第1章　ガンマ関数

本章で取り扱うガンマ関数は階乗 $n!$ を拡張した関数である。階乗は本来, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ のように, 自然数 n に対して定義された演算である。階乗の定義域を実数全体, さらに, 複素数全体に拡張するとどうなるか。まさに, 好奇心のなせる業であるが, 定義域を拡張するとガンマ関数という連続関数になることがわかる。本章では, ガンマ関数とそれに関連する諸関数について説明する。

1.1　ガンマ関数の定義

階乗 $n!$ は $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ という定義のように, もともと, 自然数 n に対して定義される演算である。階乗に対して, 18 世紀の数学者オイラーは定義域を実数全体, または, 複素数に拡張することに興味をもっていたようである。階乗の拡張としてオイラーが考案した関数は,

$$\mathit{\Gamma}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

なる積分によって定義される。この関数は**ガンマ関数**と呼ばれる。この積分を部分積分によって計算すると,

$$\mathit{\Gamma}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x} t^x e^{-t} \right]_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty t^x e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{\mathit{\Gamma}(x+1)}{x},$$

となるので, $\mathit{\Gamma}(x+1) = x\mathit{\Gamma}(x)$ なる関係が導かれる。一方, $x = 1$ の場合においてガンマ関数を計算すると,

$$\mathit{\Gamma}(1) = \int_0^\infty e^{-t} \mathrm{d}t = 1,$$

である。したがって, ガンマ関数の変数が自然数の場合,

$$\mathit{\Gamma}(n+1) = n\mathit{\Gamma}(n) = n(n-1)\,\mathit{\Gamma}(n-1) = \cdots = n!\,\mathit{\Gamma}(1) = n!$$

となり, ガンマ関数が階乗と結び付けられることがわかった。しかも, この積分表現は $x > 0$ について有限の値に収束するため, ガンマ関数を階乗と同一視すれば, 階乗の定義域は正の実数全体に拡張されたことになる。

ガンマ関数が正の整数変数について階乗と一致することは上に示したとおりであるが，任意の正の実数変数について収束することを示しておく必要がある。任意の正の実数について積分の収束を示すには，

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t,$$

と書いて，右辺の各項を評価すればよい。右辺の第 2 項は，

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \leq \int_1^\infty t^{\lceil x\rceil -1}e^{-t}\mathrm{d}t < \int_0^\infty t^{\lceil x\rceil -1}e^{-t}\mathrm{d}t = (\lceil x\rceil - 1)!,$$

であることから収束することがわかる。ただし，$\lceil x\rceil$ は x より大きいか等しい整数のうちの最小値を与えるものとする。右辺の第 1 項に関して，

$$\frac{1}{e}\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t < \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t < \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t,$$

なる不等式が成立する。この不等式の左辺と右辺を計算すると，

$$\frac{1}{e\,x} < \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t < \frac{1}{x},$$

となるため，$x > 0$ の条件で収束する。したがって，ガンマ関数を定義する積分は x が正の実数であれば収束することになる。つまり，ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は，自然数でしか定義できなかった階乗 $n!$ を正の実数すべてに拡張した関数である。特に，$\Gamma(n+1) = n!$ の関係が成立する。

1.2　ベータ関数

ガンマ関数の議論において，補助関数となる**ベータ関数**を定義しておくと便利なことが多い。ベータ関数は 2 つの変数をもつ関数であり，

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t,$$

によって定義される。ベータ関数がガンマ関数の議論においてしばしば使用されるのは，ガンマ関数と密接な関係があるからである。その例として，$\Gamma(x)\,\Gamma(y)$ を計算してみると，

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\,\Gamma(y) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \cdot \int_0^\infty u^{y-1}e^{-u}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty\int_0^t (t-u)^{x-1}u^{y-1}e^{-t}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty\int_0^t \left(1-\frac{u}{t}\right)^{x-1}\left(\frac{u}{t}\right)^{y-1} t^{x+y-2}e^{-t}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty\int_0^1 (1-s)^{x-1}s^{y-1}t^{x+y-1}e^{-t}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= B(x,y)\int_0^\infty t^{x+y-1}e^{-t}\mathrm{d}t = B(x,y)\,\Gamma(x+y),
\end{aligned}$$

が得られる。まず, 第 2 行目への変形は, $t+u \mapsto t$ の変数変換によって積分の走査方向を図 1.1 のように変換することによる。第 4 行目への変形は, $s = u/t$ なる変数変換による。この結果より, ベータ関数は

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{1.2}$$

によってガンマ関数と結び付けられている。

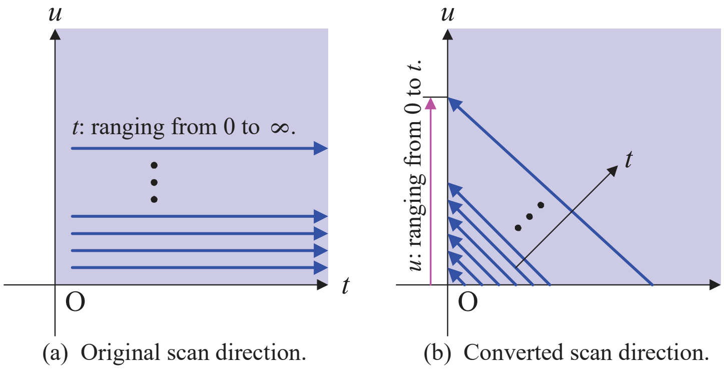

図 1.1: 積分変数の走査方向の変換

ベータ関数の定義式に対して, 変数変換 $t = \sin^2\theta$ を適用すると, その定義式は,

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\,\cos^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{1.3}$$

のような面白い形で表現できる。特に, $x = y = 1/2$ とすると, この積分は,

$$B(1/2,1/2) = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta = \pi,$$

となる。ここで, $\Gamma(1) = 1$ に注意して (1.2) を用いると, ただちに $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ が得られる。さらに, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ に注意すると,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \quad \ldots$$

が得られる。これを一般化すれば, 半奇整数の変数に対して, ガンマ関数が,

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

となることが導かれる。これが, 自然数以外のガンマ関数の例である。変数を半奇整数にしただけで円周率の平方根が登場するのは予想外かもしれない。

1.3　無限乗積による表現

ガンマ関数の積分表示に関して, e^{-t} を $(1-t/n)^n$ で置き換えて[1]みよう。ここで, n は自然数とする。また, 積分表示の積分範囲 $[0,\infty)$ を $[0,n)$ で置き換えよう。そのような置き換えで定義した関数を $\mathit{\Gamma}_n(x)$ と書くことにすると, その関数は,

$$\mathit{\Gamma}_n(x)=\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t,$$

のように書くことができる。上に説明した置き換えゆえに, $\mathit{\Gamma}_n(x)$ は $n\to\infty$ の極限でガンマ関数 $\mathit{\Gamma}(x)$ に収束するはずである。ここで, 変数変換 $s=t/n$ を適用し, $\mathit{\Gamma}_n(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
\mathit{\Gamma}_n(x)&=\int_0^1 n^x t^{x-1}(1-s)^n \mathrm{d}s=n^x\, B(x,n+1)\\
&=n^x\frac{\mathit{\Gamma}(x)\cdot n!}{\mathit{\Gamma}(x+n+1)}=n^x\frac{\mathit{\Gamma}(x)\cdot n!}{\mathit{\Gamma}(x)\cdot x\,(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\\
&=\frac{n^x\,n!}{x\,(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},
\end{aligned}$$

