に到達することが可能というわけだ。中間的に発生するパイ中間子にも相対論的な時計の遅れが発生するが、寿命がミュー粒子の 100 分の 1 程度なので、時計遅れがあっても地表に到達できない。

2.5.3 斜めのローレンツ収縮

運動している物体の長さが運動方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ の割合で収縮することを確認した。もし、座標軸と運動方向が一致しない場合、どのようにローレンツ収縮が起きるかを調べてみよう。つまり、観測者に対して、 $[u_x, u_y]$ のような速度ベクトルをもつ物体のローレンツ収縮を調べるのである。

物体のローレンツ収縮を調べるための前段として、物体形状が異なる慣性系でどのように変化するか調べてみよう。速度ベクトル $[u_x, u_y]$ をもつ物体を、K 系と相対的に x 軸方向に速度 v で運動する慣性系 K' から見た場合を考える。K 系から見た物体の点が、

$$x = x_0 + u_x t, \quad y = y_0 + u_y t,$$

であるとする。これを K' 系の座標にローレンツ変換すると、

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x v/c^2} x_0 + \frac{u_x - v}{1-u_x v/c^2} t', \\ y' &= y_0 + \frac{u_y v/c^2}{1-u_x v/c^2} x_0 + \frac{\sqrt{1-\beta^2} u_y}{1-u_x v/c^2} t', \end{aligned} \tag{2.9}$$

が得られる。得られた数式の右辺に含まれる t' の係数は、 K' 系から見た物体の相対速度である。つまり、その係数は速度の変換則を与える。速度変換則については次章で説明する。話を戻し、運動する物体の形状を調べるには、物体のあらゆる場所の位置を同時に収集しなければならない。しかも、「同時に」は慣性系ごとに異なるので、慣性系ごとに位置を収集する時刻を設定する必要がある。それで、K 系では $t = 0$ で、 K' 系では $t' = 0$ で位置を収集して形状を調べることにする。したがって、K 系での位置 $[x_0, y_0]$ が K' では、

$$x'_0 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x v/c^2} x_0, \quad y'_0 = y_0 + \frac{u_y v/c^2}{1-u_x v/c^2} x_0, \tag{2.10}$$

のように変換される。この変換が異なる慣性系の間での形状の変化を表す。

準備が整ったので、具体的に形状の変化を調べよう。対象とする図形は、 xy 平面上の円を考えよう。対象とする物体が K_0 に静止していると仮定し、その断面が、

$$x_0^2 + y_0^2 = 1,$$

のような半径1の円であるとする。その物体を、 K_0 系と相対的に y 軸方向に速度 $-\bar{u}_y$ で等速度運動する慣性系 K_1 から見た形状を考えよう。形状の変化は、(2.10) を用いれば計算できるが、適用には注意が必要である。それは、慣性系が y 軸方向に運動しているため、 x と y を入れ替えて公式を適用しなければならないのだ。そのことに注意して断面の形状を評価すると、

$$x_1^2 + \frac{y_1^2}{1 - \bar{\beta}_y^2} = 1, \quad (2.11)$$

が容易に導出できる。ここで簡単のため、 $\bar{\beta}_y \equiv \bar{v}_y/c$ なる記号を用いた。得られた数式によると、 K_1 系から見た物体の形状は楕円であることがわかる。その長半径は x 軸方向を向いて長さが1であり、短半径は y 軸方向を向いて長さが $(1 - \bar{\beta}_y^2)^{1/2}$ である。つまり、運動方向である y 軸に沿ってローレンツ収縮されている。

続いて、 K_1 と相対的に x 軸方向に $-u_x$ の速度で運動する関係系 K へから見た形状を考えよう。 K_1 系で観測される形状 (2.11) について変換 (2.10) を適用すると、

$$\left(\frac{1}{1 - \beta_x} + \frac{\beta_x^2 \bar{\beta}_y^2}{(1 - \beta_x^2)(1 - \bar{\beta}_y^2)} \right) x^2 + \frac{y^2}{(1 - \beta^2)(1 - \bar{\beta}_y^2)} - \frac{2\beta_x \bar{\beta}_y xy}{(1 - \bar{\beta}_y^2)\sqrt{1 - \beta_x^2}} = 1,$$

