第3章　ベッセル関数

ベッセル関数は, 物理学や工学で頻繁に使われる関数である。ベッセル関数は電磁気学において円筒座標系の波動方程式の解であるので, 電磁解析で頻繁に取り扱われる。特に, 導波管を取り扱った電波伝搬の解析はベッセル関数が必要不可欠である。ベッセル関数は電磁波解析のために調べられた関数のような気がするが, 実はそうではなかった。歴史的には惑星の軌道計算の目的で導入されたことがベッセル関数の発端なのだ。本章では, 歴史にしたがって惑星軌道計算からベッセル関数を導入し, その後, ベッセル関数の性質を調べる。

3.1　ベッセル関数の導入

現在の物理学や工学における応用分野から予想もつかないが, ベッセル関数はケプラーの法則を解析するために導入された。ケプラーの法則とは, 惑星の公転運動がしたがう物理法則である。本節は, 歴史にならい, ケプラーの法則からベッセル関数を導入する。

3.1.1　ケプラーの法則

本節では, ケプラーの法則の解析をする手段としてベッセル関数を導入する。ケプラーの法則は, 惑星の運動がしたがう法則であり, 次の 3 つの法則で構成される。

楕円軌道の法則　惑星は, 太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する。

面積速度一定の法則　惑星は, 太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積が一定であるように運動する。

調和の法則　惑星の公転周期の 2 乗は, 軌道長半径の 3 乗に比例する。

これらの法則の中で, 楕円軌道の法則と, 面積速度一定の法則を本節で取り扱う。ケプラーの法則は, 膨大な観測結果から導かれた法則であるが, ニュートン力学に基づいて証明す

ることができる。本書ではその証明を省略するので, 興味のある読者は詳しくは物理学の教科書を参照するとよい。

面積速度一定の法則に関して, 惑星のように公転する天体が描く面積とは図 3.1 に示す面積 S を考えればよい。この図は原点 O を太陽とする天体の公転軌道を太い曲線で描いている。この軌道は原点 O を焦点の 1 つとする楕円軌道であり, 長半径を 1 としている。離心率を e としたとき, 太陽の位置は楕円軌道の中心から e だけずれた位置にあり, 楕円の短半径は $\sqrt{1-e^2}$ となる。天体が反時計回りに公転していると仮定し, 現在位置を P とする。近日点を A としたとき, 天体が描く面積 S とは楕円軌道における扇形 OAP の面積である。面積速度一定の法則とは, 面積 S が時間経過に対して一定の比率で増加するように天体が運動するという意味である。

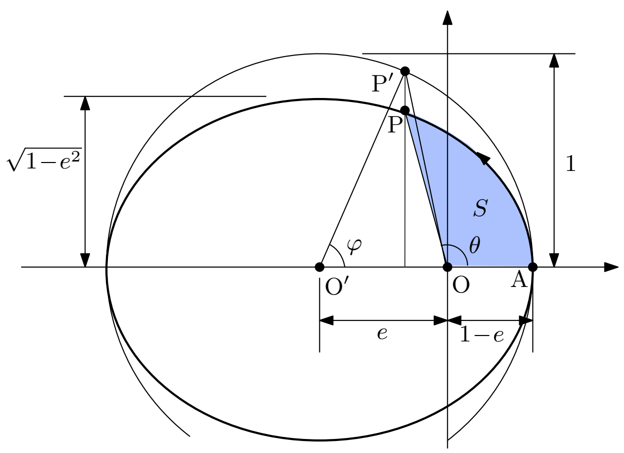


図 3.1: 公転する天体が描く面積

天体の位置を表すには, 太陽からみた近日点との離角 (真近点角) θ よりも図 3.1 に示す離心近点角 φ を用いるほうが便利である。この図には, 楕円軌道の短軸方向を $(1-e^2)^{-1/2}$ 倍した円を楕円軌道と中心が一致するように描き, 天体の現在位置 P を短軸方向に $(1-e^2)^{-1/2}$ 倍した位置に点 P′ をとっている。楕円軌道の中心 O′ からみた点 P′ の近日点との離角を離心近点角 φ と定義する。このとき, 扇形 O′AP′ の面積は $\varphi/2$ である。三角形 O′OP′ の面積が $e\sin\varphi/2$ であるので, 領域 OAP' の面積は $\varphi - e\sin\varphi$ である。よって, 天体が描く面積 S は, $S = (\varphi - e\sin\varphi)/2$ なる関係を満たす。したがって, 単位時間あたりの面積増加率 (面積速度) を $\omega/2$ とすれば, 面積速度一定の法則は,

$$\varphi - e\sin\varphi = \omega t, \tag{3.1}$$

なる数式で表される。この方程式を φ について解けば, 惑星の位置を計算できる。実際の天体軌道計算において, この方程式はニュートン法などの数値解法によって解かれる。一方, この方程式の解析的な解を求める試みによって, ベッセル関数が導入される。次節でベッセル関数を導入する。

3.1.2 ベッセル関数

歴史にならい, ケプラーの法則を解く過程, すなわち, 楕円軌道の中心から見たときの近日点との離角 φ を時間 t の関数で表す過程でベッセル関数を導入しよう。方程式 (3.1) を解く鍵は, ωt が 2π だけ増加すれば, φ も 2π だけ増加することである。この事実は, $(1-e\cos\varphi)^{-1}$ が φ についての周期関数であるので, ωt についての周期関数でもあることを意味する。

ケプラーの法則 (3.1) について, 簡単のため $\tau \equiv \omega t$ を定義しよう。このとき, ケプラーの法則は $\varphi - e\sin\varphi = \tau$ のように書くことができる。この数式の両辺を τ について微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{1-e\cos\varphi},$$

となる。この数式の右辺は, 上で述べたように, $\tau \equiv \omega t$ の周期関数でもある。したがって, 右辺はフーリエ級数:

$$\frac{1}{1-e\cos\varphi} = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos k\tau + B_k\sin k\tau\right), \tag{3.2}$$

で表現することができる。ここで, 左辺の関数が φ について偶関数であることから, τ についても偶関数であるので, 展開係数 B_k はすべてゼロである。また, 展開係数 A_k は,

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos k\tau}{1-e\cos\varphi}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos k\tau}{1-e\cos\varphi}\,\mathrm{d}\tau,$$

によって計算される。特に, $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau = (1-e\cos\varphi)^{-1}$ を利用すれば, $A_0 = 1$ であることがわかる。つまり, フーリエ変換 (3.2) は,

$$\frac{1}{1-e\cos\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos k\tau,$$

と書き換えることができる。この数式を積分すれば,

$$\varphi = \tau + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{k}\sin k\tau, \tag{3.3}$$

が得られる。なお, 前に書いた面積速度 ω と時刻 t との関係で, $\tau = \omega t$ である。

フーリエ級数の展開係数 A_k は, 波数 k と離心率 e に依存するので, A_k を k をパラメータとする $x \equiv ke$ の関数 $J_k(x)$ として定義しよう。つまり, 展開係数は,

$$J_k(x) = A_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos k\tau}{1-e\cos\varphi}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos k(\varphi - e\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

のように計算できる。改めて書くと, 関数 $J_k(x)$ は,

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(k\varphi - e\sin x)\mathrm{d}\varphi, \tag{3.4}$$

なる積分形式で定義できる。定義された関数 $J_k(x)$ において, $x = ke$ であるから, ケプラーの法則の解は,

$$\varphi = \tau + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin k\tau, \tag{3.5}$$

のように記述できるということだ。ところで, $J_k(x)$ の性質を探るため, 定義式から1階微分と2階微分を計算すると,

$$\begin{aligned} J_k'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\varphi - x\sin\varphi)\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (k - x\cos\varphi)\,\cos(k\varphi - x\sin\varphi)\,\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \\ J_k''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\varphi - x\sin\varphi)\,\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

となる。なお, 1階微分の右辺への数式変形には部分積分の公式を用いた。これらの微分から,

$$\begin{aligned} x^2\frac{\mathrm{d}^2 J_k}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}x} + (x^2 - k^2)J_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (kx\cos\varphi - k^2)\,\cos(k\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{k\pi} \cos\eta\,\mathrm{d}\eta = 0, \end{aligned}$$

が得られる。ここで, $\eta \equiv k\varphi - x\sin\varphi$ なる置き換えを適用した。この計算結果から, 関数 $J_k(x)$ が微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_k}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_k = 0, \tag{3.6}$$

の解であることが導かれる。この方程式は, **ベッセルの微分方程式**と呼ばれる。ケプラーの方程式の解を得るには, パラメータ ν は整数で十分であるが, 一時的に, パラメータ ν を任意の実数としておこう。

具体的にベッセルの微分方程式の解を得るため, その解をべき級数で表現する場合を考えよう。微分方程式の解 $J_k(x)$ が,

$$J_k(x) = z^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m,$$

であると仮定する。ここで, 最低次数を表す α と展開係数 a_m が未知数である。この関数の1階微分と2階微分が,

$$\begin{aligned} J_k'(z) &= (\alpha + m)a_m z^{\alpha+m-1}, \\ J_k''(z) &= (\alpha + m)(\alpha + m - 1)a_m z^{\alpha+m-2}, \end{aligned}$$

であることは容易に計算できる。これらをベッセルの微分方程式に代入すると,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[(\alpha + m)^2 - \nu^2\right] a_m z^{\alpha+m-2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{\alpha+m} = 0,$$

が得られる。この方程式を足がかりにして未知数を求めていこう。

まず, 最低次 ($\alpha - 2$ 次) の係数がゼロとなる要請によって, $\alpha^2 - \nu^2 = 0$ なる方程式が得られる。つまり, 最低次数は $\alpha = \pm\nu$ でなければならない[1]。続いて, $\alpha - 1$ 次の係数がゼロである要請を方程式として書くと,

$$\left[(\alpha+1)^2 - \nu^2\right] a_1 = (2\nu+1)a_1 = 0,$$

のようになる。任意の ν についてこの方程式が成立するためには, $a_1 = 0$ でなければならない。

任意の次数の係数は, 係数がゼロになる要請から,

$$a_m = -\frac{a_{m-2}}{2m\nu + m^2},$$

なる漸化式にしたがう。上で示したように $a_1 = 0$ であることから $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$, すなわち, 奇数番目の係数はすべてゼロである。そのため, 偶数番目の係数のみに限定して漸化式を書き換えると,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2(m-1)}}{4m\,(\nu+m)},$$

となる。第 0 番目の係数を a_0 としたとき, この漸化式を順次適用していくと,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m \mathit{\Gamma}(\nu+1)\, a_0}{2^{2m} m!\, \mathit{\Gamma}(m+\nu+1)},$$

が得られる。この係数に関して, $1/a_0 \equiv 2^\nu \mathit{\Gamma}(\nu+1)$ とおくと[2],

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\, \mathit{\Gamma}(m+\nu+1)},$$

が得られる。この展開係数を級数展開の数式に代入すると, 関数 $J_\nu(z)$ は,

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, \mathit{\Gamma}(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}, \tag{3.7}$$

のように書くことができる。また, 次数 ν が正の整数 n である場合,

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \tag{3.8}$$

と書くことができる。この関数は**ベッセル関数**, または, 第 1 種ベッセル関数と呼ばれる。関数の添え字 ν と n はベッセル関数の次数である。級数 (3.8) を用いてベッセル関数を計算すると, 図 3.2 が得られる。ベッセル関数は三角関数のように振動する関数であるが, 変

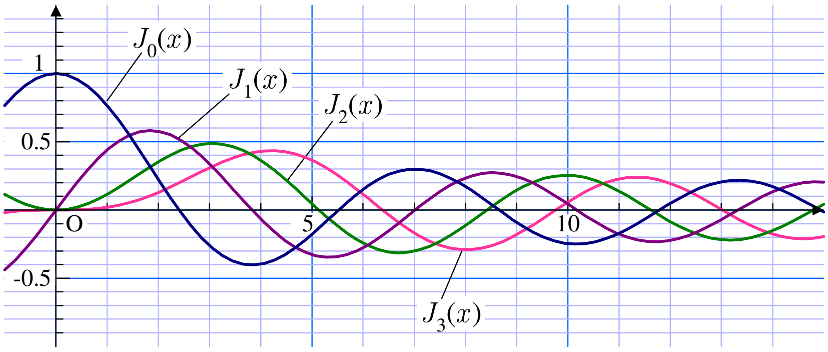


図 3.2: ベッセル関数

数 x によって振幅が変化し, 周期関数ではない。しかし, 後に示すように振幅は $\sqrt{x}$ に反比例し, $x \to \infty$ の極限で三角関数に近づく[3]。

級数 (3.7) と (3.8) は収束半径が無限大であるので, 原理的にはいかなる x を代入しても級数は収束する。しかし, パラメータ ν や変数 x の絶対値が大きくなると, 途中計算で現れる項が大きな数となり, 現実の計算では計算機の桁数制限から正しい結果が得られない場合がある。そのような場合にも正確に計算するには, 後の節で説明するテクニックが必要となる。

ベッセル関数の定義をし, その関数を級数展開できたところで, 最初の話に立ち戻ろう。ベッセル関数はケプラーの法則の解として惑星の離心近点角 φ を計算するために導入された。上で導入したベッセル関数を用い, 離心近点角 φ は,

$$\varphi = \omega t + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin k\omega t, \tag{3.9}$$

のように記述できる。前に書いたように, ω は平均近点角の増加率である。平均近点角の増加率は, 惑星の公転周期が T であれば $\omega \equiv 2\pi/T$ で定義される。

ハレー彗星の公転運動　前に述べたように, 天体の公転運動の解析には, ベッセル関数を展開係数とするフーリエ級数によって計算できる。その一例として, ハレー彗星の公転運動を計算すると図 3.3 のようになる。この図は近日点通過を現在としたときの時刻と位置の関係を, 半年間隔で表している。ハレー彗星の軌道は, 離心率が $e = 0.967$ のように扁平した軌道を描くため, この図を描くためにはフーリエ級数は 500 倍波までの周波数を必要とした。これくらい離心率が大きい軌道は, 展開係数を決めるベッセル関数がテイラー展

[1] この条件に関して, $\alpha \neq \pm\nu$ であっても $a_\alpha = 0$ であれば最低次数がゼロとなるのであれば, 係数をゼロとする要請を満足するが, α 次が最低次数であるという仮定に反する。

[2] 積分表現 (3.4) に $x = 0$ を代入すると, $J_k(0)$ の k 次の展開係数が $1/2^k k!$ であることがわかる。その結果に基づき, $1/a_0 \equiv 2^\nu \Gamma(\nu+1)$ とおいた。

[3] ベッセルの微分方程式が $\to \infty$ の極限で $f'' + f = 0$ となることから容易に予想できる。

開 (3.8) だけでは十分に収束できないので, 後の節で説明するテクニックを用いて計算した。 次回のハレー彗星の接近は 2061 年 7 月である。西暦 2013 年現在, ハレー彗星は海王

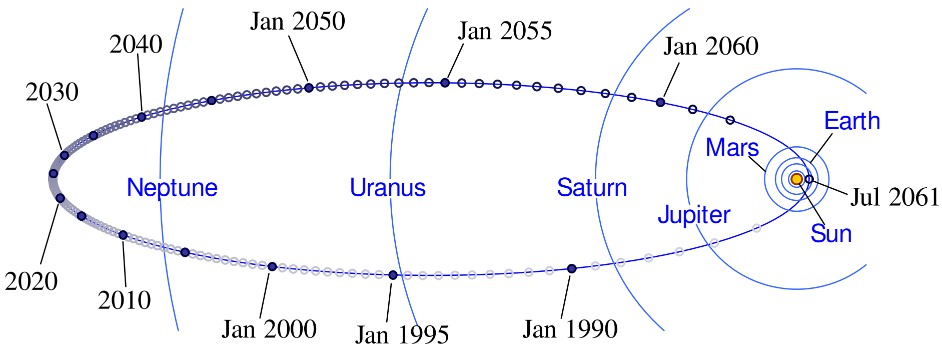


図 3.3: ハレー彗星の公転運動

星軌道の外側に存在する。離心率 0.967 のハレー彗星は遠日点における太陽までの距離が近日点の約 55 倍にもなる。面積速度一定の法則から, 近日点での公転速度は遠日点の 55 倍の速さになるため, 図に示すように, 太陽への最接近の直前については, 1 年で木星の位置から近日点まで 1 年の短期間で一気に到来する。逆に, 公転周期のほぼ半分にあたる 35 年間を海王星の軌道の外をゆっくりと公転していることが図 3.3 からわかる。

3.1.3 負の次数のベッセル関数

ケプラーの法則の解法として導入した際, 第 1 種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ の次数 ν は非負整数で十分だった。しかし, ベッセルの方程式の解として級数展開する仮定で ν を任意の実数とすることが可能であることを示した。そのとき, 第 1 種ベッセル関数は (3.7) で表現できる。

ベッセル関数の次数が任意の実数とすることに関して, 負の次数について考察しよう。既に示したように, ベッセルの微分方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f = 0,$$

であるので, 実は, 次数 ν の符号反転に対してベッセルの微分方程式は同一の方程式なのである。つまり, $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ は同一の方程式から得られる 2 つの独立した解なのである。それは, ベッセルの微分方程式が 2 階の微分方程式であることに起因する。

関数の独立性について説明しておこう。関数 $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ が独立であることは, 方程式 $a_0 J_\nu(x) + a_1 J_{-\nu}(x) = 0$ が任意の x に対して満足するために $a_0 = a_1 = 0$ 以外の解が存

在しないことを意味する。これは, $a_0 \neq 0$ であれば, $J_\nu(x) = -(a_1/a_0)\, J_{-\nu}(x)$ と書くこともできるので, $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ が定数倍の関係にあれば独立でないということだ。

次数を符号反転した 2 つのベッセル関数 $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ が独立であることは, 級数展開:

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu},$$

から明らかである。まず, $J_\nu(x)$ の最低次は x^ν の項である。一方, $J_{-\nu}(x)$ の最低次は $x^{-\nu}$ の項である。つまり, $J_\nu(x)$ には存在しない次数の項が $J_{-\nu}(x)$ に含まれるのである。これは, 任意の x に対して, $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ が定数倍の関係で表せないことを意味する。よって, $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ は独立であるのだ。

