第7章　チェビシェフ多項式

本章ではゲーゲンバウアー (Gegenbauer) 多項式, または, 超球多項式の例としてチェビシェフ多項式を取り扱う。ゲーゲンバウアー多項式は, 本書では既にルジャンドル多項式を例として取り上げた。チェビシェフ多項式は物理学での応用を見ることが少ないが, 逆三角関数などの関数近似に応用される。

7.1　ゲーゲンバウアー多項式

本章で取り扱う多項式は母関数によって導入する。ゲーゲンバウアー多項式は, 母関数表示:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x)\, t^n = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\alpha}} \tag{7.1}$$

によって定義される。この定義式から容易にわかるように, $\alpha = 1/2$ ではルジャンドル多項式が与えられる。本章では, ゲーゲンバウアー多項式の例として, 2つのチェビシェフ多項式を取り扱う。

7.1.1　第2種チェビシェフ多項式

母関数表示 (7.1) を t について微分すると, ゲーゲンバウアー多項式の漸化式を得ることができる。結果として得られる漸化式は,

$$C_1^{(\alpha)}(x) = 2\alpha x\, C_0^{(\alpha)}(x), \tag{7.2a}$$

$$(n+1)\, C_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+2\alpha)\, x C_n^{(\alpha)}(x) - (n+2\alpha-1)\, C_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{7.2b}$$

である。この漸化式に $\alpha = 1/2$ を代入すると, ルジャンドル多項式の漸化式と一致する。それでは, (7.1) を t について微分して漸化式を導出しよう。母関数表示 (7.1) の左辺と右辺を t について微分して等号で結ぶと,

$$2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(x C_n^{(\alpha)}(x)\, t^n - C_n^{(\alpha)}(x)\, t^{n+1} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(nC_n^{(\alpha)}(x)\, t^{n-1} - 2nxC_n^{(\alpha)}(x)\, t^n + nC_n^{(\alpha)}(x)\, t^{n+1} \right),$$

が得られる。この等式を整理すると,

$$\begin{aligned} 2\alpha x C_0^{(\alpha)} - C_1^{(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[&(n+1)\, C_{n+1}^{(\alpha)}(x) \\ &- (2n+2\alpha)\, x C_n^{(\alpha)}(x) + (n+2\alpha-1)\, C_{n-1}^{(\alpha)}(x) \Big]\, t^n, \end{aligned} \tag{7.3}$$

となる。任意の次数 n に対してこの等式が恒等的に成立するための条件として, 上に書いた漸化式が導かれる。漸化式 (7.3) に $\alpha = 1/2$ を代入すると, ルジャンドル多項式の漸化式と一致する。

ゲーゲンバウアー多項式において, $\alpha = 1$ によって与えられる多項式は第 2 種チェビシェフ多項式と呼ばれる。第 2 種チェビシェフ多項式は, 慣習として $U_n(x)$ なる記号で表記され, $U_n(x) \equiv C_m^{(1)}(x)$ のように定義される。第 2 種チェビシェフ多項式 $U_n(x)$ の具体的な展開式を得るには, 母関数表示を実際に展開するとよい。計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2xt+t^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} (2xt - t^2)^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{m!}{k!\,(m-k)!} (2x)^{m-k}\, t^{m+k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!} 2^{m-2k} x^k t^{2n-k}, \end{aligned}$$

が得られるので, 第 2 種チェビシェフ多項式は,

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!} 2^{n-2k} x^{n-2k}, \tag{7.4}$$

となる。第 2 種チェビシェフ多項式 $U_n(x)$ の漸化式は, (7.3) に $\alpha = 1/2$ を代入して得られる数式:

$$U_1(x) = 2xU_0(x), \tag{7.5a}$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \tag{7.5b}$$

