

第8章 積分形式で定義される関数

ガンマ関数のように、既存関数の積分形式によって新たな関数を定義すると、様々な数学や物理の問題を数学的な記法によって解決できるようになる。そのような新しい関数は、従来解けなかった微分方程式の解を記号で表記するだけに見えるかもしれない。しかし、その定義に沿って性質を調べていくと、計算手法も確立する。計算手法が確立すれば、新たに定義された関数は、正弦関数や指数関数のように取り扱うことができるはずだ。本章では、積分形式によって定義される関数を取り扱う。

8.1 誤差関数

誤差関数は、正規分布に従う確率事象の累積確率を計算するための関数である。誤差関数は、 $\operatorname{erf} x$ なる記号を用いて記述され、

$$\operatorname{erf} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad (8.1)$$

のように定義されている。後者の関数 $\operatorname{erfc} x$ は相補誤差関数と呼ばれる。これらの関数の間には、 $\operatorname{erf} x + \operatorname{erfc} x = 1$ なる関係がある。誤差関数は、標準偏差が $\sqrt{1/2}$ の正規分布について、確率変数の絶対値が x より小さい確率を与える。視覚的には、図 8.1 の中央の領域 $-x \leq t \leq x$ で確率密度関数 $e^{-t^2}/\sqrt{\pi}$ がつくる面積が $\operatorname{erf} x$ であり、両端の網掛け部の面積が $\operatorname{erfc} x$ である。

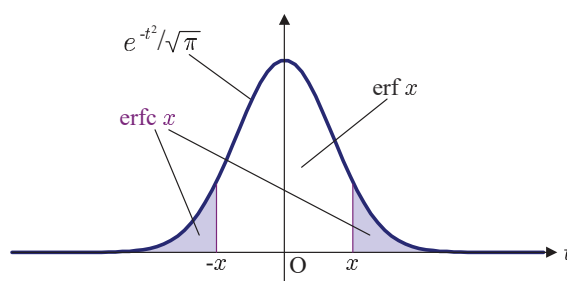


図 8.1: 正規分布の累積確率としての誤差関数の解釈

8.1.1 マクローリン級数と漸近展開

誤差関数 $\operatorname{erf} x$ を計算する簡単な方法は, (8.1) における被積分関数をマクローリン展開して得られた級数を項別積分することである。そのような方法によって,

$$\operatorname{erf} x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1/2)}, \quad (8.2a)$$

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(n+1/2)}, \quad (8.2b)$$

が得られる。相補誤差関数 $\operatorname{erfc} x$ については, $\operatorname{erf} x + \operatorname{erfc} x = 1$ なる関係を利用した。この関係は, $x \rightarrow \infty$ の極限で $\operatorname{erf} x \rightarrow 1$ となることが前提である。これは, 上に述べたような正規分布における累積確率の解釈から明らかであるが, 念のため, $x \rightarrow \infty$ の極限で $\operatorname{erf} x \rightarrow 1$ となることを示しておこう。

無限遠における誤差関数が $\operatorname{erf} x \rightarrow 1$ となることは, $(\operatorname{erf} x)^2$ を評価することによって証明できる。誤差関数の自乗は $x \rightarrow \infty$ の極限で,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{erf} x)^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)} d\xi d\eta,$$

のように書くことができる。ここで, $\xi \equiv \rho \cos \theta$, $\eta \equiv \rho \sin \theta$ のように置き換えると,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{erf} x)^2 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \rho e^{-\rho^2} d\theta d\rho = 2 \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} du = 1, \end{aligned}$$

となる。この数式の第1行目は, 2次元の直交座標系 $[\xi, \eta]$ における面積分を, 2次元の極座標系 $[\rho, \theta]$ に変換した数式変形である。なお, 積分範囲が $[\xi, \eta]$ における第I象限全体であるので, 極座標に変換した際, 積分範囲が $0 \leq \theta \leq \pi/2$ となっている。第2行目への数式変形は, $u \equiv \rho^2$ なる置き換えを適用した。この数式の両辺の平方根をとると, $x \rightarrow \infty$ の極限で, $\operatorname{erf} x \rightarrow 1$ となることが示された。◀

誤差関数のマクローリン級数の収束半径は無限大であるが, 大きな x については漸近展開を利用する方が便利である。誤差関数は,

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 x^9} - \dots \right), \quad (8.3a)$$

$$\operatorname{erfc} x = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 x^9} - \dots \right), \quad (8.3b)$$

のように漸近展開できる。十分に大きな x を与えた場合, $\operatorname{erfc} x \simeq e^{-x^2}/\sqrt{\pi}x$ が成立することを意味する。そのような第1項目だけの近似でも $x = 5$ であれば誤差は2%以内に抑え

られる。さらに、第2項目までを使うと誤差は0.06%以内に減少できる。漸近展開は加算する項を増やしすぎると発散するので注意が必要である。これらの漸近展開の場合、使用する項の数を n としたとき、 $2n + 1 > 2x^2$ となる場合、 n の増加で誤差が増えるのだ。

誤差関数の漸近展開を得るには、

$$I_n(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^n} dt,$$

を評価すればよい。部分積分を利用して積分 $I_n(x)$ を計算すると、

$$I_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^{n+1}} - \frac{n+1}{2} \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}} dt = \frac{e^{-x^2}}{x^{n+1}} - \frac{n+1}{2} I_{n+2}(x),$$

なる漸化式が得られる。この漸化式に注意して $\operatorname{erfc} x = 2I_0(x)/\sqrt{\pi}$ を計算すると、漸近展開 (8.3b) が得られる。さらに、 $\operatorname{erf} x + \operatorname{erfc} x = 1$ を利用して漸近展開 (8.3a) が得られる。◀

マクローリン級数と漸近展開を用いて誤差関数を計算すると、誤差関数は図8.2に示す曲線を描く。誤差関数は奇関数であり、無限遠 $x \rightarrow \pm\infty$ で ± 1 に漸近する。誤差関数 $\operatorname{erf} x$,

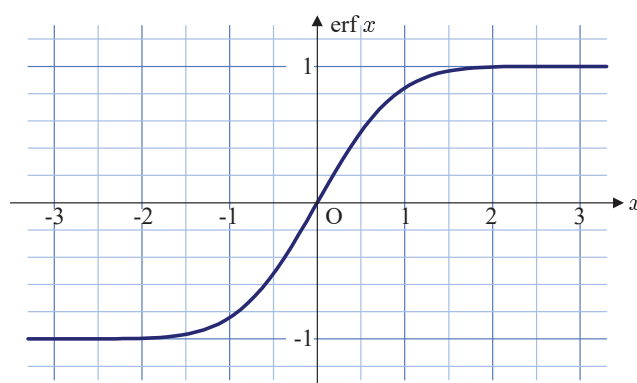


図 8.2: 誤差関数

あるいは、相補誤差関数 $\operatorname{erfc} x$ は工学における雑音解析に有用な関数である。相補誤差関数 $\operatorname{erfc} x$ は、本節の冒頭で述べたように、標準偏差 $\sqrt{1/2}$ の正規分布にしたがう確率変数の絶対値が x を超える確率を与える。この解釈が雑音解析に有用なのである。

8.1.2 不完全ガンマ関数との関係

誤差関数 $\operatorname{erf} x$ と相補誤差関数 $\operatorname{erfc} x$ は不完全ガンマ関数を用いた簡単な数式で表現できる。その関係式は、

$$\operatorname{erf} x = \frac{1}{\pi} \gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right), \quad \operatorname{erfc} x = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right), \quad (8.4)$$

である。簡単な数式どころか、不完全ガンマ関数そのものである。誤差関数の積分による定義式(8.1)の積分変数を、 $u \equiv t^2$ のように置き換えると、

$$\operatorname{erf} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} u^{-1/2} e^{-u} du,$$

のように計算できる。この式の右辺が不完全ガンマ関数になっているため、誤差関数は不完全ガンマ関数を用いて記述できるのだ。不完全関数は本書で、既に級数展開を与えているので、誤差関数の級数展開を即座に得ることができる。結果を書くと、

$$\operatorname{erf} x = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!(k+1/2)}, \quad (8.5a)$$

$$\operatorname{erfc} x = \frac{e^{-x^2}}{\pi x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k+1/2)}{x^{2k}}, \quad (8.5b)$$

となる。ここで、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を用いた。前者の級数展開は $x=0$ を中心にしたマクローリン級数であり、後者は漸近展開である。これは、前項で導出したマクローリン級数と漸近展開と一致する。

8.1.3 逆誤差関数

雑音解析などにおいて、検出率を特定の値に収めるためのしきい値設定が必要な場合がある。その場合、誤差関数を逆に解く、すなわち、誤差関数の逆関数を計算することによってしきい値を設定する。その問題の解法となる誤差関数の逆関数は逆誤差関数と呼ばれる。逆誤差関数を $\operatorname{inverf} x$ なる記号で記述すると、その逆関数は、

$$\operatorname{inverf} x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(x + \frac{\pi}{12} x^3 + \frac{7\pi^2}{480} x^5 + \frac{127\pi^3}{40320} x^7 + \frac{4369\pi^4}{5806080} x^9 + \dots \right), \quad (8.6)$$

