目 次

第1章　はじめに

リーマン幾何学は, ユークリッド幾何学では取り扱えない曲がった空間を取り扱う幾何学である。曲がった空間を取り扱うため, リーマン幾何学では, いくつかの特別な表記法を用いる。 本章では, リーマン幾何学の表記法に慣れるため, 曲がった空間を取り扱うのは控え, ユークリッド空間におけるベクトルや行列をリーマン幾何学の記法で記述してみよう。

1.1　ベクトル

幾何学や解析学では, 3次元空間の座標について考えた場合, しばしば, x, y, z という記号を用いる。これらの記号はカルテシアン座標を表記するための習慣となっているので, 非常になじみ深い表記である。しかし, 取り扱う空間が3次元ではなく, 一般化された n 次元空間であるなら, むしろ, x_1, x_2, $\ldots$, x_n という番号付けをした記法を用いるほうが便利である。

もう一方で, x^1, x^2, $\ldots$, x^n のように右上に添え字をもつベクトルを定義することもできる。 ここで, 右肩の数字は, 1乗, 2乗, 3乗のような指数ではなく, 座標に割り当てた番号である。後に, 曲がった空間を取り扱うようになると, 右下の添え字と右上の添え字が意味をもってくるのだが, まだここでは, そのような表記があるというだけにとどめておく。例として3次元のカルテシアン座標を図1.1に示す。右ねじの法則にしたがって設定される x 軸, y 軸, z 軸のに沿った成分をベクトルの第1成分, 第2成分, 第3成分と呼ぶことにしよう。

二つのベクトルが与えられたとき, 内積というスカラ量を定義することができる。カルテシアン座標系では, ベクトルの各成分の積和:

$$x_1y^1 + x_2y^2 + x_3y^3 + \cdots + x_ny^n,$$

が内積として定義される。この数式に示すように, 内積は上付き添え字の成分と下付き添え字の成分の組み合わせで積をとる。上付き添え字の成分どうしでなく, 下付き添え字の成分どうしでもない。上付き添え字の成分と下付き添え字の成分の積をとることに意味が

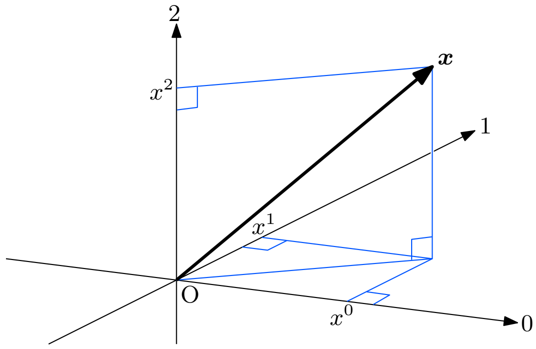


図 1.1: カルテシアン座標系のベクトル

あるのだが, それは後に説明する。今の段階では, 単なる約束事だと思ってほしい。ただし, カルテシアン座標系では, 偶然, $x^\mu = x_\mu$ が成立するので添え字の位置の違いを特に気にする必要はないだろう。

内積の定義式にみられる総和を記述するには, 延々と項を並べるよりも便利な表記法がある。その記法に従って数式を記述すると,

$$\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu y^\mu \equiv x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3 + \cdots + x_n y^n,$$

となる。空間が 3 次元なら項を並べて記述してもよいが, 次数が高い場合や n 次元のように特定の数値でない場合, $\sum$ を用いた記法が便利である。また, 自分自身の内積は,

$$\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu x^\mu \equiv x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 + \cdots + x_n x^n,$$

と書く。特に, カルテシアン座標の場合, 上で述べたように $x^\mu = x_\mu$ が成立するので, 上記の内積は,

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \cdots + (x^n)^2,$$

と書くことができる。まぎらわしい記法ではあるが, 括弧の外の右肩の添え字は 2 乗を意味する。ここで, 三平方の定理を思い出すと, 自分自身の内積はベクトルの長さの自乗となることがわかる。さらに, 2 次元, または, 3 次元空間からの類推により, ベクトル x^μ と y^μ がなす角度 θ は,

$$\sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu x^\mu \cdot \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu y^\nu}\ \cos\theta = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu y^\mu,$$

によって定義される。ただし, このような θ の定義は, 2 つのベクトルの内積が, それらのベクトルの長さの積より小さいか等しいという性質が必要である。その性質が n 次元空間の斜交座標系に対して成立することは, 第 1.5 節で示す。

1.2　一次変換

ベクトルの一次変換とは, ベクトルの各成分に定数係数を乗じて積和をとることによって新たなベクトル成分を得る演算である。ベクトルの一次変換の例として, ベクトルの回転, 拡大・縮小が挙げられる。例えば, n 次元のベクトル x^μ から一次変換によってベクトル x'^μ を得る操作は,

$$
\begin{aligned}
x'^1 &= A^1{}_1 x^1 + A^1{}_2 x^2 + A^1{}_3 x^3 + \cdots + A^1{}_n x^n, \\
x'^2 &= A^2{}_1 x^1 + A^2{}_2 x^2 + A^2_3 x^3 + \cdots + A^2{}_n x^n, \\
x'^3 &= A^3{}_1 x^1 + A^3{}_2 x^2 + A^3{}_3 x^3 + \cdots + A^3{}_n x^n, \\
&\ \vdots \\
x'^n &= A^n{}_1 x^1 + A^n{}_2 x^2 + A^n{}_3 x^3 + \cdots + A^n{}_n x^n,
\end{aligned}
$$

なる数式で書くことができる。この数式に含まれる $A^\mu{}_\nu$ は定数係数である。定数係数 $A^\mu{}_\nu$ は $n \times n$ の行列であると考えると, 行列記法で一次変換を記述することができ,

$$
\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
A^1{}_1 & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\
A^2{}_1 & A^2{}_2 & \cdots & A^2{}_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A^n{}_1 & A^n{}_2 & \cdots & A^n{}_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix},
$$

のようになる。この中の成分 x'^μ を取り出すと,

$$
x'^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} A^\mu{}_\nu x^\nu \equiv A^\mu{}_1 x^1 + A^\mu{}_2 x^2 + A^\mu{}_3 x^3 + \ \cdots + A^\mu{}_n x^n,
$$

と書くことができる。リーマン幾何学では, この数式中の ν のように, 総和をとる添え字は右上と右下でペアになるように組み合わて書く。添え字の位置には, 本当は意味があるのだが, 今の段階では, 約束事だと思って, あまり気にしないでもよい。さらに, この結果を $B^\lambda{}_\mu$ で一次変換して x''^μ を得た場合,

$$
\begin{aligned}
x''^\mu = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} & B^\mu{}_\lambda A^\lambda{}_\nu x^\nu \\
\equiv \quad & B^\mu{}_1 A^1{}_1 x^1 + B^\mu{}_1 A^1{}_2 x^2 + B^\mu{}_1 A^1{}_3 x^3 + \cdots + B^\mu{}_1 A^1{}_n x^n \\
& + B^\mu{}_2 A^2{}_1 x^1 + B^\mu{}_2 A^2{}_2 x^2 + B^\mu{}_2 A^2{}_3 x^3 + \cdots + B^\mu{}_2 A^2{}_n x^n \\
& + B^\mu{}_3 A^3{}_1 x^1 + B^\mu{}_3 A^3{}_2 x^2 + B^\mu{}_3 A^3{}_3 x^3 + \cdots + B^\mu{}_3 A^3{}_n x^n \\
& \ \vdots \\
& + B^\mu{}_n A^n{}_1 x^1 + B^\mu{}_n A^n{}_2 x^2 + B^\mu{}_n A^n{}_3 x^3 + \cdots + B^\mu{}_n A^n{}_n x^n,
\end{aligned}
$$

となる。具体的に書き下すと, この式の右辺のようになるのだが, 総和記号を用いると, 左辺のような簡単な記述で表現できる。

回転変換　一次変換の例として, ベクトルの回転変換を挙げよう。二次元のベクトル $[x^0, x^1]$ を角度 θ だけ反時計回りに回転して得られる新たなベクトル $[x'^0, x'^1]$ は,

$$x'^1 = x^1 \cos\theta - x^2 \sin\theta,$$
$$x'^2 = x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta,$$

によって計算できる。この数式を $x'^\mu = A^\mu{}_\nu x^\nu$ のように表記すると, 変換行列 $A^\mu{}_\nu$ は,

$$[A^\mu{}_\nu] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

のように書くことができる。この変換行列の逆行列を $\bar{A}^\mu{}_\nu$ としよう。逆行列を計算すると,

$$[\bar{A}^\mu{}_\nu] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

が得られる。この逆行列は, 変換行列 $A^\mu{}_\nu$ において $\theta \mapsto -\theta$ の置き換えを適用した結果を一致する。この事実は, なぜなら, θ だけ回転させた後, $-\theta$ だけ回転させるともとの場所に戻ることを考えると納得できるだろう。

ローレンツ変換　相対性理論によると, 相対的に等速度運動している観測者との間の座標系は一次変換で与えられる。例えば, 基準とする座標系を K 系, それに対して等速度運動する慣性系を K′ とすると, K 系から K′ 系への変換行列は,

$$[A^\mu{}_\nu] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となる。ただし, β は速度を表すパラメータであり, $\beta = 1$ が光速に相当する。この変換行列による座標変換はローレンツ変換と呼ばれる。座標の対応として, 第 0 成分[1] は時間に光速を乗じた値 ct を, 第 1 成分から第 3 成分はカルテシアン座標系の x, y, z に対応している。これを形式的に書くと, $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ なる対応関係があるのである。なお, K′ 系の運動方向は x^1 方向を想定している。これは特殊相対性理論における座標変換であり, この座標変換から時間や長さの収縮現象が導かれる。ローレンツ変換の変換行列

[1] 成分を表す添え字は本書では 1 から n までとするが, 相対性理論では習慣的に時間を第 0 成分とするので, その習慣に合わせ, 相対性理論の例に限り, 添え字は 0 から開始する。

の逆行列を $\bar{A}^{\mu}{}_{\nu}$ とすると,

$$[\bar{A}^{\mu}{}_{\nu}] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

であることが実際の計算からわかる。この逆行列は, $\beta \mapsto -\beta$ に置き換えた変換行列と一致する。確かに, K 系に対して速度 β で運動する系 K$'$ があり, その系に対して速度 $-\beta$ で運動する系は K 系に戻るはずである。そのように考えると, 速度 $-\beta$ の系への座標変換が, 速度 β の系への座標変換の逆変換になることが理解できる。

1.3 総和の規約

既に内積や行列演算について, 総和記号を用いた表記をしてきた。前節の一次変換を連続で実行した結果を書き下そうとすると, 総和記号が非常に便利であることに気付く。 このような便利な記法は, まさに, 人間がもつ怠惰さの賜物である。

リーマン幾何学では, さらに怠惰な記法を用いる。そのさらに怠惰な記法を考案したのはアインシュタインであった。先ほどの一次変換:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} A^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \equiv A^{\mu}{}_{1} x^{1} + A^{\mu}{}_{2} x^{2} + A^{\mu}{}_{3} x^{3} + \cdots + A^{\mu}{}_{n} x^{n},$$

を例に挙げよう。この式は, 添え字 ν を 1 から n まで変化させながら総和をとる[2] ことを意味する。座標変換において, このような総和をとる場合, 変化させる添え字は, 必ず, 同一項の中に上付き添え字と下付き添え字のペアになっていることをアインシュタインは気付いた。つまり, 上付き添え字と下付き添え字のペアがあれば, 総和記号がなくとも, その添え字を 0 から $n-1$ まで変化させて和をとるという取り決めをすれば総和記号 Σ を書く手間が省ける。その取り決めによって先ほどの一次変換を書くと,

$$x'^{\mu} = A^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \equiv A^{\mu}{}_{1} x^{1} + A^{\mu}{}_{2} x^{2} + A^{\mu}{}_{3} x^{3} + \cdots + A^{\mu}{}_{n} x^{n},$$

となる。なんという怠惰さ, というか, 便利な記法であろうか。アインシュタインはリーマン幾何学を創り上げた人ではなく, 使った人である。にもかかわらず, この記法の便利

[2]前に注釈したように相対性理論では, 添え字の範囲が 0 から開始するので, 総和の規約は添え字が 0 から $n-1$ にわたり和をとるように適用される。

さのため, リーマン幾何学では総和記号を省略した記法が用いられている。この約束事を**アインシュタインの総和の規約**という。リーマン幾何学だけでなく, 行列を取り扱う計算でもアインシュタインの総和の規約は役に立つ。筆者はリーマン幾何学以外の計算でも, 手計算では総和の規約を利用して総和記号を省略して計算している。

アインシュタインの総和の規約は, 数式が複雑になるほど, そのありがたさがわかる。例として, 一次変換を 2 回適用してみると,

$$x''^{\mu} = B^{\mu}{}_{\lambda} A^{\lambda}{}_{\nu} x^{\nu},$$

のように書ける。前にあげた総和記号を用いた記法と比べても数式がかなりすっきりしたように見える。この数式には, λ と ν が上付きと下付きのペアになっているので, これらについての総和をとることを意味する。記述はかなりすっきりしているが, ペアになった添え字を見たときに総和を想像するには慣れが必要である。しかし, 慣れてしまえば, 総和記号を書くのが煩わしく思えてくる。