である。母関数表示に $t = 0$ を代入すると, $U_0(x) = 1$ が得られる。この結果を漸化式 (7.5a) と (7.5b) に代入すると,

$$\begin{aligned} &U_0(x) = 1, && U_1(x) = 2x, \\ &U_2(x) = 4x^2 - 1, && U_3(x) = 8x^3 - 4x, \\ &U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1, && U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x, \end{aligned}$$

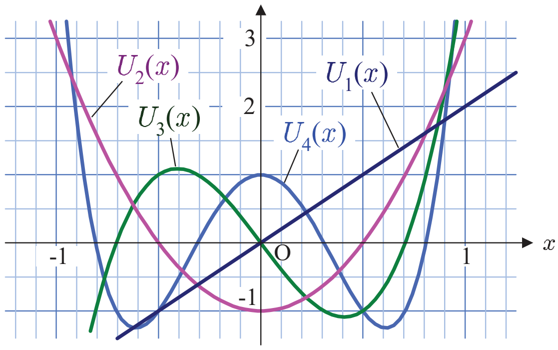

図 7.1: 第 2 種チェビシェフ多項式

が得られる。第 2 種チェビシェフ多項式は図 7.2 に示す曲線を描く。

母関数を利用すると, $x = 0, \pm 1$ における第 2 種チェビシェフ多項式の関数値が, 前に導出した級数による計算をすることなしに定まる。その結果を書くと,

$$U_n(1) = n + 1, \quad U_n(-1) = (-1)^n\,(n+1), \quad T_{2n}(0) = (-1)^n, \;\; T_{2n+1}(0) = 0, \tag{7.6}$$

となる。まず, $x = 1$ については,

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(1)\, t^n = \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t^n,$$

であることから $U_n(1) = n + 1$ が導かれる。続いて, $x = -1$ のとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(-1)\, t^n = \frac{1}{(1+t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)\, t^n,$$

であることから $U_n(-1) = (-1)^n$ が導かれる。最後に, $x = 0$ については,

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(0)\, t^n = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n},$$

であることから (7.6) に書いた事実が導かれる。

7.1.2　第 1 種チェビシェフ多項式

ゲーゲンバウアー多項式をべき指数 $\alpha = 0$ について考える際には注意が必要である。なぜなら, 単純に $\alpha = 0$ を適用すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(0)}(x)\, t^n = 1,$$

となるので, $n \neq 0$ について $C_n^{(0)}(x) = 0$ となる。これでは面白くないので, 代わりに,

$$T_n(x) \equiv \frac{n}{2} \lim_{\alpha \to \infty} \frac{C_n^{(\alpha)}(x)}{\alpha},$$

なる多項式 $T_n(x)$ を考えてみよう。この多項式がゼロでないためには, $C_n^{(\alpha)}(x)$ が α について 1 位の零点であることを期待している。この期待が正しいことを示すため, 母関数表示を微分してみる。すると,

$$\frac{2\alpha\,(x-t)}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n^{(\alpha)}(x)\, t^{n-1},$$

が得られる。この式に t/α を乗じ, さらに, 1 を加算すると,

$$1 + \frac{2xt - 2t^3}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n C_n^{(\alpha)}(x)}{2\alpha}\, t^n,$$

となる。この数式に対して $\alpha \to 0$ の極限をとると,

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, t^n, \tag{7.7}$$

が得られる。ここで, $T_0(x) = 1$ とした。新たに定義した $T_n(x)$ は**第 1 種チェビシェフ多項式**, または, 単純に**チェビシェフ多項式**と呼ばれ, 数式 (7.1) は第 1 チェビシェフ多項式の母関数である。チェビシェフ多項式は漸化式:

$$T_1(x) = xT_0(x), \tag{7.8a}$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \tag{7.8b}$$

を満足する。この漸化式は母関数表示を t について微分すると導出できる。実際に母関数表示を微分すると,

$$-\frac{2t}{1-2xt+t^2} + \frac{2\,(1-t^2)(x-t)}{(1-2xt+t^2)^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} nT_n(x)\, t^{n-1},$$