マクローリン級数で計算できる。

逆誤差関数のマクローリン級数を導出してみよう。まず、 $y = \operatorname{inverf} x$ とおくと、

$$x = \operatorname{erf} y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt,$$

と書くことができる。この関係式から、 x を y について微分すると、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2},$$

であることが容易にわかる。この数式の逆数をとると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{y^2},$$

である。逆誤差関数, すなわち y をマクローリン展開するには, y を x について微分した高次導関数が必要である。そのため, まず, x についての微分演算子を準備すると,

$$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy},$$

となる。これを利用して, 高次導関数をいくつか計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dy^2} &= \frac{\pi}{4} \cdot 2y e^{2y^2}, & \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{\pi^{3/2}}{8} (2 + 8y^2) e^{3y^2}, \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{\pi^2}{16} (28y + 48y^3) e^{4y^2}, & \frac{d^5 y}{dx^5} &= \frac{\pi^{5/2}}{32} (28 + 368y^2 + 384y^4) e^{5y^2}, \end{aligned}$$

が得られる。これらの結果から, n 階の導関数が,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\pi^{n/2}}{2^n} e^{ny^2} \sum_{k=0}^{n-1} c_{nk} y^k,$$

なる形で書けることは容易に予想できるだろう。この数式をもう一度 x について微分すると,

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{2^{n+1}} e^{(n+1)y^2} \left\{ c_{n1} + \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1)c_{n,k+1} + 2nc_{n,k-1}] y^k + 2nc_{n,n-1} y^n \right\},$$

が得られる。これは展開係数 c_{nk} に関する漸化式を与える。その漸化式は, 具体的に書くと,

$$c_{n+1,0} = c_{n1}, \quad c_{n+1,k} = (k+1)c_{n,k+1} + 2nc_{n,k-1}, \quad c_{n+1,n} = 2nc_{n,n-1},$$

である。この漸化式を用いて導関数の展開係数 c_{nk} を計算すると, した表のようになる。この表の第 n 行が n 階微分の展開係数をである。この表に示すように, $n+k$ が偶数となる展開係数はゼロとなっている。

表 8.1: 逆誤差関数の展開係数計算 c_{nk} のための表

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	0	2					
3	2	0	8				
4	0	28	0	48			
5	28	0	368	0	384		
6	0	1016	0	5216	0	3840	
7	1016	0	27840	0	81792	0	46080

これでマクローリン展開ができる材料がそろったので, 逆誤差関数のマクローリン展開に移ろう。一般の関数 $y(x)$ のマクローリン展開は,

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots,$$

と記述される。逆誤差関数の場合、 $x = 0$ に対応する関数値は $y(0) = 0$ である。したがって、 $x = 0$ における逆誤差関数の n 階微分は、

$$\left. \frac{d^n y}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\pi^{n/2}}{2^n} c_{n0},$$

となる。これをマクローリン級数の公式に代入すると、

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{n/2}}{n! 2^n} c_{n0} x^n,$$

が得られる。上で計算した展開係数 c_{n0} に代入すると、逆誤差関数のマクローリン展開 (8.6) が導出される。

上に示した漸化式と表によってマクローリン展開の展開係数を計算できたのであるが、表 8.1 に示すように $n + k$ が偶数であるとき $c_{n+k} = 0$ となるので、表を小さくすることができる。ここで、 $C_{nk} \equiv c_{n+k, n-k}$ のように係数を置き換えて表をつくると、表 8.2 が得られる。この表は配置が変わっただけで、記載される数値は表 8.1 と同一である。この表

表 8.2: 逆誤差関数の展開係数計算 C_{nk} のための表

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	2	2			
2	8	28	28		
3	48	368	1016	1016	
4	384	5216	27840	69904	69904

の場合、マクローリン展開に使用する係数は対角成分 C_{nn} に現れる。しかも、その係数は $2n + 1$ 次の係数である。つまり、この表で計算された係数を用いてマクローリン展開を記述すると、

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{n+1/2}}{(2n+1)! 2^{2n+1}} C_{nn} x^{2n+1},$$

と書くことができる。なお、表 8.2 を得るための漸化式は、

$$C_{n0} = 2nC_{n-1,0}, \quad C_{nk} = 2nC_{n-1,k} + (n-k+1)C_{n,k-1}, \quad C_{nn} = C_{n,n-1},$$

となる。さらに、この漸化式を、

$$\hat{C}_{n0} = n\hat{C}_{n-1,0}, \quad \hat{C}_{nk} = n\hat{C}_{n-1,k} + (n-k+1)\hat{C}_{n,k-1}, \quad \hat{C}_{nn} = \hat{C}_{n,n-1},$$

改めてみよう。ただし、 $\hat{C}_{00} = C_{00} = 1$ であるとする。漸化式をこのように書き換えると、表 8.3 のようになる。このように書き換えた係数との関係は $C_{nn} = 2^n \hat{C}_{nn}$ となっている。

表 8.3: 逆誤差関数の展開係数計算 \hat{C}_{nk} のための表

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	2	7	7		
3	6	46	127	127	
4	24	326	1740	4369	4369

前に記述した表 8.2 と比較すると、小さい値で記述できることがわかる。この事実は、計算機で展開係数を計算するうえでもオーバフローしにくいので、表 8.3 の方が係数決定に有利である。新たに置き換えた係数 \hat{C}_{nn} を用いてマクローリン級数を記述すると、

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{n+1/2}}{(2n+1)! 2^{n+1}} \hat{C}_{nn} x^{2n+1},$$

となる。

8.2 マーカムの Q 関数

実部と虚部がゼロ平均の正規分布にしたう複素雑音の振幅はレイリー分布にしたがう。その雑音に正弦波が重畳すると、振幅は仲上-ライス分布にしたがう。仲上-ライス分布の確率密度関数は第 3.7.4 項で導出したが、その累積確率はマーカムの Q 関数と呼ばれる関数によって計算できる。マーカムの Q 関数は 1 つの媒介変数と、2 つの変数をもつ関数であり、

$$Q_n(a, b) \equiv \int_b^{\infty} \frac{x^n}{a^{n-1}} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{n-1}(ax) dx, \quad (8.7)$$

によって定義される。

8.2.1 Q 関数の計算

変形ベッセル関数の微分を伴う漸化式 (3.40) に注目すれば、マーカムの Q 関数を定義する積分を部分積分することができ、その結果として、

$$Q_n(a, b) = \left[-\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{n-1}(ax) \right]_b^{\infty} + \int_b^{\infty} \frac{x^{n-1}}{a^{n-2}} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{n-2}(ax) dx,$$

のように数式変形できる。第1項のブラケット内の関数は $x \rightarrow \infty$ の極限でゼロになる。その事実は第1種の変形ベッセル関数の漸近展開 $I_n(z) \sim e^z (2\pi x)^{-1/2}$ であることに注意すれば導くことができる。それを示してみると,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-1} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{n-1}(ax) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1} e^{ax}}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

となる。右辺を得るには、指数関数 $e^{-(x-a)^2/2}$ がいかなるべき多項式よりも早くゼロに収束する事実を利用した。したがって、マーカムの Q 関数は,

$$Q_n(a, b) = \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{n-1}(ax) + Q_{n-1}(a, b),$$

なる漸化式にしたがうことがわかる。この漸化式を繰り返すと,

$$Q_n(a, b) = \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \sum_{k=1-n}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k I_k(ab), \quad (8.8)$$

が得られる。なお、この公式を得るには、 $I_{-n}(x) = I_n(x)$ なる関係を用いた。変形ベッセル関数による $Q_n(a, b)$ の展開が、変数 b について正の実数全体で収束することを示そう。そのために,

$$c_k^{(n)}(a, b) \equiv \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^k I_k(ab)$$

とおいてみよう。当然、 $c_k^{(n)}(a, b)$ の無限級数が $Q_n(a, b)$ となることを期待している。ここで、隣り合う項の比 $c_{k+1}^{(n)}(a, b)/c_k^{(n)}(a, b)$ を計算すると,

$$\frac{c_{k+1}^{(n)}(a, b)}{c_k^{(n)}(a, b)} = \frac{a}{b} \frac{I_{k+1}(ab)}{I_k(ab)},$$

が得られる。ここで、漸化式 $I_{k-1}(x) - I_{k+1}(x) = 2k I(x)/x$ を利用すると,

$$\frac{I_{k+1}(x)}{I_k(x)} = \frac{k}{x} \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} - 1 \right),$$

が得られる¹。この関係を利用し、 $k \rightarrow \infty$ における $c_{k+1}^{(n)}(a, b)/c_k^{(n)}(a, b)$ の極値を計算すると,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}^{(n)}(a, b)}{c_k^{(n)}(a, b)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \frac{ab}{2k} = 0,$$