例外として, ベッセル関数の次数 ν を負の整数 $\nu \equiv -n$ としたとき, 2 つの解 $J_n(x)$ と $J_{-n}(x)$ が独立した解ではない。その事実を示そう。負の次数のベッセル関数の取り扱いには注意が必要である。なぜなら, ガンマ関数がゼロと負の整数を 1 位の極とするからである。そのため, $-n$ 次のベッセル関数は,

$$J_{-n}(x) \equiv \lim_{\nu \to -n} J_\nu(x) = \lim_{\nu \to -n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, \Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu},$$

のような極限で定義すればよい。ガンマ関数がゼロと負の整数を 1 位の極とするので,

$$\lim_{\nu \to -n} \frac{1}{\Gamma(\nu+m+1)} = 0, \qquad (m \leq n-1)$$

が成立する。つまり, (3.1.3) において, $m \leq n-1$ の寄与がゼロであるので, 負の次数の第 1 種ベッセル関数は,

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\,m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \end{aligned}$$

のように計算できる。この計算結果は,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \tag{3.10}$$

なる関係が成立することを意味している。したがって, 整数次数のベッセル関数について, $J_n(x)$ と $J_{-n}(x)$ が独立した 2 つの関数ではない。しかし, ベッセルの微分方程式が 2 階の微分方程式であるので, 独立したもう 1 つの解があるはずである。もう 1 つの独立した解の選び方については後の節で説明する。

3.2 ベッセル関数の漸化式

ベッセル関数は, $J_\nu(x)$ という記号のように, 変数 x だけでなく次数 ν にも依存する関数である。ベッセル関数 $J_\nu(x)$ は, あたかも, ν を添え字にした数列のように, 隣り合う次数間を漸化式で関係づけることができる。本節ではベッセル関数の次数間で成立する漸化式について説明する。

3.2.1 ベッセル関数の母関数

数列の性質を調べるときに, その数列をテイラー級数などの展開係数としたときにどの関数に収束するかを調べることがある。その収束先の関数を母関数と呼ぶ。ベッセル関数 $J_n(x)$ の場合,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n = e^{(x/2)(t-1/t)}, \tag{3.11}$$

が成立する。この数式は, ベッセル関数の母関数が $e^{(x/2)(t-1/t)}$ であることを意味する。言い換えると, ベッセル関数 $J_n(x)$ は, 関数 $e^{x\,(t-1/t)/2}$ をローラン展開したときの n 次の係数である。

上に示した (3.11) を証明しよう。計算が多少技巧的であるので, 計算途中を省略せずに証明していく。ベッセル関数 $J_n(x)$ を展開係数とするローラン展開は,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n &= \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)\,t^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)\,t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x)\,t^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)\,t^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x)\,t^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)\,t^n,
\end{aligned}$$

のように計算できる。最下行への数式変形については, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ なる関係を用いた。さらにベッセル関数を級数展開すると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} t^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} t^{n} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{m!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+m} t^{m-k} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} t^{k-m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{m!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+m} t^{m-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{m!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k} t^{m-k},
\end{aligned}$$

のように数式変形を進行できる。第 2 行目の数式変形は $k \equiv m+n$ とした。第 3 行目への数式変形は, 第 2 項の総和対象である添え字 m と k を交換した。ここで, 添え字 m を横軸

に, 添え字 k を縦軸にとると, 第 1 項の総和の範囲は図に示す上三角形となり, 第 2 項の総和の範囲は下三角形となる。つまり, 第 2 項と第 2 項の和で, 添え字 m と k がゼロ以上の整数をすべて網羅することになる。したがって, 右辺は,

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{m!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+m}t^{m-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{xt}{2}\right)^m\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{2t}\right)^k \\ &= e^{xt/2}\cdot e^{-x/2t} = e^{(x/2)(t-1/t)},\end{aligned}$$

のように変形される。この計算結果として, ベッセル関数の母関数を特定することができた。整数次のベッセル関数はこの性質を利用して, $e^{(x/2)(t-1/t)}$ のローラン展開の n 次の係数を $J_n(x)$ と定義する文献[4]もある。

母関数から導出される性質 1 ベッセル関数の母関数に $t=1$ を代入すると興味深い関係式が得られる。その数式を書いてみると,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x) = 1, \tag{3.12}$$

が得られる。つまり, すべての整数次のベッセル関数を加算すると, その和は x に依存しない定数となる。また, $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$ なる関係式を利用すると, この関係式は,

$$J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x) = 1, \tag{3.13}$$

のように書き換えることができる。

母関数から導出される性質 2 ベッセル関数の母関数を t について微分すると, 興味深い関係式が得られる。両辺を t について微分すると,

$$\sum_{n=\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1} = \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^{(x/2)(1-1/t)},$$

が得られる。この数式の右辺に再び母関数が現れているので, 級数展開すると,

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} &= \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\,t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x}{2}\left(J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)\right)t^{n-1},\end{aligned}$$

[4]J. B. Arfken, H. B. Weber, “特殊関数,” 権平健一郎, 神原武志, 小山直人 訳, 講談社, 基礎物理数学 Vol. 3, 第 4 版, pp.43–46, 2001.

のように計算される。この計算結果は,

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x), \tag{3.14}$$

なる漸化式が成立することを示唆している。この漸化式は, 数値計算において有用な公式である。前節で述べたように, 級数展開でベッセル関数を計算する場合, 次数が大きなベッセル関数は計算機の演算桁の影響で正確な計算が困難になる。それを回避するには, $J_0(x)$ と $J_1(x)$ を計算しておき, この漸化式を繰り返して $J_n(x)$ を計算するのである。

3.2.2　ベッセル関数の漸化式

漸化式 (3.14) は, 整数次以外でも成立する。級数展開を用いて $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)$ を計算すればその事実を証明できる。計算してみると,

$$\begin{aligned}
&J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)\\
&\quad=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+1}\\
&\quad=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1}\\
&\quad=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m)}-\frac{(-1)^m}{(m-1)!\,\Gamma(\nu+m+1)}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2m\nu-1}\\
&\quad=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\nu}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1}\\
&\quad=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\nu}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1},
\end{aligned}$$

が得られる。この結果から,

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x), \tag{3.15}$$

が得られ, 整数以外の任意の次数 ν についても, (3.14) と同様の漸化式が成立することが示された。この漸化式は, 整数次の場合と同様に, 大きな次数のベッセル関数を計算する際に利用するのが有効である。

上の漸化式に類似した関係式が, ベッセル関数の級数展開を微分することによって得ることができる。これについても計算すると,

$$J_\nu'(x)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+\nu)}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+\nu)}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \\
&= \frac{1}{2\Gamma(\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+1},
\end{aligned}
$$

のように数式変形できる。この計算結果から,

$$
J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x), \tag{3.16}
$$

なる漸化式が得られる。この関係式は, むしろ, (3.15) との和や差をとると興味深い関係式になる。和と差をとって 2 分の 1 倍すると,

$$
J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x}J'_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x), \tag{3.17a}
$$

$$
J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x}J'_{\nu}(x) - J'_{\nu}(x), \tag{3.17b}
$$

が得られる。さらに, (3.17a) の両辺に x^{ν} を乗じた積は,

$$
x^{\nu}J_{\nu-1}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\nu}J_{\nu}(x), \tag{3.18}
$$

である。この関係式の両辺を積分すると,

$$
\int x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,\mathrm{d}x = x^{\nu}J_{\nu}(x) + C, \tag{3.19}
$$

なる積分公式が得られる。ただし, C は積分定数である。

3.3　積分表現

ケプラーの法則からベッセル関数を導入した際に, 既に, ベッセル関数を積分形式で表現できることを示した。本節では, ベッセル関数の母関数を利用して整数次のベッセル関数の積分表現を得る。さらに, 積分を複素積分に拡張し, 非整数次のベッセル関数の積分表現にも言及する。

3.3.1　整数次ベッセル関数

ベッセル関数の母関数を利用すると, ベッセル関数の積分表現を得ることができる。既に示したように, ベッセル関数 $J_n(x)$ は関数 $e^{(x/2)(t-1/t)}$ のローラン展開の展開係数である。つまり,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n = e^{(x/2)(t-1/t)},$$

が成立する。この数式に対して, $t \equiv e^{i\varphi}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{in\varphi} &= e^{(x/2)(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})} = e^{ix\sin\varphi} \\ &= \cos(x\sin\varphi) + i\sin(x\sin\varphi),\end{aligned}$$

なる関係式が得られる。一方, 左辺をその表記どおりに計算すると,

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS} &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(J_n(x)\, e^{in\varphi} + J_{-n}(x)\, e^{-in\varphi}\Big) \\ &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\,\Big[e^{in\varphi} + (-1)^n\, e^{-in\varphi}\Big] \\ &= J_0(x) + 2i\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\varphi + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\varphi,\end{aligned}$$

のように変形できる。この母関数の実部と虚部を個別に取り出すと,

$$\cos(x\sin\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\varphi,$$

$$\sin(x\sin\varphi) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\varphi,$$

なる等式が得られる。ここで, 三角関数の直交性:

$$\int_0^{\pi}\cos n\varphi\,\cos m\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}, \qquad \int_0^{\pi}\sin n\varphi\,\sin m\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\delta_{nm},$$

を利用すると, 上の等式は,

$$\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)\,\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \begin{cases}\pi\,J_n(x)/2, & (n=\mathrm{even}) \\ 0, & (n=\mathrm{odd})\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\sin(x\sin\varphi)\,\sin n\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \begin{cases}0, & (n=\mathrm{even}) \\ \pi\,J_n(x)/2, & (n=\mathrm{odd})\end{cases}$$

なる関係式に書き換えられる。これらの関係式は, パラメータ n が偶数か奇数で場合分けをしている。しかし, これらの関係式の和ととると,

$$\int_0^{\pi}\Big[\cos(x\sin\varphi)\,\cos n\varphi + \sin(x\sin\varphi)\,\sin n\varphi\Big]\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}J_n(x),$$

のように場合分けを必要としない数式が得られる。この数式の左辺は, 三角関数の加法定理を用いて整理することができる。その結果,

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{3.20}$$

なる積分公式が得られる。この積分公式は, ケプラーの法則からベッセル関数を導入する際に示した積分公式と一致する。この積分公式の被積分関数が偶関数であることに注意すると,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

であることが明らかである。さらに, この積分の被積分関数を $\sin(n\varphi - x\sin\varphi)$ に書き換えると, その関数が奇関数であるので,

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi - x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

のような等式になる。前者の等式に, 後者の等式の i 倍を加算すると,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi,$$

なる形に書き換えられる。さらに, この被積分関数が周期 2π の周期関数であることから,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi - x\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{3.21}$$

のように書き換えてもよい。

3.3.2　シュレーフリの積分表示

前節で導出した積分表現は整数次のベッセル関数しか与えない。本節で示されるが, 前節の積分表現における次数 n を非整数 ν に置き換えるだけでは不十分なのである。

非整数次のベッセル関数の積分表現を得るためには, 前節と同様に, ベッセル関数の母関数:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n = e^{(x/2)(t-1/t)},$$

を用いる。この関数数に, t^{-n-1} を乗じた関数 $e^{(x/2)(t-1/t)}t^{-n-1}$ は,

$$e^{(x/2)(t-1/t)}t^{-n-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\,t^{m-n-1},$$

なる級数で表される。この関数は $t=0$ を極とする関数である。この級数表現から, 母関数に t^{-n-1} を乗じた新たな関数の -1 次の展開係数 (すなわち, 留数) は $J_n(x)$ である。したがって, 留数定理によると,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(x/2)(t-1/t)}t^{-n-1}\,\mathrm{d}t, \tag{3.22}$$

が成立する。ここで, 積分変数を複素数に拡張した。しかも, 積分路 C は, 図 3.4 に示すように, 被積分関数の極 $t=0$ を 1 回だけ反時計回りに周回する単純閉曲線である。

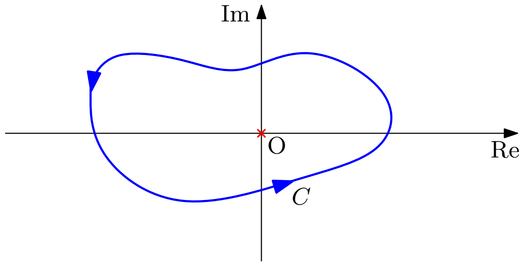


図 3.4: 整数次のベッセル関数を得るための積分経路

複素平面における経路積分 (3.22) について, 次数 n を非整数 ν に書き換えた数式:

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(x/2)(t-1/t)}t^{-\nu-1}\,\mathrm{d}t, \tag{3.23}$$

について考えてみよう。ベッセル関数の母関数は $e^{(x/2)(t-1/t)}$ は整数次のベッセル関数を展開係数とする関数であるので, 被積分関数の留数は $J_\nu(x)$ とならない。だから, 単純に n を ν に置き換えて (3.22) を書き直しただけでは J_ν の積分表現とはならない。

上で定義された $y(x)$ がベッセル関数である可能性を考察しよう。仮に, $y(x)=J_\nu(x)$ であるならば, $y(x)$ は ν 次のベッセルの微分方程式:

$$x^2y''+xy+(x^2-\nu^2)y=0,$$

を満たすはずである。その可能性を考察するのだ。なお, 数式中のプライム ($'$) は x についての微分を意味する。複素積分による $y(x)$ の定義 (3.23) をベッセルの微分方程式の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned}&x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y\\&\quad=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]^2+\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+x^2-\nu^2\right\}e^{(x/2)(t-1/t)}t^{-\nu-1}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

が得られる。この積分がゼロになるかどうかを判定することは難しく思えるかもしれない。しかし, この積分の被積分関数は,

$$\text{Integrad}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{(x/2)(t-1/t)}\,t^{-\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right],$$

である。右辺を実際に計算すればこの関係式の正当性が検証できるはずである。この関係式を利用すると, $y(x)$ をベッセルの微分方程式に代入した結果は,

$$\begin{aligned}&x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y\\&\quad=\frac{1}{2\pi i}\left[e^{(x/2)(t-1/t)}\,t^{-\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right]_{t_0}^{t_1},\end{aligned}$$

となる。ここで, t_0 と t_1 は, それぞれ, 積分路の始点と終点である。この数式の右辺は, 外側のブラケット ([]) の内部の数式に $t = t_1$ を代入した結果と $t = t_0$ を代入した結果との差をとることを意味する。もともと周回積分だから $t_0 = t_1$ となるので, この積分は必ずゼロになるのでは, と思ってはいけない。ブラケット内部の $t^{-\nu}$ がその期待を裏切るのだ。積分路の始点を $t_0 = Re^{-\pi i}$, 終点を $t_1 = Re^{\pi i}$ としよう。確かに $t_0 = t_1$ なのだが, $t = 0$ を 1 回まわる意味でこのような表現を用いる。すると, $t_0^{-\nu} = R^{-\nu}e^{\pi i\nu}$, $t_1^{-\nu} = R^{-\nu}e^{-\pi i\nu}$ となるため, ν が整数でなければ, ブラケット内の関数が同一にならないのだ。つまり, $y(x)$ は無条件にベッセルの微分方程式を成立させることはないのである。

積分路の設定で $y(x)$ がベッセルの微分方程式を成立させることができるかもしれないので, もう少し考察を続けよう。上で述べたように, 積分路の始点と終点を, それぞれ, $t_0 = Re^{-\pi i}$, $t_1 = Re^{\pi i}$ としよう。ただし, 現時点で R は複素数とする。なぜなら, R を正の実数とすると積分路の始点と終点が, 必ず, 負の実軸上に限定されるからである。そのように定義された t_0 と t_1 を代入すると,

$$\begin{aligned} &x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y \\ &\quad = \frac{\sin \pi\nu}{\pi} e^{(x/2)(-R+1/R)} \left[\nu - \frac{x}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\right], \end{aligned}$$

のように計算される。この数式の右辺は, $R \to \infty$ の極限でゼロとなる。一方, $R \to -\infty$ の極限で右辺は発散するので, 積分路の設定によって結果が異なるのである。その結果として, 図 3.5 に示す積分路をとれば $y(x)$ は非整数次のベッセルの微分方程式を満足する。その積分経路は, 始点と終点を負の実軸の無限遠にとり, $t = 0$ を反時計回りに 1 回だけまわる経路であればどのような経路でもよい。したがって, (3.23) は ν 次のベッセル関数である。すなわち, ベッセル関数は,

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-\nu-1}\,\mathrm{d}t, \tag{3.24}$$

なる積分で表される。この積分表示は**シュレーフリの積分表示**と呼ばれ, 非整数次のベッセル関数を与えることができる。

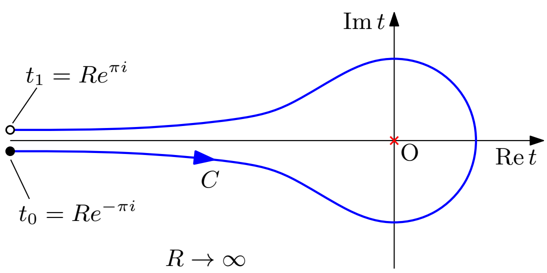


図 3.5: 関数 $y(x)$ がベッセルの微分方程式を満足する積分路

シュレーフリの積分表示における積分路 C は, 始点と終点が負の実軸上の無限遠に存在し, $t = 0$ を反時計回りに 1 回だけ周回する経路であれば, どのような経路でもよい。積分

路の例として, 図 3.6 に示す積分路を考えよう。 すなわち, 実軸上を負の無限大から -1 までたどる経路 C_- と, $t=0$ の周りを半径 1 の円周に沿って $t=-1$ から 1 回転する経路 C_0 と, 実軸上を -1 から負の無限大までたどる経路 C_+ を積分路とする。