が得られる。この数式に $1-2xt+t^2$ を乗じると,

$$\begin{aligned} -2t + 2xT_0(x) - 2T_0(x)\,t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[2xT_n(x)\,t^n - 2T_n(x)\,t^{n+1}\Big] \\ = 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[nT_n(x)\,t^{n-1} - 2nxT_n(x)\,t^n + nT_n(x)\,t^{n+1}\Big] \end{aligned}$$

が得られ, この数式を整理すると,

$$xT_0(x) - T_1(x) - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Big[T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x)\Big]\, t^n = 0,$$

となるのでチェビシェフ多項式の漸化式 (7.8a) と (7.8b) が導出される。その漸化式を用いてチェビシェフ多項式を順次計算すると,

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1, & T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x,
\end{aligned}
$$

が得られる。チェビシェフ多項式は図 7.2 に示す曲線を描く。変数 x が区間 $[-1, 1]$ に含まれていればチェビシェフ多項式は $-1 \leq T_n(x) \leq 1$ となる。後に示すが, $x = \cos\theta$ とおくとチェビシェフ多項式が $T_n(x) = \cos n\theta$ であることから, その事実は正当化できる。

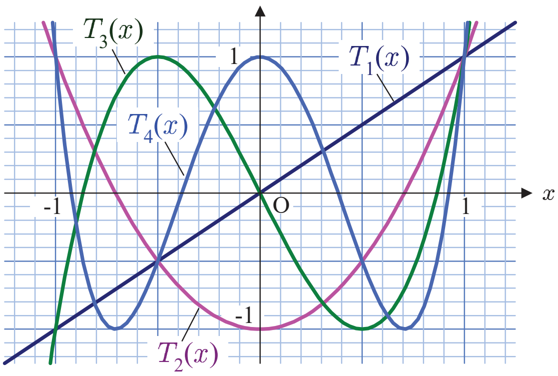

図 7.2: 第 1 種チェビシェフ多項式

チェビシェフ多項式は漸化式によって順次計算することができるが, $T_n(x)$ をべき級数として表現することができる。そのべき級数表現は,

$$
T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \qquad (n > 0), \tag{7.9}
$$

のように書くことができる。この級数は母関数を展開することによって導出できる。それを実演するため, 母関数を実際に展開してみると,

$$
\begin{aligned}
\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} &= (1-t^2)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}\right]t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor n/2-2 \rfloor}(-1)^k \frac{(n-k-2)!}{k!\,(n-2k-2)!}(2x)^{n-2k-2}\right]t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k} - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^{k-1} \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}\right]t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n!}{n!}(2x)^n + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^k \frac{(n-k-1)!\,(n-k+k)}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}\right]t^n
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \right] t^n,$$

が得られる。この結果を (7.7) と比較すると (7.9) が導かれるのだ。なお, この導出過程では第 2 種チェビシェフ多項式のべき級数展開 (7.4) を利用した。

母関数を利用すると, $x = 0, \pm 1$ におけるチェビシェフ多項式の関数値が, 前に導出した級数による計算をすることなしに定まる。その結果を書くと,

$$T_n(1) = 1, \qquad T_n(-1) = (-1)^n, \qquad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0, \tag{7.10}$$

となる。まず, $x = 1$ については,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(1)\, t^n &= \frac{1-t^2}{(1-t)^2} = \frac{1+t}{1-t} \\ &= -1 + \frac{2}{1-t} = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} t^n, \end{aligned}$$

であることから $T_n(1) = 1$ が導かれる。続いて, $x = -1$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(-1)\, t^n &= \frac{1-t^2}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{1+t} \\ &= -1 + \frac{2}{1+t} = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \end{aligned}$$

であることから $T_n(-1) = (-1)^n$ が導かれる。最後に, $x = 0$ については,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\, t^n &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ &= -1 + \frac{2}{1+t^2} = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \end{aligned}$$