¹隣り合う項の比 $I_{k+1}(x)/I_k(x)$ が $k \rightarrow \infty$ で極値 r をもつと仮定すると、 $I_{k-1}(x)/I_k(x)$ の極値は $1/r$ となるはずである。その仮定を利用して極値が導出できる。

が得られる。この結果は、いかなる b においても無限級数が収束することを意味している。つまり、この級数の収束半径は $|b| = \infty$ で表される。

級数が収束することがわかった。特別な関数値として、 $Q_n(a, 0) = 1$, $Q_n(a, \infty) = 0$ が導出できる。それらの関数値を導出してみよう。まず、 $b \rightarrow 0$ として関数の極限を計算すると、

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} Q_n(a, b) &= \lim_{b \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k I_k(ab) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k I_k(ab) \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k \frac{a^k b^k}{2^k k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k \frac{a^k b^k}{2^k k!} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{b^{2k}}{2^k k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{2^k k!} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b^2/2} = 1, \end{aligned}$$

が得られる。この計算では、 $|x| \ll 1$ において $I_k(x) \simeq x^k/2^k k!$ なる近似が成立することを利用した。第3行目のブラケット内の第1項は $b \rightarrow 0$ で極致としてゼロになる。ブラケット内の第2項は $e^{a^2/2}$ のテイラー展開である。その結果、右辺を得ることができるのだ。したがって、 $Q_n(a, 0) = 1$ が導出できた。続いて $b \rightarrow \infty$ の極値を調べてみよう。極値として、 $I_k(x) \sim e^x (2\pi x)^{-1/2}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} Q_n(a, b) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k I_k(ab) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k I_k(ab) \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{ab}}{\sqrt{2\pi ab}} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-(a-b)^2/2}}{\sqrt{2\pi ab}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k + \frac{b}{b-a} \right] = 0, \end{aligned}$$

が導かれる。第2行目のブラケット内の第2項は $b/(b-a)$ のテイラー展開である。第3行目では、 $e^{-(a-b)^2/2}$ にいかなるべき級数を乗じても $b \rightarrow \infty$ の極限でゼロになることを利用した。その結果、 $Q_n(a, b) \rightarrow 0$ が導出できた。マーカムの Q 関数を第2変数 b を横軸としてグラフ表示すると図 8.3 に示す曲線を描く。次数 n と第1変数 a に関わらず、 $Q_n(a, 0) = 1$ となり、 $b \rightarrow \infty$ の極限で $Q_n(a, b)$ はゼロになる。

別の級数表現 マーカムの Q 関数の定義式を部分積分して得られる級数は1つだけではない。導出過程は上とほぼ同じなので省略するが、マーカムの Q 関数は、

$$Q_n(a, b) = 1 - \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^k I_k(ab), \quad (8.9)$$

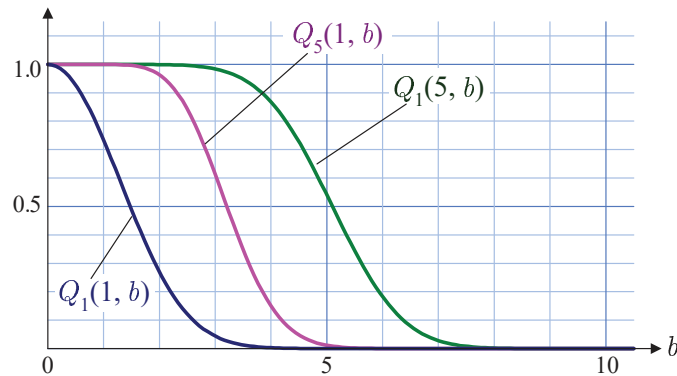


図 8.3: マーカムの Q 関数

のように書くこともできるのだ。実は、この級数も b について収束半径が無限大となる。しかし、その条件が (8.8) とは違うのだ。級数 (8.8) の収束条件は $b^2/2k < 1$ であり、級数 (8.9) の収束条件は $a^2/2k < 1$ である。これを $k \rightarrow \infty$ としたとき、いかなる b に対しても収束条件を満たすのだ。しかし、収束条件を満たす最小の k が異なる。これらの収束条件から、 $a < b$ のとき (8.8) の方が都合がよく、そうでない場合は (8.9) が都合がよい。

8.2.2 数値計算

前項で導出した級数展開 (8.8), または, (8.9) によってマーカムの Q 関数が計算できる。しかし、その級数には変形ベッセル関数 $I_k(ab)$ が含まれ、変形ベッセル関数も級数展開によって計算されるので、前項で導出した級数展開は計算機における計算では二重級数となる。本項では、その二重級数をできるだけ少ない項数で計算する手法を考察する。

計算機での演算には級数 (8.9) が取り扱いやすい。級数に含まれる変形ベッセル関数を級数展開すると、

$$\begin{aligned} Q_n(a, b) &= 1 - \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{k+n} I_{k+n}(ab) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{k+n} \frac{(ab/2)^{k+2p+n}}{p!(k+p+n)!}, \end{aligned}$$

のように書くことができる。本書でしばしば用いた添え字の変換 $m \equiv k + p$ を利用すると、この数式は、

$$\begin{aligned} Q_n(a, b) &= 1 - \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^{k+n} \frac{(ab/2)^{2m-k+n}}{(m-k)!(m+n)!} \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^{2m-2k} b^{2m+2n}}{2^{m+n} 2^{m-k} (m-k)!(m+n)!} \end{aligned}$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k} b^{2m+2n}}{2^{m+n} 2^{2k} k! (m+n)!},$$

のように変形できる。この数式をもう少し整理すると、

$$Q_n(a, b) = 1 - \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!} \left(\frac{b^2}{2}\right)^{m+n} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{a^2}{2}\right)^k, \quad (8.10)$$

が得られる。得られた数式は、 k についての総和に m が含まれていないので、 k と m について総和が個別に計算できることを意味している。この数式も二重級数であることに変わりはないのであるが、この結果を計算機のプログラムとして書けば、(8.9) を計算するよりも演算量を小さくすることができる。

8.2.3 雑音に重畳する信号の検出確率

ゼロ平均の正規分布にしたがう複素雑音に正弦波が重畳したとき、ある観測値の絶対値に対する確率密度関数は、第 3.7.4 項で取り扱った仲上-ライス分布にしたがう。正弦波と雑音が重畳した観測値に対し、その絶対値があるしきい値を超える確率は仲上ライス分布の確率密度関数を積分した値となる。その積分は、マーカムの Q 関数で与えられるのである。

実部と虚部が、それぞれ、ゼロ平均で標準偏差が σ の雑音の環境で、振幅 A の正弦波 $Ae^{i\omega t}$ が重畳したとき、観測される信号の絶対値が x となる確率密度関数は、第 3.7.4 項で導出した関数:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 + x^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right),$$

によって与えられる。電磁波を用いた通信が雑音から信号を抽出する処理によって実現されているので、仲上-ライス分布は通信工学で利用される。例えば、観測値がある振幅を超過したとき信号が存在すると判定し、超過しなければ無信号状態であると判定する場合を考えよう。視覚的には、図 8.4 に示す確率密度関数 (probability density function; PDF) を考えればよい。この図のうち、左側の関数が、信号が存在しない雑音の振幅の観測確率密度関数であり、その右側に最大値をもつ関数が雑音と信号が重畳したときの観測値に対する確率密度関数である。信号が重畳したときの確率密度関数は、すでに述べたように仲上-ライス分布にしたがう。観測値が振幅 x を超えたときに信号が検出されたとすると、信号の検出確率 (probability of detection) は、確率密度関数を $[x, \infty)$ で積分して得られる累積確率 (図中の P_d) である。信号の検出確率 P_d を計算すると、

$$\begin{aligned} P_d &= \int_x^{\infty} \frac{u}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 + u^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Au}{\sigma^2}\right) du \\ &= Q_1\left(\frac{A}{\sigma}, \frac{x}{\sigma}\right) = Q_1(\sqrt{2(S/N)}, x/\sigma), \end{aligned}$$

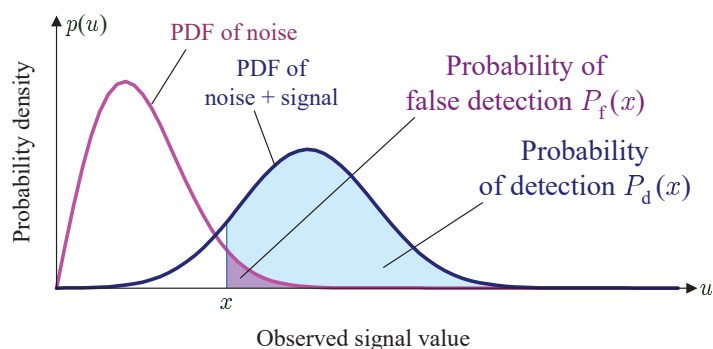


図 8.4: 観測値とその観測確率の密度

が得られる。ここで、記号 (S/N) は工学で頻りに用いられる信号対雑音電力比 ($= A^2/2\sigma^2$) である。一方、信号が存在しない場合でも、その判定処理によって信号が誤って検出されることがある。その誤りの確率、すなわち、誤検出確率 (probability of false detection) は、レイリー分布の確率密度関数を $[x, \infty)$ で積分して得られる累積確率 (図中の P_f) である。誤検出確率 P_f は、

$$P_f = \int_x^\infty \frac{u}{\sigma^2} e^{-u^2/2\sigma^2} du = e^{-x^2/2\sigma^2},$$