当然の事実であるが, 総和の規約に慣れないうちに見落としそうな性質を補足しておく。その性質は, $A^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda}$ と $A^{\mu}{}_{\varepsilon} x^{\varepsilon}$ の関係である。それらの関係は, 総和記号を用いて,

$$\sum_{\lambda=1}^{n} A^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda} = \sum_{\varepsilon=1}^{n} A^{\mu}{}_{\varepsilon} x^{\varepsilon},$$

のように書けることから明らかである。つまり, 両者は等しいのである。言い換えると, 総和の対象となる添え字を別の文字で置き換えても構わない。総和の対象となる添え字は, 0 から $n-1$ まで変化するのであるから, どの文字で表現されるかは本質ではないのである。この事実を利用した例として,

$$A^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda} - A^{\mu}{}_{\beta} y^{\beta} = A^{\mu}{}_{\kappa} x^{\kappa} - A^{\mu}{}_{\kappa} y^{\kappa} = A^{\mu}{}_{\kappa} (x^{\kappa} - y^{\kappa}),$$

は成立する。当たり前な性質であるが, リーマン幾何学の計算を都合よく進めていく上で, これは重要な性質である。

1.4 行列式

行列の表記が出てきたので, 行列式についても説明しておこう。行列式の性質などは, 線形代数の予備知識があれば知っているだろうが, アインシュタインの総和規約に慣れるためだと思って読むとよいだろう。さて, n 次の正方行列 $A^{\mu}{}_{\nu}$ に関して行列式は,

$$\det A = \epsilon^{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n} A^{1}{}_{\sigma_1} A^{2}{}_{\sigma_2} \cdots A^{n}{}_{\sigma_n},$$

と定義されている。ここで, 添え字 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ にはアインシュタインの総和の規約が適用されている。何度見てもわかりづらい定義式であるが, この数式に含まれる $\epsilon^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}$ はレビ・チビタの記号と呼ばれ, 添え字 $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ の順序に依存する係数である。基準となる組み合わせ $(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n) = (1, 2, \ldots, n)$ に対して, 任意の添え字を偶数回の交換で得られる並びを偶置換, 奇数回の交換で得られる並びを奇置換というが, レビ・チビタの記号は,

$$\epsilon^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} = \begin{cases} 1 & (\text{偶置換}), \\ -1 & (\text{奇置換}), \\ 0 & (\text{それ以外の場合}), \end{cases}$$

となる。 これだけではわかりにくいであろうから, 3 次の場合を例に挙げて説明しよう。あらゆる $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$ の組み合わせについて組み合わせに対するレビ・チビタ記号を書くと表 1.1 のようになる。この表に示すように, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ に 2 つ以上同じ添え字が存在する場合にはレビ・チビタ記号がゼロとなっている。つまり, 27 通りある $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の組み合わせのうち, レビ・チビタ記号がゼロでないのはたったの 6 通りである。

表 1.1: 3 次元のレビ・チビタ記号

$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	ϵ	置換手順	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	ϵ	置換手順	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	ϵ	置換手順
111	0		211	0		311	0	
112	0		212	0		312	1	123→321→312
113	0		213	-1	123→213	313	0	
121	0		221	0		321	-1	123→321
122	0		222	0		322	0	
123	1	123	223	0		323	0	
131	0		231	1	123→213→231	331	0	
132	-1	123→132	232	0		332	0	
133	0		233	0		333	0	

この表を参照しながら 3 次正方行列 $A^\mu{}_\nu$ の行列式を展開すると,

$$\begin{aligned} \det A = \quad & A^1{}_1A^2{}_2A^3{}_3 - A^1{}_1A^2{}_3A^3{}_1 + A^1{}_2A^2{}_3A^3{}_1 \\ & - A^1{}_2A^2{}_1A^3{}_3 + A^1{}_3A^2{}_1A^3{}_2 - A^1{}_3A^2{}_2A^3{}_1, \end{aligned}$$

が得られる。この結果は, 3 次正方行列の行列式を計算するサラスの公式と一致する。このような例を挙げてみると, なんとなくわかったような気がするであろう。さて, 実際に行列式の定義式から計算をしようとすると, 表 1.1 を書いて, 明示的にゼロなる項を除外して残った項をすべて項を書き下し... ということは, 和をとる項の数は, 4 次正方行列では 24 項, 5 次では 120 項, n 次では $n!$ 項... とんでもない数である。行列式を計算するには,

次数が大きくなると定義にしたって計算するわけにいかないので, 行列式の性質を利用して簡単に計算する。

1.4.1　行列式の性質

上で述べたように, 定義にしたがって行列式を展開すると次数 n に対して, 項数が $n!$ となる。次数が大きくなると項数の増大が甚だしいのだ。数値計算においては, 定義式ではなく, もっと効率的な方法で行列式を計算できる。そのための性質をあげておこう。

性質 1　行列を転置しても行列式は変化しない。形式的に書くと,

$$\det {}^{\mathrm{t}}A = \det A, \tag{1.1}$$

なる数式が成立する。なお, 左肩の添え字 t は転置行列を与える。

証明　この性質の証明には行列式の定義式を用いればよい。行列式の定義式:

$$\det A = \epsilon^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} A^1{}_{\sigma_1} A^2{}_{\sigma_2} \cdots A^n{}_{\sigma_n},$$

について, 右辺のゼロ以外の項は $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ がすべて異なる数字のときである。よって, 下付き添え字が連番になるように定義式を書き換えることが可能である。その場合, 上付き添え字がどのように並べ替えられるかを考えなければならない。上付き添え字 $(1, 2, \ldots, n)$ から下付き添え字 $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n1})$ を得る操作を σ と書くことにする。下付き添え字が $(1, 2, \ldots, n)$ の順になるためには, σ と逆の操作, すなわち, σ^{-1} を実行すればよい。すると, 上付き添え字は $(1, 2, \ldots, n)$ に σ^{-1} を適用した並びになっているはずである。その並びを $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ と書いたとすると, 行列式の定義式は,

$$\det A = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n} \epsilon^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} A^{\lambda_1}{}_1 A^{\lambda_2}{}_2 \cdots A^{\lambda_n}{}_n,$$

と書き換えられる。ここで, 添え字が λ と σ のようにペアでなくなり, アインシュタインの総和の規約が使えなくなったため, あえて総和記号を記述した。ところで, σ が偶置換なら, その逆操作である σ^{-1} も偶置換, σ が奇置換なら σ^{-1} も奇置換であることを考えると, レビ・チビタ記号 $\epsilon^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}$ を $\epsilon_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}$ で置き換えてもよいことに気づく。よって, 行列式は,

$$\det A = \epsilon_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} A^{\lambda_1}{}_1 A^{\lambda_2}{}_2 \cdots A^{\lambda_n}{}_n, \tag{1.2}$$

と書いてもよいことがわかる。ここでは再び, アインシュタインの総和の規約が適用されている。もともとの行列式の定義が列に沿った展開 (下付き添え字

についての総和) になっているのに対し, 新しい定義式は行に沿った展開になっている。別の見方をすると, 転置行列を列に沿って展開する式になっている。よって, 行列を転置しても行列式の値は変化しない。¶

転置しても行列式が変化しないので, 行ベクトルに注目して書かれていた行列式の定義を, 列ベクトルに注目して読み替えることが可能になった。その性質から得られる恩恵がある。行列式の性質を記述していくうえで, 行列 $A^{\mu}{}_{\nu}$ を,

$$\begin{bmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & \ldots & A^n{}_n \end{bmatrix} \equiv [\ \boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\ ],$$

のように列ベクトル $\boldsymbol{a}_\nu$ を用いた議論ができるのだ。これにどのような効果があるかというと, 紙面の節約になるのだ。

性質 2　行列中の任意の列を k 倍した場合, 行列式は k 倍される。すなわち

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & k\boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix},$$

が成り立つということである。

証明　この性質を示すのは簡単である。この性質についても行列式を用いるのだ。定義式から行列式を数式変形すると,

$$\begin{aligned} &\epsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} A^{\sigma_1}{}_1 A^{\sigma_2}{}_2 \cdots k A^{\sigma_i}{}_i \cdots A^{\sigma_n}{}_n \\ &\qquad = k\, \epsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} A^{\sigma_1}{}_1 A^{\sigma_2}{}_2 \cdots A^{\sigma_i}{}_i \cdots A^{\sigma_n}{}_n, \end{aligned}$$

が得られるので証明できる。¶

この性質の系として, すべての成分がゼロとなる列が存在した場合, 行列式がゼロとなる。なぜなら, 行列の第 i 列がすべてゼロであるならば, 上の数式について $k = 0$ となる場合に相当するので, 行列式が必然的にゼロになるのだ。

性質 3　任意の列を入れ替えた場合, 行列式の符号が変化する。 すなわち,

$$|\ \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_j \ \cdots \ \boldsymbol{a}_i \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\ | = -\,|\ \boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_i \ \cdots \ \boldsymbol{a}_j \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\ |,$$

なる数式が成立する。

証明　この性質についても定義式に当てはめてみると, 行を入れ替えた場合の行列式:

$$\begin{aligned}&\epsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}A^{\sigma_1}{}_1A^{\sigma_2}{}_2\cdots A^{\sigma_i}{}_j\cdots A^{\sigma_j}{}_i\cdots A^{\sigma_n}{}_n\\&\qquad=\epsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}A^{\sigma_1}{}_1A^{\sigma_2}{}_2\cdots A^{\sigma_j}{}_i\cdots A^{\sigma_i}{}_j\cdots A^{\sigma_n}{}_n,\end{aligned}$$

は, 入れ替える前の行列式:

$$\epsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}A^{\sigma_1}{}_1A^{\sigma_2}{}_2\cdots A^{\sigma_i}{}_i\cdots A^{\sigma_j}{}_j\cdots A^{\sigma_n}{}_n,$$

と比べたとき, すべての項について, 必ず, 添え字 σ_i と σ_j を入れ替える操作が 1 回増えていることがわかる。つまり, 入れ替え前に偶置換だった項が奇置換に, 奇置換だった項が偶置換になるため, すべての項においてレビ・チビタ記号の符号が反転し, 上記のような性質が導き出される。¶

この性質の系として, 同一の行が 2 つ以上存在したとき, 行列式はゼロとなる。なぜかと言うと, 一致する行同士を入れ替えても行列の内容が変わらないので, 行列式は一定である。しかし, 上記性質より, 行を入れ替えると行列式の符号が反転する。この 2 つの条件を満たすには, 行列式がゼロでなければならないからである。行の入れ替えに関する行列式の性質を,

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}A^{\mu_1}{}_{\sigma_1}A^{\mu_2}{}_{\sigma_2}\cdots A^{\mu_n}{}_{\sigma_n}=\epsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}\det A, \tag{1.3}$$

と書くことができる。 この式は, 転置行列の行列式も同じ値であることを利用して,

$$\epsilon^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}A^{\mu_1}{}_{\sigma_1}A^{\mu_2}{}_{\sigma_2}\cdots A^{\mu_n}{}_{\sigma_n}=\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\det A, \tag{1.4}$$

と書いてもよい。添え字が偶置換のときに 1, 奇置換では -1, 同一の添え字が 2 つ異常存在するときにゼロとなるレビ・チビタ記号を利用しているので, この関係式が成り立つことは明らかであろう。

性質 4　ある列が 2 つの列の和で表現されるとき, 行列式はそれぞれの列をもつ行列式の和に等しい。これを形式的に書くと,

$$\begin{aligned}&\left|\;\boldsymbol{a}_1\;\cdots\;\boldsymbol{a}_{i-1}\;\;\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i\;\;\boldsymbol{a}_{i+1}\;\cdots\;\boldsymbol{a}_n\;\right|\\&\quad=\left|\;\boldsymbol{a}_1\;\cdots\;\boldsymbol{a}_{i-1}\;\;\boldsymbol{a}_i\;\;\boldsymbol{a}_{i+1}\;\cdots\;\boldsymbol{a}_n\;\right|+\left|\;\boldsymbol{a}_1\;\cdots\;\boldsymbol{a}_{i-1}\;\;\boldsymbol{b}_i\;\;\boldsymbol{a}_{i+1}\;\cdots\;\boldsymbol{a}_n\;\right|,\end{aligned}$$

なる数式が成立する。

証明　この性質は, 行列式の定義式を用いて,

$$\begin{aligned}&\epsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}A^{\sigma_1}{}_{\mu_1}A^{\sigma_2}{}_{\mu_2}\cdots(A^{\sigma_i}{}_i+B^{\sigma_i}{}_i)\cdots A^{\sigma_n}{}_{\mu_n}\\&\qquad=\epsilon_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}(A^{\sigma_1}{}_{\mu_1}A^{\sigma_2}{}_{\mu_2}\cdots A^{\sigma_i}{}_i\cdots A^{\sigma_n}{}_{\mu_n}+A^{\sigma_1}{}_{\mu_1}A^{\sigma_2}{}_{\mu_2}\cdots B^{\sigma_i}{}_i\cdots A^{\sigma_n}{}_{\mu_n}),\end{aligned}$$