であることから (7.10) に書いた事実が導かれる。

7.2　チェビシェフの微分方程式

チェビシェフ多項式 $U_n(x)$ と $T_n(x)$ の母関数を x について微分すると導関数に関する漸化式が得られる。本節では, チェビシェフ多項式の導関数についての漸化式から, チェビシェフ多項式の性質を調べる。

7.2.1　ゲーゲンバウアー多項式の導関数

チェビシェフ多項式は, ルジャンドル多項式と同様に, ゲーゲンバウアー多項式の一種であるので, ゲーゲンバウアー多項式の導関数を調べておくことは有用である。ゲーゲンバウアー多項式 $C_n^{(\alpha)}(x)$ の導関数について,

$$(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}C_n^{\alpha}(x)-(2\alpha+1)\,x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C_n^{(\alpha)}(x)+n\,(n+2\alpha)\,C_n^{\alpha)}(x)=0, \tag{7.11}$$

が成立する。特に, $\alpha=1/2$ であればこの方程式はルジャンドル微分方程式である。この微分方程式は下に示すように母関数から得られるのだ。

微分方程式 (7.11) を得るには, 本章の冒頭で紹介した母関数 (7.1) に注目する。微分方程式を証明するにあたり, 簡単のため $C_n^{(\alpha)}(x)$ を C_n と表記することにしよう。また, その x についての導関数を C_n' と表記する。母関数を x について微分すると,

$$\frac{\alpha t}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n'\,t^n,$$

が得られる。この数式の両辺に $1-2xt+t^2$ を乗じ, t^{n+1} の係数を取り出すと,

$$C_{n+1}'+C_{n-1}'=2\alpha C_n+2xC_n', \tag{7.12}$$

が得られる。一方, 導関数を含まないゲーゲン多項式の漸化式:

$$(n+1)\,C_{n+1}=(2n+2\alpha)\,xC_n-(n-2\alpha-1)\,C_{n-1}, \tag{7.2b}$$

を再び書いておく。漸化式 (7.2b) を x について微分し, (7.12) との連立方程式によって, C_n' の項を消去すると,

$$C_{n+1}'-C_{n-1}'=(2n+2\alpha)\,C_n, \tag{7.13}$$

が得られる。続いて, (7.12) と (7.13) を組み合わせると,

$$C_{n+1}'=(n+2\alpha)\,C_n+xC_n', \tag{7.14}$$

$$C_{n-1}'=-nC_n+xC_n', \tag{7.15}$$

が得られる。得られた数式 (7.14) の添え字 n を $n-1$ に入れ替え, (7.15) を x 倍した数式:

$$C_n'=(n+2\alpha-1)\,C_{n-1}+xC_{n-1}',$$
$$xC_{n-1}'=-nxC_n+x^2C_n',$$

によって C_{n-1}' の項を消去すると,

$$(1-x^2)\,C_n'=(n+2\alpha-1)\,C_{n-1}-nxC_n, \tag{7.16}$$

が得られる。この結果を x について微分して得られる数式:

$$(1-x^2)\,C_n'' = (n+2\alpha-1)\,C_{n-1}' - (n-2)\,xC_n' - nC_n, \tag{7.17}$$

に対して, (7.15) を組み合わせて C_{n-1}' の項を消去するとゲーゲンバウアー多項式の微分方程式 (7.11) が導出される。¶

7.2.2 三角関数による表現

ゲーゲンバウアー多項式の微分方程式を利用して, チェビシェフ多項式の微分方程式を得ることができる。さらに, その微分方程式から, チェビシェフ多項式が三角関数と有用な関係があることが導かれる。それは, 物理学においてルジャンドル多項式 $P_n(x)$ の変数 x を $\cos\theta$ で置き換えた関数を頻繁に使っていたことと類似している。

チェビシェフ多項式の導関数はゲーゲンバウアー多項式の導関数から容易に得ることができる。まず, 第 2 種チェビシェフ多項式は率直に $\alpha = 1$ とすればよいのだから, $U_n(x)$ に関する微分方程式は,

$$(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}U_n(x) - 3x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U_n(x) + n\,(n+2)\,U_n(x) = 0, \tag{7.18}$$