が得られる。この数式変形の第 1 行目でベータ関数の定義式が登場しているため, いったんベータ関数で数式を記述する。ベータ関数がガンマ関数を用いて記述できることを利用し, 第 2 行目以降の数式変形を実行している。上で述べたように, $\mathit{\Gamma}_n(x)$ は $n\to\infty$ の極限で $\mathit{\Gamma}(x)$ に収束するので,

$$\mathit{\Gamma}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x\,n!}{x\,(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

なる関係が成立するはずである。この関係式はオイラーの無限乗積の公式と呼ばれる。

オイラーの無限乗積の公式をもう少し, 変形して見通しをよくしてみよう。上に記述した数式は不定値である n が書かれているが, その n が現れないような数式への変形に試みる。そのような形になるように数式変形すると,

$$\begin{aligned}
\mathit{\Gamma}(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x\,n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\\
&=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}n^x\left(1+\frac{x}{1}\right)^{-1}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\\
&=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{x}{1}\right)^{-1}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\\
&=\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

[1] この置き換えは, $n\to\infty$ の極限で $(1-t/n)^n\to e^{-t}$ となる事実に基づいている。

が得られる。上の式と同じ式なので, この数式もオイラーの無限乗積の公式である。再び不定値 n を用いるが, この数式を,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{x} \frac{k}{k+x},$$

のように書き換えてガンマ関数の性質を調べてみよう。まず, この数式を用いて $\Gamma(x+1)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{x+1} \frac{k}{k+x+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{x+1} \frac{k}{k+1}\frac{k+1}{k+x+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{x} \cdot \prod_{p=2}^{n+1} \frac{p}{p+x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{x} \cdot \prod_{p=1}^{n} \frac{p}{p+x} \cdot (x+1)\frac{n+1}{n+x+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{x} \frac{k}{k+x} = x\,\Gamma(x),
\end{aligned}$$

のように, ガンマ関数としての性質をもつことがわかる。この無限乗積の表示によると, 変数 x がゼロ, または, 負の整数のとき分母がゼロとなる。しかし, x がそれ以外の実数のとき無限乗積が収束するので, この公式によってガンマ関数の定義域は実数全体に拡張されたことになる。例えば, 既に示した $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を基点として, $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(-3/2) = 4\sqrt{\pi}/3$ のように, 負のガンマ関数を特定できる。変数が負である場合を含め, ガンマ関数をグラフに描くと図 1.2 のようになる。なお, このグラフを描くには, 後の節で説明するスターリングの公式を利用した。

分母がゼロとなる負の整数ガンマ関数について考察しよう。負の整数はガンマ関数の 1 位の極である。その極の位数が 1 であることは無限乗積の公式から明らかである。それでは, 1 位の極 $x = -s$ における留数を計算してみよう。ガンマ関数の極が 1 位であることから,

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{x=-s} \Gamma(x) = \lim_{x\to s} (x+s)\,\Gamma(x) \\
&\quad = \lim_{x\to -s} \lim_{n\to\infty} \frac{x+s}{x} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{x} \cdot \prod_{p=1}^{s-1} \frac{k}{k+x} \cdot \frac{s}{s+x} \cdot \prod_{p=s+1}^{n} \frac{k}{k+x} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^s}{(n+1)^s} \frac{(s+1)(s+2)\cdots(n-1)\,n}{1\cdot 2\cdots(n-s-1)(n-s)}
\end{aligned}$$

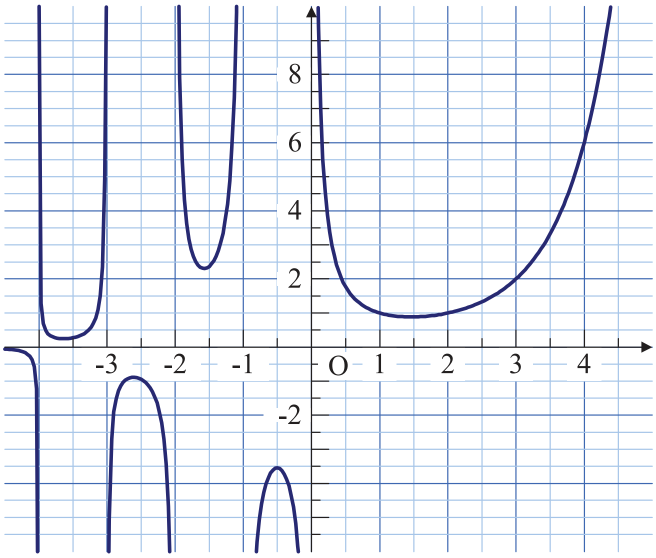

図 1.2: ガンマ関数

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^s}{(n+1)^s} \frac{(n-s+1)(n-s+2)\cdots(n-1)\,n}{s!} \\
&= \frac{(-1)^s}{s!} \lim_{n\to\infty} \frac{n-s+1}{n} \frac{n-s+2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n}{n} = \frac{(-1)^s}{s!},
\end{aligned}
$$

のように留数が計算できる。この導出は $x=0$ を含んでいない。しかし, 無限乗積の公式から $x=0$ における留数が 1 だとわかる。この事実は, $x=-s$ における留数 $(-1)^s/s!$ について, $s=0$ としても矛盾しない。よって, ガンマ関数の極における留数は,

$$
\operatorname*{Res}_{z=-s} \Gamma(z) = \frac{(-1)^s}{s!}, \qquad (s=0,1,2,\ldots)
$$

と書くことができる。

ここまでの考察結果をまとめると, 無限乗積の公式:

$$
\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^x \left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}, \tag{1.4}
$$

によってガンマ関数の定義域は実数全体に拡張できた。ただし, ガンマ関数はゼロ, または, 負の整数を 1 位の極とする。例えば, $x=-s$ における留数は $(-1)^s/s!$ で与えられる。

極をもつ表現を避けるため, ワイエルシュトラス (Weierstrass) はガンマ関数の逆数に対して無限乗積の公式を提案した。その公式は, オイラーの無限乗積の逆数を計算すれば得られるので,

$$
\frac{1}{\Gamma(x)} = x \lim_{n\to\infty} n^{-x} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right) = x \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x\log n}
$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k} \cdot e^{x(1+1/2+1/3+\cdots+1/n-\log n)}$$

$$= x\, e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k},$$

となる。ここで, γ はオイラー定数と呼ばれる数値であり,

$$\gamma \equiv \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n = 0.57721\,5665\cdots$$

である。ガンマ関数の逆数であるので, 当然, $1/\Gamma(x)$ は $x=0,-1,-2,\ldots$ を 1 位の零点としている。これはワイエルストラスの無限乗積を見ても確認できる。

ワイエルシュトラスの無限乗積より興味深い性質が導かれる。

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(-x)} = -x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = -\frac{x\,\sin\pi x}{\pi}.$$

この式の右辺を得るには, 正弦関数のオイラーの無限乗積:

$$\sin\pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right),$$

を用いた。さらに, $\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x)$ であるので,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \tag{1.5}$$

なる関係式が得られる。この公式はオイラーの反射公式と呼ばれる。得られた関係式に $x=1/2$ を代入すると, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ が得られる。この結果は, ベータ関数を用いて導いた結果と一致する。

二項定理への応用　ガンマ関数の定義域を実数全体に広げたことの応用として, 二項定理における多項式の展開係数にガンマ関数を応用しよう。二項定理は, 整数 n が与えられたとき,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}x^k,$$

が成立するという記述である。ここで, 指数を整数 n の代わりに実数 ν とした場合, 階乗の代わりにガンマ関数を用いて,

$$(1+x)^\nu = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\,\Gamma(\nu-k+1)}x^k, \tag{1.6}$$