のように数式変形することによって証明できる。¶

この性質に対して前項の性質を取り入れた系として, 行列のある行に, 別の行の定数倍を加算しても行列式は変化しないという性質が得られる。形式的に書くと,

$$\left| \begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i + k\boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array} \right|,$$

となる。詳しく説明すると, 左辺は第 i 列が $\boldsymbol{a}_i$ の行列と, 第 i 列が $k\boldsymbol{a}_j$ である行列の行列式の和である。そのうち, 第 i 列が $k\boldsymbol{a}_j$ である行列の行列式は, 第 i 列が $\boldsymbol{a}_j$ である行列の行列式の k 倍である。第 i 列が $\boldsymbol{a}_j$ である行列は, 第 i 列と第 j 列が等しいので, その行列式はゼロになる。したがって, 左辺は列を加算する前の行列の行列式と等しい。この性質は, 行列式を計算するときによく使われる性質である。

性質 5　行列が 2 つの行列の積であるとき, その行列式は, それを構成する 2 つの行列の行列式の積に等しい。これは形式的には,

$$\det AB = \det A \, \det B, \tag{1.5}$$

なる数式が成立する。

証明　この性質も行列式の定義を用いて,

$$\begin{aligned} \det AB &= \epsilon^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} A^1{}_{\kappa_1} B^{\kappa_1}{}_{\sigma_1} \; A^2{}_{\kappa_2} B^{\kappa_2}{}_{\sigma_2} \cdots A^n{}_{\kappa_n} B^{\kappa_n}{}_{\sigma_n} \\ &= A^1{}_{\kappa_1} A^2{}_{\kappa_2} \cdots A^n{}_{\kappa_n} \, \epsilon^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} B^{\kappa_1}{}_{\sigma_1} B^{\kappa_2}{}_{\sigma_2} \cdots B^{\kappa_n}{}_{\sigma_n} \\ &= A^1{}_{\kappa_1} A^2{}_{\kappa_2} \cdots A^n{}_{\kappa_n} \, \epsilon^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_n} \det B \\ &= \det A \, \det B, \end{aligned}$$

のように計算できることから証明できる。¶

1.4.2　余因子と逆行列

ある n 次の正方行列の任意の行と列を一つずつ抜き取った行列は $n-1$ 次の正方行列となり, その行列の行列式によって定義される値は**余因子**と呼ばれる。余因子はもとの行列の行列式, および, 逆行列と有用な関係があるため, 本節で紹介しておこう。

正方行列 $A^\mu{}_\nu$ に対して, 余因子を $\tilde{A}_\mu{}^\nu$ なる記号で書くことにする。余因子 $\tilde{A}_\mu{}^\nu$ を具体的な行列の形態にて表現すると,

$$\tilde{A}_\mu{}^\nu = (-1)^{\mu+\nu} \begin{vmatrix} A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_{\nu-1} & A^1{}_{\nu+1} & \cdots & A^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{\mu-1}{}_1 & \cdots & A^{\mu-1}{}_{\nu-1} & A^{\mu-1}{}_{\nu+1} & \cdots & A^{\mu-1}{}_n \\ A^{\mu+1}{}_1 & \cdots & A^{\mu+1}{}_{\nu-1} & A^{\mu+1}{}_{\nu+1} & \cdots & A^{\mu+1}{}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & \cdots & A^n{}_{\nu-1} & A^n{}_{\nu+1} & \cdots & A^n{}_n \end{vmatrix},$$

のように定義される。これは行列から第 μ 行と第 ν 列を抜き取った行列の行列式に $(-1)^{\mu+\nu}$ を乗じた値となっている。この余因子が, もとの行列の行列式 $\det A$ との間に,

$$
\begin{aligned}
\det A &= A^1{}_1\tilde{A}_1{}^1 + A^1{}_2\tilde{A}_1{}^2 + \cdots + A^1{}_n\tilde{A}_1{}^n \\
&= A^2{}_1\tilde{A}_2{}^1 + A^2{}_2\tilde{A}_2{}^2 + \cdots + A^2{}_n\tilde{A}_1{}^n \\
&= A^3{}_1\tilde{A}_3{}^1 + A^3{}_2\tilde{A}_3{}^2 + \cdots + A^3{}_n\tilde{A}_3{}^n \\
&\vdots \\
&= A^n{}_0\tilde{A}_n{}^1 + A^n{}_2\tilde{A}_n{}^2 + \cdots + A^n{}_n\tilde{A}_n{}^n,
\end{aligned}
$$

なる関係があることは, 行列式の定義から明らかである。これをさらに形式的に書くために $A^\mu{}_\nu\tilde{A}_\kappa{}^\nu$ なる値[3] を考えてみる。特に, $\mu=\kappa$ であれば, この値は行列式 $\det A$ と一致する。一方, $\mu\neq\kappa$ である場合, この値は κ 行 ν 列の余因子を μ 行に沿って展開した形になっている。 ところで, μ 行の成分は, 余因子 $\tilde{A}_\kappa{}^\nu$ をつくる小行列の中に存在するので, 展開結果は, μ 行と κ 行が等しい行列の行列式となり, 恒等的にゼロとなる。よって,

$$A^\mu{}_\nu\tilde{A}_\kappa{}^\nu = \delta_\kappa{}^\mu \det A, \tag{1.6}$$

となる。この $\delta_\kappa{}^\mu$ はクロネッカーのデルタとよばれ,

$$\delta_\kappa{}^\mu = \begin{cases} 1 & \text{if } \kappa=\mu, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.7}$$

となる値である。ところで (1.6) は行に沿って展開した結果であるが, 行列式は列に沿って展開することもできるので,

$$A^\nu{}_\kappa\tilde{A}_\nu{}^\mu = \delta_\mu{}^\kappa \det A, \tag{1.8}$$

なる関係も成立する。さらに, $\bar{A}^\nu{}_\kappa \equiv \tilde{A}_\kappa{}^\nu/\det A$ なる量を定義すれば,

$$A^\mu{}_\nu\bar{A}^\nu{}_\kappa = \bar{A}^\mu{}_\nu A^\nu{}_\kappa = \delta_\kappa{}^\nu, \tag{1.9}$$

となる。この数式を直接的に解釈すると, $A^\mu{}_\nu$ は $\bar{A}^\nu{}_\kappa$ の**逆行列**である。逆行列とは本来, 数式においてある行列の左側から乗算した結果として単位行列 $\delta_\kappa{}^\nu$ を得るような行列である。しかし, 逆行列は右側から乗算しても単位行列を得ることができるため, 同時に $\bar{A}^\nu{}_\kappa$ は $A^\mu{}_\nu$ の逆行列であると言ってもよい。その事実を証明しておこう。

証明　行列 $B^\mu{}_\nu$ を $A^\mu{}_\nu$ の逆行列とする。そのとき, $A^\mu{}_\alpha\bar{A}^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ の両辺に左側から $B^\kappa{}_\mu$ を作用させると,

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= B^\kappa{}_\mu A^\mu{}_\alpha\bar{A}^\alpha{}_\nu = \delta^\kappa{}_\alpha\bar{A}^\alpha{}_\nu = \bar{A}^\kappa{}_\nu, \\
\text{RHS} &= B^\kappa{}_\mu\delta^\mu{}_\nu = B^\kappa{}_\nu,
\end{aligned}
$$

が得られる。左辺 (LHS) の計算には $B^\mu{}_\alpha A^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ を利用した。この結果, $B^\kappa{}_\nu = \bar{A}^\kappa{}_\nu$ であること, すなわち, $\bar{A}^\kappa{}_\nu$ が $A^\kappa{}_\nu$ の逆行列であることが示せた。¶

[3] アインシュタインの総和の規約が適用されていることに注意。

行列 $\bar{A}^{\mu}{}_{\nu}$ が $A^{\mu}{}_{\nu}$ の逆行列であることから, $\bar{A}^{\mu}{}_{\alpha}A^{\alpha}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ が成立する。クロネッカーのデルタ $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ は対格成分が 1 で他のすべての成分がゼロとなる行列であると考えてよい。そのような対角行列は単位行列と呼ばれる。行列式の定義式から, 単位行列の行列式は 1 である。さらに, (1.5) により, 逆行列の行列式は,

$$\det \bar{A} = \frac{1}{\det A}, \tag{1.10}$$

となる。逆行列の行列式は, もとの行列の行列式の逆数である。この関係式によると, $\det A = 0$ のとき, 逆行列の行列式が定義できない。つまり, $\det A = 0$ のとき逆行列が存在しないことを意味する。この性質から, 逆行列が存在しない条件を書くと,

- 行列にゼロベクトルとなる列ベクトルが少なくとも一つ含まれる。
- 行列に含まれる列ベクトルの一次結合で表される列ベクトルが行列の中に存在する。

となる。これは, 既にあげた行列式の性質から明らかである。また, 行列を転置しても行列式は不変であるので, 上の記述における列ベクトルを行ベクトルと書き換えても同様に逆行列が存在しない条件となる。

1.4.3 連立 1 次方程式の解

逆行列は連立 1 次方程式の解法として利用することができる。例えば, 方程式の未知数をベクトルとして並べ x^{ν} とする。そのベクトルに定数の変換行列 $A^{\mu}{}_{\nu}$ を作用させた結果が定数ベクトル y^{μ} であるとする。このとき形式的に,

$$A^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = y^{\mu},$$

なる数式で記述できる。あっさりと一つの数式で記述しているが, この方程式は, ベクトルの次数が n であるなら, $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$ に対応し, n 個の方程式が存在することを意味する。行列 $A^{\mu}{}_{\nu}$ の逆行列を $\bar{A}^{\mu}{}_{\nu}$ としよう。このとき, $\bar{A}^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\alpha}{}_{\nu}$ であることに注意すると,

$$x^{\alpha} = \bar{A}^{\alpha}{}_{\mu}y^{\mu},$$

が得られる。つまり, 方程式の右辺に記述されていた定数ベクトル y^{μ} に変換行列の逆行列 $\bar{A}^{\alpha}{}_{\nu}$ を作用させることによって連立方程式を解くことができるのである。

前項で余因子行列 $\tilde{A}_{\kappa}{}^{\nu}$ を用いて $\bar{A}^{\nu}{}_{\kappa} = \tilde{A}_{\kappa}{}^{\nu}/\det A$ のように逆行列を定義した。その定義を利用すれば, 連立 1 次方程式の解を別の形式で記述できそうだ。復習をしておくと, 余

因子行列の第 κ 行, 第 ν 列の成分 $\tilde{A}_\kappa{}^\nu$ は, 行列 A の第 ν 行と第 κ 列を取り除いた行列の行列式に $(-1)^{\kappa+\nu}$ を乗じた値である。余因子行列を用いると, 連立方程式の解は,

$$x^\alpha = \bar{A}^\alpha{}_\mu y^\mu = \frac{1}{\det A}\tilde{A}_\mu{}^\alpha y^\mu,$$

のように記述できる。行列式と余因子行列の関係式 (1.8) に注意すると, 連立方程式の解は,

$$x^\alpha = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_{\alpha-1} & y^1 & A^1{}_{\alpha+1} & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & \cdots & A^2{}_{\alpha-1} & y^2 & A^2{}_{\alpha+1} & \cdots & A^2{}_n \\ A^3{}_1 & \cdots & A^3{}_{\alpha-1} & y^3 & A^3{}_{\alpha+1} & \cdots & A^3{}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & \cdots & A^n{}_{\alpha-1} & y^n & A^n{}_{\alpha+1} & \cdots & A^n{}_n \end{vmatrix}, \tag{1.11}$$

なる形で書き換えられる。この数式は, 変換行列 A の第 α 列ベクトルを定数列ベクトル $\boldsymbol{y}$ で置き換えた行列の行列式に, $\det A$ の逆数を乗じた積が未知数 x^α に等しいことを意味している。導出された公式 (1.11) はクラメルの公式と呼ばれる。この公式は, 手計算では 3 元 1 次までの連立方程式の解法に用いられる。

クラメルの公式によると, 連立方程式の解 x^α の分母が $\det A$ であるので, $\det A = 0$ のとき解が定義できない。それは何を意味しているのか? 行列式 $\det A = 0$ の場合, 解が特定できない場合と, 解が存在しない場合とがある。解が特定できない場合とは,

$$x^1 + \ \ x^2 = 2,$$

$$2x^1 + 2x^2 = 4,$$

がその一例である。この例では, 連立方程式のように見えるが, 第 2 の方程式も $x^1 + x^2 = 2$ である。つまり, 未知数が二つあるのに方程式が一つしかない。このように方程式が解くべき道数より少ない状態を「ランクが足りない」という。ランクが足りない状態では, 未知数が一意的な数値として定まるのでなく, $x^1 = 2 - x^2$ のような関係で与えられる。つまり, ランクが足りない状態は解が存在しないという状態ではない。一方, 解が存在しない状態の一例は,

$$x^1 + \ \ x^2 = 2,$$

$$2x^1 + 2x^2 = 3,$$

である。これらの方程式は, 第 2 式の左辺が第 1 式の 2 倍であるのに, 右辺がその関係にないのだ。つまり, この方程式は矛盾するため, 解が存在しない。実は, 解が特定できないのか, 存在しないのか, を見分ける方法がある。先ほどの二つの例について, x^1 を与えるクラメルの公式における分子を計算すると,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