となる。導出した数式を使って信号の振幅と検出確率の関係をグラフとして表現すると、図 8.5 に示す曲線を描く。この図において信号振幅を、雑音との電力比として横軸にとっている。このグラフによると、誤検出確率検出が $P_f = 10^{-4}$ となるように検出のためのし

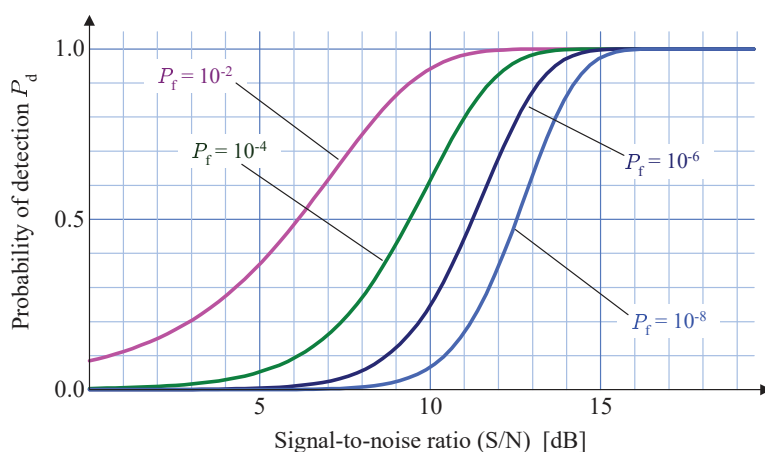


図 8.5: 信号の振幅と検出確率

きい値を選ぶと、信号対雑音電力比が 11.0 dB のとき検出確率は 0.8 となる。さらに、誤検出確率検出が $P_f = 10^{-6}$ となるようにしきい値を選ぶと、信号対雑音電力比が 13.2 dB のとき検出確率は 0.9 となる。信号レベル (信号対雑音電力比) が一定の条件で、検出確率を大きくするようにしきい値を設定すると、誤検出確率も大きくなるのがこのグラフから読み取れる。

8.3 フレネル積分

球ベッセル関数に関する興味深い性質として、フレネル積分が球ベッセル関数の級数で表現できることを紹介しよう。フレネル積分は、回折理論に現れる積分あり、

$$x(t) = \int_0^t \cos v^2 dv, \quad y(t) = \int_0^t \sin v^2 dv, \quad (8.11)$$

のように定義される。前者はフレネル余弦積分、後者はフレネル正弦積分と呼ばれる。フレネル積分は、図 8.6 に示す曲線を描く。被積分関数が偶関数であるので、余弦積分と正弦積分はともに奇関数である。双方の関数は、図に示したように振動しながら $|t|$ の増加とともに収束する。フレネル積分は、負の無限遠において $-\sqrt{\pi/8}$ に、正の無限遠において $\sqrt{\pi/8}$ に収束する。なお、この積分の応用例を本項の後半で紹介する。

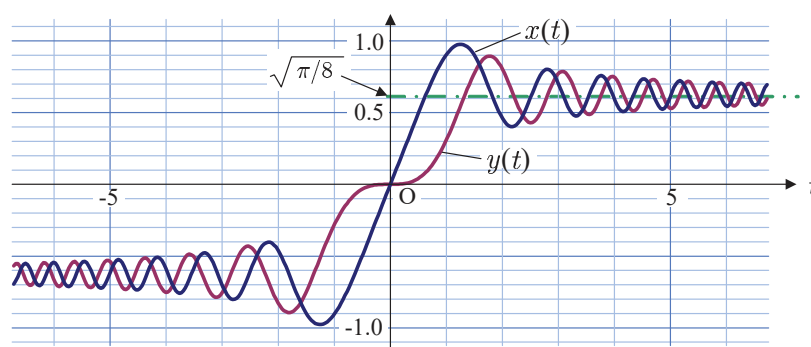


図 8.6: フレネル積分

8.3.1 球ベッセル関数との関係

上で述べたように、フレネル積分は球ベッセル関数の級数で表現することができる。実際のその級数を書いてみると、

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^{t^2} j_{-1}(u) u^{1/2} du = t \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n}(t^2), \quad (8.12a)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^{t^2} j_0(u) u^{1/2} du = t \sum_{n=0}^{\infty} j_{2n+1}(t^2), \quad (8.12b)$$

となる。フレネル積分が球ベッセル関数の級数で表現できることは、前項で導出した漸化式を用いて証明できる。

フレネル積分のうち、フレネル余弦積分についての等式が成立することを証明しよう。証明するには、まず、フレネル余弦積分 (8.11) の積分変数を $u \equiv v^2$ のように置き換え、

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^{t^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^{t^2} j_{-1}(u) u^{1/2} du,$$

のように書き換えられる。この数式の被積分関数は、実は、

$$\frac{1}{2}j'_{-1}(u)u^{1/2} = \frac{d}{du}\left(u^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}j_{2n}(u)\right), \quad (8.13)$$

なる関係があるので、これを被積分関数して積分を実行すると、

$$x(t) = \int_0^{t^2} \frac{d}{du}\left(u^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}j_{2n}(u)\right) du = \left[u^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}j_{2n}(u)\right]_0^{t^2},$$

のように計算され、その結果として級数表現 (8.12a) が導出される。証明を完了するには、等式 (8.13) が成立することを示さなければならない。等式の右辺から出発して数式変形をすると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}j_{2n}(x)\right) &= \frac{x^{-1/2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}j_{2n}(x) + x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}j'_{2n}(x) \\ &= x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j_{2n}(x)}{2x} + j'_{2n}(x)\right) \\ &= x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j_{2n}(x)}{2x} + j_{2n-1}(x) - \frac{2n+1}{x}j_{2n}(x)\right) \\ &= x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(j_{2n-1}(x) - \frac{4n+1}{2x}j_{2n}(x)\right) \\ &= x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[j_{2n-1}(x) + \frac{1}{2}(j_{2n+1}(x) + j_{2n-1}(x))\right] \\ &= \frac{x^{1/2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(j_{2n-1}(x) - j_{2n+1}(x)) = \frac{x^{1/2}}{2}j_{-1}(x), \end{aligned}$$

のように計算できる。第3行目への数式変形には、漸化式 (3.68c) を利用した。第4行目で $j_{2n}(x)$ の項を整理し、第5行目への数式変形では漸化式 (3.68a) を利用した。第6行目で再び項を整理し、その総和が畳み込み級数²になっていることに気づけば右辺が得られる。よって、等式 (8.12a) は成立する。フレネル正弦積分 (8.12b) についても同様に証明できる。¶

球ベッセルの級数 (8.12a) と (8.12a) が収束するかを疑問に思う読者もいるだろう。その級数の収束半径は無限大である。それは隣り合う項の比を評価すれば正当性を示すことができる。フレネル余弦積分の場合、隣り合う項の比は $j_{2n+2}(t^2)/j_{2n}(t^2)$ である。ベッセル関数の級数表現 (3.7) に注意して、その比を評価すると、

$$\left|\frac{j_{2n+2}(t^2)}{j_{2n}(t^2)}\right| = \left|\frac{J_{2n+5/2}(t^2)}{J_{2n+1/2}(t^2)}\right| < \frac{(t^2/2)^2}{(2n+3/2)(2n+5/2)} < \frac{t^4}{16n^2}, \quad (8.14)$$

²英語では telescoping sum と呼ばれ、「畳み込み」という日本語のわりに convolution (畳み込み演算) とは無関係である。畳み込み級数とは、 $(1-1/2) + (1/2-1/3) + (1/3+1/4) + \dots = 1$ のように、隣り合う項が打ち消しあい、結局、両端の数字しか残らない級数である。

となる。つまり、 $n > t/4$ であればこの比は1より小さくなる。ダランベールの収束判定によると、 $n \rightarrow \infty$ の極限の意味で隣り合う項の比が1より小さければ、その級数は絶対収束する。したがって、いかなる t に対して級数 (8.12a) は収束する。また、同様の理由で級数 (8.12b) も絶対収束する。

8.3.2 フレネル積分の数値計算

フレネル積分は、上に述べたように球ベッセル関数の級数で計算できるのだが、球ベッセル関数自体が級数で計算されるので、その方法では演算量に難がある。そのため、実際の数値計算では別の方法を用いる。ここでは、フレネル積分のべき級数と漸近展開を紹介する。