と書けることを示そう。まず, $(1+x)^\nu$ はマクローリン級数展開すると,

$$(1+x)^\nu = 1+\nu x+\frac{\nu\,(\nu-1)}{2!}x^2+\frac{\nu\,(\nu-1)(\nu-2)}{3!}x^3\cdots$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu\,(nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-k+1)}{k!}x^k,$$

のように表される。この数式の分子と分母に $\Gamma(\nu-k+1)$ を乗じると,

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\nu} &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu\,(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)\cdot\Gamma(\nu-k+1)}{k!\,\Gamma(\nu-k+1)}x^k,\\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\,\Gamma(\nu-k+1)}x^k,
\end{aligned}
$$

のように数式変形されるので, 非整数 ν を与えた場合の二項定理 (1.6) が得られる。さらに, (1.6) は整数次の場合も包含した公式になっている。それを示すには, 次数を ν の代わりに n として, (1.6) を,

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+1)}{k!\,\Gamma(n-k+1)}x^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{k!\,\Gamma(n-k+1)}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+1)}{k!\,\Gamma(n-k+1)}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{(n+k+1)!\,\Gamma(-k)}x^{n+k+1},
\end{aligned}
$$

のように変形すればよい。右辺の第 2 項は負の整数変数によるガンマ関数が含まれている。ワイエルシュトラスの無限乗積によると, 負の整数変数によるガンマ関数の逆数はゼロであるので, この数式の右辺の第 2 項はゼロとなる。したがって, (1.6) は整数次の場合でも正しい関係式を表現している。さらに, 数値計算の目的では役に立たないが, (1.6) は負の整数次についても関係式が成立する。実際に, $\nu=-n$ として (1.6) を計算すると,

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-n+1)}{k!\,\Gamma(-n-k+1)}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(n+k)}{k!\,\Gamma(n)}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!}x^k,
\end{aligned}
$$

が成立することからその正当性が示せる。ただし, 第 1 行目での数式変形には, ガンマ関数の反射公式 $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\pi/\sin\pi x$ を用いた。

1.4　ディガンマ関数

本節では, ディガンマ関数と呼ばれる関数を紹介しよう。ディガンマ関数は, ガンマ関数の対数微分であり, 第 3 章で紹介するベッセル関数にも現れる。

ガンマ関数の対数を得るには, ワイエルシュトラスの無限乗積を利用するのが便利である。ワイエルシュトラスの無限乗積の対数をとると,

$$
\log\Gamma(x)=-\log x-\gamma x-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right],
$$

となる。この式の両辺を微分すると,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right),$$

となる。この数式は, $\log \Gamma(x)$ の導関数であり, **ディガンマ関数**と呼ばれる。つまり, ディガンマ関数は,

$$\psi(x) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log \Gamma(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right), \tag{1.7}$$

のように定義される。特に, 変数が整数であればディガンマ関数は, ,

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},$$

のように書くことができる。この式に対して $x = 1$ を代入すると $\psi(1) = -\gamma$ であるので, $\Gamma(1) = 1$ であることに注意すると,

$$\Gamma'(1) = -\gamma,$$

が導かれる。つまり, ガンマ関数 $\Gamma(x)$ の傾きは, $x = 1$ でオイラー数に等しい。

ディガンマ関数の級数表現 (1.7) は, 簡単な関数形であるので微分を繰り返すことは容易である。微分を繰り返し, 高次導関数を得ることができれば, ディガンマ関数を級数展開することが可能である。そこで, ディガンマ関数の微分を繰り返すと,

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2},\\
\psi''(x) &= -\frac{2}{x^3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+x)^2},\\
\psi'''(x) &= \frac{6}{x^4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{(k+x)^2},
\end{aligned}$$

となる。これを一般化すると,

$$\psi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}n!\left(\frac{1}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^{n+1}}\right),$$

のように高次導関数を記述できる。ディガンマ関数 $\psi(x)$ と, 得られた導関数に $x = 1$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
\psi(1) &= -\gamma,\\
\psi^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1}n!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}} = (-1)^{n+1}n!\,\zeta(n+1),
\end{aligned}$$

が得られる。なお, 第 2 行目の数式の右辺で用いた $\zeta(n+1)$ は, 第 2 章で取り扱うゼータ関数である。したがって, ディガンマ関数はマクローリン級数:

$$\psi(1+x) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1)\, x^n, \tag{1.8}$$

で表現することができる。第 2 章で示すが, ゼータ関数は変数が大きな場合, 関数値が 1 に近い値となる。そのため, このマクローリン級数の収束半径は $|x| < 1$ である。さらに, このマクローリン級数を積分すると,

$$\log \Gamma(1+x) = -\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)\, x^n, \tag{1.9}$$

が得られる。つまり, $-1 < x < 1$ の範囲でガンマ関数の対数がマクローリン級数で表現できたことを意味している。この級数は収束半径が小さいので, 実際の計算に用いる場合は次のような手順を踏む。まず, 級数に代入する変数を $-1/2 \le x < 1/2$ に制限し, マクローリン級数で $\log \Gamma(1+x)$ を計算する。その場合, 10 項まで計算すれば 10 進 4 桁以上の有効数字が得られる。続いて, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ を利用して, 変数を必要な値まで持ち上げる。それによって, 任意の変数についてガンマ関数を計算することが可能である。一方, $x > 30$ のような大きな変数については, この方法よりも, 第 1.7 節で説明するスターリングの公式を用いたほうがよい。

1.5　ガウス乗法公式

次にガウスの乗法公式を紹介しよう。ガウスの乗法公式は,

$$\Gamma(z)\,\Gamma\!\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\!\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\!\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}\, n^{1/2-nz}\, \Gamma(nz), \tag{1.10}$$

なる関係式である。本節ではこの公式を導出する。

正弦関数の積　乗法公式証明のための補助定理として, 正弦関数の積に関する公式を証明しておく。その補助定理とは,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \tag{1.11}$$

である。この補助定理を証明するには, n 次方程式 $\omega^n - 1 = 0$ を考える。この方程式は 1 の複素 n 乗根を解とする方程式である。その複素 n 乗根を ω_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ としよう。ただし, $\omega_k = e^{2\pi i k/n}$ である。剰余定理を利用すると, その n 次方程式は,

$$\omega^n - 1 = (\omega-\omega_0)(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)\cdots(\omega-\omega_{n-1}),$$

のように書き換えられる。また, $\omega_0 = 1$ であるので,

$$\begin{aligned}\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} &= (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)\cdots(\omega - \omega_{n-1}) \\ &= 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1},\end{aligned}$$

のように書き換えることもできる。この関係式に $\omega = 1$ を代入すると,

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)\cdots(\omega - \omega_{n-1}) = n,$$

なる式が得られる。この式に, $\omega_k = e^{2\pi ik/n}$ を代入すると,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{\pi ik/n}\left(-2i\sin\frac{\pi k}{n}\right) = n,$$

のように変形できる。この式の左辺を計算すると,

$$\mathrm{LHS} = 2^{n-1}(-i)^{n-1}e^{\pi i(n-1)/2}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n},$$

となる。この数式は n に等しいはずであるので, n と等号で結べば補助定理の数式が得られる。

乗法公式の証明　ガウスの乗法定理の証明には,

$$\Phi(z) = \frac{1}{n\Gamma(nz)}\,n^{nz}\,\Gamma(z)\,\Gamma\!\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\!\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\!\left(z+\frac{n-1}{n}\right),$$

なる関数 $\Phi(z)$ を定義し, その値を評価する。ここで, 分母と分子を個別に評価しよう。また, 双方に現れるガンマ関数にはオイラーの無限乗積を用いることにする。分母は,

$$\mathrm{Denom} = \lim_{m\to\infty}\frac{n\cdot m^{nz}\,m!}{nz\,(nz+1)(nz+2)\cdots(nz+m)},$$