となる。解が特定できない時はクラメルの公式の分子もゼロとなる。分子がゼロでなければ解が存在しない。行列式は, このように連立方程式の解の存在を調べるために有用である。

1.5　斜交座標系の計量

それでは幾何学らしい話題に入っていこう。とは言っても, まだ, 曲がった空間を扱わず, 斜交座標系に関してベクトルの取り扱いを調べてみる。幾何学的直感を使う場合, 座標軸が直線である座標系のほうが理解しやすいはずである。これまで詮索しないという約束で使っていた上付き添え字と下付き添え字の意味が見え始めてくるであろう。

1.5.1　ベクトル表記

図 1.2 のような斜交座標系を考えてみよう。 この図は簡単のため, 2 次元の座標系をあらわしているが, ここでの議論は任意の次元について成り立つ。 この座標系の次元が n であれば, n 本の独立な座標軸を設定することができる。 座標軸の各方向について, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を定めよう。これらのベクトルは, 座標系の位置に依存せず, 常に一定である。また, 大きさは 1 であるとは限らない。

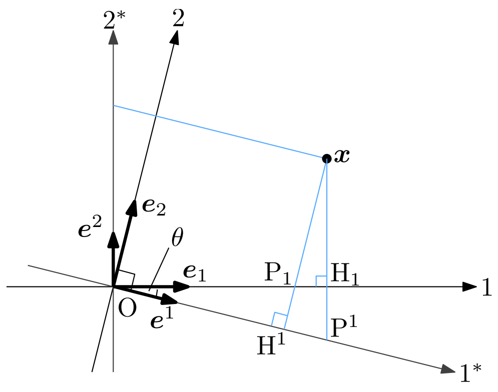


図 1.2: 斜交座標系におけるベクトル

任意のベクトルは, 座標系で設定された基本ベクトルの一次結合で表現できる。つまり, 基準ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ で張られる座標系において, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は,

$$\boldsymbol{x} = x^\mu \boldsymbol{e}_\mu, \tag{1.12}$$

のように表現できるのだ。右肩の μ は指数ではなく, ベクトルの添え字である。つまり, x^μ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の長さを単位とし, その方向に伸びる座標である。ベクトル $\boldsymbol{x}$ の自

分自身との内積を書いてみると,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = (x^\mu \boldsymbol{e}_\mu)\cdot(x^\nu \boldsymbol{e}_\nu) = x^\mu x^\nu (\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu),$$

となる。また, 異なるベクトル $\boldsymbol{y} = y^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ との内積は,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = (x^\mu \boldsymbol{e}_\mu)\cdot(y^\nu \boldsymbol{e}_\nu) = x^\mu y^\nu (\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu),$$

となる。ここで,

$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu, \tag{1.13}$$

なる $g_{\mu\nu}$ を定義すると, 斜交座標系のベクトル x^μ と y^ν の内積は $g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ と書くことができる。 この $g_{\mu\nu}$ は任意の尺度によって計測された座標 x^μ を長さに変換するはたらきがあるため, 計量と呼ばれる。また, ベクトルの内積は可換であるため, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ が成り立ち, 計量は対称行列であることがわかる。

ところで, n 次元空間における内積に関する性質として, 2 次元や 3 次元と同様に,

$$-1 \leq \frac{g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu}{\sqrt{g_{\kappa\sigma}x^\kappa x^\sigma \cdot g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta}} \leq 1, \tag{1.14}$$

なる性質がある。この性質に注目して,

$$\cos\theta \equiv \frac{g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu}{\sqrt{g_{\kappa\sigma}x^\kappa x^\sigma \cdot g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta}},$$

のように書き, その角度 θ をベクトル x^μ と y^μ のなす角と定義する。これは, 2 次元や 3 次元のベクトル解析における角度の定義とも合致する。ところで, 不等式 (1.14) は, ベクトル $x^\mu + t\,y^\mu$ の自分自身の内積を評価することによって導出できる。ここで, t を任意の実数とする。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いてその内積を計算すると,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x^\mu + t\,y^\mu)(x^\nu + t\,y^\nu) &= g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + t(g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu + g_{\mu\nu}x^\nu y^\mu) + t^2 g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu \\ &= g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + t\,(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu})x^\mu y^\nu + t^2 g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu \\ &= g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + 2t\,g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu + t^2 g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu, \end{aligned}$$

となる。特に, 最後の行への数式変形は $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ なる計量テンソルの対称性を利用した。また, 非常に紛らわしいが, t の右肩の数字は添え字ではなく 2 乗を意味する。ところで, ベクトルの自分自身との内積は, そのベクトルの長さの自乗となるので,

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + 2t\,g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu + g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu \geq 0,$$

が成立するはずである。しかも, この不等式は実数 t の値にとは無関係に成立するはずなので, 2 次方程式の判別式からその条件を求めると,

$$(g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)^2 - g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \cdot g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta < 0,$$

が得られる。この不等式の平方根をとれば不等式 (1.14) が導出される。¶

次に, $\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ なる逆ベクトル系 $\boldsymbol{e}^\nu$ を定義しよう。この逆ベクトルは添え字が異なるすべての基本ベクトルと直交する。座標系が 2 次元であれば, 図 1.2 のようなベクトルを想像すればよい。ここで,

$$\boldsymbol{x} = x_\mu \boldsymbol{e}^\mu, \tag{1.15}$$

が成り立つ新たな座標 x_μ を定義してみる。逆ベクトル系についても

$$g^{\mu\nu} = \boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}^\nu, \tag{1.16}$$

なる量を定義すると, 逆ベクトル系のベクトル x_μ と y_ν の内積は $g^{\mu\nu}x_\mu y_\nu$ と書くことができる。つまり, $g^{\mu\nu}$ は逆ベクトル系の計量である。さらに, (1.12) と (1.15) について, $\boldsymbol{e}_\nu$ との内積をとると

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_\nu = x_\nu = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu)x^\mu = g_{\mu\nu}x^\mu, \tag{1.17}$$

となるので, 任意のベクトル x^μ は, $x_\nu = g_{\mu\nu}x^\mu$ によって逆ベクトル系の座標に変換できる。逆に,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^\nu = x^\nu = (\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}^\nu)x^\mu = g^{\mu\nu}x_\mu, \tag{1.18}$$

となることから, 逆ベクトル系からの逆変換が $x^\nu = g^{\mu\nu}x_\mu$ によって与えられることもわかる。幾何学的に言うと, 座標 x^μ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の μ 軸に対する平行射影を単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の長さで規格化した値である。

例えば, 2 次元の場合なら図 1.2 を見ればわかりやすい。ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}^1$ の長さを, それぞれ, e_1, e^1 とし, それらがなす角を θ とすると, $e_1 e^1 \cos\theta = 1$ が成り立つ。ここで, ベクトル $\boldsymbol{x}$ の 1^* 軸への垂直射影の長さは $\overline{\mathrm{OH}^1} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^1/e^1$ である。ところで, 1 軸上の平行射影 P_1 は, $\boldsymbol{x}$ と H^1 を結ぶ直線上にあるので, $\overline{\mathrm{OP}_1} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^1/e^1 \cos\theta$ となる。この長さを基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の長さで規格化すれば, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^1/e_1 e^1 \cos\theta = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^1$ となるので, ベクトルの座標とは, ベクトルを座標軸に平行投影し, その長さを対応する基本ベクトルの長さで規格化した値であることがわかる。 同様の考察で逆ベクトル系の座標 x_μ も μ 軸への平行射影であることを示すことができる。

ところで, (1.18) と (1.12) を結びつけると,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_\lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^\lambda),$$

が成り立つことがわかる。このベクトル $\boldsymbol{x}$ は任意であるので, $\boldsymbol{e}^\mu = \boldsymbol{e}_\lambda(\boldsymbol{e}^\lambda \cdot \boldsymbol{e}^\mu)$ も成り立つはずである。この両辺に $\boldsymbol{e}_\nu$ を内積すると $(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_\lambda)(\boldsymbol{e}^\lambda \cdot \boldsymbol{e}^\mu) = \delta_\nu{}^\mu$, すなわち, $g_{\nu\lambda}g^{\lambda\mu} = \delta_\nu{}^\mu$ となるので, 通常のベクトル系と逆ベクトル系の計量は, 互いに逆行列の関係にある。そうすると, 計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて通常のベクトル系から逆ベクトル系に変換された成分に対して, $g^{\mu\nu}$ によって通常のベクトル系に変換すると, 必ず, もとの値に戻るということである。

1.5.2 線形変換

斜交座標系の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ を線形変換 $\boldsymbol{e}'_\mu = A_\mu{}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ によって変換した場合を考えよう。これは, $\boldsymbol{e}'$ を基本ベクトルとする新たな座標系を定義することを意味する。新たな座標系でベクトル $\boldsymbol{x}$ を表現すると, $\boldsymbol{x} = x'^\mu \boldsymbol{e}'_\mu$ と書くことができる。一方, 逆ベクトルが $\boldsymbol{e}'^\mu = B^\mu{}_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha$ によって変換されると仮定し, 変換の性質を調べてみよう。当然, 変換後の基本ベクトルについても $\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ が成り立つはずである。この量を計算してみると,

$$\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'^\nu = A_\mu{}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \cdot B^\nu{}_\beta \boldsymbol{e}^\beta = A_\mu{}^\alpha B^\nu{}_\beta\, \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = A_\mu{}^\alpha B^\nu{}_\alpha,$$

となるので, $B^\mu{}_\alpha$ は $A_\alpha{}^\mu$ の逆行列[4]でなければならない。この事実に注意して, 変換後の座標 x'^μ を計算すると,

$$x'^\mu = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}'^\mu = \boldsymbol{x} \cdot B^\mu{}_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha = B^\mu{}_\alpha x^\alpha,$$

なる関係式が得られるので, 座標 x'^μ は逆ベクトル系の基本ベクトルと同じ変換を受けることがわかる。簡単にいうと, 正ベクトル系の基本ベクトルと同一の変換を受ける成分が下付き添え字で表され, 逆ベクトル系の基本ベクトルと同一の変換を受ける成分が上付き添え字を表される。

座標回転　カルテシアン座標を回転させる変換を考えてみよう。図 1.3 は, 反時計回りに角度 θ だけ回転させた例を示している。図に示すベクトル $\boldsymbol{x}$ が座標回転によってどのように変換されるか調べてみよう。座標を θ だけ回転させるということは, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}^1$ と $\boldsymbol{e}^2$ を θ だけ回転させて新たな基本ベクトル $\boldsymbol{e}'^1$ と $\boldsymbol{e}'^2$ をつくるということである。図の

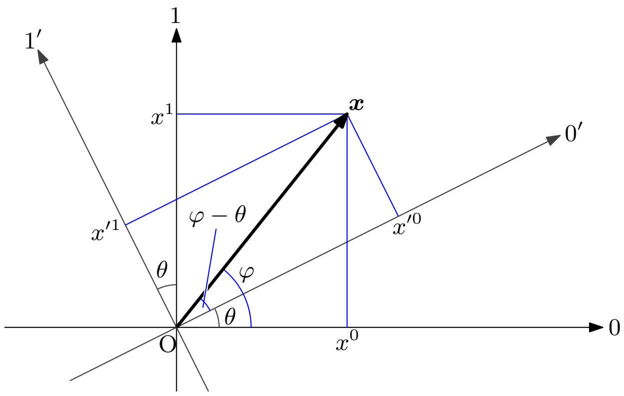


図 1.3: カルテシアン座標系の回転

ような座標回転によって基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 \cos\theta + \boldsymbol{e}_2 \sin\theta, \qquad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 \sin\theta + \boldsymbol{e}_2 \cos\theta,$$

[4]添え字の順序を気にするならば, 逆行列の転置行列である。

のように変換されるはずだ。これらの変換式から, 変換行列が,

$$A_1{}^1 = A_2{}^2 = \cos\theta, \qquad A_1{}^2 = -A_2{}^1 = \sin\theta,$$

であることが確認できる。座標成分 x^μ の変換行列 $B^\mu{}_\nu$ は, $A_\mu{}^\nu$ の逆行列であるから,

$$B^1{}_1 = B^2{}_2 = \cos\theta, \qquad B^2{}_1 = -B^1{}_2 = \sin\theta,$$

である。したがって, 座標回転による座標変換は,

$$x'^1 = x^1\cos\theta - x^2\sin\theta, \qquad x'^2 = x^1\sin\theta + x^2\cos\theta,$$

となるはずだ。この座標変換は, 図 1.3 と比較すると, その正当性がわかるはずだ。一例であるが, 基本ベクトルの変換と座標成分の変換が, 前に述べたとおり逆変換の関係であることが示された。つまり, 座標成分は反変ベクトルの性質を示す。その反変性は図 1.3 を用いて説明すると, 次のようになる。ベクトル $\boldsymbol{x}$ が x^0 軸に対して反時計回りに角度 φ の方向を向いているとする。座標軸を θ だけ回転させたとき, ベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 新たな x'^0 軸と角度 $\varphi-\theta$ をなす方向を向いている。座標軸を θ だけ反時計回りに回転させたことによって, ベクトルと座標軸がなす角度は θ だけ減少したのだ。これが反変性の正体である。