が得られる。ここでも簡単のため、 $\beta_x \equiv u_x/c$ なる記号を用いた。さらに、観測している物体の速度は K 系から見ると、

$$\mathbf{u} = \left[u_x, \sqrt{1 - \beta_x^2} \bar{u}_y \right],$$

となる。この数式に記述したように、相対速度は $[u_x, \bar{u}_y]$ とならないのだ。その事実は数式 (2.10) に現れているし、次章でその正当性を厳密に示す。ここでは、その速度変換則をそのまま受け入れることにしよう。そこで、簡単のため、

$$u_y \equiv \sqrt{1 - \beta_x^2} \bar{u}_y, \quad \beta_y = \frac{u_y}{c},$$

なる記号を定義すれば、 K 系から見た物体の相対速度は $[u_x, u_y]$ と書ける。さらに、

$$\beta^2 \equiv \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2} = \frac{u_x^2 + u_y^2}{c^2} = \beta_x^2 + \beta_y^2,$$

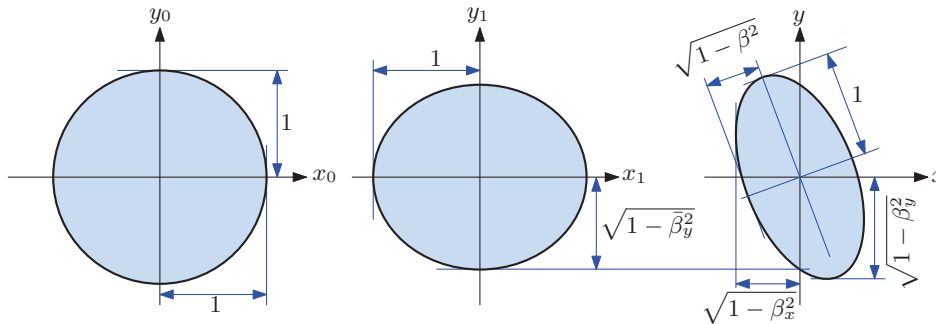
なる記号を定義すれば、 K 系から見たローレンツ収縮率の自乗は、

$$1 - \beta^2 = 1 - \beta_x^2 - \beta_y^2 = 1 - \beta_x^2 - \bar{\beta}_y^2 - \beta_x \bar{\beta}_y^2 = (1 - \beta_x^2)(1 - \bar{\beta}_y^2),$$

のように面白い関係で表される。ローレンツ収縮率は、速度合成に使用された各速度成分のローレンツ収縮率の積で表されることがこの数式からわかるのだ。定義された記号を用いて変換された形状の数式を書き換えると、

$$\frac{1}{1-\beta^2} \left[(1-\beta_y^2)x^2 + (1-\beta_x^2)y^2 - 2\beta_x\beta_y xy \right] = 1, \quad (2.12)$$

が得られる。この数式は傾いた楕円を表す。数式を評価すると、図 2.6 (c) のように、速度ベクトル $[u_x, u_y]$ 方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ の収縮率でローレンツ収縮した楕円となる。面白いことに、座標軸に沿ってつくった外接矩形の x 軸方向の半径が $\sqrt{1-\beta_x^2}$ であり、 y 軸方向の半径が $\sqrt{1-\beta_y^2}$ となる。さらに、楕円と y 軸の交点の y 座標が $(1-\beta_y^2)^{1/2}$ であることも興味深い。これは、 K_1 系からみたローレンツ収縮による短軸方向の長さ (図 2.6 (b)) と一致するのである。



(a) Observed from K_0 frame. (b) Observed from K_1 frame. (c) Observed from K frame.