と書ける。無限大の極限をとる変数 m は nm と置き換えることができるので,

$$\mathrm{Denom} = \lim_{m\to\infty}\frac{n\cdot(nm)^{nz}\,(nm)!}{nz\,(nz+1)(nz+2)\cdots(nz+nm)},$$

のように書いてもよい。一方, 分子は,

$$\begin{aligned}\mathrm{Numer} &= n^{nz}\prod_{k=0}^{n-1}\lim_{m\to\infty}\frac{m^{z+k/n}\,m!}{(z+k/n)(z+k/n+1)\cdots(z+k/n+m)} \\ &= n^{nz}\prod_{k=0}^{n-1}\lim_{m\to\infty}\frac{m^{z+k/n}\,n^{m+1}\,m!}{(nz+k)(nz+k+n)(nz+k+2n)\cdots(nz+k+nm)} \\ &= n^{nz}(m!)^n\lim_{m\to\infty}m^{nz+(n-1)/2}\,n^{(m+1)n} \\ &\qquad\times\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(nz+k)(nz+k+n)(nz+k+2n)\cdots(nz+k+nm)},\end{aligned}$$

のように計算できる。計算した分母と分子を組み合わせると,

$$\varPhi(z) = \frac{\mathrm{Numer}}{\mathrm{Denom}} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^n\, n^{(m+1)n}\, m^{(n-1)/2}}{(nm)!},$$

となり, $\varPhi(z)$ が z に依存しないことがわかる。言い換えると, $\varPhi(z)$ は定数である。この定数を確定するため, $z=1/n$ を代入すると,

$$\varPhi(z) = \varGamma\left(\frac{1}{n}\right)\varGamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\varGamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\varGamma(1),$$

となる。続いて, この値を自乗すると,

$$\begin{aligned}
\varPhi(1/n)^2 &= \varGamma\left(\frac{1}{n}\right)\varGamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\varGamma\left(\frac{2}{n}\right)\varGamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\varGamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\varGamma\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n-1}\varGamma\left(\frac{k}{n}\right)\varGamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \pi^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(\pi k/n)}\\
&= \frac{(2\pi)^{n-1}}{n},
\end{aligned}$$

のように計算できる。この計算では, オイラーの反射公式と, 先ほど証明した補助定理を利用した。したがって, 定数 $\varPhi(z)$ は,

$$\varPhi(z) = (2\pi)^{(n-1)/2}\, n^{-1/2},$$

であることが特定できた。この式の左辺に $\varPhi(z)$ の定義式を代入すると, ガウスの乗法定理が証明できる。¶

ガウスの乗法公式の応用例として, $n=2$ を代入すると,

$$\varGamma(z)\,\varGamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,2^{1-2z}\,\varGamma(2z),$$

が得られる。この結果はルジャンドル (Legendre) の 2 倍角公式と呼ばれる公式である。この公式の例として半整数のガンマ関数 $\varGamma(m+1/2)$ 計算してみよう。整数変数 $z=m$ をルジャンドルの 2 倍角公式に代入すると,

$$\begin{aligned}
\varGamma\left(m+\frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}\,2^{-(2z-1)}\,(2m-1)!}{(m-1)!}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{2}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{4}{2}\,\frac{5}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}\\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi},
\end{aligned}$$

が得られる。これはベータ関数を導入して計算した半奇整数のガンマ関数と一致する。

1.6　解析接続

オイラーやワイエルシュトラスの無限乗積の公式から $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ なる関係が検証できた。この関係を逆に使い, ガンマ関数の定義域を正の実数だけでなく 実数全体に拡張することができた。基準値 $\Gamma(x)$ から定義域を逐次, 低下させていくと,

$$\Gamma(x-1)=\frac{\Gamma(x)}{x-1},\quad \Gamma(x-2)=\frac{\Gamma(x)}{(x-1)(x-2)},$$
$$\Gamma(x-3)=\frac{\Gamma(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)},\quad \ldots$$

となり, これを一般化すると,

$$\Gamma(x-n)=\Gamma(x)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k},$$

と書くことができる。この性質を利用すると x を負の実数にも拡張することができたのだ。

それでは, ガンマ関数の定義域を複素数全体に拡張しよう。そのためにはガンマ関数の積分表現を変形する。まず, 積分 $I_0(s)$ を

$$I_0(s)=\int_0^\infty z^{s-1}e^{-z}\mathrm{d}z,$$

のように定義する。この $I_0(s)$ は言うまでもなくガンマ関数 $\Gamma(s)$ に等しい。ここで, z が正の実数であれば $z^s=z^{\mathrm{Re}\,s}e^{i\,\mathrm{Im}\,s\log z}$ であるので, たとえ変数 s が複素数だとしても, $\mathrm{Re}\,s>0$ であれば積分 $I_0(s)$ は有限の値に収束する。

引き続き, $z\mapsto ze^{2\pi i}$ のように変換して積分 I_0 を書き直した結果を $I_{2\pi}$ と定義する。そのとき,

$$I_{2\pi}(s)=\int_0^\infty e^{2\pi i(s-1)}z^{s-1}e^{-z}\mathrm{d}z=e^{2\pi is}\int_0^\infty z^{s-1}e^{-z}\mathrm{d}z,$$

となる。ここで積分路を図 1.3 に示す経路 C $(=C_++C_r+C_-)$ であるとする。原点周りの積分路について, 半径 $r\to 0$ とすると, $z=re^{i\theta}$ より,

$$\int_{C_r}z^{s-1}e^{-z}\mathrm{d}z=ie^{2\pi is}r^s\int_0^{2\pi}e^{is\theta}e^{-re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta,$$

となる。つまり, $\mathrm{Re}\,s>0$ であれば $r\to 0$ の極限における経路 C_r の積分はゼロとなる。よって, 経路 C に沿った積分は

$$\int_C z^{s-1}e^{-z}\mathrm{d}z=I_{2\pi}(s)-I_0(s)=(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s),$$

となる。よって, ガンマ関数は,

$$\begin{aligned}\Gamma(s)&=\frac{1}{e^{2\pi is}-1}\int_C z^{s-1}e^{-z}\mathrm{d}z=\frac{1}{2i\sin\pi s}\int_C e^{\pi is}z^{s-1}e^{-z}\mathrm{d}z\\&=-\frac{1}{2i\sin\pi s}\int_C(-z)^{s-1}e^{-z}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

となる。この積分表示はハンケル (Hankel) の積分表示と呼ばれ, この表示よってガンマ関数の定義域が複素数全体に拡張される。とはいえ, $\mathrm{Re}\, s \leq 0$ となると, 経路 C_r の積分が無視できない (場合によっては発散する) ので, 定義域が複素数全体に拡張されたことは客観的に説明しておく必要があるだろう。