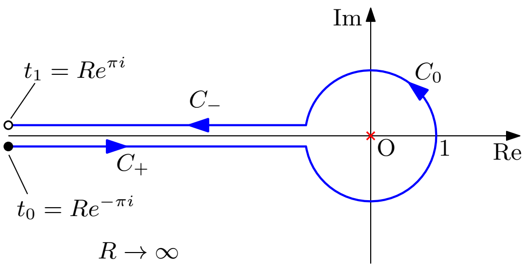


図 3.6: 非整数次のベッセル関数を得るための積分路

経路 C_0 に沿った積分では, 積分変数を $t \equiv e^{i\varphi}$ とすればよい。新たな積分変数 φ の積分範囲は $[-\pi, \pi]$ となるので,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-\nu-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(x/2)(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})}\cdot e^{-i\nu\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\nu\varphi - x\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu\varphi - x\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{i(\nu\varphi - x\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

のように積分が計算できる。経路 C_- に沿った積分では, 積分変数を $t \equiv e^{\xi-\pi i}$ とすればよい。その場合, 新たな積分変数 ξ の積分範囲は, $[\infty, 0]$ となるので,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-\nu-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0} e^{(x/2)(-e^{\xi}+e^{-\xi})}\cdot e^{-\nu\,(\xi+\pi i)}\,\mathrm{d}\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} e^{-x\sinh\xi-\nu\xi}\cdot e^{-\pi i\nu}\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

のように積分が計算される。さらに, 経路 C_+ に沿った積分では, 積分変数を $t \equiv e^{\xi+\pi i}$ とすればよい。経路 C_- と比べて指数の虚部が $2\pi i$ だけ異なるのが大切である。それは $t=0$ を 1 回だけ周回していることを意味するからである。経路 C_+ において, 積分変数 ξ の積分範囲は $[0, \infty]$ となるので,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+} e^{(x/2)(t-1/t)} t^{-\nu-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} e^{-x\sinh\xi-\nu\xi}\cdot e^{\pi i\nu}\,\mathrm{d}\xi,$$

のように積分が計算される。これら 3 つの積分の和をとると, 積分路 C に沿った積分となるので, ベッセル関数 $J_\nu(x)$ が得られる。結果を書くと,

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{i(\nu\varphi - x\sin\varphi)}\mathrm{d}\varphi + \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x\sinh\xi-\nu\xi}\mathrm{d}\xi,$$

が得られる。右辺の第 2 項に $\sin\pi\nu$ なる因数を含むため, ベッセル関数の次数 ν が整数のとき, 第 2 項はゼロとなる。

3.3.3　ポアソンの積分表示

ベッセル関数の級数展開から別の積分表現を得ることができる。その導出も多少, 技巧的なので, なるべく導出過程を省略せずに示そう。既に示したように, ベッセル関数は,

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu},$$

なる級数に展開できる。この数式の左辺を調べるにあたり,

$$B(\nu+1/2, m+1/2) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+\nu+1)},$$

なるベータ関数を評価しよう。ガンマ関数とベータ関数は本書の第 1 で取り扱った。分子に含まれる $\Gamma(m+1/2)$ は, m がゼロ以上の整数であり, $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ であることを利用すると,

$$\begin{aligned} \Gamma(m+1/2) &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}\pi^{1/2} \\ &= \frac{(2m)!}{2^m\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot(2m)}\pi^{1/2} = \frac{(2m)!}{2^{2m}\,m!}\pi^{1/2}, \end{aligned}$$

であることがわかる。この関係式を $B(\nu+1/2, m+1/2)$ に代入すると,

$$B(\nu+1/2, m+1/2) = \pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)\frac{(2m)!}{2^{2m}\,m!\,\Gamma(m+\nu+1)},$$

が導かれる。この数式の右辺がベッセル関数の級数に含まれる項に類似していることから, ベッセル関数の級数はベータ関数を用いて記述できそうである。級数を書き直してみると,

$$J_\nu(x) = \frac{\pi^{-1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} B(\nu+1/2, m+1/2)\,x^{2m}, \tag{3.25}$$

が得られる。さらに, ベータ関数の積分表現 (本書の数式 (1.3)):

$$B(\nu+1/2, m+1/2) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m}\varphi\,\cos^{2\nu}\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

に注意すると, 上で導出した関係式 (3.25) は,

$$J_\nu(x) = \frac{2\pi^{-1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu}\varphi\, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\,(x\sin\varphi)^{2m}\,\mathrm{d}\varphi,$$

のように変形できるのだが, 総和記号の影響を受ける部分は余弦関数 (cosine) のマクローリン展開となっている。したがって, この数式は,

$$J_\nu(x) = \frac{2\pi^{-1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\,\cos^{2\nu}\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \tag{3.26}$$

なる形に変形できる。導出した積分表現 (3.26) をさらに変形すると,

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{\pi^{-1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\, \cos^{2\nu}\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi^{-1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{0}^{\pi} \cos(x\cos\varphi)\, \sin^{2\nu}\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi^{-1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{0}^{\pi} e^{\pm x\cos\varphi}\, \sin^{2\nu}\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi^{-1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} e^{\pm ipx}\,(1-p^2)^{\nu-1/2} \,\mathrm{d}p, \end{aligned}$$

が得られる。第 1 行目では被積分関数が偶関数であることを利用した。第 2 行目では φ を $\pi/2-\varphi$ に置き換えた。第 3 行目では余弦関数を複素指数関数に変形し, その虚部がゼロであることを利用した。最終行では, $\cos\varphi$ を p で置き換えた。この積分形式は**ポアソンの積分表示**と呼ばれる。

ポアソンの積分表示から, 半奇整数次のベッセル関数が初等関数で表現できることが導かれる。積分表示 (3.27) を見ると, $\nu=1/2$ では数式が簡単になることがわかる。実際に計算してみると,

$$J_{1/2}(x) = \pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}\int_{-1}^{1} e^{ipx}\,\mathrm{d}p = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x,$$

が得られる。引き続き, $\nu=3/2$ についてベッセル関数を計算すると,

$$J_{3/2}(x) = \pi^{-1/2}\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}\int_{-1}^{1}(1-p^2)\, e^{ipx}\,\mathrm{d}p = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right),$$

が得られる。なお, この計算では,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} e^{ipx}\,\mathrm{d}p &= \frac{2\sin x}{x}, \\ \int_{-1}^{1} p^2\, e^{ipx}\,\mathrm{d}p &= \frac{2\sin x}{x}+\frac{4\cos x}{x^2}-\frac{4\sin x}{x^3}, \end{aligned}$$

を利用した。後者の積分は, 前者をもとに部分積分を 2 回繰り返せば計算できる。ここで示したように, $J_{1/2}(x)$ と $J_{3/2}(x)$ が初等関数で表現できる。ベッセル関数の漸化式 $J_{\nu-1}+J_{\nu-1}=2\nu J_\nu(x)/x$ を考えれば, すべての半奇整数次のベッセル関数が初等関数で表現できることがわかる。例として, 漸化式を用いて $J_{-1/2}(x)$ を計算すると,

$$J_{-1/2}(x) = \frac{J_{1/2}(x)}{x} - J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x,$$

が得られる。これらの計算結果は近似式でなく, 厳密式である。半奇整数次のベッセル関数はこのように簡潔な形で記述できるのが特徴である。

3.4　ベッセル関数の応用

ベッセル関数は物理学や工学で頻繁に現れる関数であるので, その応用例は多い。本節では, ベッセル関数の応用例として, 光波の回折現象と, 円形導波管の内部における電磁界を取り扱う。

3.4.1　円形開口による回折

円形開口による光波の回折は, 望遠鏡やカメラの分解能を求める計算に応用される。図 3.7 のように奥行き方向が z 軸になるように座標を定める。ここで, xy 平面に壁を設け, 原点を中心に半径 $D/2$ の穴を開ける。一方, $z = L$ にスクリーンを設置する。スクリーンの距離は, 十分に大きく, $L \gg D$ であるとする。

上記の設置条件のもとで, z 軸方向に光の平面波を照射し, スクリーンに映る光について調べてみよう。つまり, スクリーン上の点 $[x, y, L]$ における光の波動関数を計算する。電磁気学によると光の波動関数は電界 $E(x, y, L)$ である。 スクリーン上の電界 $E(x, y, L)$ は,

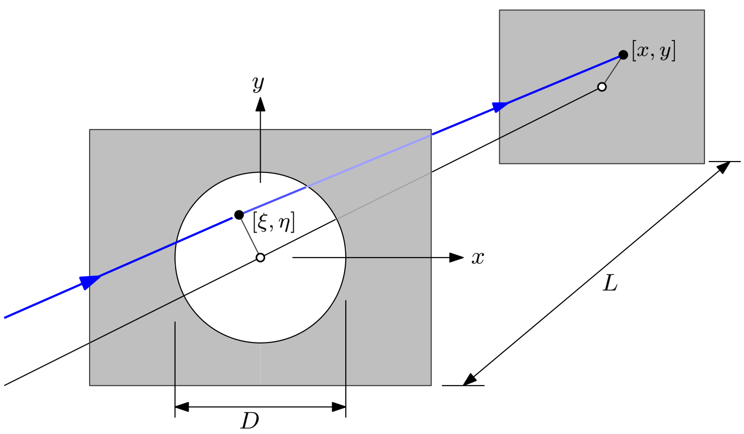


図 3.7: 円形開口を通過する光

波動力学におけるホイヘンスの原理によると, 円形開口に含まれるあらゆる点を波源とみなしたときのスクリーン上の点における電界の総和である。照射された光波が z 軸方向に伝播する平面波であるので, $z = 0$ の開口面の全体で波動関数の位相は一定である。つまり, 開口面の任意の点 $[\xi, \eta, 0]$ を通過する光の波動関数は,

$$E(\xi, \eta, 0) = E_0,$$

のような定数となる。ただし, E_0 は複素数であり, 開口全体にわたってその位相 (偏角) が一定である。ホイヘンスの原理を適用するのであれば, 開口全体に同一位相の波源が均等

に配置されていると考えればよい。例えば, スクリーン上の点 $[x, y, L]$ における電界のうち, 開口上の点 $[\xi, \eta, 0]$ の近傍の微小面積 $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$ による寄与を $\mathrm{d}E$ とすると,

$$\mathrm{d}E \propto E_0 e^{-ikl} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

と書くことができる。ただし, l は波源からスクリーン上の点 $[x, y, L]$ までの距離, k は波数と呼ばれる量 (波長を λ とすると $k \equiv 2\pi/\lambda$) である。距離 l は,

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + L^2} = L\sqrt{1 + \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{L^2}} \\ &\simeq L + \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2L} \simeq L + \frac{r^2}{2L} - \frac{x\xi + y\eta}{L}, \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで, $r^2 = x^2 + y^2$ とした。光が距離 l を伝播すると, 位相が kl だけ回転する。ただし, 光の波長を λ としたとき, $k \equiv 2\pi/\lambda$ なる波数を用いた。点 $[\xi, \eta, 0]$ の近傍の微小面積からの寄与 $\mathrm{d}E$ は,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E &\propto E_0 \exp\left[-ik\left(L + \frac{r^2}{2L} - \frac{x\xi + y\eta}{L}\right)\right] \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= \tilde{E}_0 \exp \frac{ik\,(x\xi + y\eta)}{L} \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= \tilde{E}_0 \exp \frac{ikr\rho\,(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)}{L} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\ &= \tilde{E}_0 \exp ik \frac{r\rho\,\cos(\varphi - \theta)}{L} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho, \end{aligned}$$

となる。ただし, $\tilde{E}_0$ は ξ や η に依存しない因数である。つまり,

$$\tilde{E}_0 \equiv E_0 \exp i\left[\phi - k\left(L + \frac{r^2}{2L}\right)\right],$$

として定義した。また, 上に示した $\mathrm{d}E$ の計算に関して, 第 3 行目への数式変形のため,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad \xi = \rho\cos\varphi, \qquad \eta = \rho\sin\varphi,$$

とおいた。スクリーン上の点 $[x, y, L]$ で観測される電界は, $\mathrm{d}E$ を開口全体, すなわち, $0 \le \rho < D/2$, $0 <\le \varphi < 2\pi$ にわたって積分した値になる。比例係数を省略して計算すると,

$$\begin{aligned} E(x, y, L) &\propto \int_0^{D/2} \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \exp ik \frac{r\rho\,\cos\varphi}{L} \\ &= 2\pi \int_0^{D/2} \rho\,\mathrm{d}\rho J_0\left(\frac{kr\rho}{L}\right) \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho L}{kr} J_1\left(\frac{kr\rho}{L}\right)\right]_0^{D/2} = \frac{\pi DL}{kr} J_1\left(\frac{krD}{2L}\right), \end{aligned}$$

のように計算できる。なお, この計算にあたり, $\theta = 0$ に限定した。波動関数 $\Psi(x, y, L)$ はスクリーン上の原点 $[0, 0, L]$ について点対称であるので, $\theta = 0$ に限定することは一般性を失わない。第2行目への数式変形はベッセル関数の積分表示を利用した。さらに, 第3行目への数式変形には, ベッセル関数の漸化式から得られる積分公式を利用した。さらに, 波数と波長の関係 $k = 2\pi/\lambda$ を利用して, k の代わりに λ を用いて数式を記述すると,

$$E(x, y, L) = \frac{\lambda DL}{2r} J_1\!\left(\frac{\pi r D}{\lambda L}\right),$$

なる結果が得られる。波動関数は $E(x, y, L)$ は上で述べたように $[0, 0, L]$ について点対称であり, その振幅はその中心点からの距離 r に依存して1次の第1種ベッセル関数を用いて計算できる。

続いて, 開口面に対して, 光波が斜めに照射される場合を考えよう。照射方向が z 軸方向と角度 α をなすとし, その照射方向の傾きは y 成分のみしかもたないとする。その場合, 開口面の任意の点 $[\xi, \eta, 0]$ における波動関数 (電界) は,

$$E_\alpha(\xi, \eta, 0) = E_0 e^{i\eta \sin\alpha} \simeq E_0 e^{i\eta\alpha},$$

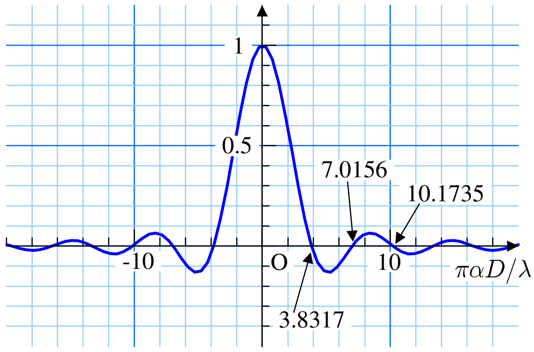
となる。ただし, 照射角度 α が十分に小さいものとした。光波が開口面に対して垂直に照射された場合と異なり, 開口面上での位相が η に依存するのだ。その条件のもとで, スクリーン上の点 $[x, y, L]$ における電界を計算すると,

$$\begin{aligned} E_\alpha &\propto \iint \exp ik \frac{x\xi + y\eta}{L} e^{i\eta\alpha} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \\ &= \iint \exp ik \frac{x\xi + (y + \alpha L)\eta}{L} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \end{aligned}$$

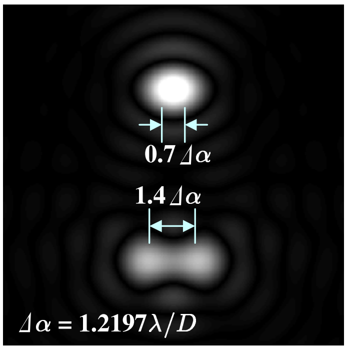
のように計算できる。この結果によると, 電界 E_α は, E の変数を $y \mapsto y - \alpha L$ に置き換えた結果と一致する。つまり, E_α は座標 $[0, -\alpha L, L]$ に最大値をもつ関数である。入射方向が z 軸と角度 α をなし, その傾きの方向が x 軸方向であるなら, スクリーン上の波動関数の最大値の位置は $[-\alpha L, 0, L]$ となる。この事実を踏まえて, スクリーン上の半径 r を $r \equiv \alpha L$ とおいてみよう。これは, スクリーン上の半径を絶対的な長さでなく, 光の入射方向に対する波動関数が最大となる位置を単位にした量で表したことを意味する。このような置き換えによって, 波動関数は,

$$E \propto \frac{\lambda D}{2\alpha} J_1\!\left(\frac{\pi\alpha D}{\lambda}\right),$$

のように書き換えることができる。この数式は, z 軸方向に照射された光の波動関数 (電界) を表している。この関数をグラフに表示すると, 図3.8 (a) のように変動することがわかる。グラフの横軸はスクリーン中央からの距離に対応する正規化表現である。その正規化表現とは, z 軸と角度 α をなす方向に照射した光がスクリーン上で最大値をとる場所で正規化



(a) Electric field vs. normalized radius.



(b) Resolution of two adjoining points.