となる。第 1 種チェビシェフ多項式についても同様である。ゲーゲンバウアー多項式の微分方程式 (7.11) に $n/2\alpha$ を乗じて $\alpha \to 0$ の極限をとると,

$$(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}T_n(x) - x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T_n(x) + n^2T_n(x) = 0, \tag{7.19}$$

が得られる。これが (第 1 種) チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ に関する微分方程式である。当然, この方程式は (7.11) に素直に $\alpha = 0$ を代入した結果と同一である。

チェビシェフ多項式は三角関数と深い関係がある。チェビシェフ多項式の変数を $x \equiv \cos\theta$ とおくと, 微分方程式 (7.19) は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}T_n(\cos\theta) + n^2T_n(\cos\theta) = 0, \tag{7.20}$$

なる方程式に書き換えられる。この微分方程式の解は $\cos n\theta$ と $\sin n\theta$ の線形結合であるが, (7.10) を境界条件とすると,

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \tag{7.21}$$

であることがわかる。この事実は, チェビシェフ多項式が余弦関数の n 倍角の公式に対応していることを意味している。このことに注意して, 三角関数の和と積の公式:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

を見てもらいたい。この公式に, $A=(n+1)\theta$, $B=(n-1)\theta$ を代入すると,

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\,\cos n\theta,$$

が得られる。この結果はチェビシェフ多項式について, $x=\cos\theta$ とした場合のチェビシェフ多項式の漸化式と同一である。つまり, チェビシェフ多項式の x を $\cos\theta$ で置き換え, $T_n(x)$ を $\cos n\theta$ に置き換えた数式:

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta-1,\\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta-3\cos\theta,\\
\cos 4\theta &= 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1,\\
\cos 5\theta &= 16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta,
\end{aligned}$$

が成立するのである。さらに一般化すると, チェビシェフ多項式のべき級数展開 (7.9) を利用して,

$$\cos n\theta=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k)!}(2\cos\theta)^{n-2k}\qquad(n>0),\tag{7.22}$$

と書くことができる。チェビシェフ多項式が余弦関数の n 倍角の公式となっていることに気づけば, チェビシェフ多項式に親近感がわくことだろう。

第 2 種チェビシェフ多項式は, 第 1 種ほどではないが, 三角関数を用いた表現をすることができる。第 2 種チェビシェフの微分方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}U_n(\cos\theta)+2\cot\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}U_n(\cos\theta)+n\,(n+2)\,U_n(\cos\theta)=0,\tag{7.23}$$

のように書くことができる。この方程式は $T_n(\cot\theta)$ の方程式のように簡単な形ではない。しかし, チェビシェフ多項式に関する方程式なので, 大きく形が異なるとも思えない。ということで, ある関数 $f(\theta)$ を乗じて $f(\theta)\,U_n(\cos\theta)$ としたときに,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}f(\theta)\,U_n(\cos\theta)+\lambda^2 f(\theta)U_n(\cos\theta)=0,$$

となることを仮定しよう。ライプニッツの公式を用いてこの数式を変形すると,

$$U_n\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\theta^2}+2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}U_n}{\mathrm{d}\theta}+f\frac{\mathrm{d}^2U_n}{\mathrm{d}\theta^2}+\lambda^2 fU_n=0,$$

となる。ここで, $f(\theta)$ と $U_n(\cos\theta)$ を, それぞれ, f と U_n なる記号で簡略表記した。この数式の両辺に $1/f$ を乗じると,

$$\frac{\mathrm{d}^2U_n}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{2}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}U_n}{\mathrm{d}\theta}+\left(\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\theta^2}+\lambda^2\right)U_n=0,$$

が得られる。この微分方程式は (7.23) と同一の方程式なので,

$$\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = \cot\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\theta^2} = -\beta^2 f,$$