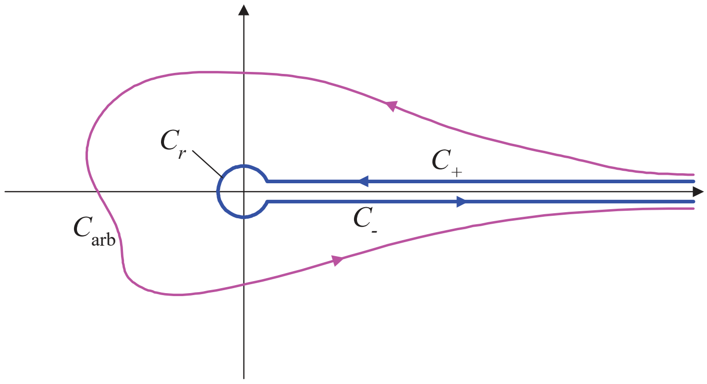

図 1.3: ハンケルの積分表示の積分路

ハンケルの積分表示によってガンマ関数の定義域が複素数全体に拡張されることを説明しよう。積分表示における被積分関数は s がゼロ以下の整数である場合, 原点が極となるが, それ以外の複素平面全体は常に正則である。つまり, 積分路 C は図 1.3 に描かれている C_{arb} のように, $z = +\infty$ の実軸上から開始し, 複素平面を第 I 象限, 第 II 象限, 第 III 象限, 第 IV 象限の順に通り, $z = +\infty$ の実軸上まで続く任意の単純曲線 (自分自身で交わらない曲線) としても積分値は不変である。甚だしい例として, 原点を中心とする半径無限大の円周 C_R を積分路としても値は不変である。この記述が疑わしい場合には次のように考えればよい。積分路を $C + \bar{C}_R$ としよう。ただし, $\bar{C}_R$ は C_R を逆向きにたどることを意味する。その積分路は, 極を 1 つも囲まない閉曲線であるので, 留数の定理により,

$$\int_{C+\bar{C}_R} (-z)^{s-1} e^{-z} \mathrm{d}z = 0,$$

である。この式は,

$$\int_C (-z)^{s-1} e^{-z} \mathrm{d}z = \int_{C_R} (-z)^{s-1} e^{-z} \mathrm{d}z,$$

のように書くこともできる。よって, ハンケルの積分表示は積分路を円周 C_R としてもよいことが示された。

原点を中心とする半径 $R\ (\to \infty)$ の円周 $z = Re^{i\theta}$ を積分路として, ハンケルの積分表示を書くと

$$\Gamma(s) = \frac{e^{\pi i z} R^s}{2 \sin \pi s} \int_0^{2\pi} e^{is\theta} e^{-Re^{i\theta}} \mathrm{d}\theta,$$

となる。この積分に対して部分積分を適用すると,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \frac{e^{\pi i s}R^s}{2\sin\pi s}\left(\left[\frac{e^{is\theta}e^{-Re^{i\theta}}}{is}\right]_0^{2\pi} + \frac{R}{s}\int_0^{2\pi} e^{i(s+1)\theta}e^{-Re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \frac{e^{\pi i s}R^s}{2\sin\pi s}\frac{e^{-R}(e^{2\pi i s}-1)}{is} + \frac{1}{s}\frac{e^{\pi i s}R^{s+1}}{2\sin\pi s}\int_0^{2\pi} e^{i(s+1)\theta}e^{-Re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

となる。ここで, $R \to \infty$ であることに注意すると, s に関わらず $R^s e^{-R} \to 0$ となるため, 第 1 項がゼロとなるので, 上の積分は

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \frac{1}{s}\frac{e^{\pi i s}R^{s+1}}{2\sin\pi s}\int_0^{2\pi} e^{i(s+1)\theta}e^{-Re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{s}\frac{e^{\pi i(s+1)}R^{s+1}}{2\sin\pi(s+1)}\int_0^{2\pi} e^{i(s+1)\theta}e^{-Re^{i\theta}}\mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma(s+1)}{s},
\end{aligned}
$$

のように変形される。この関係式は s に対する条件を設けずに導かれた関係式でありながら, ワイエルストラスの無限乗積から導かれる法則と一致している。 前にも述べたように, 積分路 C は図 1.3 に示すような任意の経路を設定できる。このハンケルの積分表示によって, ガンマ関数の性質が任意の複素数 s に対して成立させることができた。すなわち, ハンケルの積分表示によってガンマ関数の定義域を複素数全体に拡張することができたということである。

1.7　スターリングの公式

ガンマ関数 $\Gamma(z+1)$ を漸近展開として近似しよう。漸近展開とは, $z \to \infty$ の極限での近似である。漸近展開するにあたり, ガンマ関数 $\Gamma(z+1)$ が積分表示:

$$
\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} x^z e^{-x}\mathrm{d}x,
$$

によって定義されることに注意しよう。このような指数関数を含む積分は鞍点法と呼ばれる手法で評価できる。本節では鞍点法によってガンマ関数を漸近展開する。

基本形として, 鞍点法は指数関数を含む関数の積分:

$$
I(z) = \int_L g(x)\, e^{-z\, f(x)}\mathrm{d}x,
$$

の評価に用いる。複素関数における鞍点法ではこの積分経路の選び方にも特定の規則があるが, ここではガンマ関数の評価に必要な情報のみの説明にとどめよう。鞍点法では, $z \gg 1$ の条件を前提とし, $f'(x_0) = 0$ となる $x = x_0$ を中心に積分を評価する。この手法が鞍点法と呼ばれるのは, $f'(x_0) = 0$ に注目していることによる。関数 $f(x)$ を正則な複素関

数とし, 変数を $x \equiv \alpha + i\beta$ とすると, コーシー・リーマンの定理により,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) f(x) = 0,$$

が成立する。これは, $f(x)$ が実軸に沿って上に凸ならば, 虚軸に沿って下に凸であることを意味する。例えば図 1.4 のような関数を想像すればよいだろう。その図は複素数 $x = \alpha + i\beta$ の関数 $f(\alpha, \beta)$ を描いている[2]。正則な複素関数の導関数がゼロ, すなわち, $f'(x_0) = 0$ となる点 x_0 は, $f(x_0)$ が山の頂上ではなく, 鞍のような反り返った場所 (鞍点) である。鞍点

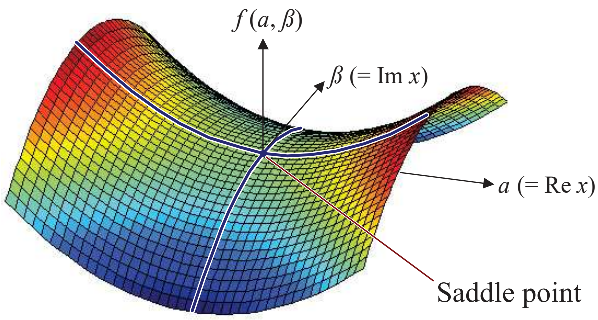

図 1.4: 複素関数の鞍点

を中心とした展開手法であることから, この手法は鞍点法と呼ばれるのだ。この条件では, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \cdots$$
$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} g''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} g'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \cdots$$

のようにテイラー展開できる。これを積分 $I(z)$ に代入すると,

$$\begin{aligned} I(z) &\simeq \int_L g(x_0)\, e^{-z\,(f(x_0) + f''(x_0)\,(x - x_0)^2/2)} \mathrm{d}x \\ &= g(x_0)\, e^{-z\, f(x_0)} \int_L e^{-z\, f''(x_0)\,(x - x_0)^2/2} \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

のように近似できる。このような形になるので $f'(x_0) = 0$ を条件とすることが有利に働く。積分路が実軸上の区間 $[a, b]$ $(a < x_0 < b)$ とすると,

$$\begin{aligned} I(z) &\simeq g(x_0)\, e^{-z\, f(x_0)} \int_a^b e^{-z\, f''(x_0)\,(x - x_0)^2/2} \mathrm{d}x \\ &\simeq g(x_0)\, e^{-z\, f(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\, f''(x_0)\,(x - x_0)^2/2} \mathrm{d}x \\ &= g(x_0)\, e^{-z\, f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{z\,|f''(x_0)|}}, \end{aligned}$$