図 3.8: スクリーンに結像された接近する複数の点

している。 図 3.8 (a) によると, z 軸方向に照射された光の波動関数は, $\pi\alpha D/\lambda = 3.8317$ で最初の零点をもっている。別方向から入射した光があったとしても, その結像位置がその零点より内側であれば, 2 つの波動関数の重ね合わせは分離できない。つまり, 2 つの波動関数を分離するには, 波動関数の結像位置が互いの零点より外側であることが条件となる。したがって, $\pi\varDelta\alpha D/\lambda = 3.8317$ を関係で定義される $\varDelta\alpha$ は波導関数を分離する角度の最小値という意味で分解能と呼ばれる。すなわち, 分解能は $\varDelta\alpha = 1.2197\lambda/D$ となり, 開口の直径に反比例する。この数式は, レンズの分解能を与える数式として利用される。例として, 2 つの接近する光の分解を図 3.8 (b) に示す。分解能の 0.7 倍しか離れていない 2 つの光は分解できず, 1 つの光として結像されている。一方, 分解能の 1.4 倍だけ離れた光は分解できている。

3.4.2　円筒内の電磁波

半径 a の円筒の内部の電磁場を取り扱おう。円筒は直線的に無限に延びていると仮定する。その場合, 円筒の中心を z 軸とする円筒座標系で取り扱うのが便利である。電磁波の角周波数を ω としたとき, 電場 $\boldsymbol{E}$ はヘルムホルツの微分方程式:

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{E} = 0,$$

を満足する。ただし, k は波数であり, c を電波の伝播速度したとき, $k \equiv \omega/c$ である。上に記述したヘルムホルツの数式には, 円筒座標の仮定は取り込まれていない。

円筒内の電磁波は, 円筒の軸方向に電場成分をもたない TE 波と, 軸方向に磁場成分をもたない TM 波に分類される。ここでは, TM 波のみを取り扱うことにする。上記のヘルムホルツの微分方程式を円筒座標として書き換えると, 電場の z 軸成分は,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) E_z(r,\theta,z) = 0, \tag{3.27}$$

なる形で書くことができる。この部便方程式を特にあたり, 電場 E_z が,

$$E_z(r,\theta,z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_z^{(n)}(r) \cdot e^{-i\gamma z} e^{in\theta}, \tag{3.28}$$

であると仮定する。この仮定は次の物理的考察によるものである。第一に, 電磁波が円筒内を伝播するとした。伝播方向 (z 軸方向) の波数成分を γ とした。現時点で, γ は未知数である。第二に, z 軸周りの角度 θ について, 電場は周期関数になるはずである。なぜなら, θ が 2π 増加すると, 観測点は z 軸を 1 周し, もとの場所に戻るからである。そのため, θ に依存する成分はフーリエ級数の形になる。電場のうち, 第 n 成分 $E_z^{(n)}(r)$ について微分方程式を書き直すと,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + k_0^2 \right) E_z^{(n)}(r) = 0, \tag{3.29}$$

となる。ただし, $k_0^2 \equiv k^2 - \gamma^2$ とした。この微分方程式は, $q \equiv k_0 r$ なる正規化半径を用いると, 微分方程式は,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial q} + 1 - \frac{n^2}{q^2} \right) E_z^{(n)}(q) = 0, \tag{3.30}$$

のように書き換えられる。この微分方程式はベッセルの微分方程式である。したがって, 電場の第 n 成分は, ベッセル関数を用いて,

$$E_z^{(n)}(r) = A_n J_n(k_0 r),$$

と表現できる。ところで, 前に定義したように k_0 は, $k_0^2 = k^2 - \gamma^2$ であり, 未知数を含むパラメータである。ここで, 境界条件を用いて未知数を求めておこう。取り扱う境界条件は, 円筒の表面 ($r = a$) で, $E_z = 0$ となる条件である。この条件を満たすには, $r = a$ に対応するベッセル関数の変数 $k_0 a$ がベッセル関数の零点でなければならない。既にグラフなどで確認したようにベッセル関数の零点は無数に存在する。ここで, $J_n(q)$ の第 m 番目の零点の位置を q_{nm} としよう。零点 q_{nm} のいくつかは, 表 3.1[5]に示す値をとる。零点 q_{nm} を用いると, 未知数 γ に対する条件は,

$$k_0^2 a^2 = \left(k^2 - \gamma^2\right) a^2 = q_{nm}^2,$$

となる。この境界条件から, $k_0 = q_{nm}/a$ となる。つまり, k_0 は飛び飛びの値で無数に存在することを意味する。そのため, 電場の第 n 成分は, 無数に存在する解の重ね合わせとして,

$$E_z^{(n)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} J_n(q_{nm} r/a),$$

[5]J. B. Arfken, H. B. Weber, “特殊関数,” 権平健一郎, 神原武志, 小山直人 訳, 講談社, 基礎物理数学 Vol. 3, 第 4 版, p.52, 2001.

表 3.1: ベッセル関数 $J_n(q)$ の零点 q_{nm}

$n\backslash m$	1	2	3	4	5
0	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309
1	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
2	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960	17.9598
3	6.3802	9.7610	13.0152	16.2235	19.4094
4	7.5883	11.0647	14.3725	17.6160	20.8269
5	8.7715	12.3386	15.7002	18.9801	22.2178

と書くべきだろう。この解を (3.28) に代入すると, 円筒内部の電場の z 軸成分:

$$E_z(r,\theta,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} J_n(q_{nm} r/a),$$

が得られる。ただし, 展開係数 A_{nm} は電界の第 n 成分における, 第 m モードの振幅を意味する。伝送工学の分野では, この成分は TM_{nm} モードと呼ばれる。

ただし, ベッセルの微分方程式の解は, ベッセル関数だけでなく, 次節で導入するノイマン関数も含まれる。しかし, 円筒内部の問題ではノイマン関数が不要である。ノイマン関数が不要である理由は, ノイマン関数を導入した際に述べることにする。

3.5 ノイマン関数

前の節で, 2 階微分方程式であるベッセルの方程式には 2 つの独立な解が存在することを述べた。さらに, 整数次でなければ $J_\mu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ が独立であることも説明した。しかし, 次数が整数である場合, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ が成立するため, 次数の符号反転をしたベッセル関数が必ずしも独立とはならないことを示した。本節では, $J_\mu(x)$ と独立な関数として, ノイマン関数を紹介する。

3.5.1 ノイマン関数の定義

第 1 種ベッセル関数 $J_\nu(x)$ と独立な関数は, 様々な方法で生成が可能であるが, その中でも整数次の関数 $J_n(x)$ についても独立性が保証できる関数を生成しよう。その例として,

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\,\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}, \tag{3.31}$$

なる関数を考える。まず, 次数 ν が整数でなければ, 関数 $Y_\nu(x)$ は $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ の 1 次結合にすぎない[6]ため, $J_\nu(x)$ と独立である。一方, 次数が整数の場合, この定義だけでは分

[6] しかも, $J_\nu(x)$ に付随する係数がゼロにならない。

子と分母がともにゼロになるため, $Y_n(x)$ が不定値となる。それを回避するため, 整数次数 n の場合,

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(x)\,\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}, \tag{3.32}$$

のように, 極限値表現で関数を定義する。整数次を含め, 上のように定義される関数を**ノイマン関数**, または, 第2種ベッセル関数と呼ぶ。

整数次の定義式のように, 分子と分母がともにゼロとなる数式の極限値には, ロピタルの定理を利用するのがよい。ロピタルの定理を用いると, 整数次のノイマン関数は,

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}, \tag{3.33}$$

のように計算できる。ここで, $\partial/\partial\nu$ はベッセル関数の次数 ν を変数とみなし, ν について偏微分するための演算子である。この整数次の第2種ベッセル関数 $Y_n(x)$ が $J_n(x)$ と独立であることは後に示すことにしよう。

3.5.2 級数展開表現

本節ではノイマン関数を計算する手法として, 級数展開による表現を導出しよう。ただし, 非整数次の $Y_\nu(x)$ は (3.31) によって計算できるので, 整数次の $Y_n(x)$ のみを取り扱うことにする。

整数次のノイマン関数 $Y_n(x)$ を計算するには, 極限表現 (3.33) を用いる。その定義式の右辺を計算するため, $J_\nu(x)$ を次数 ν について偏微分すると,

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m\psi(m+\nu+1)}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} + J_\nu(x)\,\log\frac{x}{2}\right],$$

となる。なお, $\psi(x)$ は第1章で紹介したディガンマ関数と呼ばれる関数であり,

$$\psi(x) \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\Gamma(x),$$

のように定義される。つまり, ディガンマ関数はガンマ関数の対数微分である。ガンマ関数に関するワイエルシュトラスの無限乗積の表現:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x\,(x+1)\cdots(x+n)}{n^x\,n!},$$

より, ディガンマ関数 $\psi(x)$ は,

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right),$$

のように表される。特に, 変数 x が整数の場合には,

$$\psi(m+1) = \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{m+k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \gamma,$$

が成立する。ただし, γ はオイラーの定数 $(= 0.57721\ldots)$ である。整数変数のディガンマ関数に注意しながら, 偏微分 $\partial J_\nu/\partial\nu$ を $\nu \to n$ の極限をとると,

$$\left.\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m H_{m+n}}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} + J_n(x)\,\log\frac{x}{2}\right],$$

が得られる。ここで, H_n は調和級数:

$$H_n \equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

である。一方, 負の次数のベッセル関数 $J_{-\nu}$ の偏微分は, 正の実数と同様に計算でき,

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} = \sum_{m=0}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^m \psi(m-\nu+1)}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu} + J_{-\nu}(x)\,\log\frac{x}{2}\right],$$

となる。しかし, この偏微分について $\nu \to n$ の極限を評価するには多少の注意が必要である。注意すべき点は, 実際に計算してみるとわかる。極限をとると,

$$\left.\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right|_{\nu=n} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\psi(m-n+1)}{m!\,\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} + J_{-n}(x)\,\log\frac{x}{2}$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^{m+1}\psi(m-n+1)}{m!\,\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$
$$+ \sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\psi(m-n+1)}{m!\,\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} + (-1)^n J_n(x)\,\log\frac{x}{2}$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^{m+1}\psi(m-n+1)}{m!\,\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-n+1}\psi(m+1)}{(m+n)!\,\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} + (-1)^n J_n(x)\,\log\frac{x}{2},$$

のように計算できる。この数式の右辺では, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ なる関係を利用した。上で述べた注意すべき点とは, ガンマ関数の変数がゼロ以下の整数のときに発散することである。そのため, この数式変形では総和の範囲が, ガンマ関数の変数がゼロ以下の整数となる範囲 (右辺の第 1 項) と, それ以外の範囲 (右辺の第 2 項) に分割した。さらに計算を進めるにあたり, 負の値を変数とするディガンマ関数について考察しなければならない。

ここで, ガンマ関数の反射公式 $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\pi/\sin\pi x$ を考えよう。その式の両辺の対数をとると, $\log\Gamma(x)+\Gamma(1-x)=\log\pi-\log(\sin\pi x)$ が得られる。この関係式を微分すると,

$$\psi(1-x)=\psi(x)+\pi\cot\pi x,$$

が得られ, さらに両辺に $\Gamma(1-x)$ の逆数を乗じると,

$$\frac{\psi(1-x)}{\Gamma(1-x)}=\frac{\psi(x)\,\sin\pi x}{\pi}+\Gamma(x)\,\cos\pi x,$$

なる関係が得られる。特に, 変数 x が整数ならば,

$$\frac{\psi(1-n)}{\Gamma(1-n)}=(n-1)!\,(-1)^n,$$

が成立する。このディガンマ関数の性質に注意しながら数式変形すると,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}&=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^{m+1}\,(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}\\&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-n+1}H_m}{(m+n)!\,m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^n J_n(x)\,\log\frac{x}{2},\end{aligned}$$

が得られる。ここまでに計算した導関数を (3.33) に代入すると,

$$\begin{aligned}Y_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(\log\frac{x}{2}+\gamma\right)J_n(x)&-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,(H_m+H_{m+n})}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n},\end{aligned}\tag{3.34}$$

が得られる。これがノイマン関数の級数展開表現である。右辺第2項が有限項の総和であり, 第3項が任意の実数 x に対して収束する無限級数であるので, (3.34) は任意の実数 x に対して収束する。この級数展開を用いてノイマンを計算すると, 図3.9 に示す曲線を描く。図に示すように, ノイマン関数 $Y_n(x)$ は $x=0$ で発散する。しかし, x が大きくなると, 第1種ベッセル関数と同様に, 振動する関数である。

導出した級数展開 (3.34) から, x が小さいときの $Y_n(x)$ の振る舞いを調べてみよう。ベッセル関数の級数展開表現 (3.8) によると, x が小さいとき $J_n(x)\simeq(x/2)^n/n!$ が成立するので, $Y_n(x)$ の振る舞いは, $m=0$ の項のみを抽出すると,

$$\begin{aligned}Y_n(x)&\simeq\frac{2}{\pi}\left(\log\frac{x}{2}+\gamma\right)\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}-\frac{H_n}{\pi\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\\&\simeq\frac{2}{\pi\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\log\frac{x}{2}-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\qquad(n\neq0),\end{aligned}$$

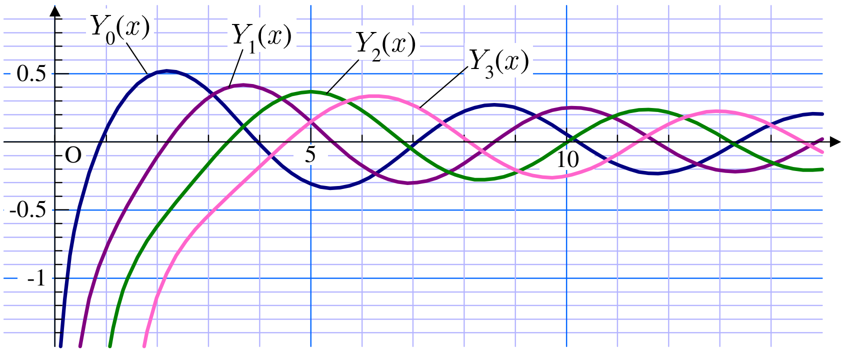


図 3.9: ノイマン関数

のように近似できる。この近似では, x が十分に小さければ $(x/2)^{-n}$ に比べ $(x/2)^n$ が無視できることを利用した。なお, この近似式は $n \neq 0$ のときに成立する。一方, $n = 0$ のとき, (3.34) の第 2 項がゼロであり, 第 3 項の総和における $m = 0$ の項がゼロであるので,

$$Y_0(x) \simeq \frac{2}{\pi}\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right),$$

なる近似式が得られる。この結果から, $x = 0$ の近傍で, $Y_n(x)$ は対数関数の振る舞いをすることがわかる。この振る舞いが, ベッセル関数 $J_n(x)$ とは異なるので, 任意の x について $Y_n(x)$ は $J_n(x)$ の定数倍で記述できない。したがって, $Y_n(x)$ は $J_n(x)$ と独立な関数である。

3.5.3 ベッセルの微分方程式の解

続いて, ノイマン関数 $Y_\nu(x)$ がベッセルの微分方程式の解であることを示そう。まず, 次数 ν が整数でなければ, $Y_\nu(x)$ が $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ の 1 次結合であるので明らかにベッセルの微分方程式の解である。

続いて, 整数次数 n のときについて, ノイマン関数がベッセル方程式の解になっていることを示そう。まず, ベッセル関数 $J_{\pm\nu}$ がベッセルの微分方程式の解であるので,

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 J_{\pm\nu}}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}J_{\pm\nu}}{\mathrm{d}x} + (x^2-\nu^2)J_{\pm\nu} = 0,$$

が成立する。この数式の両辺を ν で偏微分すると,

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu}\right) + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu}\right) + (x^2-\nu^2)\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu}\right) = 2\nu J_{\pm\nu},$$

が得られる。この数式は, 次数が ν と $-\nu$ の方程式をまとめて記述した方程式である。次数が ν の方程式から, 次数が $-\nu$ の方程式を $\cos\pi\nu$ 倍した数式を減算して得られる差に対して $\nu \to n$ の極限をとると,

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 Y_n}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}x} + (x^2-\nu^2)Y_n = 2\nu\left(J_n(x) - (-1)^n J_{-n}(x)\right),$$

なる関係が導出できる。この関係式の右辺は, 整数次のベッセル関数の関係によってゼロであることがわかる。したがって, 整数次のノイマン関数もベッセルの微分方程式の解である。

これまでの考察によって, ベッセルの微分方程式の一般解は, ベッセル関数とノイマン関数の 1 次結合:

$$f(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x),$$

であることが結論できる。展開係数 A と B は, 問題に付随する境界条件に対応して決定される。

第 3.4.2 で取り扱った円筒内部の電磁場について, ノイマン関数が不要であることを述べた。それは, 円筒中心 $(r = 0)$ におけるノイマン関数の振る舞いに起因する。既に確認したように, 整数次のノイマン関数はゼロ近傍の変数では発散する。つまり, 電磁場にノイマン関数の成分を含むと円筒の中央で場が発散するのである。物理の観測量として無限大を禁止する立場によって, ノイマン関数が円筒内部の電磁場の表現で不要だったのである。

3.5.4　ノイマン関数の漸化式

ノイマン関数もベッセル関数と同一の漸化式が成立する。本節ではその事実を示そう。つまり, 本節で証明する漸化式は,

$$Y_{\nu+1}(x) + Y_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x), \tag{3.35a}$$

$$Y_{\nu+1}(x) - Y_{\nu-1}(x) = 2Y'_\nu(x), \tag{3.35b}$$

である。この公式があれば, ベッセル関数と同様に, 低い次数の関数から高い次数の関数に変換できる。

まず, 次数 ν が整数でない場合を証明しよう。第 1 の漸化式について, ノイマン関数の定義式を用いると,

$$\begin{aligned}
&Y_{\nu+1}(x) + Y_{\nu-1}(x) \\
&\quad = \frac{(J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x)) \cos(\nu+1)\pi - (-1)^{n+1}(J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu+1}(x))}{\sin(\nu+1)\pi} \\
&\quad = \frac{2\nu}{x} \frac{-J_\nu(x)\cos\nu\pi + (-1)^n J_{-\nu}(x)}{-\sin\nu\pi} = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x),
\end{aligned}$$

のように証明できる。第 1 の漸化式も, 同様に, ノイマン関数の定義式を用いると,

$$Y_{\nu+1}(x) - Y_{\nu-1}(x)$$

$$
= \frac{(J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x))\cos(\nu+1)\pi - (-1)^{n+1}(J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x))}{\sin(\nu+1)\pi}
$$

$$
= \frac{-2J'_\nu(x)\cos\nu\pi + (-1)^n J'_{-\nu}(x)}{-\sin\nu\pi} = 2Y'_\nu(x),
$$