図 2.6: 観測する慣性系による形状の変化

図 2.6 に示した形状の変化はローレンツ変換から容易に予想がつくだらう。続いて、隙間なく配置された物体が、異なる慣性系から見るとどのように配置されるのかを調べよう。配置を調べるにも数式 (2.10) を用いる。 K_0 系から見たとき、物体の中心が $x_0 = 2m$, $y_0 = 2n$ に存在するとしよう。なお、 m と n は整数である。数式 (2.10) を用いて K_1 系へ、それから、 K 系へと変換すると、

$$x = 2m\sqrt{1-\beta_x^2}, \quad y = 2n\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta_x^2}} - 2m\frac{\beta_x\beta_y}{\sqrt{1-\beta_x^2}},$$

が得られる。この数式によると、物体の配置は慣性系が変わると、図 2.7 のように変化することが導かれる。図 2.7 (a) が物体と相対的に静止する K_0 系から見た物体の配置である。物体は正方形の格子を構成している。それに対し、 K 系から見ると、図 2.7 (b) のように物体の配置が変形される。格子は、もはや正方形でなく、平行四辺形となるのだ。

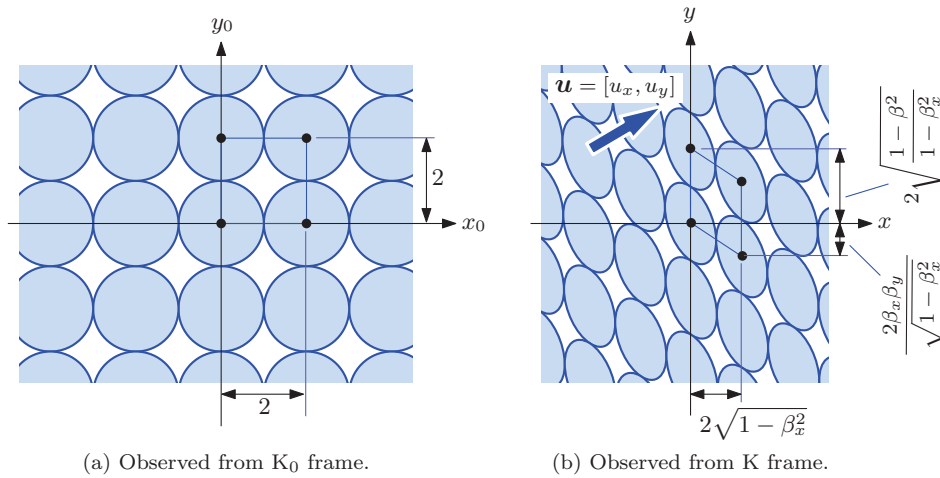


図 2.7: 観測する慣性系による物体配置の変化

2.6 幾何学的解釈

特殊相対性が成立する時空 (すなわち, 慣性系) はミンコフスキー (Minkowski) 時空と呼ばれ, 時間座標 t と空間座標 $[x, y, z]$ に関して面白い幾何学的な性質が成立する。時空とは科学小説 (science fiction; SF) で見るような言葉ではないか。決して SF が発端ではなく, 時空は物理学の用語であり, 時間と空間を個別ではなく一つの座標として取り扱うための座標系である。

2.6.1 ミンコフスキー時空

ニュートン力学では, いかなる観測者から見ても共通の物理量だったので, 空間座標とは区別していた。それに対し, 相対性理論では時間も空間座標と同様, 値も尺度も異なる量に変換されるため, 時間を座標軸の一つとして取り扱うことが自然である。そこで, あえて時間に光速 c を乗じ, 長さのディメンジョンをもつようにしてローレンツ変換の微分を書くと,

$$c dt' = \frac{c dt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - \beta \cdot c dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

が得られる。これらの微小量を用いて,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.13)$$

なる微小量 ds を定義しよう。この新たな微小量は時空の線素と呼ばれる。線素とは座標系の任意の場所における微小ベクトルの長さを規定する量である。右辺の第 2 項以降は 3 次元の三平方の定理を表している。第 1 項がなぜか負になっている。実は, これが重要で

あり、その理由は後にわかる。この線素に対してローレンツ変換を適用すると、

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

が成り立つことから、 $ds^2 = ds'^2$ である。すなわち、 ds はローレンツ変換に対して不変である。このように、定義式 (2.13) で定義された線素がスカラとなる時空はミンコフスキー時空と呼ばれる。

ミンコフスキー時空の線素に関して、光は、必ず、 $ds = 0$ となる経路を運動する。なぜならば、光速不変の原理のため、いかなる観測者が見ても、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2,$$