[2]正確に言うとこの図は, 複素関数 $x^2 = (a + i\beta)^2$ の実部を例として描いている。虚部も同様に反り返った形になっている。

のように近似できる。この数式変形において, 第 1 行目から第 2 行目で積分区間が無限に拡大されているのは, $z \gg 1$ としたとき, 積分区間 $[a, b]$ の外で指数関数が無視できる程度まで小さくなるからである。積分区間の外側の寄与が無視できることは,

$$\int_{-\infty}^{-x} e^{-\kappa\xi^2/2} \mathrm{d}\xi \simeq \frac{1}{\kappa x} e^{-\kappa x^2/2} \left(1 - \frac{1}{\kappa x^2} + \frac{3}{\kappa^2 x^4} - \cdots\right),$$

なる漸近近似を考えれば理解できるだろう。関数 $e^{-\kappa\xi^2/2}$ を区間 $(-\infty, \infty)$ で積分した結果は $\sqrt{2\pi/\kappa}$ であるので, $\kappa x^2 = 10$ とすればこの積分は無限積分の 0.08 %程度の非常に小さな寄与になる。また, $\kappa x^2 = 20$ であれば, 積分の寄与はさらにその 200 分の 1 程度になる。上に書いた $I(z)$ に関して言えば, $z \left|(b - x_0)\, f''(x_0)\right| \gg 1$ であれば無視できると考えてよい。

上の説明によってガンマ関数 $\Gamma(z+1)$ が漸近近似できたと思ってよい。ガンマ関数の近似のためには, 積分表示に対して $x \equiv zu$ なる変数 u に変数置換すればよい。その変数置換によって積分表示は,

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1} \int_0^\infty u^z\, e^{-zu} \mathrm{d}u = z^{z+1} \int_0^\infty e^{-z\,(u - \log u)} \mathrm{d}u,$$

のように書き換えられる。この場合, 上の説明と対応させると, $f(u) = u - \log u$, $g(u) = 1$ とすればよい。関数 $f(u)$ の 1 階の導関数が $f'(u) = 1 - 1/u$ であるので鞍点法における中心点は $u = 1$ とすればよい。その中心点において, $f(1) = 1$, $f''(1) = 1$ である。これを上の式に代入すると,

$$\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2}\, e^{-z},$$

が導出される。この数式はスターリングの公式と呼ばれる近似式であり, z が大きいときの近似が良好である。この公式は, $z = 10$ で 10 進 2 桁程度, $z = 100$ で 3 桁程度の精度を示す。

スターリングの公式の精度を向上する方法はいくつもあるが, そのうちでも直接的な手法で精度を向上しよう。その手法として, $f(x) = u - \log u$ の高次近似を利用する。関数 $f(u)$ を展開すると,

$$f(u) = 1 + \frac{(u-1)^2}{2} - \frac{(u-1)^3}{3} + \frac{(u-1)^4}{4} - \frac{(u-1)^5}{5} + \cdots$$

のように書くことができる。この近似式を上の式に代入すると,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &\simeq z^{z+1} e^{-z} \int_0^\infty e^{-z\,(u-1)^2/2}\, e^{z\,[(u-1)^3/3 - (u-1)^4/4 + (u-1)^5/5 - \cdots]}\, \mathrm{d}u \\
&= z^{z+1} e^{-z} \int_{-1}^\infty e^{-z\xi^2/2}\, e^{z\,(\xi^3/3 - \xi^4/4 + \xi^5/5 - \cdots)} \mathrm{d}\xi \\
&= z^{z+1} e^{-z} \int_{-\infty}^\infty e^{-z\xi^2/2}\, e^{z\,(\xi^3/3 - \xi^4/4 + \xi^5/5 - \cdots)} \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

が得られる。ここで, 第2行目への変形には $\xi \equiv u-1$ の置き換えを適用し, 第3行目への変形には $z \gg 1$ であることを利用した。さらに, $e^{z\,(\xi^3/3-\cdots)}$ に対して, マクローリン展開をする。その展開は面倒であるが, 最終的に $1/z$ の2次の近似までに必要とする項だけを抽出すると,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) \simeq z^{z+1}e^{-z}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\, e^{-\xi^2/2} \\ \times\left(1+\frac{z\xi^3}{3}-\frac{z\xi^4}{4}+\frac{z\xi^5}{5}-\frac{z\xi^6}{6}\right. \\ \left.+\frac{z^2\xi^6}{9}-\frac{z^2\xi^7}{6}+\frac{47z^2\xi^8}{240}+\frac{z^3\xi^9}{27}-\frac{z^3\xi^{10}}{12}+\frac{z^4\xi^{12}}{81}\right),\end{aligned}$$

のようになる。必要な精度が $1/z^2$ の次数にも関わらず, この計算過程のように, ξ^{12} の項まで抽出しなければならない。右辺の積分を実行するにあたり, 積分公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m}\, e^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)\cdot\sqrt{2\pi}\,\sigma^{2m},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m+1}\, e^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x = 0,$$

を利用すればよい。ここで, m はゼロ以上の整数とする。なお, この公式の証明は省略する。この公式によると, 被積分関数において括弧の中が ξ の奇数次の項の積分はゼロである。偶数次についても公式を適用すると,

$$\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2}\, e^{-z}\left(1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}\right),$$

が得られる。得られた2次の近似式は, $z=10$ で10進5桁, $z=100$ で8桁の精度となる。ゼロ次近似に比べ, 近似能力が格段に向上している。しかし, 上の導出過程を見ればわかるとおり, 2次近似のために ξ の12次の項まで展開しなければならない。さらに, 3次近似となると ξ の18次の項まで必要となり, 数式変形が非常に面倒である。ガンマ関数の近似精度を狙うなら, 鞍点法は有効でなく, オイラー・マクローリンの和公式を使った方がよい。導出は省略するが, オイラー・マクローリンの和公式によってガンマ関数を展開すると,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2}e^{-n}\left(1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{5\,1840z^3}\right. \\ \left.-\frac{571}{2\,488\,320z^4}+\frac{163\,879}{209\,018\,880z^5}+\cdots\right),\end{aligned}$$

のようになる。オイラー・マクローリンの公式は階乗を展開するために用いているので, 本来, 変数が自然数であるという前提である。しかし, ガンマ関数は階乗の定義域を複素数全体になるように解析接続した関数であるので, オイラーマクローリンの公式で得られた数式の変数を単純に複素数に読み替えれば, ガンマ関数を与えるはずである。

1.8 不完全ガンマ関数

ガンマ関数の積分による定義 (1.1) は無限積分である。この積分の積分域を有界とした関数は不完全ガンマ関数と呼ばれる。不完全ガンマ関数は誤差積分へ応用できるため, 本節で紹介する。

1.8.1 積分による定義と級数展開

ガンマ関数の積分による定義式における積分域を有界として得られる関数は不完全ガンマ関数と呼ばれる。不完全ガンマ関数は,

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\, \mathrm{d}t, \tag{1.12a}$$

$$\varGamma(a,x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1}\, \mathrm{d}t, \tag{1.12b}$$

のように定義される。この定義式から容易にわかるように, $\gamma(a,x) + \varGamma(a,x) = \varGamma(a)$ が成立する。このような簡単な関係があるので, わざわざ 2 種類も関数を定義しなくてもよさそうだが, 慣習的にこのような記号の使い分けをするようである。

不完全ガンマ関数の第 1 変数 a が正の整数であるとき, 積分を完全に実行することができ,

$$\gamma(n,x) = (n-1)!\, \left(1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right), \tag{1.13a}$$

$$\varGamma(n,x) = (n-1)!\; e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}, \tag{1.13b}$$