のようにただちに証明できる。この数式変形についても特に説明することはないだろう。

次数 ν が整数 $(\nu = n)$ の場合, 極限による定義式を用いる。次数が整数でない場合に比べ, 計算が多少, 複雑になるが同様の計算で証明できる。まず, 第 1 の漸化式は,

$$
\begin{aligned}
&Y_n(x) + Y_{-n}(x) \\
&\quad = \left[\frac{\partial J_{\nu+1}}{\partial\nu} - (-1)^{n+1}\frac{\partial J_{-\nu-1}}{\partial\nu} + \frac{\partial J_{\nu-1}}{\partial\nu} - (-1)^{n-1}\frac{\partial J_{-\nu+1}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} \\
&\quad = \left[\frac{\partial}{\partial\nu}(J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x)) - (-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}(J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu+1}(x))\right]_{\nu=n} \\
&\quad = \left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)\right) - (-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{2\nu}{x}J_{-\nu}(x)\right)\right]_{\nu=n} \\
&\quad = \left[\frac{2}{x}J_\nu(x) + \frac{2\nu}{x}\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{2}{x}J_{-\nu}(x) - (-1)^n\frac{2\nu}{x}\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} \\
&\quad = \frac{2n}{x}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left(J_\nu(x) - (-1)^n J_\nu(x)\right)\right]_{\nu=n} = \frac{2n}{x}Y_n(x),
\end{aligned}
$$

によって証明できる。第 2 の漸化式も同様に, 極限による定義を用いれば,

$$
\begin{aligned}
&Y_n(x) - Y_{-n}(x) \\
&\quad = \left[\frac{\partial J_{\nu+1}}{\partial\nu} - (-1)^{n+1}\frac{\partial J_{-\nu-1}}{\partial\nu} - \frac{\partial J_{\nu-1}}{\partial\nu} + (-1)^{n-1}\frac{\partial J_{-\nu+1}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} \\
&\quad = \left[\frac{\partial}{\partial\nu}(J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x)) + (-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}(J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x))\right]_{\nu=n} \\
&\quad = \left[\frac{\partial}{\partial\nu}2J'_\nu(x) - (-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}2J'_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n} \\
&\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} = 2Y'_n(x),
\end{aligned}
$$

のように証明できる。

さらに, ベッセル関数と同様, 負の整数次のノイマン関数は,

$$
Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x), \tag{3.36}
$$

なる関係で正の整数次のノイマン関数から計算できる。この関係式も, 極限による定義式を用いて,

$$Y_{-n}(x) = \left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^{-n}\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right]_{\nu=-n} = \left[-\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} + (-1)^{-n}\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}$$
$$= (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} = (-1)^n Y_n(x),$$

のように証明できる。

3.5.5　半奇整数次のノイマン関数

前に示したように, 半奇整数次のベッセル関数 $J_{1/2}(x)$ などは三角関数を用いて簡潔な形で記述できる。ノイマン関数も半奇整数次の関数は三角関数を用いて簡潔に記述できる。その事実は,

$$Yn + 1/2(x) = \frac{J_{n+1/2}(x)\ \cos(n+1/2)\pi - J_{-n-1/2}(x)}{\sin(n+1/2)\pi} = (-1)^{n-1} J_{-n-1/2}(x),$$

によって容易に検証できる。前に計算した半奇整数次のベッセル関数を用いて,

$$Y_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin x, \quad Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x,$$
$$Y_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x\right),$$

が得られる。これらの結果によると, $\sqrt{2/\pi x}$ を包絡線と考えると, ノイマン関数はベッセル関数より位相が $\pi/2$ だけ遅れた関数である。

3.6　ハンケル関数

ベッセル微分方程式の解として, $J_\nu(x)$ と $Y_\nu(x)$ が独立な組合せとして習慣的に用いられる。これに対して,

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x),$$
$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x),$$

を独立な組合せとすることがある。これらの関数は, それぞれ, 第 1 種ハンケル関数と第 2 種ハンケル関数と呼ばれる。これまでに議論してきた $J_\nu(x)$ と $Y_\nu(x)$ が実数変数に対して

関数値が実数であったが, ハンケル関数は実数変数に対して一般的に複素数となる。その例として, ゼロ次の第 1 種ハンケル関数 $H_0^{(1)}(x)$ をグラフに描くと図 3.10 に示す曲線を描く。実部と虚部は, それぞれ, ベッセル関数 $J_0(x)$ とノイマン関数 $Y_0(x)$ である。このグラフには, 参考のため, 包絡線も描いておいた。変数 x の増加とともに, 包絡線が小さくなっていくことが確認できる。後に示すが, この包絡線の大きさは漸近的に $x^{1/2}$ に反比例して減少する。また, このグラフを見ると, ベッセル関数が三角関数の余弦関数に, ノイマン関数が正弦関数に相当する対応があるようである。

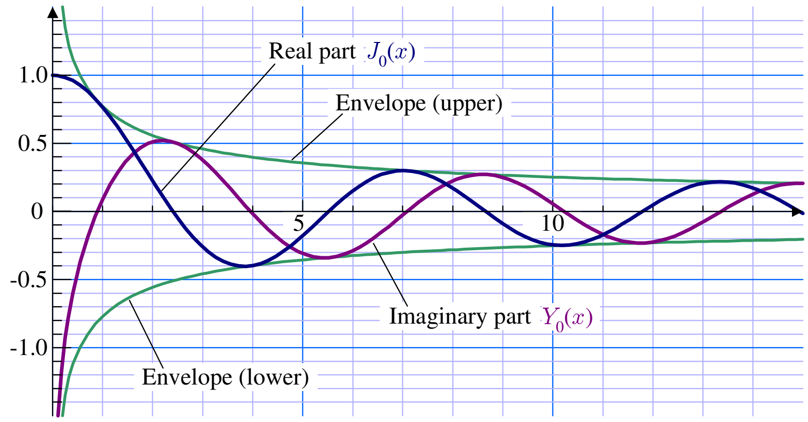


図 3.10: ゼロ次の第 1 種ハンケル関数 $H_0^{(1)}(x)$

物理学における波動解析の分野では, ベッセル関数の解として, むしろ, ハンケル関数を使用することが多い。その理由は, 第 1 種ハンケル関数が $-x$ 方向に伝播する波動, 第 2 種ハンケル関数が $+x$ 方向に伝播する波動に相当するからである。その性質はハンケル関数の漸近的な振る舞いを調べると明らかになる。

3.6.1 半奇整数次のハンケル関数

既に見たように, ベッセル関数とノイマン関数は半奇整数次では三角関数を用いて簡潔に厳密な関数表記が可能である。ハンケル関数は $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$ のように定義されているので, やはり, 半奇整数次には厳密な関数表記が可能である。その例をいくつか記述すると,

$$H_{-1/2}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{ix},$$

$$H_{1/2}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i(x-\pi/2)},$$

$$H_{3/2}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{e^{i(x-\pi/2)}}{x} - e^{ix} \right),$$

のようになる。

3.7　変形ベッセル関数

これまでに説明してきたベッセル関数とノイマン関数はベッセルの微分方程式の解である。ベッセルの微分方程式は, ヘルムホルツの波動方程式 $(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$ を, 円筒座標系で変数分離することによって得られる。ヘルムホルツの微分方程式に類似した微分方程式 $(\nabla^2 - k^2)\psi = 0$ は拡散方程式と呼ばれる。この拡散方程式を円筒座標系で変数分離するとベッセルの微分方程式に類似した形態の微分方程式が得られる。新たに得られた微分方程式は変形ベッセル微分方程式と呼ばれる。その方程式の解として, 変形ベッセル関数を導入する。

3.7.1　変形ベッセル関数

本節の冒頭で述べたように, 変形ベッセル微分方程式は拡散方程式 $(\nabla^2 - k^2)\psi = 0$ を円筒座標系で変数分離することによって得られる。その導出はベクトル解析の公式を用いればよいとして, 結果のみを書くと,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) f(x) = 0,$$

が得られる変形ベッセル微分方程式である。ベッセル微分方程式と同様に, この方程式も独立な解が 2 つあるはずである。そこで, 変形ベッセル関数の解を $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ と書くことにしよう。

変形ベッセル関数の解は, 変数を複素数に拡張すれば容易に見つけることができる。変数 x を iz とすればよいのだ。その置き換えによって変形ベッセル微分方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f(iz) = 0,$$

なるベッセル微分方程式に書き換えられる。この性質に基づき, 解の一方を $I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(x)$ のように定義しよう。すると, 変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ は,

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}, \tag{3.37}$$

のように級数展開できる。なお, 定義に用いた因数 $i^{-\nu}$ は, 実数の変数に対して関数が実数になるように設けられている。この級数展開は, 収束半径が無限大である。この級数に

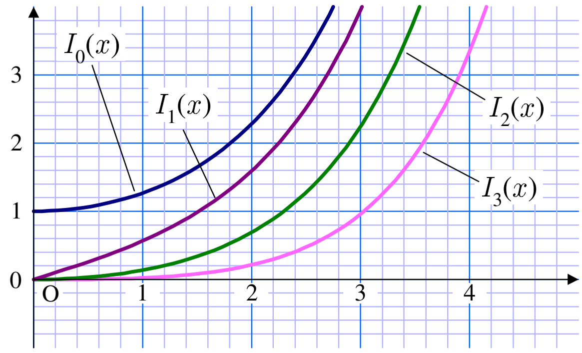


図 3.11: 第 1 種変形ベッセル関数

したがって計算すると, 第 1 種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ は図 3.11 に示す曲線を描く関数であることがわかる。 負の次数における関数 $I_{-\nu}(x)$ は,

$$I_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu},$$

となる。次数が整数でなければ $I_\nu(x)$ と $I_{-\nu}(x)$ が互いに独立であるのだが, 整数次数の場合, 互いに独立とはならない。その事実は,

$$\begin{aligned} I_{-n}(x) &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!\,\Gamma(m-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = I_n(x), \end{aligned}$$

によって証明される。この数式変形において, 第 1 行目から第 2 行目は次の 2 つの操作を施した。第一に, ゼロ以下の整数変数について, $1/\Gamma(x)$ がゼロであること。それによって, 第 1 行目の第 1 項がゼロになる。第二に, 添え字を $m \mapsto m+n$ のように置き換えた。その結果, $I_{-n}(x) = I_n(x)$ なる関係が得られた。

既に示したようにベッセル関数は漸化式 (3.15) と (3.16) を満足する。変形ベッセル関数も同様の漸化式を満足するので, その漸化式を導出しよう。まず, 漸化式 (3.15) について, 変数を ix とすると, 漸化式は,

$$J_{\nu-1}(ix) + J_{\nu+1}(ix) = \frac{2\nu}{ix} J_\nu,$$

と書くことができる。この数式の両辺に $i^{-\nu+1}$ を乗じると,

$$i^{-\nu+1} J_{\nu-1}(ix) + i^{-\nu+1} J_{\nu+1}(ix) = \frac{2\nu}{x} i^{-\nu} J_\nu,$$

と書くことができる。ここで, 変形ベッセル関数が $I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix)$ のように定義されていることに注意すると, 変形ベッセル関数の漸化式:

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \tag{3.38}$$

が得られる。一方, 漸化式 (3.16) について同様の数式変形を適用すると,

$$I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=2I_\nu'(x), \tag{3.39}$$

が得られる。これらの漸化式を繰り返し適用すると, 次数の低い関数から次数の高い変形ベッセル関数を求めることができるのである。さらに, 得られた 2 つの漸化式の和に x^ν を乗じると,

$$x^\nu I_{\nu-1}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\nu I_\nu(x), \tag{3.40}$$

が得られる。これはベッセル関数 $J_\nu(x)$ における公式と同一の形である。

変形ベッセル微分方程式も 2 つの独立な解をもつ方程式であり, 非整数次では $I_\nu(x)$ と $I_{-\nu}(x)$ が互いに独立な 2 つの解である。しかし, 整数次では既に示したように $I_n(x)=I_{-n}(x)$ が成立するので, 新たに独立な関数を定義したほうがよい。様々な文献では, $I_\nu(x)$ と独立な関数として,

$$K_\nu(x)\equiv\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\pi\nu}, \tag{3.41}$$

が定義される。ここで, $I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix)$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
K_\nu(x)&=\frac{\pi}{2}\frac{i^\nu J_{-\nu}(ix)-i^{-\nu}J_\nu(ix)}{\sin\pi\nu}=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\frac{i^{-2\nu+1}J_\nu(ix)-iJ_{-\nu}(ix)}{\sin\pi\nu}\\
&=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\frac{e^{i(-\pi\nu+\pi/2)}J_\nu(ix)-iJ_{-\nu}(ix)}{\sin\pi\nu}\\
&=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\frac{J_\nu(ix)\ \sin\pi\nu+iJ_\nu(ix)\cos\pi\nu-iJ_{-\nu}(ix)}{\sin\pi\nu}\\
&=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}\Big(J_\nu+iY_\nu(ix)\Big)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix),
\end{aligned}$$

のように変形できるので, 変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ は第一種ハンケル関数に対応する関数である。この関係式によって, 2 つの変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ と $K_\nu(x)$ は互いに独立な関数であることがわかる。

第 2 種変形ベッセル関数は非整数次であれば定義式 (3.41) で計算することができる。しかし, 整数次の場合, 分母と分子がともにゼロとなるのでその値が不定となる。そこで, ノイマン関数と同様, 整数次の第 2 種変形ベッセル関数は,

$$K_n(x)\equiv\lim_{n\to n}K_\nu(x),$$

のように極限を用いて定義する。この極限値はロピタルの定理を利用すれば計算でき,

$$K_n(x)=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial\nu}-\frac{\partial I_\nu}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}, \tag{3.42}$$

なる関係式が得られる。具体的な計算過程が $Y_n(x)$ を計算する過程とほぼ同じであるので省略し, 結果のみを書くと, 第 2 種変形ベッセル関数は,

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}\left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-m}\,(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m + H_{m+n}}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} - 2\left(\log\frac{x}{2}+\gamma\right) I_\nu(x)\right], \tag{3.43}$$

なる級数によって計算できる。なお, H_n は調和級数, すなわち, $1+1/2+\cdots+1/n$ である。また, γ はオイラー定数である。この級数によって計算すると, 図 3.12 のような急激に減少する関数形が得られる。 得られた級数展開から十分に小さな x に対する第 2 種変形ベッセル関数の振る舞いを取り出すと,

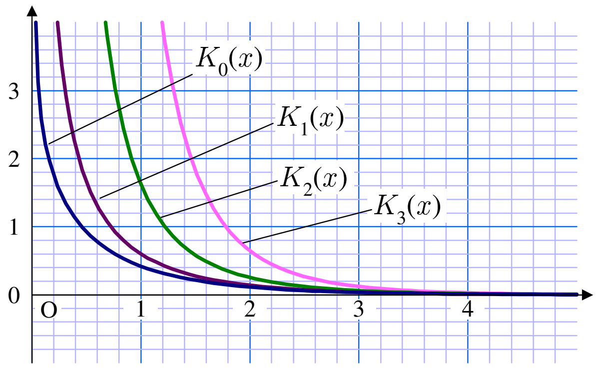


図 3.12: 第 2 種変形ベッセル関数

$$K_0(x) \simeq -\log\frac{x}{2} - \gamma, \qquad K_n(x) \simeq \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n},$$

が得られる。つまり, 変数 x が十分に小さい範囲では, ゼロ次の第 2 種変形ベッセル関数は対数関数のように振舞う。

3.7.2 第 1 種変形ベッセル関数の母関数

ベッセル関数と同様に, 第 1 種変形ベッセル関数も母関数を定義すると性質を調べる上で便利である。第 1 種変形ベッセル関数の母関数は, ベッセル関数の母関数に類似した関数:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)\,t^n = e^{(x/2)(t+1/t)}, \tag{3.44}$$

である。つまり, 第 1 種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ は, 関数 $e^{(x/2)(t+1/t)}$ をローラン展開したときの n 次の展開係数である。

第 1 種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ の母関数が (3.44) であることは, ベッセル関数 $J_n(x)$ の母関数が $e^{(x/2)(t-1/t)}$ であることを利用すれば証明できる。変数 x を ix に置き換えると,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(ix)\, t^n = e^{(ix/2)(t+1/t)}$$

が成立するが, この数式の変数を $t \equiv u/i$ とすると,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} J_n(ix)\, u^n = e^{(ix/2)(u-1/u)/i} = e^{(x/2)(u-1/u)},$$

のように計算できる。ここで, $I_n(x) \equiv i^{-n} J_n(x)$ であることに注意すると, (3.44) が導出できる。¶

ここで紹介した変形ベッセル関数の母関数を利用すると, 変形ベッセル関数に関する興味深い性質を得ることができる。その例として,

$$I_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n = e^x, \tag{3.45a}$$

$$I_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n = e^{-x}, \tag{3.45b}$$

$$I_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n} = 1, \tag{3.45c}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n-1} = 0, \tag{3.45d}$$

が挙げられる。第 1 の関係式は, 母関数表記において $t = 1$ を代入すれば得られる。その結果を得るにあたり, $I_{-n}(x) = I_n(x)$ の関係を利用した。第 2 の関係式は, 母関数表記において $t = -1$ を代入すれば得られる。第 3 の関係式と第 4 の関係式は $t = i$ を代入すれば得られる。母関数表現に $t = i$ を代入すると, $I_n(x)$ を展開係数とする級数は複素関数の形をしているが, 右辺は $e^0 = 1$ となる。つまり, その母関数表現において, 実部を取り出すと第 3 の関係式が, 虚部を取り出すと第 4 の関係式が得られる。

3.7.3　積分表示

変形ベッセル関数もベッセル関数と同様に積分表示を導くことができる。積分表示として, シュレーフリの積分表示とポアソンの積分表示をつくることができるのはベッセル関数と同様である。

シュレーフリの積分表示 変形ベッセル関数 $I_n(x)$ の母関数を利用すると, 整数次の変形ベッセル関数に関する積分表示が得られる。変形ベッセル関数の母関数は既に示したように,

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(x/2)(t+1/t)}t^{-n-1}\mathrm{d}t, \tag{3.46}$$

である。積分路 C は反時計回りに原点 $t=0$ を一周する経路である。この性質は被積分関数の -1 次の係数が $I_n(x)$ であることを利用している。

この性質は整数でない次数 ν に対しても成立させることができる。つまり, 関係式:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(x/2)(t+1/t)}t^{-\nu-1}\mathrm{d}t, \tag{3.47}$$