ローレンツ変換　特殊相対性理論における座標変換を調べてみよう。対象となる座標系は, x^0 が時間座標, x^1 が運動方向となる空間座標[5] である。ローレンツ変換は, ある慣性系と相対速度 β で運動する慣性系との間での座標変換を表す。なお, $\beta = 1$ は光速に対応し, 一般の運動物体において $-1 < \beta < 1$ となる。物理学の公式によると, ローレンツ変換は,

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

で与えられる。つまり, 座標変換を与える変換行列は,

$$B^0{}_0 = B^1{}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad B^0{}_1 = B^1{}_0 = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となるわけだ。一方, 基本ベクトルの変換行列 A^ν_μ は B^μ_ν の逆行列だから,

$$A_0{}^0 = A_1{}^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad A_0{}^1 = A_1{}^0 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となる。つまり, 基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}'_0 = \frac{\boldsymbol{e}_0 + \beta\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \boldsymbol{e}'_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

なる変換則にしたがうのだ。得られた基本ベクトルの変換則に基づき変換前と変換後の座標軸を描くと図 1.4 のようになる。横軸を x^0 に描くべきと思うかもしれないが, 特殊相対

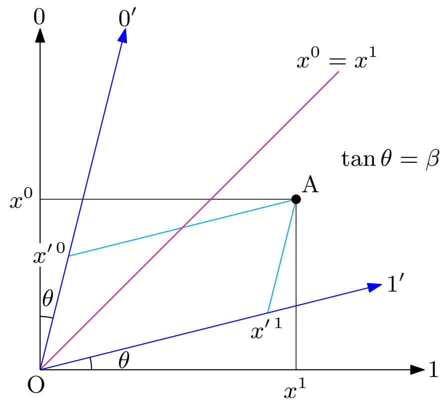


図 1.4: ローレンツ変換

性理論における世界線の描き方にしたがい時間軸 x^0 を縦軸に設定した。変換後の座標系 $[x'^0, x'^1]$ は斜交座標系となるので, 逆ベクトル系は正ベクトル系とは異なる。また, 得られた変換則から明らかなように, ローレンツ変換を受けると基本ベクトルの長さが変化する。ローレンツ変換とは, 相対的に等速運動する慣性系への座標変換であり, パラメータ β が相対速度 ($\beta = 1$ が光速) に相当する。詳しくは説明しないが, 座標変換した後の基本ベクトルの長さが異なることから, 異なる速度で運動する慣性系とは, 区間と時間の長さの尺度が異なる。これは, 相対性理論の効果である長さと時間の収縮現象を表す。

ベクトルの成分が基本ベクトルと逆の変換を受けることは他の例を考えても示すことができる。日常で簡単に体験できることとして, 自分が乗った列車が前に進めば, 車窓から見える景色が後ろに運動するように見える現象がその例である。列車が前に進むことが, 基本ベクトルを前に平行移動させる事である。それに対し, 車窓から見える景色, 例えば, ある木立の位置がベクトルである。後ろに移動して見えるのは, 基本ベクトルの平行移動によって, ベクトル成分がその逆変換として後ろに平行移動されたからである。このように基本ベクトルと逆の変換を受ける成分は**反変成分**と呼ばれる。一方, 逆ベクトル系の座標成分については, $x'_\mu = A_\mu{}^\alpha x_\alpha$ のように, 基本ベクトルと同じ変換を受けるので**共変成分**という。これまでに, 右上に添え字をもつ量と, 右下に添え字をもつ量が出てきていたが, 実は, 前者が反変成分, 後者が共変成分という区別になっていたのである。

1.5.3 カルテシアン座標

しばしば x, y, z の座標で表現されるカルテシアン座標は斜交座標の一種である。ここでも一般的な議論として, n 次元のカルテシアン座標を考えた場合, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ 自

[5]前に述べたように相対性理論は時間軸を第 0 軸にとることが慣習であるので, その慣習にしたがう。

身の内積は, 三平方の定理によって,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2,$$

と書くことができる。この内積が計量を用いて $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ と書けることを思い出すと, カルテシアン座標における計量が $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ となることに気づくであろう。この計量を用いると, カルテシアン座標系の座標 x^μ を逆ベクトル系の座標 x_μ で表現すると,

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \delta_{\mu\nu}x^\nu = x^\mu,$$

となる。つまり, カルテシアン座標系の逆ベクトル系の座標は, 通常の座標と同一である。言い換えると, カルテシアン座標においては, ベクトルの反変成分と共変成分の区別ができないということだ。前節までは, ベクトルの添え字の位置, すなわち, 共変/反変の区別を気にすることなく, 数式を書いていた。それはカルテシアン座標であるから成立していたのだ。一般の計量 $g_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$ をもつその他の座標系においては, ベクトルの反変成分と共変成分は異なる値となるので, 添え字の位置を区別することが必要となってくる。

第2章　曲がった空間の幾何学

いよいよ, リーマン幾何学らしい話題に入っていく。前章ではカルテシアン座標以外に, 斜交座標を取り扱ったが, それは基本ベクトルが定ベクトルとなる単純な座標系であった。本章以降で取り扱う座標系は, 一般的に, 基本ベクトルが定ベクトルでなく, 座標によって変化するような座標系である。 そのため, 必ずしも, 前章で学んだ斜交座標系の性質が成り立つわけではないが, 微小な範囲では近似的に斜交座標系とみなされることを利用して曲がった空間の幾何学を構築する。

2.1　微小変位ベクトルと計量

曲がった空間では基本ベクトルが場所によって異なるため, 位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ と基本ベクトルの関係 (1.12) が成り立たない。しかしながら, 図 2.1 を見ればわかるように, ごく近傍に限るならば, 近似的に斜交座標系とみなしてもよい。そこで, 曲がった空間では (1.12) の代わりに,

$$\boldsymbol{e}_\mu = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\mu}, \tag{2.1}$$

を用いると便利である。ついでに, 基本ベクトルに関する面白い性質をあげておこう。座標系の湾曲が座標に関して 2 階微分可能であるなら,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\nu},$$

が成り立つ。これ以降, 取り扱う座標系はこの関係を使うので, ベクトルは空間座標について 2 回微分が可能であることが取り扱うための条件である。この式に (2.1) を代入すると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\mu}, \tag{2.2}$$

という関係が得られる。リーマン幾何学では, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ を明示的に書くことが少ないが, このような基本ベクトルの性質を知っていると, リーマン幾何学の数式の裏に隠れている性質を理解しやすい。

上で述べたように, 曲がった空間でも, 近傍に限るなら斜交座標系と同じ議論が成り立つ。そこで位置ベクトルの微小変位 $\mathrm{d}x^\mu$ を考え, その微小長さを $\mathrm{d}s$ としてみよう。する

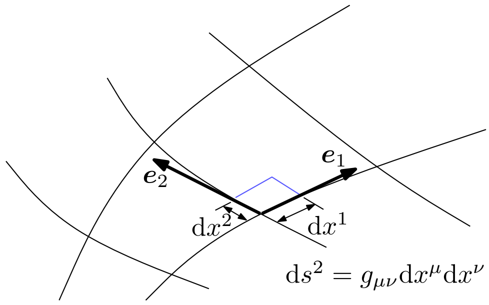


図 2.1: 曲がった空間の計量

と, その微小長さは,

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu, \tag{2.3}$$

と書くことができる。計量 $g_{\mu\nu}$ は斜交座標系と同様に, $g_{\mu\nu} \equiv \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$ と考えればよい。曲がった空間では, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ が場所によって異なるので注意が必要である。斜交座標系のとき, 座標 x^μ が基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の長さを単位として測った数値であることを考えると, ベクトル $\boldsymbol{x}$ を基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ に沿って長さ $\varDelta x^\mu$ だけ移動させると, その移動量は $\varDelta\boldsymbol{x} = \varDelta x^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ となるはずである。その関係式から,

$$\boldsymbol{e}_\mu = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\mu},$$

なる数式で基本ベクトルが表現できることが導かれる。この表記からも, 基本ベクトルが場所 $\boldsymbol{x}$ に依存することがわかる。

球面座標系における基本ベクトル　半径 R の球面における座標系で基本ベクトルと計量を考えよう。球面の場所を特定するには, 天頂角 θ と円周角 φ の二つの座標があればよい。カルテシアン座標 $[x, y, z]$ と球面座標 $[\theta, \varphi]$ との関係は,

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta,$$

のように書ける。カルテシアン座標 $[x, y, z]$ は球面上のベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分であるので, これを θ と φ で偏微分すれば, 球面座標における基本ベクトルをカルテシアン座標で表現することができる。その結果を書くと,

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

が得られる。ここで球面座標系の成分を $x^1 \equiv \theta$, $x^2 \equiv \varphi$ のように割り当て, 計量が $g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$ であることに注意すると,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix},$$

なる計量が得られる。この結果を用いて, 半径 R の球面における微小距離を書くと, $\mathrm{d}s^2 = R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi$ が得られる。この微小距離はベクトル解析で知られている量と一致する。

トーラスの表面における基本ベクトル　トーラスとは図 2.2 に示すようなリング型の形状である。この図は半径 r の円筒を, その中心軸が半径 R の円を描くように曲げた形状を示している。トーラスにおいて, 半径 R のリングは大円, 半径 r の円筒の断面は小円と呼ばれる。そのようなトーラスの表面の 3 次元座標は,

$$x = (R + r\cos\theta)\,\cos\varphi, \quad y = (R + r\cos\theta)\,\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta,$$

となる。トーラスの表面はこの数式に示すように $[\theta, \varphi]$ の二つの座標成分で記述できるわけである。トーラスの表面における基本ベクトルはこれまでと同様に計算するとができ,

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\theta} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -(R + r\cos\theta)\,\sin\varphi \\ (R + r\cos\theta)\,\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

が得られる。ここでトーラスの表面座標の成分を $x^1 \equiv \theta$, $x^2 \equiv \varphi$ のように割り当て, 計量が $g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$ であることに注意すると,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos\theta)^2 \end{bmatrix},$$

なる計量が得られる。この結果を用いると, トーラスの表面における微小距離が $\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + (R + r\cos\theta)^2\mathrm{d}\varphi^2$ であることがわかる。

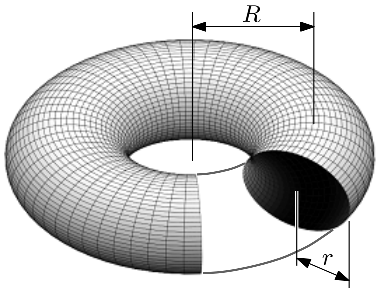


図 2.2: トーラスの形状

2.2　スカラとベクトル

　スカラとベクトルはリーマン幾何学以前から用いられてきた数学量である。スカラは成分をもたない単なる数値であり, ベクトルは方向を表現するため複数の成分をもった数学

量と解釈されているかもしれないが, 実際のところ, それらは座標変換に対する性質に対して呼ばれている名称である。ということで, 座標 x^μ を別の座標 x'^μ に変換したとき, スカラやベクトルがどのように変換されるかを調べてみよう。

準備として, 基本ベクトルの変換を考えてみよう。解析学の公式より,

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\nu},$$

が成り立つので, 基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\boldsymbol{e}_\nu, \tag{2.4}$$

のように変換される。以降のリーマン幾何学では基本ベクトルを明示的に扱うことはないが, 基本ベクトルの変換則がこのようになっていることを知っていると, 後に述べるベクトルの種類が理解しやすくなる。

スカラは単なる成分をもたない数値ではない。スカラ ϕ の定義は, 座標変換をしてもその値 ϕ が不変である量である。形式的には,

$$\phi(x') = \phi(x),$$

なる数式で記述できる。そのような不変量を**スカラ**と呼ぶのである。例えば, $\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ で定義される微小変位の長さはスカラである。なぜなら, 長さという量は座標系に関わらず同一の値になると考えられるからである。疑り深い人のために, きちんと証明することもできる。座標系 x^μ での微小長さ $\mathrm{d}s$ に対して, 座標系 x'^μ の微小長さ $\mathrm{d}s'$ は $\mathrm{d}s'^2 = g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu$ で定義される。ここで, $g_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu)$, $g'_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu)$ の関係に注意して, 微小長さの自乗 $\mathrm{d}s^2$ を計算してみよう。その計算に関して, 上で計算した基本ベクトルの変換を使うと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s'^2 = g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu &= (\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}(\boldsymbol{e}_\kappa \cdot \boldsymbol{e}_\lambda)\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \\
&= \delta_\alpha{}^\kappa\delta_\beta{}^\lambda g_{\kappa\lambda}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta = \mathrm{d}s^2,
\end{aligned}$$