が成立する。この関係式を得るには, 部分積分を繰り返せばよい。後者の関数について積分を実行すると,

$$\begin{aligned}\varGamma(n,x) &= -\left[e^t\, t^{n-1}\right]_x^\infty + (n-1) \int_x^\infty e^{-t}\, t^{n-2}\, \mathrm{d}t \\ &= e^{-x} x^{n-1} + (n-1)\, \varGamma(n-1,x),\end{aligned}$$

のように計算できる。右辺の第 2 項についても同様の操作を, さらに得られた最終項についても同様の操作を繰り返していくと,

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} = e^x\, &\Big[x^{n-1} + (n-1)\, x^{n-2} + (n-1)(n-2)\, x^{n-3} + \cdots \\ &\qquad \cdots + (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\, x \,+\, (n-1)!\Big] \\ = (n-1)!\; e^x &\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!},\end{aligned}$$

が得られる。したがって, 級数展開 (1.13b) が導出された。級数展開 (1.13b) は $\gamma(n,x)+\Gamma(n,x)=(n-1)!$ から容易に得られる。

不完全ガンマ関数の第 1 変数が正の整数ではない場合,

$$\gamma(a,x)=x^a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^k}{k!\,(a+k)}, \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(a,x)&=x^{a-1}e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)\,x^k}\\&=x^{a-1}e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(k-a+1)}{\Gamma(-a+1)\,x^k},\end{aligned} \tag{1.15}$$

が成立する。前者は被積分関数に含まれる e^{-t} を級数展開し,

$$\gamma(a,x)=\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,t^{a+k-1}}{k!}\,\mathrm{d}t,$$

とすれば容易に得られる。後者については, (1.13b) の導出を参考にして,

$$\begin{aligned}\Gamma(a,x)&=e^{-x}\Big[x^{a-1}+(a-1)\,x^{a-2}+(a-1)(a-2)\,x^{a-3}\\&\qquad+(a-1)(a-2)(a-3)\,x^{a-4}+\cdots\Big]\\&=e^{-x}x^{a-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)\,x^k},\end{aligned}$$

のように計算できるので, 第 1 行目の等式が導かれる。第 1 変数が正の整数であれば, 総和は有限項で収まるのであるが, そうでない場合, 総和は無限級数となる。第 2 行目への等式を導出するには, オイラーの反射公式:

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)&=\frac{\pi}{\sin\pi a},\\\Gamma(a-k)\,\Gamma(k-a+1)&=\frac{\pi}{\sin\pi(a-k)}=\frac{(-1)^k\,\pi}{\sin\pi a},\end{aligned}$$

に注意すればよい。その結果, (1.15) が導出される。

1.8.2　指数積分

不完全ガンマ関数がそのままの形で物理学で取り扱われることは珍しい。しかし, 指数積分のように形を変えて登場することがある。指数積分とは,

$$E_1(x)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t, \tag{1.16}$$

によって定義される。この関数を x の級数として展開してみよう。まず, 指数関数が,

$$E_1(x) = \Gamma(0, x) = \lim_{a\to 0}\Big[\Gamma(a) - \gamma(a, x)\Big],$$

なる関係を満たすことに注意する。残念ながら, この関係式は指数積分の計算には直接使うことができない。なぜなら, $\Gamma(a)$ は $a \to 0$ の極限で発散するからである。不完全ガンマ関数 $\gamma(a, x)$ の級数展開 (1.14) を用いると,

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \lim_{a\to 0}\left[\Gamma(a) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\, x^{a+k}}{k!\,(a+k)}\right] \\ &= \lim_{a\to 0}\left[\frac{a\Gamma(a) - x^a}{a}\right] - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\, x^k}{k\cdot k!}, \end{aligned}$$

のように計算できる。右辺の第 1 項に関して,

$$\lim_{a\to 0} a\Gamma(a) = 0! = 1, \qquad \lim_{a\to 0} x^a = 1,$$

であるので, 第 1 項の分子はゼロである。分母もゼロであるので, 第 1 項はロピタルの定理を用いて評価できる。ロピタルの定理を適用するため, $a\Gamma(a)$ の導関数を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}a\Gamma(a) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\Gamma(a+1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}e^{\log\Gamma(a+1)} \\ &= \Gamma(a+1)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\log\Gamma(a+1) = \Gamma(a+1)\cdot\psi(a+1), \end{aligned}$$

となる。ここで, $\psi(a+1)$ は第 1.4 節で取り扱ったディガンマ関数である。また, x^a の a についての導関数は $x^a \log x$ である。したがって, ディガンマ関数のマクローリン展開 (1.8) に注意すると指数積分は,

$$E_1(x) = -\gamma - \log x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k\cdot k!}, \tag{1.17}$$

のように級数展開される。本書で既に取り上げているが, γ はオイラー定数である。この級数展開を利用して指数積分 $E_1(x)$ を計算すると図 1.5 のような曲線を描く。このグラフに示すように, 指数積分 $E_1(x)$ は変数 x の増加とともに急激にゼロに近づく。それは, 被積分関数が e^{-t}/t が急激にゼロに近づくので, 積分区間の開始点を増加させると積分結果も急激に減少するからである。級数展開 (1.17) から, この関数が正の変数 x に対して常に正になることがわかりづらいのだが, 指数積分の定義から, この関数は常に正の値になる。

正弦積分と余弦積分　指数積分との関連として, 正弦積分と余弦積分と呼ばれる積分:

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

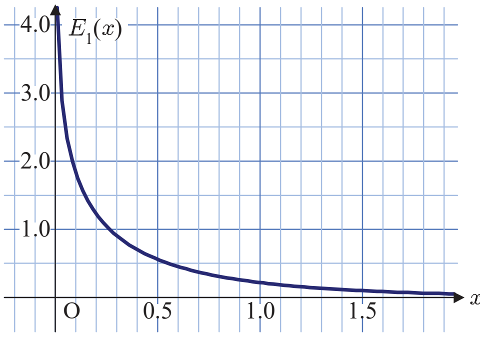

図 1.5: 指数積分

を考えてみよう。まず, 正弦積分について考えよう。この積分は, sinc 関数と呼ばれる関数の積分である。積分を実行すると,

$$\begin{aligned}\mathrm{si}(x) &= -\frac{1}{2i}\int_x^\infty \frac{e^{it}-e^{-it}}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2i}\left[\int_{-ix}^{-i\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{ix}^{i\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right] \\ &= -\frac{1}{2i}\left[\int_{-ix}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{ix}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right] = \frac{1}{2i}\left[E_1(ix) - E_1(-ix)\right],\end{aligned}$$

が得られる。ここで, 正弦関数を指数関数に分離したうちの第 1 項には $u \equiv -it$, 第 2 項には $u = it$ なる置き換えを適用した。積分区間の終点として書かれた $\pm i\infty$ は $Re^{\pm\pi i/2}$ (ただし, $R \to \infty$) である。さらに, 第 1 行目の積分区間の終点 $\pm i\infty$ が, 第 2 行目では ∞ に変わっている。それは誤植ではなく, $\pm i\infty$ から ∞ への積分がゼロであるからである。つまり,

$$\int_{-ix}^{-i\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{-ix}^{-i\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{-i\infty}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{-ix}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

が成立していることを利用している。では, 本当に $-i\infty$ から ∞ への積分がゼロになるのか? それは次のようにして証明することができる。

積分路 C を図 1.6 に示すように, $-iR$ から R まで, 原点を中心とした半径 R の円弧であるとする。積分路はこの曲線である必要はないのだが, 任意の曲線でよいので, まず, この曲線を積分路としておく。 つまり, 積分変数 u は, $u \equiv Re^{i\theta}$ と書くことができ, 積分範囲