が満足できるように積分路 C を選ぶことができる。その積分路は始点と終点が負の実軸上の無限遠であり, 原点 $t=0$ を反時計回りに周回し, 負の実軸上の無限遠に戻る経路である。この積分路は, ベッセル関数 $J_\nu(x)$ を与えるシュレーフリ積分の経路 (図 3.5) と同一である。

第 1 種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ の積分表示が正しいことは, $J_\nu(x)$ の場合と同様に証明できる。積分表示 (3.47) を変形ベッセル微分方程式に代入すると,

$$\begin{aligned}
&x^2 I_\nu''(x) + xI_\nu' - (x^2+\nu^2)\,I_\nu(x)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{x^2}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 t^{-\nu-1} + \frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)t^{-\nu-1} - \nu^2 t^{\nu-1}\right] e^{(x/2)(t+1/t)}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{e^{(x/2)(t+1/t)}\,t^{-\nu}\left[\nu + \frac{x}{2}\left(\frac{x}{t}-\frac{1}{t}\right)\right]\right\}_{t=t_0}^{t_1},
\end{aligned}$$

のように計算できる。詳しい計算過程は省略したが, ベッセル関数 $J_\nu(x)$ に関する計算と同様である。また, t_0 と t_1 は積分路の始点と終点である。始点と終点をともに負の実軸上の無限遠にするとこの積分はゼロとなるので, 積分 (3.47) が変形ベッセル微分方程式を満足することが示される。なお, 始点と終点を負の実軸上の無限遠にするとは, 単純に $t_0, t_1 \to -\infty$ とするのではない。正しくは, $t_0 \equiv Re^{-\pi i}$, $t_1 \equiv Re^{\pi i}$ と定義し, $R \to \infty$ と設定するのである。具体的に積分路を設定して計算すると, $I_\nu(x)$ は,

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\cos\nu\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu\xi - x\cosh\xi}\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.48}$$

なる積分で計算できることが導かれる。なお, 右辺の第 1 項は原点を中心とする半径 1 の積分路での積分である。一方, 第 2 項は負の実軸を無限遠から -1 までたどり, -1 から負の無限遠に引き返す積分路で積分した結果である。この積分表示から,

$$I_{-\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\cos\nu\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{\nu\xi - x\cosh\xi}\,\mathrm{d}\xi,$$

であることが容易にわかるので, 第 2 種変形ベッセル関数の定義式を適用すると,

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh\xi}\cosh\nu\xi\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.49}$$

がただちに導かれる。

ポアソンの積分表示　変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ はポアソンの積分表示で表現することが可能である。ベッセル関数 $J_\nu(x)$ のポアソンの積分表示のように, $I_\nu(x)$ の級数展開から導出することができる。しかし, $J_\nu(x)$ のポアソンの積分表示に $I_\nu \equiv e^{-\pi i\nu/2}J_\nu(x)$ を代入することによって $I_\nu(x)$ のポアソンの積分表示を得ることができる。その処方箋にしたがうと,

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm x\cos\varphi}\sin^{2\nu}\varphi\,\mathrm{d}\varphi \tag{3.50a}$$

$$= \frac{1}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm ixt}\,(1-t^2)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t, \tag{3.50b}$$

なる結果が容易に得られる。なお, この関係式は $\nu > -1/2$ において成立する。

第 2 種変形ベッセル関数についても同様の積分表現を導出することができる。第 1 種変形ベッセル関数 $I_\nu(x)$ に比べ, 導出過程が長いため, 先に結果を示しておこう。第 2 種変形ベッセル関数の積分表現は,

$$K_\nu(x) = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t, \tag{3.51}$$

となる。この積分表現は第 1 種ベッセル関数の積分表現に類似しているが, 積分範囲が $[1,\infty]$ であることが第 1 種変形ベッセル関数と異なる。

積分表現 (3.51) を導出するため, 関数 $e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}$ を t について積分しよう。積分は t を複素数とみなし, 正の実軸上の無限遠から始まり, 原点を反時計回りに 1 回だけ周り, 正の実軸上の無限へ戻る経路 C に沿って実行する。なお, 積分路 C は $t = \pm 1$ も取り囲むように選択されている。その積分は,

$$\begin{aligned}\int_C e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t &= \int_C e^{-xt}\,t^{2\nu-1}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m\,\Gamma(\nu+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\int_C e^{-xt}\,t^{2\nu-2m-1}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(1/2-\nu+m)}{m!\,\Gamma(1/2-\nu)}\int_C e^{-xt}\,t^{2\nu-2m-1}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.52}$$

のように計算される。第 2 行目への数式変形は, $1-1/t^2$ のべき乗を二項定理によって展開することによって実行されている。第 3 行目への数式変形には, ガンマ関数の反射公式 $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \pi/\sin\pi x$ を利用した。

積分 (3.52) の実行を進めるにあたり, ガンマ関数のハンケル積分表示:

$$\varGamma(x) = -\frac{1}{2i\sin\pi x}\int_C e^{-t}\,(-t)^{x-1}\mathrm{d}t,$$

に注目しよう。この積分表示を利用すると, (3.52) に含まれる積分は,

$$\begin{aligned}\int_C e^{-xt}\,t^{2\nu-2m-1}\mathrm{d}t &= \int_C \frac{e^{-u}\,u^{2\nu-2m-1}}{x^{2\nu-2m}}\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2i\,(-1)^{2\nu-1}\sin 2\pi\nu}{x^{2\nu-2m}}\varGamma(2\nu-2m) = \frac{2\pi i\,(-1)^{2\nu}\,x^{2m-2\nu}}{\varGamma(1-2\nu+2m)},\end{aligned}$$

のように計算できる。ここでも, 右辺を得るためにガンマ関数の反射公式を用いた。この結果を (3.52) に代入すると,

$$\begin{aligned}\text{RHD of (3.52)} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varGamma(1/2-\nu+m)}{m!\,\varGamma(1/2-\nu)}\frac{2\pi i\,(-1)^{2\nu}\,x^{2m-2\nu}}{\varGamma(1-2\nu+2m)} \\ &= \frac{2\pi i\,e^{-2\pi i\nu}}{\varGamma(1/2-\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varGamma(1/2-\nu+k)}{m!\,\varGamma(1-2\nu+2m)}x^{2m-2\nu} \\ &= \frac{2\pi i\,e^{-2\pi i\nu}}{\varGamma(1/2-\nu)}\frac{\pi^{1/2}}{m!\,\varGamma(1-\nu+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-2\nu} \\ &= \frac{2\pi i\,e^{-2\pi i\nu}}{\varGamma(1/2-\nu)}\frac{2^{\nu}\pi^{1/2}}{x^{\nu}}I_{-\nu}(x),\end{aligned}$$

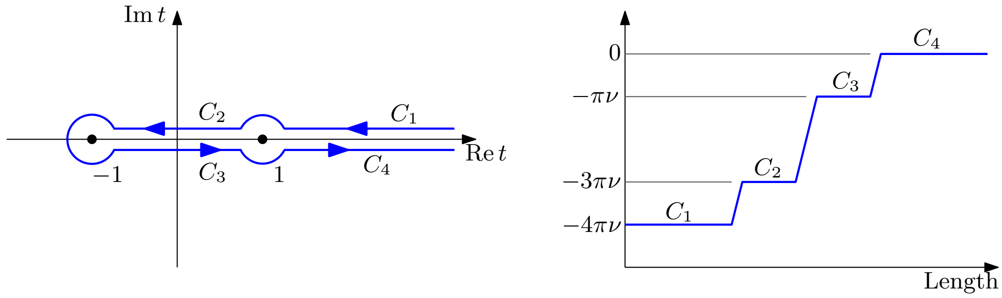
のように数式変形できる。なお, 第 3 行目への数式変形には, ガンマ関数の倍数公式:

$$\varGamma(x)\,\varGamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\,2^{1-2x}\,\varGamma(2x),$$

を利用した。さらに, 第 3 行目が変形ベッセル関数 $I_{-\nu}(x)$ の級数展開であることに注意すると, 第 4 行目が得られる。ここまでの結果を用いると,

$$I_{-\nu}(x) = \frac{e^{-2\pi i\nu}\,\varGamma(1/2-\nu)}{2\pi^{3/2}\,i}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_C e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t, \tag{3.53}$$

なる関係式が得られる。ここで, 積分路 C を図 3.13 (a) のようにとってみよう。まず, 正の軸軸上の無限円から実軸に沿って $t=1$ までたどり (経路 C_1), 無限小の半径で $t=1$ を半回転だけ回り, 実軸に沿って $t=-1$ までたどる (経路 C_2)。続いて, 無限小の半径で $t=-1$ を 1 回転だけ回り, 実軸に沿って $t=1$ 移動し (経路 C_3), その後, $t=1$ を半回転だけ回り, 実軸上を正の無限遠に向けて戻る (経路 C_4)。次数に関するパラメータが $\nu>1/2$ であれば, 被積分関数は $t=\pm1$ で正則であるから, 無限小の半径で周回する積分はゼロである。
そのため, 積分路のうち, 直線部分だけについて積分を計算すれば経路 C に沿った積分を計算できる。しかし, 被積分関数に $(t^2-1)^{\nu-1/2}$ なる因数が含まれるため, 積分計算には注



(a) Path of integral.　　(b) Argument of $(t^2-1)^{\nu-1/2}$.

図 3.13: 変形ベッセル関数の積分表現のための積分路と被積分関数の偏角

意が必要である。注意すべきことは, $(t^2-1)^{\nu-1/2}$ の偏角[7]である。その偏角は, 注目する因数が $(t-1)^{\nu-1/2}\,(t+1)^{\nu-1/2}$ と書けることから, $t=1$ 中心で見た偏角と $t=-1$ 中心で見た偏角との和になっている。例えば, 積分路の終端での偏角を基準に考えると, 積分路の始点での偏角は $-4\pi\nu$ となる。積分路に沿って偏角の変化をプロットすると図 3.13 (b) のように描かれる。偏角の変化に注意して積分を計算すると,

$$
\begin{aligned}
J_{-\nu}(x) &= \frac{e^{2\pi i\nu}\,\Gamma(1/2-\nu)}{2\pi^{3/2}i}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\Bigg[(1-e^{-4\pi i\nu})\int_1^\infty e^{xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad + i\,(e^{-\pi i\nu}+e^{-3\pi i\nu})\int_{-1}^{1} e^{-xt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t\Bigg] \\
&= \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{\pi^{3/2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\Bigg[\sin 2\pi\nu\int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad + \cos\pi\nu\int_{-1}^{1} e^{-xt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t\Bigg],
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

なる積分表現が得られる。一方, 既に得られた $I_\nu(x)$ の積分表現は,

$$
\begin{aligned}
I_\nu(x) &= \frac{1}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{1} e^{-xt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(1/2-\nu)\,\sin(\nu+1/2)\pi}{\pi^{3/2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{1} e^{-xt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(1/2-\nu)\,\cos\nu\pi}{\pi^{3/2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{1} e^{-xt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

のように変形できる。第 2 行目への変形はガンマ関数の反射公式を用いている。この数式変形によって,

$$
I_{-\nu}(x)-I_\nu(x) = \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{\pi^{3/2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sin 2\pi\nu\int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t,
$$

[7]複素数 $z\equiv re^{i\theta}$ について, θ を偏角と呼ぶ。整数でない指数 ν によるべき乗 z^ν に関して, 偏角を注意する必要である。なぜなら, z を原点を回る経路に沿って移動して元の場所に戻ったとき, $z=re^{i(\theta+2\pi)}=re^{i\theta}$ は同じ値に戻るが, $z^\nu=r^\nu e^{i\nu(\theta+2\pi)}$ は同じ値に戻らないからである。

が容易に得られる。この結果を第 2 種変形ベッセル関数の定義式に代入すると,

$$
\begin{aligned}
K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\pi\nu} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{2\Gamma(1/2-\nu)\,\cos\pi\nu}{\pi^{3/2}}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

が得られ, 積分表現 (3.51) が証明できた。なお, 第 3 行目への数式変形にはガンマ関数の反射公式を用いた。

3.7.4　変形ベッセル関数の応用

変形ベッセル関数の応用例として, **仲上-ライス分布**を取り扱おう。仲上-ライス分布とは, 雑音の中に正弦波信号が重畳したときに観測される信号レベル (雑音と正弦波の和) に対する確率密度を表す分布である。

まず, 取り扱う正弦波を $s(t)=Ae^{i\omega_0 t}$ としよう。ここで, A は振幅を表す定数, ω_0 は信号の角周波数である。その信号に重畳される雑音は, $n(t)=\nu(t)\,e^{i\omega_0 t}$ とする。ここで, なぜ雑音に因子 $e^{i\omega_0 t}$ が付加されているか疑問に思うかもしれない。実は, $\nu(t)$ が白色雑音であれば, $n(t)=\nu(t)\,e^{i\omega_0 t}$ も白色雑音である。白色雑音に因子 $e^{i\omega_0 t}$ を乗じても, 白色雑音が得られることは本項の最後で証明する。つまり, ここで想定する雑音 $n(t)$ は単に白色雑音であるが, 後の計算の便宜のため, 因子 $e^{i\omega_0 t}$ を乗じているのだ。

本項では信号を複素関数 $Ae^{i\omega_0 t}$ として取り扱うので, 雑音も複素関数としておく。つまり, $\nu(t)\equiv\xi(t)+i\,\eta(t)$ のように書ける。ここで, $\xi(t)$ と $\eta(t)$ はともに白色雑音を表す実関数である。また, これら雑音関数が様々な周波数の正弦波の和であると仮定すると, 中心極限定理によって, $\xi(t)$ と $\eta(t)$ は正規分布にしたがう乱数となる。それでは, $\xi(t)$ と $\eta(t)$ の標準偏差をともに σ としておこう。まず, 雑音 $n(t)$ の振幅 $|n(t)|=\sqrt{\xi(t)^2+\eta(t)^2}$ に対する確率密度を述べておく。振幅 $|n(t)|$ は, 平均値ゼロで標準偏差 σ の正規分布にしたがう 2 つの確率変数の自乗和の平方根なので, レイリー分布にしたがう。つまり, 振幅 $|n(t)|=v$ となる確率分布は,

$$
p_n(V)=\frac{v}{\sigma^2}e^{-v^2/2\sigma^2},
$$

となるのだ。その雑音に正弦波 $Ae^{i\omega_0 t}$ が重畳されたときにその確率分布がどうなるか, というのが本項で取り扱う問題である。

雑音の実部 $\xi(t)$ と虚部 $\eta(t)$ を極座標に変換し,

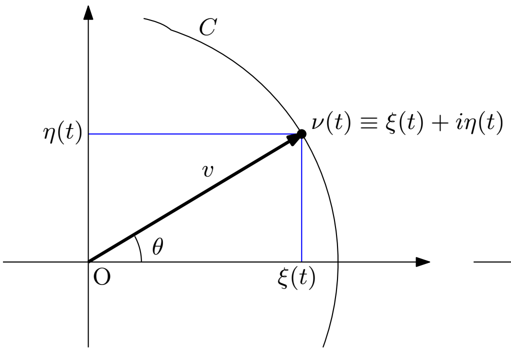
$$
\xi(t)\equiv v(t)\,\cos\theta,\qquad \eta(t)\equiv v(t)\,\sin\theta,
$$

と書くことにしよう。これは, $\nu(t) \equiv v(t)\,e^{i\theta(t)}$ と書くことと同じ意味である。図で表現するなら, 図 3.14 (a) を考えればよいだろう。ここで, 確率密度関数を v と θ の関数として書くと,

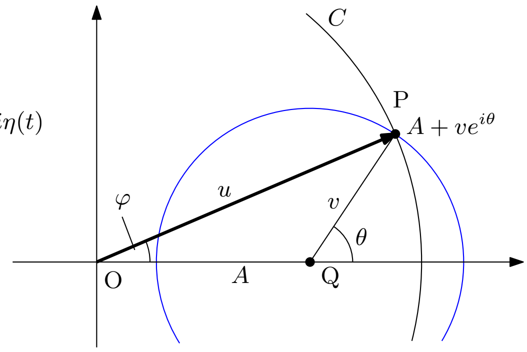
$$p_n(v,\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-v^2/2\sigma^2},$$

となるはずである。この確率密度は, 座標 $[v,\theta]$ における単位面積あたりの雑音の存在確率を表している。当然, この確率密度に線素 $r\,\mathrm{d}\theta$ を乗じて, 図 3.14 (a) の円弧 C に沿って周回積分すればレイリー分布の確率密度関数が得られる。

振幅 A の正弦波に雑音が重畳したとき, 図 3.14 (b) のような複素平面におけるベクトル加算を考えればよい。図の $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が信号ベクトル, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ が雑音である。観測される信号はそれらの和であるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ である。 信号と観測値の位相差を φ, 信号と雑音の位相差を θ と



(a) Complex noise function.



(b) Superposition of noise and signal.