フレネル積分のべき級数は (8.11) において、三角関数をマクローリン展開した級数を積分することによって導出できる。その結果は、

$$x(t) = \int_0^t \cos u^2 du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}, \quad (8.15)$$

$$y(t) = \int_0^t \sin u^2 du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}, \quad (8.16)$$

となる。この級数の収束半径は無限大である。数学的にはいかなる t に対しても級数は収束するのだが、計算機には有効桁があるので、極度に大きな t については収束性を保証できない。その場合には、次に示す漸近展開を使用する。その漸近展開によると、

$$P(t) = \frac{1}{2t} - \frac{1 \cdot 3}{2^2} \frac{1}{2t^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3} \frac{1}{2t^9} - \dots \quad (8.17a)$$

$$Q(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{2t^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \frac{1}{2t^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^5} \frac{1}{2t^{11}} - \dots \quad (8.17b)$$

なる $P(t)$ と $Q(t)$ を定義したとき、

$$x(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + P(t) \sin t^2 - Q(t) \cos t^2, \quad (8.18a)$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - P(t) \cos t^2 - Q(t) \sin t^2, \quad (8.18b)$$

によってフレネル積分が計算できる。この漸近展開は、被積分関数 $\cos v^2$ と $\sin v^2$ を区間 $[0, \infty)$ で積分した結果が $\sqrt{\pi/8}$ であることと、その被積分関数の区間 $[t, \infty)$ における積分に部分積分を適用することによって導出される。

フレネル積分の積分範囲を $[0, \infty)$ としたとき、その積分が $\sqrt{\pi/8}$ となることを示そう。その証明にあたって、被積分関数を e^{iv^2} とすると都合がよい。そうすると、オイラーの関

係式によって,

$$\int_0^{\infty} e^{iv^2} dv = x(\infty) + iy(\infty),$$

のように, 正弦積分と余弦積分が評価できる。さらに, 積分を評価するには図 8.7 に示す積分路を設定するとよい。積分路は, 実軸上を原点から R までたどる経路 C_0 , 複素平面上を半径 R の円弧に沿って $Re^{\pi i/4}$ までたどる経路 C_R , 複素平面上を $Re^{\pi i/4}$ から原点までの直線をたどる経路 $C_{\pi/4}$ によって構成される。被積分関数 e^{iv^2} が正則であるので積分路を周

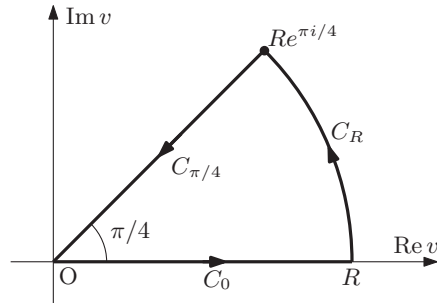


図 8.7: 被積分関数 e^{iv^2} の積分路

回した積分結果はゼロになる。また, 経路 C_R に沿った積分は $R \rightarrow \infty$ の極限の極限でゼロになる。それを示すには, 積分変数を $v \equiv Re^{i\theta}$ で置き換えればよい。すると,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{iv^2} dv \right| &= \left| iR \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{2i\theta}} e^{i\theta} d\theta \right| = \left| iR \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta} e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta < R \int_0^{\pi/4} e^{-4R^2 \theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{4R} (e^{-R^2} - 1), \end{aligned}$$

となるので, 確かに, $R \rightarrow \infty$ の極限で C_R に沿った積分はゼロになる。なお, 第 2 行目の不等式の変形には, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ で $\sin 2\theta \geq 4\theta/\pi$ が成立することを利用した。次に, 経路 $C_{\pi/4}$ における積分を評価しよう。その場合, $v \equiv r(1+i)/\sqrt{2}$ のように置き換える。その置き換えによって,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_{\pi/4}} e^{iv^2} dv = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_R^0 e^{-r^2} dr = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} (1+i),$$

が得られる。被積分関数 e^{iv^2} を経路 $C_0 + C_R + C_{\pi/4}$ に沿って周回積分した結果がゼロとなるので,

$$\int_0^{\infty} e^{iv^2} dv = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_0} e^{iv^2} dv = \sqrt{\frac{\pi}{8}} (1+i),$$

が得られる。したがって,

$$x(\infty) = y(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}},$$

が導かれた。次に, 漸近展開を求めるためのステップとして,

$$\xi_n(t) = \int_t^{\infty} \frac{\cos v^2}{v^n} dt, \quad \eta_n(t) = \int_t^{\infty} \frac{\sin v^2}{v^n} dt,$$

を部分積分によって評価しよう。これらの積分について、部分積分を1回だけ適用すると、

$$\xi_n(t) = \left[\frac{\sin v^2}{2v^{n+1}} \right]_t^\infty + \frac{n+1}{2} \int_t^\infty \frac{\sin v^2}{x^{n+2}} dt = -\frac{\sin t^2}{2t^{n+1}} + \frac{n+1}{2} \eta_{n+2}(t), \quad (8.19a)$$

$$\eta_n(t) = -\left[\frac{\cos v^2}{2v^{n+1}} \right]_t^\infty - \frac{n+1}{2} \int_t^\infty \frac{\cos v^2}{x^{n+2}} dt = \frac{\cos t^2}{2t^{n+1}} - \frac{n+1}{2} \xi_{n+2}(t), \quad (8.19b)$$

が得られる。この結果を繰り返し適用することによって、

$$\int_t^\infty \cos v^2 dv = \xi_0(t) = -P(t) \sin t^2 + Q(t) \sin t^2,$$

$$\int_t^\infty \sin v^2 dv = \eta_0(t) = P(t) \cos t^2 + Q(t) \cos t^2,$$

が導かれる。なお、 $P(t)$ と $Q(t)$ は (8.17a) と (8.17b) で定義された級数である。ここで、 $x(t) = x(\infty) - \xi(t)$, $y(t) = y(\infty) - \eta(t)$ に注意すればフレネル積分の漸近展開が得られる。

8.3.3 スリットを通過する光の回折

フレネル積分の応用例としてスリットを通過する光の回折を取り扱おう。壁に幅 D のスリットが設けられ、壁に対して垂直に照射された光がスリットを通過する場合を考えよう。壁から距離 L を隔てた位置にスクリーンが設置され、そのスクリーン上の光の波動関数を算出する。スリット内の位置を座標 u によって表し、スクリーン上の位置を座標 a によって表すことにする。これらの座標は図 8.8 のように設定されている。

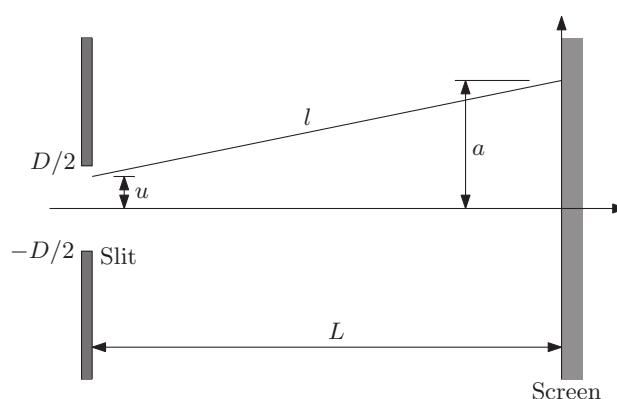


図 8.8: スリットとスクリーンの位置関係

図の左から到達した光は、スリット上ですべての位置で同一位相である。スリットの開口から光は回折し、スクリーン上の点 a に到達する。つまり、 a における光の波動関数は、開口部の座標 u を通過する光の積分である。開口部の点 u とスクリーン上の点 a の距離は、

$$l = \sqrt{L^2 + (a - u)^2} \simeq L + \frac{(a - u)^2}{2L},$$

である。光の波数を k とすると、距離 l を隔ててた2点間で光の位相は kl だけ異なる。開口部での位相を ϕ とすると、スクリーン上での位相は $\phi - kl$ である。よって、スクリーン上の点 x での波動関数は、

$$\begin{aligned} E(a) &= E_0 \int_{-D/2}^{D/2} \exp i \left[\phi - k \left(L + \frac{(a-u)^2}{2L} \right) \right] du \\ &= E_0 e^{i(\phi - kL)} \int_{-D/2}^{D/2} \exp i \left[-\frac{ik(a-u)^2}{2L} \right] du, \end{aligned}$$

によって計算できる。なお、 E_0 は適当に設定した振幅である。ここで、 $\xi^2 \equiv k(a-u)^2/2L$ なる置き換えをすると、波動関数は、

$$\begin{aligned} E(a) &= \sqrt{\frac{2L}{k}} e^{i(\phi - kL)} \int_{\xi_0}^{\xi_1} e^{-i\xi^2} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{2L}{k}} e^{i(\phi - kL)} \int_{\xi_0}^{\xi_1} (\cos \xi^2 - i \sin \xi^2) d\xi, \end{aligned}$$