となるので, 微小長さ $\mathrm{d}s$ が座標変換に対して不変な値, すなわち, スカラであることが示された。後にテンソルの性質を学べば, このような計算をせずとも $\mathrm{d}s$ がスカラであることは明らかなのだが, 今のところは基本練習ということであえて証明しておいた。

スカラを偏微分して得られる量 $\partial\phi/\partial x^\mu$ について, 解析学の公式を適用してみると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu},$$

なる関係が得られる。この変換則は, 基本ベクトルの変換則 (2.4) と同じ形をしている。成分表示される任意の量 v_μ について, これと同じ性質:

$$v'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu, \tag{2.5}$$

が成立する場合, その量 v_μ は基本ベクトルと同形という意味で**共変ベクトル**と呼ばれる。

微小変位 $\mathrm{d}x^\mu$ を $\mathrm{d}x'^\mu$ に変換した場合を考えてみよう。このベクトルの変換式は, 解析学の公式 (既に微小長さがスカラであることの証明で使ったが) によって,

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu,$$

となることが容易にわかる。これは基本ベクトルの逆変換と同じ形である。成分表示される任意の量 v^μ について, これと同じ変換則:

$$v^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu, \tag{2.6}$$

が成り立つならば, その量 v^μ は, 基本ベクトルとは反対の性質という意味で, **反変ベクトル**と呼ばれる。ここで示したように, 空間の微小変位ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ は反変ベクトルの一例である。また, カルテシアン座標系を含む斜交座標系では位置座標 x^μ は反変ベクトルとなる。それに対して, 一般の座標系では, (2.6) が成り立たないため, 位置座標 x^μ はベクトルではないことにも注意しておく。

ここに示したように, 共変ベクトルと反変ベクトルは, 座標変換において, 逆の性質をもつ。やはり, 前節の斜交座標系と同様に, 反変ベクトルの添え字は右上に, 共変ベクトルの添え字は右下に書くのが習慣となっている。ベクトルを反変ベクトル, または, 共変ベクトルに分類することは物理学における場の記述などに便利である。

2.3　テンソル

前節で定義したベクトルの性質を拡張して新たな量を定義しよう。二つの反変ベクトル u^μ と v^ν を組み合わせ, 二つの添え字をもつ量 $T^{\mu\nu} \equiv u^\mu v^\nu$ を定義してみる。この量について, (2.6) を適用して座標変換してみると,

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}, \tag{2.7}$$

なる関係が得られる。このような関係が成り立つ量は 2 階の**反変テンソル**と呼ばれる。逆に, 共変ベクトルを用いて $T_{\mu\nu} \equiv u_\mu v_\nu$ なる量を定義した場合, (2.5) を適用すると

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}, \tag{2.8}$$

が成り立つことも容易にわかるであろう。このような量は2階の**共変テンソル**と呼ばれる。ところで, 2階のテンソルにはもう一つの形が考えられる。それは, $T_\mu{}^\nu \equiv u_\mu v^\nu$ のように反変ベクトルと共変ベクトルを組み合わせた場合である。この場合も同様に,

$$T'_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}T_\alpha{}^\beta, \tag{2.9}$$

なる関係が成り立つ。この関係が成り立つ量を2階は**混合テンソル**と呼ばれる。2階のテンソルは, 記述上, 行列に類似した形をしているが, 一般の行列がテンソルであるとは限らないことに注意しておく。テンソルは上で述べたような座標変換に関する性質を満たさなければならない。

さらに, 共変ベクトルと反変ベクトルをいくつも組み合わせて高階のテンソルを定義することができる。例えば, n 階反変, m 階共変の混合テンソル $T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}$ について,

$$T'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_2}}\frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}}T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}, \tag{2.10}$$

の関係が成り立つことは容易に予想できる。このように悪のりをして高階のテンソルを定義することは可能であるが, 物理学などで頻繁に現れるのは2階のテンソルである。一般相対性理論でも, せいぜい4階のテンソルが現れる程度である。また, 前節で定義した反変ベクトルと共変ベクトルは1階のテンソル, そして, スカラは0階のテンソルである。

2.4 計量テンソル

これまでに何度も現れてきた計量 $g_{\mu\nu}$ は2階の共変テンソルである。そのため, $g_{\mu\nu}$ は**計量テンソル**と呼ばれる。計量テンソルは, 単なる2階のテンソルでなく, 非常に重要なテンソルである。計量テンソルの重要性は, 本節の最後に述べることにし, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ のテンソル性を示そう。それは次のように示すことができる。 空間の任意の場所における微小距離 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ は座標変換に対して不変, すなわち, スカラである。つまり,

$$g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu,$$

と書くことができる。既に述べたように, 微小変位ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ は反変ベクトルであるので, 上式の右辺に座標変換を施してみる。すると,

$$g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu,$$

となるので,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}, \tag{2.11}$$

なる関係を得る。ゆえに, 計量 $g_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルである。

また, 逆ベクトル系の計量 $g^{\mu\nu}$ は 2 階の反変テンソルである。これについては, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が 2 階のテンソル, 逆ベクトル系の計量 $g^{\mu\nu}$ が $g_{\mu\nu}$ の逆行列であることを用いれば証明できる。まず, 両者が逆行列の関係にあることを数式で表現すると, $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\mu{}^\nu$ となる。座標変換によって得られる計量についても同じ関係が成り立つと仮定すると, $g'_{\mu\lambda}g'^{\lambda\nu} = \delta_\mu{}^\nu$ が成り立つはずである。ここで, この式の両辺に

$$\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}g^{\eta\kappa},$$

を乗じて, κ, μ, ν について和を計算してみる。左辺 (LHS) と右辺 (RHS) を別々に計算してみると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}g^{\eta\kappa}g_{\alpha\beta}g'^{\lambda\nu} \\
&= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\delta_\kappa{}^\alpha\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}g^{\eta\kappa}g_{\alpha\beta}g'^{\lambda\nu} = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}g^{\eta\kappa}g_{\kappa\beta}g'^{\lambda\nu} \\
&= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\delta_\beta{}^\eta g'^{\lambda\nu} = \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}g'^{\lambda\nu},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{RHS} = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}g^{\eta\kappa}\delta_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa}g^{\eta\kappa} = \delta_\kappa{}^\varepsilon g^{\eta\kappa} = g^{\eta\varepsilon},$$

が得られる。これらを等号で結ぶと,

$$g^{\varepsilon\eta} = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda}g'^{\nu\lambda}, \tag{2.12}$$

となり, 逆ベクトル系の計量 $g^{\varepsilon\eta}$ が 2 階の反変テンソルであることが示された。

計量テンソルは特別なテンソルである。既にみたように, 計量テンソルは線素の 2 次形式を与える係数行列である。その係数行列に空間のすべての情報が詰まっているのである。正確に計量テンソル $g_{\mu\nu}$ がわかれば, その空間の性質がすべてわかるということだ。現時点で, 計量テンソルは単に 2 次軽視を与える係数行列という位置づけに過ぎないが, これから本書で明らかにしていく過程で, すべての空間の性質は計量テンソルから導き出されるのだ。

計量テンソルが線素, すなわち, 微小距離の尺度を与えていることを考えると, 局所的な振る舞いを調べると空間のすべてがわかる, ということだろうか? 現実的にそれは正しいとは言えない。局所的に線素を評価した時点で, 誤差なくけ量テンソルが特定できるならば空間のすべてがわかることになるのだが, 局所的な観測で誤差なく線素を特定することはほぼ不可能である。例えば, 半径 R の球面において, 計量テンソルは $g_{11} = R^2$, $R_{22} = R^2\sin^2\theta$, $g_{12} = g_{21} = 0$ なる要素で構成される。ここで, 球面上の座標として, 天頂

角 $x^1 \equiv \theta$, 方位角 $x^2 \equiv \varphi$ を用いると仮定した。近似的にであるが, 球面の例として地球の表面を考えればよい。計量が正確にわかれば局所的な観測で地球が丸いことがわかるはずなのだ。しかし, $g_{22} = R^2 \sin^2\theta$ なる計量は, 最初から地球が丸いと知っているから設定できるのだ。地球が丸いと知らなければ, 局所的な観測では, x^1 を東向きの長さ, x^2 を北向きの長さとしてとり, $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ としてしまうだろう。これは 2 次元のカルテシアン座標であり, 平面上に描かれた地図の座標系である。このように, 局所的な観測では, 現実的に空間の曲がりを認識できないことの方が多い。実際, 地球が丸いことに人類が気付いたのは紀元前 2500 年頃, ピタゴラスが最初と言われる[1]。しかし, その知識は広く周知されることなく, ルネサンス以降, コペルニクスなどによって再発見されることになる。

局所的な観測による計量テンソルの特定で認識でないなら, どうやって空間を認識するのか? 後に示すように, 曲がった空間では, 平行移動してもベクトルの位置が徐々に変化する。そのベクトルの変化によって, 観測域を広げていくと徐々に不整合が現れる。その不整合は, 後の章で導入するクリストッフェル記号やリーマン・クリストッフェルの曲率テンソルとして現れるのだ。それらの不整合から, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を推測することによって正しい空間の姿がわかってくるのだ。

2.5 反変成分と共変成分の変換

既に定義した共変ベクトルと反変ベクトルは, 別々に存在するものではなく, 計量に依存するものである。共変的な性質と反変的な性質は, 計量テンソルを用いて容易に変換することができるのである。ここでは, その事実を検証してみよう。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ はテンソルの共変成分と反変成分を変換するはたらきをもっている。これを示すために, 反変ベクトル v^ν に $g_{\mu\nu}$ を乗じて縮約をとった値 $g_{\mu\nu}v^\nu$ を考えてみよう。これを座標変換すると,

$$g'_{\mu\nu}v'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}\,\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa}v^\kappa = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\,g_{\alpha\beta}v^\beta,$$

となるので, $g_{\alpha\beta}v^\beta$ が共変ベクトルであることがわかる。一方, 共変ベクトル u^ν については, 逆計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を用いて反変ベクトルに変換することができる。先ほどと同様に,

$$g'^{\mu\nu}u'_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}v_\kappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\,g^{\alpha\beta}v_\beta,$$

となるので, $g^{\alpha\beta}v_\beta$ が反変ベクトルであることが示された。

[1]Devid Deming, "Science and Technology in World History," Volume 1, McFarland & Company, Inc., ISBN 978-0-7864-3932-4, p. 32, 2010.

それでは, 反変ベクトルを $g_{\mu\nu}$ を用いて共変ベクトルに変換した結果を $g^{\mu\nu}$ を用いて反変ベクトルに戻した場合を計算してみよう。すると,

$$g^{\kappa\mu}(g_{\mu\nu}v^{\nu}) = g^{\kappa\mu}g_{\mu\nu}v^{\nu} = \delta_{\nu}{}^{\kappa}v^{\nu} = v^{\kappa},$$

となり, 同一のベクトルに戻ることがわかる。つまり, 計量テンソルによる変換の意味で, 反変ベクトルに対応する共変ベクトルは 1 つしか存在しない。また, その逆も真である。よって, 反変ベクトル v^{μ} に対応する唯一の共変ベクトルを v_{μ} と書くことにすれば,

$$v_{\mu} = g_{\mu\nu}v^{\nu}, \tag{2.13}$$

$$v^{\mu} = g^{\mu\nu}v_{\nu}, \tag{2.14}$$

と書くことができる。これは, 斜交座標系の例で述べた (1.17), (1.18) と同一の関係である。この結果より, 共変ベクトルと反変ベクトルは別々に存在するものではないと結論できる。共変ベクトルと反変ベクトルは, 空間の計量を反変テンソルか共変テンソルのどちらで取り扱うのかに依存するのであって, 共変ベクトルと反変ベクトルが独立に存在するわけはないのだ。したがって, ベクトルの表記は必要に応じて, 共変から反変, またはその逆への変換が常に可能である。

また, ベクトル反変成分と共変成分を掛けて縮約をとった値 $u_{\mu}v^{\mu}$ $(= g_{\mu\nu}v^{\mu}u^{\nu})$ をベクトルの**内積**という。内積は座標変換に対して不変の値, すなわち, スカラであることは容易にわかるであろう。

2.6 ヤコビアン行列と擬テンソル

行列式の定義で用いたレビ・チビタ記号が座標変換に対して面白いふるまいをするので紹介しておこう。レビ・チビタ記号は, 添え字の交換関係を示す記号であるが, 座標変換してみるとテンソルに類似した振る舞いを示すのだ。その前段階として, ヤコビアン行列を思い出してみよう。ヤコビアン行列は, 座標変換において現れる座標成分の偏微分を,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^3} & \cdots & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^3} & \cdots & \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^3} & \cdots & \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^n}{\partial x^3} & \cdots & \dfrac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

のように表記した行列である。さらに, その行列式を $|\partial x'/\partial x|$ をヤコビアンとよぶ。ヤコビアンは解析学において, 積分変数を変換する際に使用されることが多い。既にみたように, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は2階のテンソルであるので, 座標変換について,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta},$$

なる関係が成立する。ここで両辺の行列式を計算すると,

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 g,$$

となる。この計算には, 行列の積の行列式が, 行列式どうしの積に等しいこと, すなわち, $\det(AB) = \det A \det B$ を利用した。この関係式は, しばしば,