図 3.14: 複素平面における雑音と信号の表示

すれば, 観測される信号は $ue^{i\varphi}$, 雑音は $ve^{i\theta}$ と表される。ただし, u と v は, それぞれ, 観測値と雑音の振幅である。そのとき, 観測値と雑音の間には,

$$v^2 = A^2 + u^2 - 2Au\cos\varphi, \qquad \tan\theta = \frac{u\sin\varphi}{A + u\cos\varphi},$$

なる関係がある。この $[v,\theta]$ と $[u,\varphi]$ の関係式を確率密度関数に代入すれば, 先ほどのレイリー分布の確率密度関数 $p(v,\theta)$ を, 信号が重畳したときの関数:

$$p(u,\varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 + u^2 - 2Au\cos\varphi}{2\sigma^2}\right),$$

が得られる。この確率密度関数に線素 $u\,\mathrm{d}\varphi$ を乗じて, 図 3.14 (b) の円弧 C に沿って周回積分すると, 振幅 A の正弦波と雑音が重畳したときの観測信号の振幅が u となる確率分布関数 $p(u)$ が得られる。実際に計算してみると,

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{u}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2+u^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{Au\cos\varphi}{\sigma^2}\right) \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{u}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2+u^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Au}{\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

が得られる。なお, この計算には変形ベッセル関数の積分表現 (3.48) を利用した。この確率密度関数にしたがう確率分布は仲上-ライス分布と呼ばれる。仲上ライス分布の確率密度関数は, 図 3.15 に示す曲線を描く。図には, いくつかの信号振幅を想定した確率密度をプロットしている。図に記載した S/N とは, 信号と雑音の振幅の自乗 (電力) の比率である。信号の振幅は既に述べたように A であり, 雑音の振幅は実部と虚部が, それぞれ, σ を標準偏差とするので $\sqrt{2}\,\sigma$ である。したがって, S/N は $A^2/2\sigma^2$ である。 まず, 雑音しか存在しない場合, 確率分布はレイリー分布にしたがう。信号が大きくなるとレイリー分布の形状から変化し, 確率分布のピークがグラフの右側に推移する。

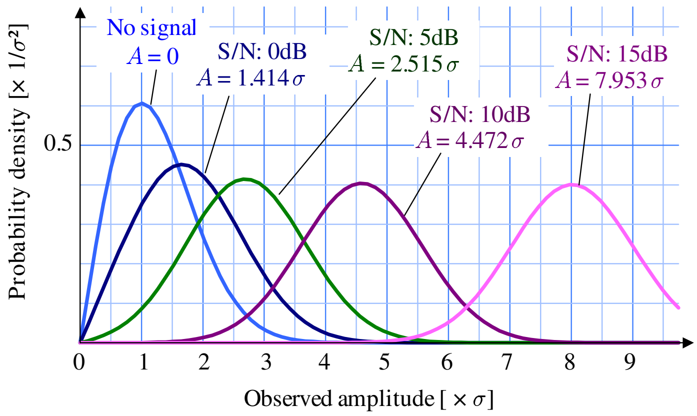


図 3.15: 仲上-ライス分布の確率密度関数

白色雑音に関する考察　仲上-ライス分布の導出において, 白色雑音 $\nu(t)$ に因子 $e^{i\omega_0 t}$ を乗じた結果も白色雑音であることを述べた。その事実を証明しよう。白色雑音 $\nu(t)$ は, フーリエ変換による表現:

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega,$$

が可能である。ここで, $N(\omega)$ は $\nu(t)$ のフーリエ変換である。フーリエ変換 $N(\omega)$ はあらゆる周波数にわたって一定の振幅をもつ白色雑音である。上の数式に因子 $e^{i\omega_0 t}$ を乗じると,

$$\begin{aligned} n(t) \equiv \nu(t)\, e^{i\omega_0 t} &= \frac{e^{i\omega_0 t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega)\, e^{i(\omega+\omega_0)t}\, \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega-\omega_0)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega, \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで, $\tilde{N}(\omega) \equiv N(\omega-\omega_0)$ とおいた。フーリエ変換 $\tilde{N}(\omega)$ があらゆる周波数にわたり一定の振幅をもつ白色雑音であるので, その逆フーリエ変換となる $n(t)$ も白色雑音である。したがって, 白色雑音 $\nu(t)$ に因子 $e^{i\omega_0 t}$ を乗じて得られる関数 $n(t) \equiv \nu(t)\, e^{i\omega_0 t}$ も白色雑音である。¶

3.8 漸近展開

物理学の分野では, 得られた微分方程式の解が大域的にどのような振る舞いをするかが興味の対象となることが多くある。その大域的な振る舞いとは, 無限遠での振る舞いである。無限遠での振る舞いを調べるには, 関数の漸近展開が得られると便利である。本節では, ベッセル関数の漸近的な性質を調べる。

3.8.1 第 2 種変形ベッセル関数

ベッセル関数の漸近展開を得るには, 第 2 種変形ベッセル関数から取り掛かるのがよい。漸近展開を特定する目的のため, $z \to \infty$ を考える。漸近展開への手がかりは既に導出したポアソンの積分表示:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx}(x^2-1)^{\nu-1/2}\,\mathrm{d}x,$$

である。この積分表示に対して, $x \equiv 1 + t/z$ とすると,

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z-t}\left(\frac{t^2}{z^2}+\frac{2t}{z}\right)^{\nu-1/2}\,\frac{\mathrm{d}t}{z} \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}\frac{e^{-z}}{2^\nu z^\nu}\int_0^\infty e^{-t}t^{2\nu-1}\left(1+\frac{2z}{t}\right)^{\nu-1/2}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

のように変形できる。さらに, 被積分関数の括弧内に関して $2t/z$ を共通因子として括弧の外に出すと,

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu+1/2)}\sum_{m=0}^\infty \frac{(2z)^{-m}}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\nu+m-1/2}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

のように数式変形できる。第 2 行目への数式変形は二項定理による級数展開を適用した。任意の次数 (整数でない次数) のべき乗では, 二項定理による級数が収束するには $|2t/z| < 1$ でなければならない。前提条件として $z \to \infty$ を仮定しているのだが, 積分変数 t が無限大までに及ぶので一方的に $|2t/z| < 1$ といえない。にも関わらず, この数式変形において平然と二項定理を利用したのは, 次の理由があるからだ。この数式の被積分関数に注目すると, 因数 e^{-t} が含まれていることがわかる。因数 e^{-t} は, いかなる t のべき多項式との積において, $t \to \infty$ の極限でゼロとなる。つまり, 被積分関数は $t \to \infty$ の極限でゼロとなるはずだ。言い換えると, 二項級数が収束しない条件では積分が確実にゼロとなる。したがって, 二項定理が収束しない条件は計算に含まなくても問題はない。

計算過程において二項定理を用いた正当性を説明したところで, 話を戻そう。上記の計算過程において, 右辺の積分はガンマ関数になるので,

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2z)^{-m}\,\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)},$$

と書いてもよい。分子のガンマ関数と分母のガンマ関数の変数の差が整数であるので, それらのガンマ関数の比は容易に得ることができ,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{\Gamma(\nu-m+1/2)}&=\left(\nu-m+\frac{1}{2}\right)\left(\nu-m+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu+m-\frac{3}{2}\right)\left(\nu+m-\frac{1}{2}\right)\\&=\left[\nu^2-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\nu^2-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[\nu^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\left[\nu^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{[4\nu^2-(2m-1)^2][4\nu^2-(2m-3)^2]\cdots[4\nu^2-3^2][4\nu^2-1^2]}{4^m},\end{aligned}$$

のように計算される。この比率を上の数式に代入すると,

$$\begin{aligned}K_\nu(z)=&\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\\&\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[4\nu^2-(2m-1)^2][4\nu^2-(2m-3)^2]\cdots[4\nu^2-3^2][4\nu^2-1^2]}{m!\,(8z)^m},\end{aligned}\tag{3.55}$$

が得られる。この数式をもう少しわかりやすく書くと,

$$K_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[1+\frac{(4\nu^2-1^2)}{1!\,8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}+\cdots\right],$$

なる数式となる。この数式が第 2 種変形ベッセル関数の漸近展開である。ブラケットの中が $z\to\infty$ の極限でゼロになるので, 無限遠では $K_\nu(z)\simeq\sqrt{\pi/2z}\,e^{-z}$ となる。これは, 図 3.12 に示したグラフのように z の増加にともなって $K_\nu(z)$ が急激に減少する振る舞いを説明している。ここで, 次のように多項式 $P_\nu(z)$ と $Q_\nu(z)$ を定義しよう。

$$P_\nu(z)=1-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2}\tag{3.56a}$$
$$+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)(4\nu^2-7^2)}{2!\,(8z)^4}-\cdots,$$

$$Q_\nu(z)=\frac{(4\nu^2-1^2)}{1!\,8z}-\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!\,(8z)^3}$$
$$+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)(4\nu^2-7^2)(4\nu^2-9^2)}{5!\,(8z)^5}-\cdots.\tag{3.56b}$$

このような多項式を用いると, 第 2 種変形ベッセル関数の漸近展開は,

$$K_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\Big[P_\nu(iz)+iQ_\nu(iz)\Big],\tag{3.57}$$

のように書くことができる。ここで, ブラケットの中が実数関数であるにも関わらず, なぜ $P_\nu(iz) + iQ_\nu(iz)$ のような回りくどい定義をしているのか疑問に思うかもしれない。その理由は, ベッセル関数とノイマン関数の漸近展開で明らかになる。

漸近展開の精度　概して漸近展開は無限に項を加算すると収束しない。漸近展開を用いて関数値を計算する場合, 発散しないように適切な項で計算を切り上げる必要がある。言い換えると, 漸近展開で計算できる精度には限界があるということである。ここでは, $K_0(z)$ の漸近展開の精度について考察しよう。その場合, ブラケット内の漸近多項式は,

$$P_0(iz) + iQ_0(iz) = 1 - \frac{1}{1!\,(8z)} + \frac{1\cdot 3^2}{2!\,(8z)^2} - \frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8z)^3} + \cdots$$

のように各項の符号が交互に入れ替わる級数となる。ここで,

$$a_n \equiv \frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{n!\,(8z)^2}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と定義するならば, 漸近多項式は $P_0(iz) + iQ_0(iz) = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$ と表記できる。さらに, 漸近多項式 $P_0(iz) + iQ(iz)$ を第 n 項で打ち切った値を S_n としよう。その場合, 漸近多項式の真値が S_{n-1} と S_n の間であると仮定すれば, 誤差は必ず a_n より小さいことになる。そこで, 誤差を評価するために a_n を調べてみよう。当然, a_n は変数 z に依存するので, いくつか代表的な z を与えて a_n を計算すると, a_n は図 3.16 のような曲線を描く。曲線は, 最小値を迎えた後, 上昇傾向を示す。その少々傾向は無限に続く。つまり, 漸近多項式の計算項を増加させると漸近多項式は発散するのである。 漸近多項式の誤差が a_n より

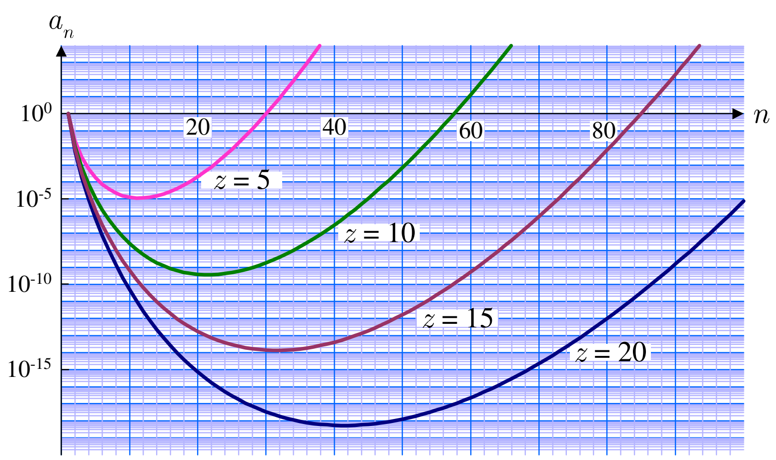


図 3.16: 漸近多項式 (for $K_0(z)$) の第 n 項の大きさ

小さいのだから, 漸近展開をするには, 計算項の数は a_n が最小値となるように選ぶことがよい。その最小値は z に依存する。例えば, $z = 5$ のとき最小値は 10^{-5} 程度, $z = 20$ で最小値は 10^{-18} となる。これは, $z = 5$ のとき漸近展開で, たかだか, 10 進 5 桁程度の精度しか確保できないことを意味する。一方, $z = 20$ では 10 進 18 桁の精度が達成できる。

3.8.2　その他のベッセル関数

第 2 種変形ベッセル関数 $K_\nu(z)$ の漸近展開を足掛かりに, 他のベッセル関数を漸近展開しよう。第 1 種ハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(z)$ から始めるのがよいだろう。なぜなら, $K_\nu(z)$ と $H_\nu^{(1)}(z)$ の間には,

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{\pi i(\nu+1)/2} H_\nu^{(1)}(iz)$$

の関係が成立するからである。この関係式を用いると,

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right] \cdot \Big[P_\nu(z) + iQ_\nu(z)\Big], \tag{3.58}$$

なる漸近展開が得られる。続いて, 実数変数を与えたとき, 第 1 種ハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(z)$ の複素共役が第 2 種ハンケル関数 $H_\nu^{(2)}(z)$ であることに注意すれば, 第 2 種ハンケル関数の漸近展開は,

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right] \cdot \Big[P_\nu(z) - iQ_\nu(z)\Big], \tag{3.59}$$

となることがわかる。無限遠において $P_\nu(z) + iQ_\nu(z) \simeq 1$ であるので, この漸近展開は, 無限遠でハンケル関数は振幅が $\sqrt{2/\pi z}$ の正弦波となることを意味している。さらに, これらの漸近展開によって, ハンケル関数が物理学において興味深い関数であることがわかる。波動解析において, e^{iz} が $-z$ 方向に伝播する波であり, e^{-iz} が $+z$ 方向に伝播する波を表すからだ。つまり, 電磁界解析のように波の伝播方向を取り扱う必要がある場合, $J_\nu(z)$ や $Y_\nu(z)$ を扱うよりも, ハンケル関数を扱ったほうが便利なのである。

ベッセル関数 $J_\nu(z)$ とノイマン関数 $Y_\nu(z)$ は実数変数 z に対して, それぞれ, 第 1 種ハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(z)$ の実部と虚部である。その事実に注目すると,

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[P_\nu(z)\cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) - Q_\nu(z)\sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right], \tag{3.60a}$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[P_\nu(z)\sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) + Q_\nu(z)\cos\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right], \tag{3.60b}$$

がただちに得られる。この漸化式を見ると, $K_\nu(z)$ の漸近展開で, ブラケット内の因数を $P_\nu(iz) + iQ(iz)$ のように定義していたか分かるだろう。多項式 $P(z)$ と $Q(z)$ はベッセル関数とノイマン関数を記述しやすい形で定義していたということである。

もう一つ, 第 1 種の変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ の漸近展開が残っている。その漸近展開を得るには, 関係式 $I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$ を利用すればよい。この関係式から,

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \Big[P_\nu(iz) + iQ_\nu(iz)\Big],$$

が導かれるが, $I_\nu(z)$ は, 変数 z が実数のとき実関数となるはずなので, この数式から虚数単位 i を消去したい。そこで, $R(z) \equiv P(iz) + iQ(iz)$ を計算すると,

$$R_\nu(z) = 1 - \frac{(4\nu^2-1^2)}{8z} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!\,(8z)^3} + \cdots,$$

が導かれる。これを用いて, 第 1 種の変形ベッセル関数の漸近展開:

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} R_\nu(z), \tag{3.61}$$

が得られる。ここで導入した多項式 $R_\nu(z)$ は $z \to \infty$ の極限で $R_\nu(z) \to 1$ となる。変数 z の絶対値が大きいとき, 漸近展開を用いるのが便利であるが, 前にも述べたように, $R_\nu(z)$ は加算する項を増やしすぎると発散するので注意が必要である。計算する $R_\nu(z)$ の打ち切り項数 (次数) を n とすると, おおむね, $n \simeq 2z$ あたりで誤差が最小になる。

3.9　解の独立性

既に述べたように, ベッセル微分方程式と変形ベッセル方程式は 2 階の微分方程式であるので, 2 つの独立な解が存在する。ベッセル方程式の場合, 独立な解の組合せは, ベッセル関数 $J_\nu(x)$ とノイマン関数 $Y_\nu(x)$ である。本節では, 一般の 2 階微分方程式に関する独立な解の定式化からはじめ, ベッセル方程式における独立な解を議論する。

3.9.1　一般的な 2 階微分方程式

一般的な 2 階微分方程式において微分方程式の独立な解を定式化しよう。一般的な 2 階の微分方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + q(z)\,u(z) = 0,$$

なる形で書くことができる。この方程式の解 $u(z)$ を,

$$u(z) = U(z)\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(z)\,\mathrm{d}z\right),$$

とおいてみる[8]。この $u(z)$ を上に記述した 2 階の微分方程式に代入すると,

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} + J(z)\,U(z) = 0, \tag{3.62}$$

[8] この置き換えは, 1 階微分方程式 $u' + p(z)\,u + q(z) = 0$ の階の公式が,

$$y(z) = U(z)\,\exp\left(-\int p(z)\,\mathrm{d}z\right),$$

とおいて, $U(z)$ を特定することによって得られることにならった。

が得られる。この方程式が 2 階の微分方程式の標準形と呼ばれる方程式である。ただし,

$$J(z) \equiv q(z) - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{4}p^2(z),$$

である。微分方程式 (3.62) の解が $U(z)$, $V(z)$ であった場合,

$$U''(z) + J(z)\,U(z) = 0, \qquad V''(z) + J(z)\,V(z) = 0,$$

が成立する。前者に $V(z)$ を乗じ, 後者に $U(z)$ を乗じて, 双方の積どうしの差をとると, $U''V - UV'' = 0$ が得られる。この関係式を積分すると,

$$V(z)\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} - U(z)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = c, \qquad (c \text{ is const.})$$

が得られる。この数式は**ロンスキー行列式**と呼ばれ, 関数の独立性を判定するために用いられる。このロンスキー行列式は, $U(z)$ と $V(z)$ が定数倍の関係にある場合, すなわち, 独立でない場合にゼロになる。実際に $c = 0$ とすると, ロンスキー行列式が $\mathrm{d}(U/V)/\mathrm{d}z = 0$ となることからその事実が実証できる。一方, $c \neq 0$ のとき, ロンスキー行列式を,

$$U^2(z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{V}{U} = c_0,$$

に変形する。この数式を積分すれば,

$$V(z) = c_0 U(z) \int^z U^{-2}(z)\,\mathrm{d}z + c_1 U(z),$$

が得られる。ここで, c_1 は積分定数である。この関係式から, さらに,

$$v(z) = c_0 u(z) \int^z u^{-1}(z)\,\exp\Bigl(-\int^z p(z)\,\mathrm{d}z\Bigr)\,\mathrm{d}z + c_1 u(z),$$