が成立し、両辺に dt^2 を乗じると、

$$-(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

なる関係式が得られるからである。この数式は3次元空間の円錐表面からの類推によって、4次元時空における超円錐の表面を表すことがわかる。この超円錐を光円錐と呼ぶ。模式的に表すと図 2.8 のようになる。この図では時間の座標軸を上向きにとっている。つまり、下が過去で上が未来である。空間の座標は時間とは垂直な方向にとる。円錐の頂点が、観測者の現在位置である。光は光円錐の表面に沿って伝搬する。

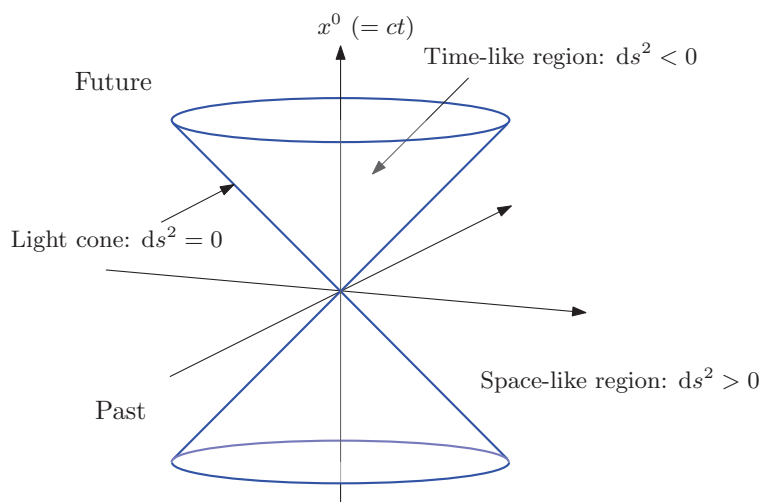


図 2.8: 光円錐と時空における領域

光円錐の内部は時間的 (time-like) 領域と呼ばれる。質量をもつ一般の物体は時間的領域を移動することしかできない。一方、円錐の外は空間的 (space-like) 領域と呼ばれる。空間的領域に情報を伝達するには光速より速い伝達手段が必要である。つまり、空間的領域への情報伝達は不可能である。言い換えると、空間的領域は因果律が成り立たない無関係

な事象しか存在しない領域である。光円錐の頂点で発生した事象に対して、たとえそれが、電磁作用であっても、巨大エネルギーを発する核爆発であっても、空間的領域には影響を及ぼさないのである。しかし、この解釈には注意が必要である。なぜなら、時間は必ず一方向に流れるのであるから、空間的領域に存在する観測者もいずれ、時間的領域に入ることになる。すると、光円錐の頂点で発生した事象の影響を受けるかもしれないのだ。

光円錐の表面は光速で運動する粒子などの軌跡が存在する領域であるので、光的領域と呼ばれる。後に示すように、質量がある物体を光速まで加速することができないので、一般の物体は光円錐の表面を移動することはできない。

2.6.2 時空の虚数角度回転

既に示したように、ローレンツ変換では空間座標のうち、系の運動と同一方向の成分が運動の影響を受ける。そのため、相対論的効果を示すため、影響を受ける空間座標と時間の組み合わせで図を描く。その図は**時空図**と呼ばれる。時空図は前項で説明した光円錐の断面を描き、座標軸に目盛を入れた図だと思えばよい。時空図は特殊相対性理論を視覚的に理解するための便利な道具として多くのテキストで取り扱われている²。

図 2.9 を用いて時空図の書き方を説明しよう。最初に自分が存在する慣性系 K の座標軸を描く。水平方向に x 軸を、垂直方向に ct 軸を描くのである。これも光円錐と同様、時間に光速を乗じると長さのディメンジョンをもつから、 t 軸の代わりに ct 軸を用いるのだ。言うまでもなく、 K 系の座標は直交座標となる。続いて、 K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動する K' 系を考えよう。 K' 系の座標軸を描くには、ローレンツ変換:

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

に注目するとよい。前章で既に記述しているが、 $\tanh \vartheta = \beta$ とすると、ローレンツ変換は、

$$x' = x \cosh \vartheta - ct \sinh \vartheta, \quad ct' = -x \sinh \vartheta + ct \cosh \vartheta,$$