のように書くことができる。ここで、積分範囲の境界 ξ_0 と ξ_1 は、

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{k}{2L}} \left(a + \frac{D}{2} \right), \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{k}{2L}} \left(a - \frac{D}{2} \right),$$

である。積分範囲の境界 ξ_0 と ξ_1 をそのまま使用して波動関数を記述すると、

$$E(a) = \sqrt{\frac{2L}{k}} e^{i(\phi - kL)} \left[x(\xi_1) - x(\xi_0) + i \left(y(\xi_0) - y(\xi_1) \right) \right], \quad (8.20)$$

となる。この計算結果から具体的な光(電磁波)の回折を計算すると図8.9が得られる。この図は、薄い壁に幅1 mmのスリットを開け、その100 mm奥にスクリーンを設けたときの電磁波の強度分布を表している。電磁波はスリットを開けた壁に垂直に照射される。その電磁波は、波長 $0.1 \mu\text{m}$ から $30 \mu\text{m}$ の範囲で変化させたときの強度分布を描いている。波長が短いときはスリットの開口部に大部分の電磁波が集中するが、波長が長くなると強度分布が波打ち、さらに長くなると、電磁波は開口部より外側へ分散することがわかる。

8.3.4 アンテナの放射パターン

直線状に配列した多数の放射源で構成されたアンテナから放射される電磁波の強度分布を取り扱おう。観測される電磁波は、直線状に並ぶ放射源からの寄与を積分した結果であるので、計算方法はスリットによる光の回折と同様である。とはいえ、前項で用いた数式をそのまま用いることはできないので、本項では修正を加えて電磁界を計算する。

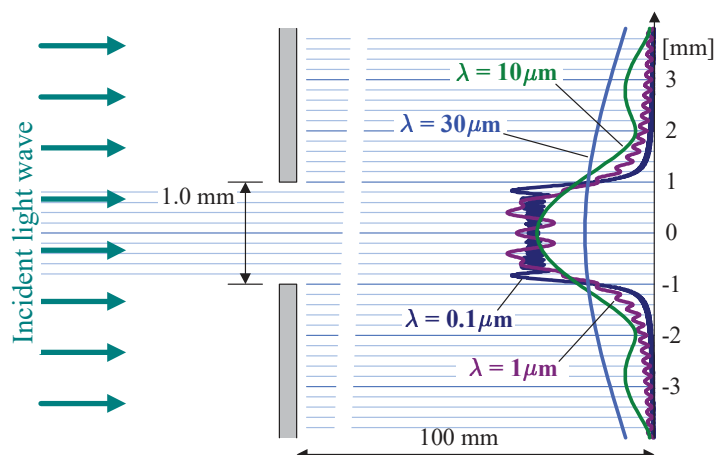


図 8.9: スリットを通過する光の強度分布

前項での定式化は、光の回折を前提にし、スリットの前方の狭い角度範囲しか取り扱わなかった。具体的に述べると、スリットからスクリーンまでの距離 L とスクリーン上の座標 a について、 $a \ll L$ であることを前提にしていたのだ。光よりも波長が長い電波における問題、しかも、アンテナの放射パターンを取り扱う問題で $a \ll L$ を前提条件にするのは適切でない。

アンテナの放射パターンを取り扱うことを前提に、図 8.10 に示すアンテナと観測点の位置関係を考えよう。アンテナは長さが D であり、中央が原点に位置するようにして a 軸上に配置されている。アンテナから見た奥行き方向を z 軸に設定し、観測点 P が z 軸と θ をなす方向に、原点から R の距離に位置する。この設定のもと、アンテナ上の座標 u に位置

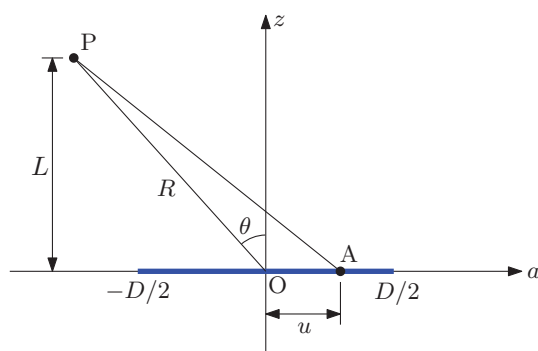


図 8.10: 直線アンテナと観測点の関係

する点 A から点 P までの距離は、三角形 OAP における余弦定理によると、

$$\overline{AP} = \sqrt{R^2 + u^2 + 2uR \sin \theta},$$

となる。ここで、二項定理を用いて \overline{AP} を展開すると、

$$\overline{AP} \simeq R + u \sin \theta + \frac{u^2}{2R} \cos^2 \theta + \frac{u^3}{2R^2} \sin \theta \cos^2 \theta + \dots$$

が得られる。ここで、アンテナから放射される信号の位相が、放射源の位置 u によって異なると仮定しよう。原点から放射される信号の位相が ϕ のとき、放射源 A から放射される信号の位相が $\phi + ku \sin \varphi$ であると仮定する。ここで、 k は電磁波の波数であり、 φ は任意の定数である。このとき、放射源 A から放射され、観測点 P で観測される電磁波の位相は、距離 \overline{AP} の距離に相当する遅れが観測されるはずだ。つまり、放射源 A から放射され、観測点 P で観測される電磁波の波動関数は、

$$E_0 \exp i \left(\phi + ku \sin \varphi - kR - ku \sin \theta - \frac{ku^2}{2R} \cos^2 \theta - \frac{u^3}{2R^2} \sin \theta \cos^2 \theta - \dots \right),$$

となるだろう。この波動関数を、積分変数 u を区間 $[-D/2, D/2]$ にわたって積分すれば、観測点 P における電磁波の波動関数が計算できる。ところが、フレネル積分で取り扱うことができるのは、位相が積分変数の 2 次関数で表される範囲までである。そのため、 u の 3 次以降の項は無視できるくらい小さいことを前提条件とする。その前提条件の意味は後に考察する。つまり、直線状のアンテナが放射した電磁波を観測点 P で観測すると、

$$f(R, \theta) = E_0 \int_{-D/2}^{D/2} \exp i \left(\phi - kR - ku(\sin \theta - \sin \varphi) - \frac{ku^2}{2R} \cos^2 \theta \right) du, \quad (8.21)$$

となるわけだ。数式を変形していくと、

$$\begin{aligned} f(R, \theta) &= E_0 e^{i(\phi - kR)} \int_{-D/2}^{D/2} \exp i \left[-\frac{k \cos^2 \theta}{2R} \left(u^2 + 2Ru \frac{\sin \theta - \sin \varphi}{\cos^2 \theta} \right) \right] du \\ &= \hat{E}_0 \int_{-D/2}^{D/2} \exp i \left[-\frac{k \cos^2 \theta}{2R} \left(u + \frac{R(\sin \theta - \sin \varphi)}{\cos^2 \theta} \right)^2 \right] du, \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$\hat{E}_0 = E_0 \exp i \left[\phi - kR \left(1 - \frac{(\sin \theta - \sin \varphi)^2}{2 \cos^2 \theta} \right) \right],$$

とおいた。指数関数の指数が準虚数であるので、 $|\hat{E}_0| = |E_0|$ が成立する。ここで、

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{k}{2R}} \cos \theta \left(u + \frac{R(\sin \theta - \sin \varphi)}{\cos^2 \theta} \right),$$

なる置き換えを適用すると、上記積分は、

$$f(R, \theta) = \sqrt{\frac{2R}{k}} \frac{\hat{E}_0}{\cos \theta} \int_{\xi_0}^{\xi_1} (\cos \xi^2 - i \sin \xi^2) d\xi, \quad (8.22)$$

のように書き換えられる。ここで、記号 ξ_0 と ξ_1 は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{\frac{k}{2R}} \cos \theta \left(\frac{R(\sin \theta - \sin \varphi)}{\cos^2 \theta} - \frac{D}{2} \right), \\ \xi_1 &= \sqrt{\frac{k}{2R}} \cos \theta \left(\frac{R(\sin \theta - \sin \varphi)}{\cos^2 \theta} + \frac{D}{2} \right), \end{aligned}$$

である。積分 (8.22) に対してフレネル積分を実行すると、

$$f(R, \theta) = \sqrt{\frac{2R}{k}} \frac{\hat{E}_0}{\cos \theta} \left[x(\xi_1) - x(\xi_0) - i \left(y(\xi_1) - y(\xi_0) \right) \right], \quad (8.23)$$

が得られる。この数式によって、直線上に配列された複数の放射源によって構成されたアンテナから放射される電磁波の波動関数が計算できるのだ。

波長 3.75 mm で、アンテナの長さ 45 mm としたときの例を図 8.11 に示す。この例では、放射される電磁波の位相が、放射源の場所によって異なる。放射源の位置 x に対して、位相が $\phi + ku \sin \varphi$ となるように設定されていると仮定し、 $\varphi = 10^\circ$ なる条件で図 8.11 が計算されている。この図は、近距離から遠距離を見わたせるように、 z 軸の値を対数スケールで並べている。そのとき、原点から見た方角 θ が一定のもとで一直線に並ぶように a 軸方向の縮尺を適切に調整している。本項の最後で説明するように、導出した数式で有効に