が得られる。つまり, 微分方程式の解の一方 $u(z)$ が与えられれば, もう一方の解 $v(z)$ がこの関係式によって導き出される。

3.9.2 スツルムの比較定理

微分方程式の解 $u(z)$ と $v(z)$ の零点の関係を示す定理としてスツルムの比較定理がある。その定理は, ベッセル微分方程式の解の独立性を議論するための材料となるので紹介しておこう。

実変数 x の関数 $u(x)$ と $v(z)$ が与えられたとしよう。これらの関数は, それぞれ, 2 階の微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + h(x)\,u(x) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} + g(x)\,v(x) = 0,$$

の解であるとする。また, $h(x)$ と $g(x)$ は連続関数であると仮定する。前者の方程式に $v(x)$ を, 後者に $u(x)$ を乗じ, 双方の積の差をとると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)-\Big(g(x)-h(x)\Big)\,uv=0,$$

が得られる。ここで, $u(x)$ の零点が $x=a,b$ であるとしよう。しかも, 区間 (a,b) で $u(x)\neq 0$, さらに, $u'(z)\neq 0$, $u'(b)\neq 0$ を仮定する。この条件のもとで, 上の等式を積分すると,

$$\left[v\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]_{x=a}^{b}=\int_a^b\Big(g(x)-h(x)\Big)\,uv\,\mathrm{d}x, \tag{3.63}$$

となる。さらに, 条件:

$$u(x)>0\quad(a<x<b),\qquad u'(a)>0,\qquad u'(b)<0,$$

を仮定しよう。この条件を設けても一般性を損なわないはずである。さらに, $a<x<b$ において, $g(x)\geq h(x)$ を仮定しよう。その条件を設けると, $v(x)$ は区間 (a,b) で少なくとも 1 回, 符号を変えなければならない。なぜならば, 符号を変えずに $v(x)>0$ であると仮定すると, (3.63) の左辺が,

$$\text{LHS of (3.63)}=v(b)\,u'(b)-v(a)\,u'(a)<0,$$

となり, 右辺が正またはゼロであることに矛盾する。逆に, $v(x)<0$ と仮定しても矛盾が生じる。この結果は, スツルム (Sturm) の定理が導出されたことを意味する。

定理 1 *常微分方程式の 1 つの解 $u(x)$ の隣り合う零点を a と b としたとき, 区間 (a,b) で $g(x)\geq h(x)$ が成立するとする。そのとき, 区間 (a,b) に, 他の解 $v(x)$ の零点が少なくとも一つ存在する。*

この定理の特殊な場合として $h(x)\equiv g(x)$ を考えると, $u(x)$ と $v(x)$ は同一の微分方程式の解である。その場合のスツルムの定理は, 2 階の微分方程式の一方の解が 2 つの零点をもてば, その零点の間に, もう一方の解の零点が存在することを意味する。

スツルムの定理は, 2 階常微分方程式の標準形だけでなく, 次の形の方程式に拡張可能である。関数 $u(x)$ と $v(x)$ が, それぞれ, 微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+h(x)\,u(x)=0,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)+g(x)\,v(x)=0,$$

の解とする。先ほどと同様に, 前者の方程式に $v(x)$ を, 後者に $u(x)$ を乗じて, 双方の積の差をとると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\,v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-p(x)\,u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)+\Big(h(x)-g(x)\Big)\,uv=0,$$

が得られる。関数 $u(x)$ の隣り合う零点を a と b とし, 関数 $p(x)$ が区間 (a,b) で符号を変えないと仮定すると, 関数 $v(x)$ は区間 (a,b) で符号を変えなければならない。つまり, $v(x)$ は区間 (a,b) に 1 個以上の零点をもつということである。

ベッセル関数はスツルムの定理にしたがう。なぜなら, ベッセル微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)=0,$$

なる形に書き換えることができるからである。スツルムの定理に関して, $p(x)\equiv x$, $g(x)\equiv h(x)\equiv x-\nu^2/x$ と考えれば, $u(x)$ と $v(x)$ はベッセル関数の 2 つの解に相当する。例えば, $u(x)$ がベッセル関数 J_ν, $v(x)$ がノイマン関数 $Y_\nu(x)$ に相当すと考えよう。スツルムの定理の $p(x)$ は, ベッセル方程式では x であるので, $(0,\infty)$ で常に同一符号である。ベッセル関数が無限遠で三角関数となるので, ベッセル関数 $J_\nu(x)$ は区間 $(0,\infty)$ で無限個の零点をもつ。スツルムの定理によると, ノイマン関数 Y_ν はベッセル関数の隣り合う零点の間に零点をもたなければならない。仮に, ベッセル関数の隣り合う零点の間に, ノイマン関数が複数の零点をもつならば, 再びスツルムの定理によってベッセル関数がさらにノイマン関数の隣り合う零点の間に零点をもつことが規定されるので, ベッセル関数の隣り合う零点の間にノイマン関数の零点が一つだけ存在する。言い換えると, 実軸上に, ベッセル関数の零点とノイマン関数の零点は交互に並んでいる。その事実は, 第 1 種ハンケル関数の実部と虚部を描いた図 3.10 に現れている。

3.9.3　ベッセル関数のロンスキー行列式

本節のここまでの展開によって, ベッセル関数のロンスキー行列式が計算できるようになった。スツルムの定理を導出する過程で, $p(x)\equiv x$ とすれば, 任意のベッセル関数の組み合せ $u(z)$ と $v(z)$ を与えれば,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(zu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-zv\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)=0,$$

が得られる。これを積分すると,

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=\frac{c}{z},$$

が得られる。ここで, c は積分定数である。この数式がベッセル関数のロンスキー行列式である。

ベッセル関数の独立性を検証するため, $u(z)\equiv J_\nu(z)$, $v(x)\equiv J_{-\nu}(z)$ を代入してみよう。すると, ロンスキー行列式は,

$$J_\nu(z)\,J'_{-\nu}(z)-J'_\nu(x)\,J_{-\nu}(z)=J_\nu(x)\,J_{-\nu-1}(z)-J_{-\nu}(z)\,J_{\nu+1}(z)$$

となる。この値は既に示したように, c/z に等しいはずである。ここで, 定数 c を決定する必要がある。定数 c は z に依存しないので, 計算しやすい z を上の数式に代入して直接, 計算するのがよいだろう。ゼロに近い値を z に代入すると, $J_\nu(z) \simeq (z/2)^\nu/\Gamma(\nu+1)$ のように近似できるので都合がよさそうである。その計算は容易に実行でき, 定数は $c = -2\sin\pi\nu/\pi$ のように特定できる。したがって, ロンスキー行列式は,

$$J_\nu(z)\, J'_{-\nu}(z) - J'_\nu(x)\, J_{-\nu}(z) = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z},$$

のようになる。このロンスキー行列式は, 次数 ν が整数の場合にのみゼロとなる。したがって, 非整数次であれば $J_\nu(x)$ と $J_\nu(x)$ が独立であることが検証された。整数次の場合, 前にも示したとおり独立ではない。そこで, ノイマン関数を導入してロンスキー行列式を計算しよう。ノイマン関数の定義 (3.31) を用いてロンスキー行列を計算すると,

$$J_\nu(z)\, Y'_{-\nu}(z) - J'_\nu(x)\, Y_{-\nu}(z) = \frac{J'_\nu(x)\, J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)\, J'_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} = \frac{2}{\pi z},$$

となる。このロンスキー行列は, 次数 ν には関係せず, ゼロになることはない。つまり, ノイマン関数はベッセル関数との独立性が約束されている。

変形ベッセル関数についても同様の手順でロンスキー行列式を計算できる。結果のみを書くと,

$$I_\nu(z)\, I'_{-\nu}(z) - I'_\nu(x)\, I_{-\nu}(z) = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z},$$
$$I_\nu(z)\, K'_\nu(z) - I'_\nu(x)\, K_\nu(z) = -\frac{1}{z},$$

となる。第 1 種変形ベッセル関数の $I_\nu(z)$ と $I_{-\nu}(z)$ は, 次数 ν が非整数であれば互いに独立である。しかし, 整数次にはロンスキー行列式がゼロになることから, 独立ではない。その代わり, $I_\nu(z)$ と $K_\nu(z)$ は次数に関わらず, 必ず, 互いに独立であることが保証される。

3.10　球ベッセル関数

ここまでに取り扱ったベッセル関数は, ヘルムホルツ方程式を円筒座標で変数分離して得られる微分方程式 (ベッセル微分方程式) の解である。ヘルムホルツ方程式を球面座標で変数分離すると, ベッセル微分方程式と類似の微分方程式が得られる。その方程式の解は, 球ベッセル関数と呼ばれる。

3.10.1　球面座標でのヘルムホルツ方程式

ベッセルの方程式がヘルムホルツの波動方程式 $(\nabla^2 + k^2)f = 0$ を円筒座標で変数分離して得られることは前に述べた。ヘルムホルツの波動関数は, 球座標で変数分離すると類

似した方程式:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]f(r)=0,$$

が得られる。ここで, r と k は, それぞれ, 原点からの半径と波動の波数に対応する物理量である。変数に関して $x\equiv kr$ のように置き換えると, この方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+\left[1-\frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right]f(x)=0, \tag{3.64}$$

のように変形される。なお, 変数分離の際に用いた整数 n を, ここで一般化のため実数 ν に置き換えておいた。この方程式は多少似ているかもしれないが, ベッセルの微分方程式ではない。しかし,

$$\hat{f}(x)\equiv f(x)\,x^{-1/2}, \tag{3.65}$$

のように定義された関数 $\hat{f}(x)$ を用いると, 微分方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{f}}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}x}+\left[1-\frac{(\nu+1/2)^2}{x^2}\right]\hat{f}(x)=0,$$

のようにベッセルの微分方程式に書き換えられる。微分方程式 (3.65) は 2 階の微分方程式なので独立な 2 つの解が存在するはずである。それらの解を j_ν と y_ν としよう。そのとき, 置き換え (3.65) によって微分方程式がベッセルの微分方程式に書き換えられるので, 方程式の解は,

$$j_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{\nu+1/2}(x),\qquad y_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,Y_{\nu+1/2}(x), \tag{3.66}$$

のように書くことができる[9]。これらの解はそれぞれ, 第 1 種と第 2 種の**球ベッセル関数**と呼ばれる。物理学において, 多くのケースで, 整数次の関数しか興味の対象ではない。整数次の球ベッセル関数は, 半奇整数次のベッセル関数に対応付けられている。半奇整数次のベッセル関数は三角関数を用いて厳密な関数式を記述できるので, 球ベッセル関数の場合, 物理学で興味深い整数次の関数を三角関数を用いて厳密に記述できる。例としてゼロ次の球ベッセル関数を書くと,

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x},\qquad y_0(x)=-\frac{\cos x}{x},$$

のように書くことができる。また, 円筒座標系の場合と同様に球ハンケル関数は, $h_\nu^{(1)}(x)\equiv j_\nu(x)+iy_\nu(x)$, $h_\nu^{(2)}(x)\equiv j_\nu(x)-iy_\nu(x)$ のように定義される。球ハンケル関数についても, ゼロ次の関数を例として記述すると,

$$h_0^{(1)}(x)=\frac{e^{i(x-\pi/2)}}{x},\qquad h_0^{(2)}(x)=\frac{e^{-i(x-\pi/2)}}{x},$$

[9]単に $j_\nu(x)=J_{\nu+1/2}(x)/\sqrt{x}$ と書いてもよかったのだが, 整数次の関数 $j_n(x)$ を記述する際の便宜上, $j_\nu(x)=\sqrt{\pi/2x}\,J_{\nu+1/2}(x)$ と定義する。

となる。これらゼロ次の関数は, 物理的には点波源による電磁場を表している。第 1 種の球ハンケル関数は無限遠から波源に向かって到来する波を表すので, 物理的に想定が不可能であるため, 物理的にほとんど興味を惹かない。第 2 種の球ハンケル関数は点波源から無限遠に向かって放射される電磁場を表すので, 物理的な興味が深い関数である。

3.10.2　漸化式と高次の球ベッセル関数

前項で説明したように, 球ベッセル関数 $j_n(x)$ はベッセル関数 $J_n(x)$ と簡単な数式で関係づけられる。そのことから, ベッセル関数 $J_n(x)$ と同様に, 球ベッセル関数 $j_n(x)$ が隣り合う次数どうしで漸化式が成立することが予想される。ベッセル関数の漸化式 (3.15) と円筒座標系と球面座標系でのベッセル関数の関係 (3.66) によって, 球ベッセル関数での漸化式:

$$j_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n-1}(x), \tag{3.67}$$

が導かれる。第 2 種の球面ベッセル関数についても同一の漸化式が成立する。球面ベッセル関数を, 次数が小さいものをいくつか挙げると,

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad y_0(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \qquad y_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x},$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3\cos x}{x^2}, \qquad y_2(x) = -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3\sin x}{x^2},$$

となる。漸化式 (3.67) を用いればさらに高い次数の球ベッセル関数を得ることができる。球面ベッセル関数 $j_3(x)$ を 3 次までプロットすると図 3.17 に示す曲線を描く。曲線は見かけ上, 図 3.2 に示す円筒座標系でのベッセル関数に類似しているが, 球面ベッセル関数の方が $|x|$ の上昇に伴い深く減衰する。

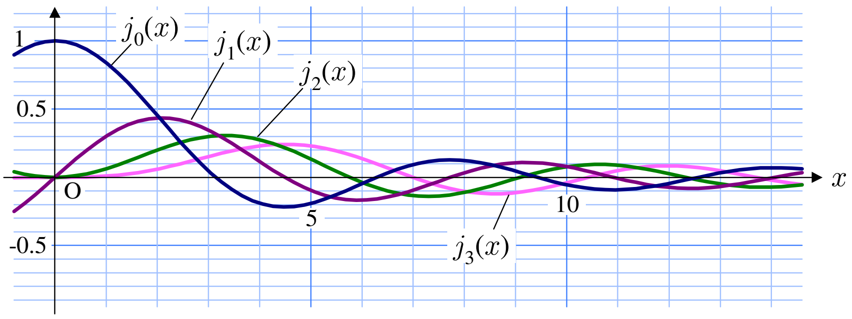


図 3.17: 球ベッセル関数

球ベッセル微分方程式のもう一方の解である球ノイマン関数は図 3.18 に示す曲線を描く。この関数も見かけは円筒座標系のノイマン関数に類似しているが, やはり, 球ノイマ

ン関数の方が $|x|$ の増加に伴う減衰が深い。 球ベッセル関数にしても, 球ノイマン関数に

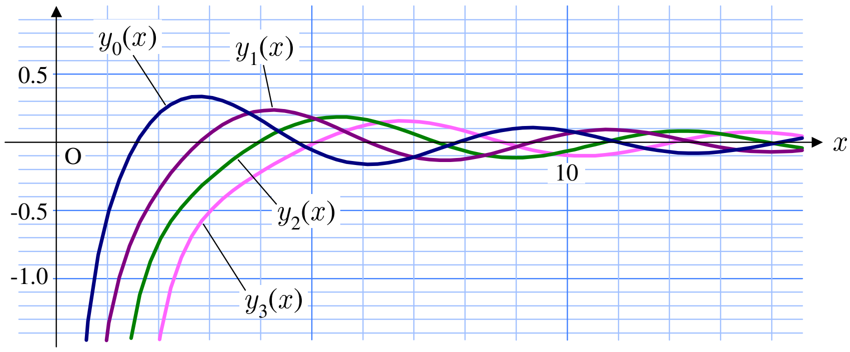


図 3.18: 球面ノイマン関数

しても, 円筒座標系の関数に比べて減衰が深いのは, 数式における x の依存性を見ればわかる。円筒座標系のベッセル関数は漸近形で $x^{-1/2}$ に比例するが, 球ベッセル関数は x^{-1} に比例する。そのべき指数の違いが減衰の深さに反映している。

　球ベッセル関数の漸化式は (3.67) だけではない。円筒座標系におけるベッセル関数の漸化式から始め, 数種類の漸化式の表現を得ることができる。上で示した (3.67) を含め, 改めて, 球ベッセル関数の漸化式を書くと,

$$nj_{n-1}(x)+(n+1)j_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{x}j_n(x), \tag{3.68a}$$

$$nj_{n-1}(x)-(n+1)j_{n+1}(x)=(2n+1)j_n'(x), \tag{3.68b}$$

$$j_{n-1}(x)=\frac{n-1}{x}j_{n+1}(x)+j_n'(x), \tag{3.68c}$$

が挙げられる。漸化式 (3.68a) は書き方を多少変えたが, (3.67) と同一の数式である。第 2 の漸化式 (3.68b) は, ベッセル関数の漸化式 (3.16) から導出できる。まず, (3.66) に示した $j_n(x)$ の定義式 (3.66) を x について微分すると,

$$j_n'(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(J_{n+1/2}'(x)-\frac{J_{n+1/2}(x)}{x}\right),$$

が得られる。ベッセル関数の漸化式 (3.16) に, $\nu=n+1/2$ を代入し, $J_{n+1/2}'(x)$ を消去すると漸化式は,

$$J_{n-1/2}(x)-J_{n+3/2}(x)=\frac{J_{n+1/2}(x)}{x}+2\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,j_n'(x),$$

のように変形される。両辺に $\sqrt{\pi/2x}$ を乗じて, 球ベッセル関数の定義に注意すると,

$$j_{n-1}(x)-j_{n+1}(x)=2j_n'(x)+\frac{j_n(x)}{x},$$

が得られる。この結果に $2n+1$ を乗じて漸化式 (3.68a) との差をとると, 漸化式 (3.68b) が得られる。この漸化式が, (3.16) に対応する球ベッセル関数の漸化式である。さらに, (3.68a) と (3.68b) を組み合わせて $j_{n+1}(x)$ の項を消去すると漸化式 (3.68c) が得られる。¶

漸化式 (3.68a) から (3.68c) は, $j_n(x)$ だけでなく $y_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$, $h_n^{(2)}(x)$ に関しても成立することを補足しておく。