が成立しなければならない。ただし, $\beta^2 + \lambda^2 = n\,(n+2)$ である。この方程式を満たすのは, $f(\theta) = \sin(\theta)$ でなければならない。それに伴い, $\beta = 1$ であることも確定した。したがって, 微分方程式 (7.23) は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\Big(U_n(\cos\theta)\,\sin\theta\Big) + (n+1)^2\,U_n(\cos\theta)\,\sin\theta = 0,$$

のように書き換えられる。つまり, この微分方程式の基本解は,

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta},\ \ \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

であることになる。解を特定するには, $U_n(\cos\theta)$ の特別な値 (7.6) を境界条件とすればよい。その結果,

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \tag{7.24}$$

のように解が特定できる。

上で述べた境界条件を考慮しなければ, 微分方程式 (7.19) と (7.23) は 2 階の微分方程式であるので, それぞれ, 独立な 2 つの解をもつはずである。既に書いたように, 独立した 2 つの解は, 微分方程式 (7.19) では,

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \qquad V_n(\cos\theta) = \sin n\theta,$$

であり, 微分方程式 (7.23) では,

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad W_n(\cos\theta) = \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

である。第 2 の解 $V_n(\cos\theta)$ と $W_n(\cos\theta)$ は, 変数を x とすると,

$$V_n(x) = (1-x^2)^{1/2}\,U_{n-1}(x), \qquad W_n(x) = (1-x^2)^{-1/2}\,T_{n+1}(x),$$

なる式で第 1 の解と関係づけられる。この関係式は, 第 2 の解は有限項の多項式で記述できないことを意味している。

7.3 直交性と級数展開

チェビシェフ多項式には直交があり, それを利用して任意の関数をチェビシェフ多項式の級数で表現することができる。チェビシェフ多項式による級数展開は, 近似の最大誤差がほかの級数に比べて小さいため, 計算機による関数計算で応用される。本節では, 直交性を紹介した後, 級数展開について解説する。

7.3.1 直交性

チェビシェフ多項式の直交性は三角関数の直交性と簡単な対応がある。前節で示したように, $T_n(x)$ と $W_n(x)$ は余弦関数に対応し, $U_n(x)$ と $V_n(x)$ は正弦関数と対応する。チェビシェフ多項式の直交性は, 結果を書くと,

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)\,T_n(x)\,(1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n, \\ \pi/2 & \text{if } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{if } m = n = 0, \end{cases} \tag{7.25a}$$

$$\int_{-1}^{1} V_m(x)\,V_n(x)\,(1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n, \\ \pi/2 & \text{if } m = n \neq 0, \\ 0 & \text{if } m = n = 0, \end{cases} \tag{7.25b}$$

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)\,U_n(x)\,(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}, \tag{7.25c}$$

$$\int_{-1}^{1} W_m(x)\,W_n(x)\,(1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}, \tag{7.25d}$$

なる数式で表現できる。これらの関係式の導出は簡単である。関係式を導出するには, $x \equiv \cos\theta$ で置き換え, 三角関数の積と和の公式:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\Big],$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big],$$

を用いればよい。チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ の直交性 (7.25a) に関して, $x \equiv \cos\theta$ で置き換えると,

$$\begin{aligned} \text{LHS of (7.25a)} &= \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \Big[\cos(n-m)\theta + \cos(n+m)\theta\Big]\,\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

が得られる。第 2 行目への数式変形に三角関数の積と和の公式を適用した。この数式は, $n = m = 0$ ならば π, $n = m \neq 0$ ならば $\pi/2$, その他の場合は 0 である。したがって, $T_n(x)$ に関する直交性 (7.25a) が証明できた。他の関数の直交性については証明を省略するが, 三角関数の積とわの公式を利用して, 同様の手順で証明できる。

7.3.2 チェビシェフ級数展開

定義域が $[-1, 1]$ がである関数はチェビシェフ多項式で級数展開することができる。その級数展開における展開係数は, 直交性を利用して, フーリエ変換と同様の手法で決定できる。