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\sqrt{g}, \tag{2.15}$$

という形で用いられる。また,

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} = \delta_\mu{}^\nu,$$

なる関係より, 座標変換の逆変換によるヤコビアン行列は, もとの変換のヤコビアンの逆行列であり,

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = 1, \tag{2.16}$$

が成り立つ。

行列式の定義を用いて, 形式的にヤコビアンを展開すると,

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x'^1}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^2}{\partial x^{\mu_2}}\frac{\partial x'^3}{\partial x^{\mu_3}}\cdots\frac{\partial x'^n}{\partial x^{\mu_n}}, \tag{2.17}$$

のように書かれる。ここで, $\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ は前章で紹介したレビ・チビタ記号である。前章で述べた行列式の性質から, 分母の添え字についてもレビ・チビタ記号を使って,

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\lambda_2}}{\partial x^{\mu_2}}\frac{\partial x'^{\lambda_3}}{\partial x^{\mu_3}}\cdots\frac{\partial x'^{\lambda_n}}{\partial x^{\mu_n}} = \epsilon^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|, \tag{2.18}$$

が成り立つことがわかる。また, ヤコビアン行列の逆行列についても同様の考察によって展開でき,

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x'^{\lambda_2}}\frac{\partial x^{\mu_3}}{\partial x'^{\lambda_3}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\lambda_n}} = \epsilon_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|, \tag{2.19}$$

となることも明らかである。

ところで, レビ・チビタ記号は添え字の並びによって決まる量であるので, 座標変換によって変化することはない。仮に, x' 系におけるレビ・チビタ記号を $\epsilon'^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ と書いた

とするなら, $\epsilon'^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} = \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ が成り立つべきである。この関係を (2.18) に代入すると,

$$\epsilon'^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n} = \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\lambda_2}}{\partial x^{\mu_2}}\frac{\partial x'^{\lambda_3}}{\partial x^{\mu_3}}\cdots\frac{\partial x'^{\lambda_{n1}}}{\partial x^{\mu_{n1}}}\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \epsilon^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}, \tag{2.20}$$

なる式を得る。これを見ると, レビ・チビタ記号がテンソルのように見えてくる。しかしながら, 余計な因数 $|\partial x/\partial x'|$ があるので, レビ・チビタ記号はテンソルではない。当然, (2.19) についても同様のことが言えるので,

$$\epsilon'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n1}} = \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x'^{\lambda_2}}\frac{\partial x^{\mu_3}}{\partial x'^{\lambda_3}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\lambda_n}}\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \epsilon_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}, \tag{2.21}$$

が成り立つはずである。テンソルではないが, (2.20) のような変換則をもつ量を**擬テンソル**, さらに, (2.21) のような変換則をもつ量を**擬テンソル密度**という。つまり, レビ・チビタ記号 $\epsilon^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}$ は擬テンソルである。

上に述べた事実に基づき, レビ・チビタ記号を用いてテンソルを作ることができる。まず, (2.20) の両辺に $1/\sqrt{g'}$ を乗じた量を計算してみよう。この計算に関して, (2.15) の関係に注意すると,

$$\frac{1}{\sqrt{g'}}\epsilon'^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\lambda_2}}{\partial x^{\mu_2}}\frac{\partial x'^{\lambda_3}}{\partial x^{\mu_3}}\cdots\frac{\partial x'^{\lambda_n}}{\partial x^{\mu_n}}, \tag{2.22}$$

となる。同様に, (2.15) の関係にしながら (2.21) の両辺に $\sqrt{g'}$ を乗じると,

$$\sqrt{g'}\,\epsilon'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n} = \sqrt{g}\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x'^{\lambda_2}}\frac{\partial x^{\mu_3}}{\partial x'^{\lambda_3}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\lambda_n}}, \tag{2.23}$$

が得られる。つまり, $\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}/\sqrt{g}$ が反変テンソルであり, $\sqrt{g}\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ が共変テンソルになっているのである。

2.7 対称テンソルと反対称テンソル

物理学で用いるテンソルは, 対称性をもつことが多い。ここでは, 対称性をもつテンソルについて紹介しておこう。一つは対称テンソル, もう一つは反対称テンソルである。

テンソル $T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}$ が, 任意の二つの添え字を交換しても値が等しい交換条件:

$$T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_j\cdots\mu_{r-1}} = T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_j\cdots\mu_i\cdots\mu_{r-1}}, \tag{2.24}$$

が成立する場合, そのテンソルは**対称テンソル**と呼ばれる。反変テンソルに限らず, 共変テンソルであってもこの関係が成り立てば対称テンソルと呼ばれる。例えば 2 階のテンソルの場合,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu},$$

が成立する。見かけの上では, 2 階の対称テンソルは対称行列に類似している。既に出てきた例をあげると, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆行列 $g^{\mu\nu}$ は対称テンソルである。物理学では対称テンソルといえば 2 階のテンソルくらいしか見かけないが, 3 階テンソルの場合には,

$$T^{\lambda\mu\nu} = T^{\lambda\nu\mu} = T^{\nu\lambda\mu} = T^{\nu\mu\lambda} = T^{\mu\nu\lambda} = T^{\mu\lambda\nu},$$

なる添え字の交換関係が成り立ち, 等しくなるテンソルの成分が 6 個存在する。さらに, r 階のテンソルに対称テンソルを発展させると, テンソル成分 $T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}$ に等しくなるテンソルの成分は, 自分自身を入れて $r!$ 個も存在する。そう考えると, 対称テンソルの独立成分の数は, 全成分の数 n^r に比べて非常に小さいと予想される。対称テンソルの独立成分の数は, 後で考えることにする。

反対称テンソルは, 任意の添え字の入れ替えに対して, テンソル成分の数値の符号が入れ替わる:

$$T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_j\cdots\mu_{r-1}} = -T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_j\cdots\mu_i\cdots\mu_{r-1}}, \tag{2.25}$$

なる交換関係が成り立つテンソルのことを言う。当然, 共変テンソルの添え字の入れ替え関してこの性質が成り立てば, そのテンソルはやはり反対称テンソルである。この交換関係からわかることとして, 反対称テンソルの成分は, T^{01231} のように添え字に同じ数字が重複する場合, 必然的にゼロになる。つまり, ゼロではない反対称テンソルの成分は, その添え字がすべて異なる値である。したがって, n 次元の反対称テンソルの階数 r には上限があり, その上限値は $r = n$ である。例えば, 2 階のテンソルについて交換関係を書くと,

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu},$$

である。この性質をもつテンソルは本書ではまだ現れていないが, 2 階の反対称テンソルは物理学でもよく現れる。さらに, 3 階のテンソルの反対称テンソルには,

$$T^{\lambda\mu\nu} = -T^{\lambda\nu\mu} = T^{\nu\lambda\mu} = -T^{\nu\mu\lambda} = T^{\mu\nu\lambda} = -T^{\mu\lambda\nu},$$

なる交換関係が成り立つ。一般的な r 階の反対称テンソルの任意の成分 $T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}$ は, 対称テンソルの場合と同様に, 従属関係にある成分が自分自身を含め $r!$ 個存在する。さらに, 上で述べたように, 反対称テンソルの成分は, 重複する添え字をもつ場合, 必然的にゼロになるので独立成分の数は対称テンソルよりもかなり少ない。空間が n 次元で, r 階の反対称テンソルの独立な成分の数は, n 個の整数から r 個を選び出す組み合わせの数であるので,

$$N_{-}(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \tag{2.26}$$

となる。例えば, 4 次元の反対称テンソルの場合, 2 階のテンソルなら独立成分は 6 個, 3 階のテンソルなら 4 個しかない。さらに, 4 階のテンソルでは独立成分は 1 個しか存在しないのである。

さて, 先ほど後回しにした対称テンソルの独立成分の数はどうであろうか。いきなり結果を書くと, n 次元の r 階の対称テンソルの独立な成分の数は,

$$N_+(n,r)=\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}, \tag{2.27}$$

となる。順を追ってこの関係式を導いてみよう。例えば, 5 次元の 3 階テンソルを考えると, その独立な成分は,

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1,1), & (1,1,2), & (1,1,3), & (1,1,4), & (1,1,5), \\
(1,2,2), & (1,2,3), & (1,2,4), & (1,2,5), & (1,3,3), \\
(1,3,4), & (1,3,5), & (1,4,4), & (1,4,5), & (1,5,5), \\
(2,2,2), & (2,2,3), & (2,2,4), & (2,2,5), & (2,3,3), \\
(2,3,4), & (2,3,5), & (2,4,4), & (2,4,5), & (2,5,5), \\
(3,3,3), & (3,3,4), & (3,3,5), & (3,5,5), & (3,4,5), \\
(3,5,5), & (4,4,4), & (4,4,5), & (4,5,5), & (5,5,5)
\end{array}$$

のように, すなわち, 添え字の値が $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3 \le \cdots$ となるように成分を並べればよい。この組み合わせをつくるには, まず, 図 2.3 の Step 0 のように, 8 $(= 5+3)$ 個の円を横に並べる。続いて, 最も左を除く 7 $(= 5+3-1)$ 個の円のうち 3 個を選んで塗りつぶす (Step 1)。塗りつぶす円の選び方は, 最も左の円を選ばない, 重複した円を選ばない, という規則さえ守られていれば自由である。例えば, 連続した 3 つを選んでもよい。次のステップ (Step2) として, 塗られていない円に左から順に番号をつける。左側の塗りつぶされた円から順に, それらのすぐ左に位置する数値を読み取っていけば, 対称テンソルの独立成分の組み合わせが得られる。図 2.3 の例では, $(2,4,4)$ が得られる。上に書いた規則か

$$\begin{array}{lcccccccc}
\text{Step 0:} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\text{Step 1:} & \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ \\
\text{Step 2:} & 1 & 2 & \bullet & 3 & 4 & \bullet & \bullet & 5
\end{array}$$

図 2.3: 5 次元 3 階の対称テンソルの独立成分の選び方の例

ら, 5 次元 3 階の対称テンソルの独立成分の数は, 8 個の円から塗りつぶす 3 個を選ぶ組み合わせの数であるので, その数は $7!/(3!\cdot 4!) = 35$ となり, 上に書き下した独立成分の数と一致していることがわかるだろう。これを一般化して, n 次元 r 階の対称テンソルを考えた場合, その独立成分の数は, $n+r-1$ 個の円から塗りつぶす r 個を選ぶ組み合わせの数となる。したがって,

$$N_+(n,r)=\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!},$$

が得られる。相対性理論で扱われる 4 次元空間における対称テンソルの場合, 2 階テンソルならば 10 個, 3 階テンソルならば 20 個, 4 階テンソルならば 35 個の独立成分が存在する。

既に述べたように, 反対称テンソルでは異なる添え字に同一の数字が現れる場合, そのテンソル成分が必然的にゼロとなる。そのような成分の数は, 対称テンソルの独立成分と反対称テンソルの独立成分の数の差で表すことができる。例えば, n 次元空間の場合, 2 階の反対称テンソルでは n 個, 3 階の反対称テンソルでは n^2 個, 4 階の反対称テンソルでは $(n^2+1)n/2$ 個が必然的なゼロ成分である。具体例として, 相対性理論が扱う 4 次元時空における反対称テンソルの必然的なゼロ成分は, 2 階テンソルでは 4 個, 3 階テンソルでは 16 個, 4 階テンソルでは 34 個である。

2.8 面積素と体積素

取り扱っている n 次元空間の微小座標変位 $\mathrm{d}x^\mu$ で囲まれる平行超立体の微小体積 (体積素) を考えてみよう。平行超立体の微小体積は, n 次元空間の積分を記述するときに必要要素であり, その微小体積が座標変換に対してどのように振る舞うのかが興味のあることである。

いきなり n 次元というのも想像しにくいだろうから 2 次元から始めよう。その場合, 微小変位 $\mathrm{d}x^1$ と $\mathrm{d}x^2$ で張られる平行四辺形の面積が 2 次元における体積素 (面積素) である。曲がっている空間を取り扱っているとはいえ, 微小な面積を取り扱うので, 空間の曲がりを気にすることなく, 斜交座標と同じように考えればよい。注意すべきことは, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が直交しているとは限らず, しかも, 基本ベクトルの長さも 1 とは限らないということである。つまり, 面積素は単に $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$ になるのではなく, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が張る平行四辺形の面積に $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$ を乗じた積である。基本ベクトルがなす平行四辺形は図 2.4 のような図形を考えるとよい。ここで, 2 つの基本ベクトルのなす角を α とし, $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の長さを, それぞれ, e_1, e_2 としよう。そのとき, それらの基本ベクトルが張る平行四辺形の面積の自乗 S^2 は,

$$
\begin{aligned}
S^2 &= (e_1 e_2 \sin\alpha)^2 = (e_1)^2(e_2)^2 - (e_1 e_2 \cos\alpha)^2 \\
&= (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2) - (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)^2,
\end{aligned}
$$

となる。さらに, 計量テンソルが $g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu$ であることを思い出すと, 上の結果は,

$$
S^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},
$$

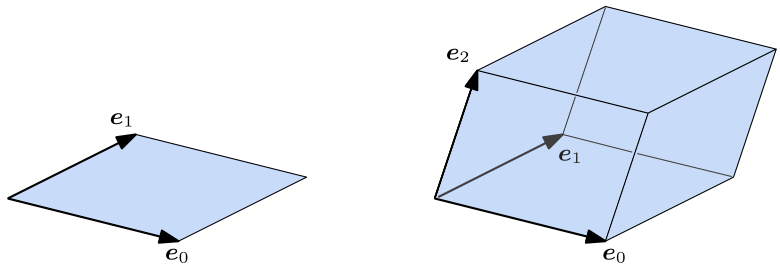
となる。つまり, 2 次元の場合, 微小変位 $\mathrm{d}x^1$ と $\mathrm{d}x^2$ が張る面積素は $\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$ と書くことができる。

次に 3 次元の場合を考えてみよう。基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ とし, それらの長さを, それぞれ, e_1, e_2, e_3 とする。さらに, $\boldsymbol{e}_\mu$ と $\boldsymbol{e}_\nu$ のなす角を $\theta_{\mu\nu}$ とする。この場合の体積素は, 3

つの基本ベクトルが張る平行 6 面体の体積を $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 倍した量である。まず, 3 つの基本ベクトルが張る平行 6 面体の体積の自乗 V^2 は,

$$V^2 = \begin{vmatrix} (e_1)^2 & e_1e_2\cos\theta_{12} & e_1e_3\cos\theta_{13} \\ e_2e_1\cos\theta_{21} & (e_2)^2 & e_2e_3\cos\theta_{23} \\ e_3e_1\cos\theta_{31} & e_3e_2\cos\theta_{32} & (e_3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},$$

となる。したがって, 3 次元の面積素も $\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ と表すことができる。以上の考察を n 次元に拡張すると, n 次元の体積素は $\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n$ となる。



(a) Two dimensional.　(b) Three dimensional.