のように書き換えられる。この数式は、座標回転に類似している。正確に言うと、虚数角度の座標回転である。実数角度の座標回転が原点を中心とする円に沿って点を移動する変換であるのに対し、虚数角度の座標変換は双曲線に沿って点を移動する。図 2.9 に示すように、 x 軸上の点 P ($x = A$) は双曲線 $x^2 - (ct)^2 = A^2$ に沿って移動し、 x' 軸との交点 P' が $x' = A$ となる点である。なお、 x' 軸は $\tan \theta = \beta$ を満たす角度 θ だけ x 軸から反時計回りに回転した方向に向いている。一方、 ct' 軸は、 ct 軸から時計回りに角度 θ だけ回転した方向に向いている。さらに、点 P' を通り、 ct' に平行な直線は $x' = A$ に対応する線である。

²筆者は時空図をわかりやすい道具とは思っていなかったりする。

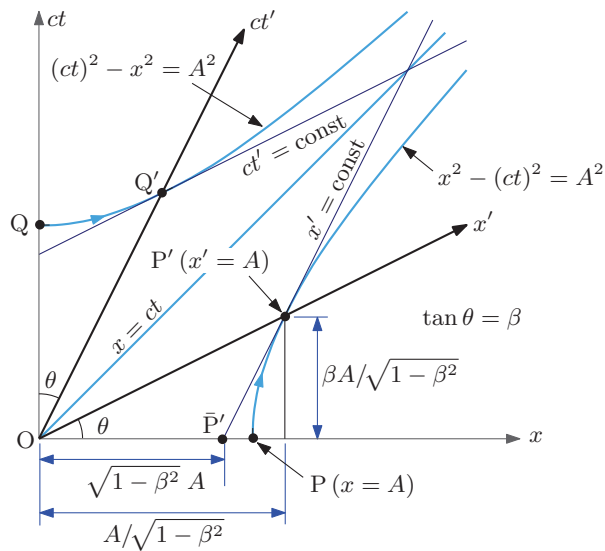


図 2.9: 時空図における座標軸の描き方

時間に関する ct' 軸の成分についても同様である。つまり、時空図では異なる観測者の座標は斜交座標となる。基準である K 系に対する K' 系の速度 v が大きくなると、座標軸の傾斜 θ が大きくなる。その相対速度が c に近づくと、 x' 軸と ct' 軸の双方は、直線 $x = ct$ に収束する。

図 2.9 に示すように、双曲線に沿って移動した座標は、 K 系と K' 系とでは尺度が異なる。尺度が異なるので、時空図が K 系の尺度で描かれているなら、 K' の座標を読み取るには x' 軸に沿ってものさしを当てて長さを測るわけにはいかない。しかし、座標を読み取るヒントを図 2.9 に記しておいた。図によると、 x' が一定となる直線を伸ばして x 軸との交点を \bar{P}' とする。図に記したように、原点から点 \bar{P}' までの距離は、 x' 座標の $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍になっている。それを利用すると、原点から点 \bar{P}' までの距離を計測し、その長さに $1/\sqrt{1-\beta^2}$ を乗じれば x' 座標が得られるのである。もう一つの座標 ct' についても同様である。

具体的な座標と、光の世界線を時空図に描いた例は図 2.10 のようになる。ここでは、 K 系を基準にとった時空図を (a) に、 K' 系を基準にとった時空図を (b) に描いた。上に説明した手順で時空図を描くと、基準系でない慣性系は斜交座標系となる。斜交座標の目盛は、水平方向と垂直方向の双方とも $\sqrt{1-\beta^2}$ の間隔で設定される。例として、図 2.10 (a) に、 K 系の座標 $[4, 3]$ に点 P をプロットした。この時空図が $\beta = 1/3$ を想定して描かれているので、ローレンツ変換によると、 K' 系の座標で $[3.18, 1.77]$ となるはずである。時空図の格子点を読むと、予想通りになっていることが確認できるだろう。さらに、時空図の点 A と B から発射される光の世界線を描いておいた。世界線は傾きが ± 1 の直線として描かれる。

立場を変えて K' 系を基準に時空図を描くと図 2.10 (b) のようになる。この場合は、 K' 系が直交座標系で、 K 系が斜交座標系となる。 K 系が K' 系に対して x' 軸方向に速度 $-v$ で等速度運動していると考えれば時空図の描き方も、読み取り方も図 2.10 (a) と同様である。