ある関数 $f(x)$ を考えよう。この関数をチェビシェフ多項式 $T_n(x)$ で級数展開しよう。級数展開するには, 関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\, T_n(x), \tag{7.26}$$

のように展開できることを仮定する。チェビシェフ多項式で級数展開するとは, 展開係数 F_n を求めることである。展開係数は,

$$F_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\, T_n(x)\, (1-x^2)^{-1/2}\, \mathrm{d}x, \tag{7.27}$$

によって決定できる。展開式を得るためのこの公式は, チェビシェフ多項式の直交性によって証明できる。つまり,

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} f(x)\, T_n(x)\, (1-x^2)^{-1/2}\, \mathrm{d}x \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} F_m \int_{-1}^{1} T_m(x)\, T_n(x)\, (1-x^2)^{-1/2}\, \mathrm{d}x \\
&\quad = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi F_m}{2}\, \delta_{mn} = \frac{\pi F_n}{2},
\end{aligned}$$

が成立することを利用して展開係数が得られるのである。この直交性を利用した展開係数の決定法はフーリエ変換と同一の手法である。

展開係数を計算する公式 (7.27) は, $x = \cos\theta$ とおいたとき, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ であることを利用すると,

$$F_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\, \cos n\theta\, \mathrm{d}\theta, \tag{7.28}$$

なる式で書くことができる。このように書くとチェビシェフ多項式による多項式展開が, フーリエ級数に似ているように思えてくる。

この公式の簡単な応用例として, 逆余弦関数 $\arccos x$ をチェビシェフ多項式によって展開しよう。$x = \cos\theta$ とおくと, $\arccos x = \theta$ であるので, 展開係数は,

$$F_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \theta\, \cos n\theta\, \mathrm{d}\theta,$$

なる式によって計算できる。さらに計算を進めると,

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}, \\
F_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \theta \cos n\theta\, \mathrm{d}\theta = -\frac{2}{\pi n}\int_{0}^{\pi} \sin n\theta\, \mathrm{d}\theta = -\frac{2}{\pi n^2} \qquad (n \neq 0),
\end{aligned}$$

が得られる。第 2 行目の積分は部分積分を適用すれば計算できる。この計算結果から, 逆余弦関数 $\arccos x$ は,

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2},$$

のようにチェビシェフ多項式で展開できることがわかった。さらに, この結果から, 逆正弦関数 $\arcsin x$ は,

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2},$$

となる。逆正弦関数のチェビシェフ展開は, 単に $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$ なる関係を利用してもよいし, 公式 (7.28) において, $f(\cos\theta) = \pi/2 - \theta$ として真面目に積分計算しても同様の結果を得る。ところで, $\arcsin 1 = \pi/2$ であり, $T_n(1) = 1$ であることに注意すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8},$$

なる事実が導かれる。この事実から, さらに, $\zeta(2) = 1 + 2^{-2} + 3^{-2} + \cdots = \pi^2/6$ なる関係式, すなわち, 第 2.2 節で取り扱ったバーゼル問題の解が得られる。

7.3.3　正弦関数のチェビシェフ級数展開

応用例として, 正弦関数 $\sin(\pi x/2)$ をチェビシェフ級数展開しよう。チェビシェフ級数展開は, 必ずしも, 最小二乗法のように平均誤差が小さくする近似法ではないが, 最大誤差を小さくできる性質がある。本稿では, 正弦関数を例にして, そのようなチェビシェフ級数展開の特徴を説明する。