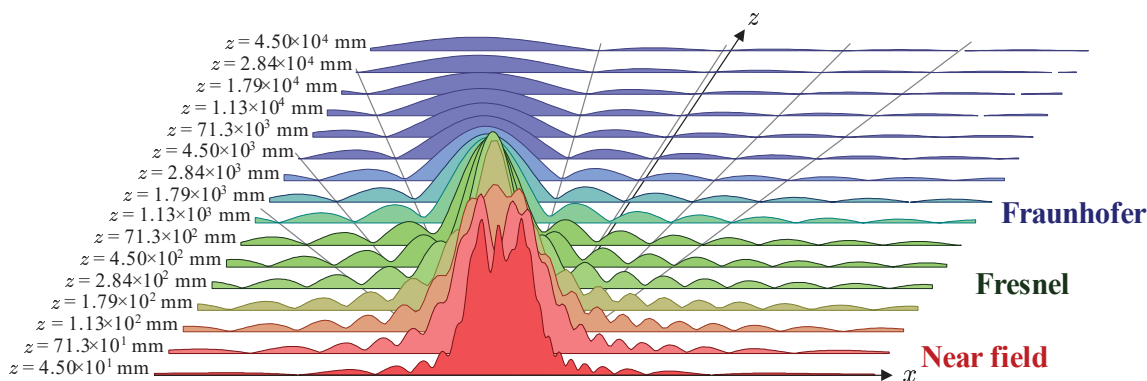


図 8.11: アンテナの放射パターン ($\lambda = 3.75$ mm, $D = 45$ mm, $\varphi = 10^\circ$)

計算できるのは $R > 100$ mm の場合である。その距離の近辺では放射強度の山が 1 か所に集結していることがわかる。しかし、100 mm 程度の距離ではその周辺の強度が距離によって変動している。距離が 1000 mm 程度になると、放射強度が放射状に一定のパターンを描くようになる。その距離を超えると、放射される電磁波は平面波とみなすことができるのだ。放射状に描かれる放射パターンは、 z 軸から 10° の方向に最大強度の山が存在する。その最大強度の方角は、パラメータ φ によって与えられる。

本項の計算が近似計算であることを振り返ろう。その近似計算として、位相に現れる u の 3 次以降の項が無視できるくらい小さいことを仮定した。慣習として、無視できるくらい小さいとは $\lambda/16$ より小さいという条件を用いる。つまり、これまでの定式化は、

$$\frac{u^3}{2R^2} \sin \theta \cos^2 \theta < \frac{\lambda}{16},$$

が成立する条件を前提としていたわけだ。座標 u がアンテナ内部の座標であることから、

$|u| \leq D/2$ である。さらに、 $|\sin \theta \cos^2 \theta| < 2/3\sqrt{3}$ である事に注意すると、

$$R > \sqrt{\frac{2D^3}{3\sqrt{3}\lambda}} \simeq 0.620\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}},$$

なる条件が導かれる。この不等式は、本項の計算が有効である条件を表している。上の計算で用いた波長と開口の条件では、 $R > 100 \text{ mm}$ で本項の計算が有効ということだ。本項の計算が有効な電磁波の回折は、フレネル回折と呼ばれる。

観測点がさらに遠くなると、信号位相について u の2次の項でさえ無視できるようになる。そのような遠方では、

$$\frac{u^2}{2R} \cos^2 \theta < \frac{\lambda}{16},$$

が成立するのだ。この不等式を満足する R を求めると、

$$R > \frac{2D^2}{\lambda},$$

となる。この条件を満たす場合、アンテナ上の u から放射される電磁波は、位相が $\phi - kR - ku(\sin \theta - \sin \varphi)$ となるので、平面波とみなすることができる。その条件における電磁波の回折はフラウンホーファー回折と呼ばれる。もしくは、遠方界と呼ばれる。上の計算で用いた条件設定では、 $R > 1157 \text{ mm}$ がその境界である。電磁波が遠方界となる距離はフラウンホーファー領域と呼ばれる。逆に、フレネル領域よりアンテナの近傍、すなわち、 $R < 0.62\sqrt{D^3/\lambda}$ の領域は近傍界領域と呼ばれる。言い換えると、フレネル領域は近傍界領域と遠方界領域の間に存在する遷移領域である。

8.3.5 線形周波数変調信号のスペクトル

フレネル積分の第2の応用例として、線形周波数変調信号のスペクトルを計算してみよう。線形周波数変調信号とは、図8.12 (a)に示すように、時間の経過とともに周波数が1次関数で変化するように周波数変調された信号である。その信号波形は、図8.12 (b)に示すような曲線を描く。この図は、複素信号として実部と虚部を描いている。信号が正の周波数で振動しているならば、実部は虚部より 90° だけ位相が進んでいる。線形周波数変調信号は、時間の関数として書くと、

$$f(t) = \exp i \left(\omega_0 t + \frac{\zeta}{2} t^2 \right) \quad (-T/2 \leq t \leq T/2),$$

のようになる。なお、信号は信号は $-T/2 \leq t \leq T/2$ の期間だけ送信されるとした。信号の角周波数は $t = 0$ のとき ω_0 であり、送信機関の間に $\omega_0 - \omega_B/2$ から $\omega_0 + \omega_B/2$ の間を遷移すると仮定した。すなわち、中心角周波数は ω_0 であり、角周波数の変位幅は ω_B である。

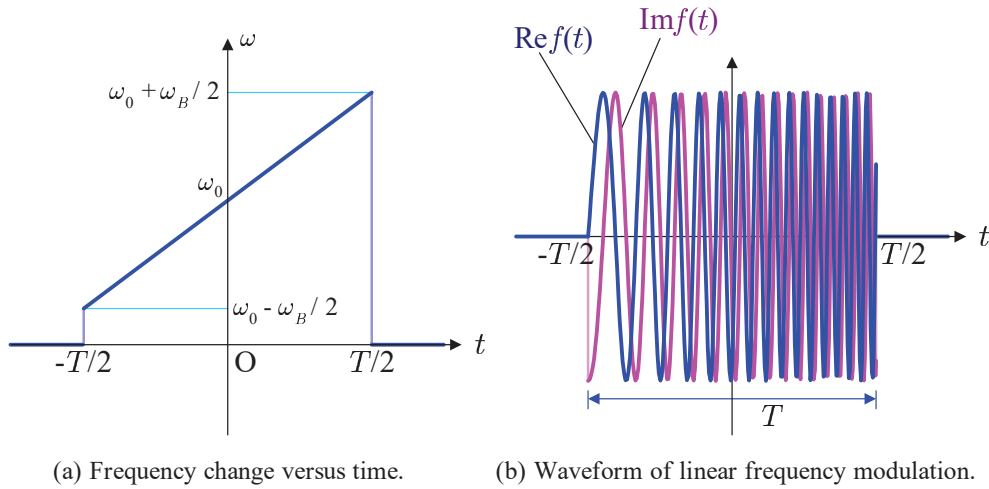


図 8.12: 線形周波数変調信号の例

さらに, 上の数式では, $\zeta \equiv \omega_B/T$ で定義される変調速度を用いた。この信号の角周波数は位相を t で微分すれば得られ, $\omega(t) = \zeta t$ である。確かに, 時間の経過とともに周波数が 1 次関数で変化し, 図 8.12 (a) と合致する。線形周波数変調信号の周波数成分 (スペクトル) をフーリエ変換:

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

によって調べてみよう。信号の波動関数 $f(t) = e^{i(\omega_0 t + \zeta t^2/2)}$ を代入して計算すると,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} \exp i \left(\frac{\zeta}{2} t^2 - (\omega - \omega_0) t \right) dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \exp \frac{i\zeta}{2} \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\zeta} \right)^2 \cdot e^{-i(\omega - \omega_0)^2/2\zeta} dt \\ &= \sqrt{\frac{2T}{\omega_B}} e^{-i(\omega - \omega_0)^2 T/2\omega_B} \left\{ x(\tau_0) - x(\tau_1) + i [y(\tau_0) - y(\tau_1)] \right\}, \quad (8.24) \end{aligned}$$

が得られる。いうまでもなく, $x(\tau)$ と $y(\tau)$ は, ともに, フレネル積分である。フレネル積分の計算に用いる変数 τ_0 と τ_1 は,

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{T}{2\omega_B}} \left(\omega - \omega_0 + \frac{\omega_B}{2} \right), \quad \tau_1 = \sqrt{\frac{T}{2\omega_B}} \left(\omega - \omega_0 - \frac{\omega_B}{2} \right),$$