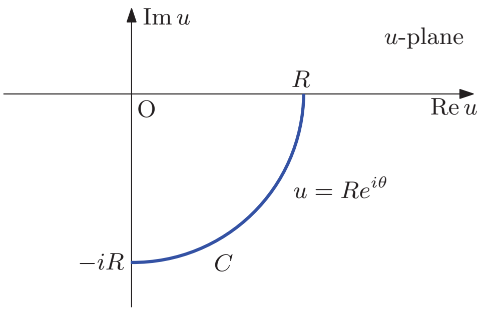

図 1.6: 無限遠の円弧上の積分路

は $-\pi/2 \le \theta \le 0$ となる。その条件で積分を実行すると,

$$\left|\int_C \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right| = \left|i\int_{-\pi/2}^{0} e^{-Re^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right| = \left|\int_{-\pi/2}^{0} e^{-R\cos\theta - iR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right|$$
$$\le \int_{-\pi/2}^{0}\left|e^{-R\cos\theta - iR\sin\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{0} e^{-R\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

のように計算できる。この計算結果に対して $R\to\infty$ の極限をとると, 右辺はゼロになる。したがって, 正弦積分 $\mathrm{si}(x)$ の評価における $-i\infty$ から ∞ への積分はゼロである。また, 被積分関数は原点を除く複素数平面全体で正則であるので, 原点を周回しない限り, 積分路を任意にとっても積分はゼロである。もう一方, $i\infty$ から ∞ への積分も同様の考察によってゼロになることが示せる。

余弦積分も同様の操作を用いれば指数積分との関係が導出できる。導出過程を省略するが, その結果として,

$$\mathrm{Ci}(x) = -\frac{1}{2}\left[E_1(ix) + E_1(-ix)\right],$$

が導かれる。指数積分の級数展開 (1.17) を代入すると, 正弦積分と余弦積分は,

$$\mathrm{si}(x) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}, \tag{1.18a}$$
$$\mathrm{Ci}(x) = \gamma + \log x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{2k\cdot(2k)!}, \tag{1.18b}$$

なる級数で表すことができる。正弦積分の級数展開 (1.18a) の第 2 項が sinc 関数を区間 $[0,x]$ で積分した結果である[3]ので, sinc 関数を $[0,\infty)$ で積分すると $\pi/2$ であることが導かれる。 この sinc 関数の積分は, $(e^{ix}-e^{-ix})/2ix$ を留数定理を用いて評価した結果と一致

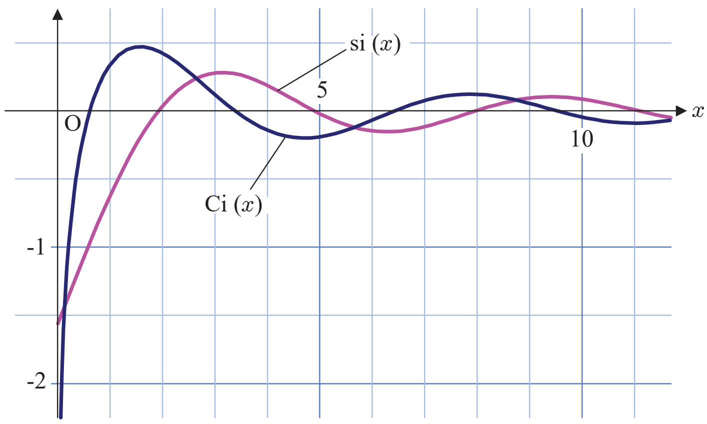

図 1.7: 正弦積分と余弦積分

する。一方, 余弦積分については, 級数展開の総和の範囲が $k=1$ が始点であることに注

[3]被積分関数 $\sin t/t$ を級数展開して, 区間 $[0,x]$ で積分すると第 2 項と同一の結果が得られる。

意を要する。余弦積分は積分区間の始点 x をゼロに近づけると, $\gamma + \log x$ で発散する。これらの級数展開で計算すると, 正弦積分と余弦積分は図 1.7 のような曲線を描く。変数の増加とともに被積分関数の振幅が小さくなるので, 双方の積分は積分区間の始点 x が増加すると振幅が小さくなっている。

対数積分　指数積分はさらに, 対数積分と呼ばれる積分にも発展できる。対数積分とは,

$$\mathrm{li}\, x \equiv \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u}, \tag{1.19}$$

のように対数の逆数を被積分関数とする積分である。この積分は, $u \equiv e^{-t}$ なる置き換えによって,

$$\mathrm{li}\, x = \int_\infty^{-\log x} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t,$$

のように書き換えられるので,

$$\mathrm{li}\, x = -E_1(-\log x), \tag{1.20}$$

なる等式が成立する。つまり, 対数積分が指数積分を用いて計算できることが示されたのだ。この関数の計算は, 概して指数関数の級数展開 (1.17) を用いて計算できるのだが, $x = 0, 1$ では注意を要する。まず, $x = 0$ のとき $\log x$ が定義できない。さらに, $x = 1$ の場合, $\log x = 0$ となり, 級数展開 (1.17) に含まれる対数関数が定義できないのだ。そこで, 定義式 (1.19) を見返してみると, $\mathrm{li}(0) = 0$, $\mathrm{li}(1) = -\infty$ とするのが妥当である。他の場合については級数展開を利用して対数積分を計算すると, 図 1.8 に示す曲線を描くことがわかる。 対数積分は, 数論において, 素数の個数を表現する数式として応用されることがある。

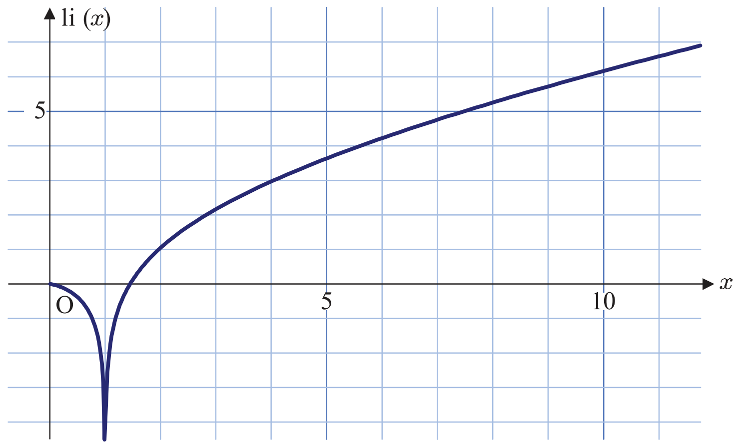

図 1.8: 対数積分

1.8.3 高次の指数積分

本節で用いた指数積分は $E_1(x)$ のように添え字をともなっていたことに疑問を持った読者がいることだろう。実は, この表記は 1 次の指数積分であることを意味している。つまり, 2 次や 3 次の指数積分なる関数が定義されているのだ。一般的な n 次の指数積分は,

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}\,\mathrm{d}t, \tag{1.21}$$

のように定義される。定義式がこれまでに用いた $E_1(x)$ の定義式と違うように見えるが, $u \equiv xt$ の置き換えを適用すると, これまでと同一の定義式になる。また, 指数積分は隣り合う次数との間に,

$$E_{n+1}(x) = \frac{e^{-x} - x\,E_n(x)}{n}, \tag{1.22}$$

なる漸化式が成立する。この漸化式は定義式 (1.21) を部分積分すれば証明できる。部分積分を実行すると,

$$E_n(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{n}{x}\int_1^x \frac{e^{-xt}}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t,$$

のように計算できる。右辺の第 2 項が $-nE_{n+1}(x)/x$ であるので, 上で述べた漸化式が得られる。漸化式に $x = 0$ を代入すると, $n \neq 1$ のとき, $E_n(x) = 1/(n-1)$ であることがわかる。