チェビシェフ級数展開の対象となる関数の定義域は $[-1, 1]$ である。正弦関数をチェビシェフ級数展開するには, $\sin(\pi x/2)$ のように変数を π 倍しておけば正弦関数の一周期をチェビシェフ級数展開することができる。チェビシェフ展開の n 次の展開係数を F_n としたとき, 展開係数を計算する公式 (7.28) は,

$$F_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

によって計算される。この公式からはわかりづらいが, 偶数次のチェビシェフ多項式 $T_{2m}(x)$ は偶関数であるので, 奇関数である $\sin(\pi x/2)$ を展開する場合, 偶数次の展開係数 F_{2m} は必ずゼロになる。したがって, ゼロでない展開係数は奇数次のみである。数値積分によって, 上の積分を実行して展開係数を決定すると, 7 次近似で,

$$\begin{aligned}\sin(\pi x/2) \simeq\quad & 1.1336481778117748T_1(x) - 0.1380717765871927T_3(x)\\ & + 0.0044907142465555T_5(x) - 0.0000677012758427T_7(x),\end{aligned}$$

となる。この級数を計算すると正弦関数の近似値が得られるのであるが, 他の級数と比較したくなるであろう。そこで, マクローリン級数, 最小自乗法による級数展開, チェビシェフ級数における展開級数を表 7.1 に比較してみた。この表は, 関数を x のべき級数として

表 7.1: 正弦関数 $\sin(\pi x/2)$ の級数表現における展開係数

n	Maclaurin	Least square	Chebyshev
1	1.570796326794897	1.570792231703370	1.570790987736990
3	−0.645964097506246	−0.645904393119443	−0.645892662727028
5	0.079692626246167	0.079460659203287	0.079433970839205
7	−0.004681754135319	−0.004349816639261	−0.004332881653902
9	0.000160441184787	—	—

展開したときの x^n の係数を表している。 チェビシェフ級数展開の場合, チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ を x の多項式として展開して x^n の展開係数を計算した結果を表に記載した。マクローリン級数は 9 次までの展開係数を, 最小自乗法とチェビシェフ級数は 7 次までの展開係数を表に示した。各近似法における展開係数は互いに, 近い値となっているが, 次数が高くなるにつれ, マクローリン級数の係数が他の 2 つと次第に離れていくことがわかる。これらの係数を用いた級数近似と真値 $\sin(\pi x/2)$ の誤差は, 図 7.3 のような曲線を描く。マクローリン級数については, 7 次近似と 9 次近似に対する誤差を, 最小自乗法とチェビシェフ級数については 7 次近似に対する誤差をプロットした。 マクローリン級数は, $|x|$

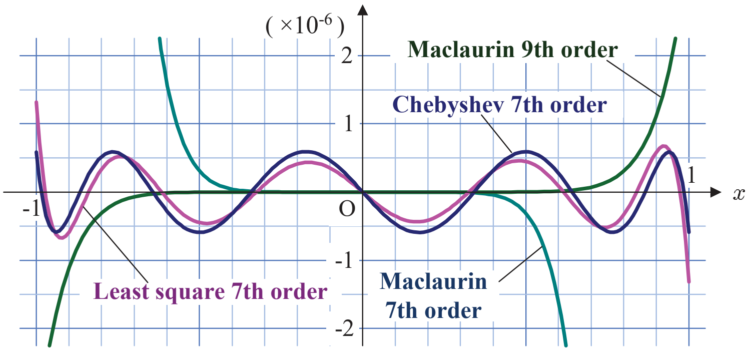

図 7.3: 正弦関数 $\sin(\pi x/2)$ の近似誤差

が小さい場合に最も誤差が小さいが, $|x|$ の増加とともに急激に誤差が増大する。最小自乗法とチェビシェフ級数は, ほぼ同じように誤差が振動するが, 全体的にみるとわずかに最小二乗法の方が誤差が小さい。変数 $|x|$ が小さいときマクローリン級数の精度が最も良好であるが, ±1 付近で誤差が急激に増大するため, 平均誤差は最小自乗法やチェビシェフ級数にはかなわない。チェビシェフ級数は定義域全体にわたって一定の幅で誤差が振動しているのが特徴である。さらに, $x = \pm 1$ での誤差は最小自乗法より小さい。その特徴があるため, チェビシェフ級数は関数の近似に用いられることが多い。