である。フーリエ変換で計算されるスペクトル (8.24) は, 周波数スペクトルは角周波数の区間 $[\omega_0 - \omega_B/2, \omega_0 + \omega_B/2]$ にわたって分散し, その振幅は $\sqrt{2\pi T/\omega_B}$ となる。このスペクトルの振幅は, 次のように推察することができる。フレネル積分 $x(\tau)$ と $y(\tau)$ はともに, $\tau \rightarrow \pm\infty$ の極限で $\pm\sqrt{\pi/8}$ で近似できる (複合同順)。この事実から, (8.24) に含まれる $x(\tau_0) - x(\tau_1)$ と $y(\tau_0) - y(\tau_1)$ はともに, 最大値が $\sqrt{\pi/2}$ 程度の値となる。この事実注目

すると、(8.24) のブレース ($\{ \}$) の中の値は、絶対値にして $\sqrt{\pi}$ 程度の値になる。フーリエ変換 $F(\omega)$ の絶対値は、その $\sqrt{2T/\omega_B}$ であるので、 $\sqrt{2\pi T/\omega_B}$ となるのだ。

数式 (8.24) で計算されるスペクトルは、図 8.13 に示す曲線を描く。この曲線は大雑把にモデル化すると、同図に重ねて描いた台形で表すことができる。台形の下底の長さは、 $\omega_B + 2\sqrt{\pi\omega_B/T}$ である。それに対し、上底の長さは $\omega_B - 2\sqrt{\pi\omega_B/T}$ である。図を見ても

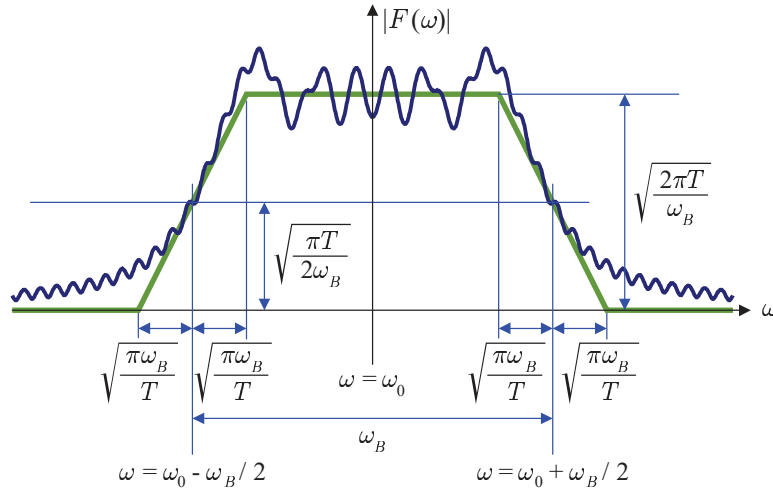


図 8.13: 線形周波数変調信号のスペクトル

明らかなように、スペクトルの最大値の半分の値をとる幅、すなわち、半値幅は角周波数の遷移幅 ω_B と等しい。台形でモデル化したスペクトルの立ち上がりから測った角周波数の帯域幅は、モデルとなる台形の下底の長さ:

$$\hat{\omega}_B = \omega_B + 2\sqrt{\frac{\pi\omega_B}{T}},$$

である。この値は、スペクトルの絶対値 $|F(\omega)|$ を ω について微分し、 $\omega = \omega_0 - \omega_B/2$ におけるスペクトルの傾きを評価することによって導出できる。

スペクトルの絶対値の導関数を調べ、スペクトルを台形モデルで描いてみよう。スペクトルの絶対値を簡潔に記述するため、

$$X(\omega) = x\left(\sqrt{\frac{T}{2\omega_B}}\left(\omega - \omega_0 + \frac{\omega_B}{2}\right)\right) - x\left(\sqrt{\frac{T}{2\omega_B}}\left(\omega - \omega_0 - \frac{\omega_B}{2}\right)\right),$$

$$Y(\omega) = y\left(\sqrt{\frac{T}{2\omega_B}}\left(\omega - \omega_0 + \frac{\omega_B}{2}\right)\right) - y\left(\sqrt{\frac{T}{2\omega_B}}\left(\omega - \omega_0 - \frac{\omega_B}{2}\right)\right),$$

を定義する。前にも補足したように、 $x(\tau)$ と $y(\tau)$ はフレネル積分である。新たに定義した関数 $X(\omega)$ と $Y(\omega)$ を用いると、スペクトルの振幅 $|F(\omega)|$ は、

$$|F(\omega)| = \sqrt{\frac{2T}{\omega_B} \{ [X(\omega)]^2 + [Y(\omega)]^2 \}},$$

のように記述できる。この記法を用いると、絶対値 $|F(\omega)|$ の導関数は、

$$\frac{d|F|}{d\omega} = \sqrt{\frac{2T}{\omega_B} \frac{XX' + YY'}{\sqrt{X^2 + Y^2}}}, \quad (8.25)$$

によって計算することができる。ここで、右肩に付したプライム (') は ω についての導関数を与える。フレネル積分の定義によると、導関数 X' と Y' は、

$$X'(\omega) = \sqrt{\frac{T}{2\omega_B}} \left[\cos \frac{T}{2\omega_B} \left(\omega - \omega_0 + \frac{\omega_B}{2} \right)^2 - \cos \frac{T}{2\omega_B} \left(\omega - \omega_0 - \frac{\omega_B}{2} \right)^2 \right],$$

$$Y'(\omega) = \sqrt{\frac{T}{2\omega_B}} \left[\sin \frac{T}{2\omega_B} \left(\omega - \omega_0 + \frac{\omega_B}{2} \right)^2 - \sin \frac{T}{2\omega_B} \left(\omega - \omega_0 - \frac{\omega_B}{2} \right)^2 \right],$$

となる。得られた導関数 (8.25) は、図 8.14 に示すように厄介な曲線を描く。図に示したように、導関数は大きくうねっているので安定した接線を特定できないのだ。方針として、

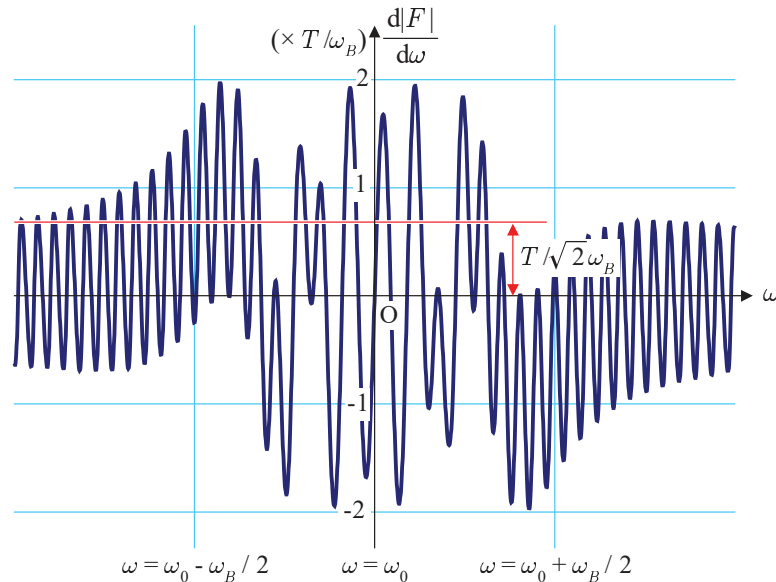


図 8.14: 線形周波数変調信号のスペクトルの導関数

$\omega = \omega_0 - \omega_B/2$ における平均的な導関数を求め、台形の立ち上がり部の傾きを特定する。まず、導関数 (8.25) に $\omega = -\omega_B/2$ を代入すると、

$$\left. \frac{d|F|}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0-\omega_B/2} = \frac{T}{\sqrt{2}\omega_B} \left(1 - \cos \frac{(\omega_0 - \omega_B)^2 T}{2\omega_B} - \sin \frac{(\omega_0 - \omega_B)^2 T}{2\omega_B} \right), \quad (8.26)$$

が得られる。この計算において、 $X(\omega_0 - \omega_B/2) \simeq Y(\omega_0 - \omega_B/2) \simeq \sqrt{\pi/8}$ とした。得られた結果において、上に述べた導関数のうねりは右辺に含まれる三角関数によってもたらされる。その考察から、平均的な導関数は三角関数を取り除いた値、すなわち、

$$\left\langle \frac{d|F|}{d\omega} \right\rangle_{\omega=\omega_0-\omega_B/2} = \frac{T}{\sqrt{2}\omega_B},$$

によって与えられると考えてよいだろう。なお、左辺がブラケット ($\langle \rangle$) で囲まれているのは、傾きの期待値の意味を表現するためである。線形周波数変調信号のスペクトルの立ち上がりは、この傾きを保持して立ち上がると考えよう。スペクトルの高さが $\sqrt{2\pi T/\omega_B}$ であるので、スペクトル立ち上がりの角周波数の幅は、 $2\sqrt{\pi\omega_B/T}$ であることが導かれる。したがって、図 8.13 に示した台形型のスペクトルモデルが得られたわけだ。