図 2.4: 2 次元と 3 次元の体積素の例

座標系 x^μ から異なる座標系座標系 x'^μ に変換した場合, 体積素がどのように変換されるか考えてみよう。ここで, 計量テンソルの行列式の座標変換と, 重積分におけるヤコビの定理を用いると,

$$\begin{aligned} \sqrt{g'}\,\mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2\cdots\mathrm{d}x'^n &= \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\sqrt{g}\cdot\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n \\ &= \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n, \end{aligned} \tag{2.28}$$

が得られる。つまり, 体積素は座標の選び方には無関係, すなわち, スカラである。座標変換によって座標を変換したとはいえ, 体積自体が変化してはならないので, 当然として成立する事実が導出できたわけだ。

2.9　面テンソルと立体テンソル

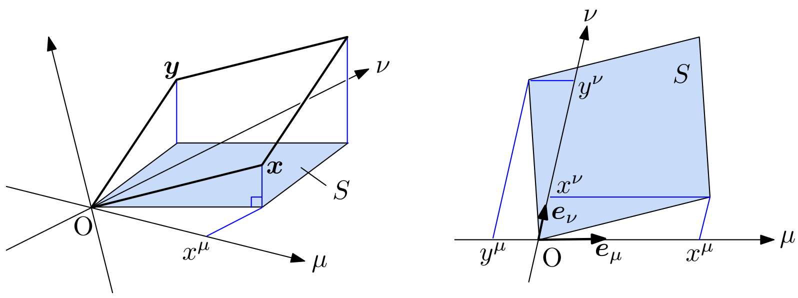
本節では面テンソルと立体テンソルを紹介しよう。まず, n 次元空間に 2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = x^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda$ と $\boldsymbol{y} = y^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda$ がある。この 2 つのベクトルが張る平行四辺形について考えてみよう。この平行四辺形を, $\boldsymbol{e}_\mu$ と $\boldsymbol{e}_\nu$ が張る平面 ($\mu\nu$ 平面と呼ぶことにする) に投影してできる平行四辺形を考えよう。その投影面上の平行四辺形は, $x^\mu\boldsymbol{e}_\mu + x^\nu\boldsymbol{e}_\nu$ と $y^\mu\boldsymbol{e}_\mu + y^\nu\boldsymbol{e}_\nu$ によって張られる平行四辺形となるはずである。その $\mu\nu$ 平面に投影された平行四辺形の面積は,

$$S = (x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu)S_{(\mu)(\nu)},$$

となる。ここで, $S_{(\mu)(\nu)}$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ と $\boldsymbol{e}_\nu$ が張る平行四辺形の面積である。また, この面積の添え字に括弧をつけているのは, μ と ν についてアインシュタインの総和の規約を適用しないことを意味する。面積 S を基本ベクトルが張る平行四辺形の面積 $S_{(\mu)(\nu)}$ で割った商:

$$\xi^{\mu\nu} = x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu, \tag{2.29}$$

は, 2 階の反変テンソルである。このテンソルは, 定義式からわかるように, $\xi^{\mu\nu} = -\xi^{\nu\mu}$ なる反対称性がある。このように定義された 2 階の反対称テンソルを**面テンソル**と呼ぶ。



(a) Perspective. (b) $\mu\nu$-plane.

図 2.5: 空間中の平行四辺形とその投影図

同様の定義が 3 階のテンソルに関しても可能である。三つのベクトル $\boldsymbol{x} \equiv x^\mu \boldsymbol{e}_\mu$, $\boldsymbol{y} \equiv y^\mu \boldsymbol{e}_\mu$, $\boldsymbol{z} \equiv z^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ は平行 6 面体を張る。次元数が 3 を超える空間での射影なので理解に苦しむかもしれないが, その平行 6 面体を $\lambda\mu\nu$ 立体に投影してできた平行 6 面体 $\boldsymbol{e}_\lambda$, $\boldsymbol{e}_\mu$, $\boldsymbol{e}_\nu$ が張る平行 6 面体の体積で割った商は,

$$\xi^{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} x^\lambda & y^\lambda & z^\lambda \\ x^\mu & y^\mu & z^\mu \\ x^\nu & y^\nu & z^\nu \end{vmatrix}, \tag{2.30}$$

となる。このように定義された量 $\xi^{\lambda\nu\mu}$ を**立体テンソル**と呼ぶ。この定義式から, 立体テンソルには,

$$\xi^{\alpha\beta\gamma} = -\xi^{\alpha\gamma\beta} = \xi^{\beta\gamma\alpha} = -\xi^{\beta\alpha\gamma} = \xi^{\gamma\alpha\beta} = -\xi^{\gamma\beta\alpha},$$

なる反対称関係がある。この反対称性を具体的に説明すると, 添え字 α, β, γ に同じ添え字が存在した場合, $\xi^{\lambda\nu\mu} = 0$ となる。また, 任意の 2 つの添え字を入れ替えた場合, 立体テンソルの値は符号が逆転する。

2.10 デュアルテンソル

反対称のテンソルは, デュアルテンソルと呼ばれる双対関係のテンソルを定義すると便利なことがある。デュアルテンソルは単に数学的な表現に過ぎないように見えるが, 物理

学において, そのテンソルが表現する物理的意味を理解しやすい記述に変換するためにデュアルテンソルを用いることがある。

例として, 4 次元の場合を考えよう。反変テンソル $F^{\mu\nu}$ と $F^{\lambda\mu\nu}$ は, それぞれ, 次のように定義される $F^*_{\alpha\beta}$ と F^*_{α} と双対な関係にある。

$$F^*_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{g}}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad F^*_{\alpha} = \frac{\sqrt{g}}{6}\epsilon_{\alpha\lambda\mu\nu}F^{\lambda\mu\nu}.$$

ここで, $F^{\mu\nu}$ と $F^{\lambda\mu\nu}$ が反対称テンソルであることを用いると, 上の定義式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&F^*_{12} = \sqrt{g}\,F^{34}, \quad F^*_{13} = \sqrt{g}\,F^{42}, \quad F^*_{14} = \sqrt{g}\,F^{23},\\
&F^*_{34} = \sqrt{g}\,F^{12}, \quad F^*_{42} = \sqrt{g}\,F^{13}, \quad F^*_{23} = \sqrt{g}\,F^{14},\\
&F^*_{1} = \sqrt{g}\,F^{234}, \quad F^*_{2} = \sqrt{g}\,F^{314}, \quad F^*_{3} = \sqrt{g}\,F^{124}, \quad F^*_{4} = \sqrt{g}\,F^{132}.
\end{aligned}$$

取り扱う空間を n 次元としたとき, r 階の反変テンソル $T^{\mu_s\mu_{s+1}\cdots\mu_{r-1}}$ に対応するデュアルテンソルは,

$$T^*_{\mu_r\mu_{r+1}\cdots\mu_{n-1}} = \frac{\sqrt{g}}{r!}\epsilon_{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}\mu_r\mu_{r+1}\cdots\mu_{n-1}}T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}, \tag{2.31}$$

と定義される。前節で学んだように, $\sqrt{g}\,\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$ がテンソルであるので, 名前のとおりデュアルテンソルはテンソルとしての性質をもつ。一方, r 階の反変テンソル $T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}$ に対応するデュアルテンソルも,

$$T^{*\mu_{r+1}\mu_{r+2}\cdots\mu_n} = \frac{1}{\sqrt{g}\,r!}\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r\mu_{r+1}\mu_{r+2}\cdots\mu_n}T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}, \tag{2.32}$$

のように定義される。やはり, 前節で学んだように $\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}/\sqrt{g}$ がテンソルであるので, このデュアルテンソルもテンソルとしての性質をもつ。さらに, もとのテンソルが r 階であるなら, それに対応するデュアルテンソルは $n-r$ 階のテンソルである。さらに, 反変テンソルのデュアルテンソルは共変テンソルであり, 共変テンソルのデュアルテンソルは反変テンソルである。

デュアルテンソルの例として, 3 次元共変ベクトル v_μ の回転テンソルについて考えよう。後の章で説明するが, 共変ベクトルの回転テンソルは,

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu v_\nu - \nabla_\nu v_\mu = \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu},$$

のように定義される。この回転テンソルの 3 次元空間におけるデュアルテンソルは,

$$T^{*\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda}T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\,\frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu},$$

となる。このように, 3 次元空間の 2 階共変テンソルのデュアルテンソルは反変ベクトルとなる。その反変ベクトルの成分を書くと,

$$
\begin{aligned}
T^{*1} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3}\right), \\
T^{*2} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_3}{\partial x^1}\right), \\
T^{*3} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right),
\end{aligned}
$$

となる。例えば, カルテシアン座標を考えた場合, $g = 1$ となるので, このデュアルテンソルが 3 次元のカルテシアン座標系では回転ベクトルと一致することがわかる。カルテシアン座標系だけでなく, 一般の座標系についても 3 次元空間の回転ベクトルが, 回転テンソルのデュアルテンソルであることを次の章で説明する。

最初に説明したように, 一般の n 次元でもデュアルテンソルは定義できる。詳しくは述べないが, 相対性理論で取り扱う 4 次元時空でのデュアルテンソルの例として電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ があげられる[2]。このテンソルの F_{0k} $(k = 1, 2, 3)$ は電場ベクトルを表す。それに対応する電磁場のデュアルテンソルの成分 F^{*0k} は磁束密度ベクトルを表す。

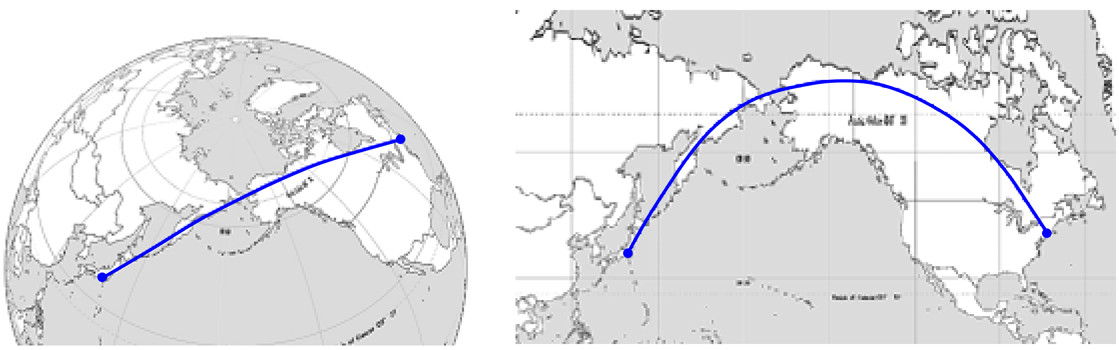
[2]繰り返し説明するとおり, 相対性理論なので添え字は 0 から開始する。添え字 0 が時間に対応し, 1 から 3 が空間座標 $[x, y, z]$ に対応する。

第3章　測地線

ユークリッド空間では, 2 点間を結ぶ最短経路は直線となるが, 曲がった空間ではそのようにはならない。地球の表面を考えた場合, 2 点間結ぶ最短経路をとるような航空機の航路が, メルカトル図法による地図上で曲がった経路となる事実より, 曲がった空間での最短経路は曲がった経路となることが知られている。本章では, 曲がった空間での最短経路を定式化する。

3.1　球面上の最短経路

測地線の例として, 地球上における最短コースがあげられる。地球が球面であるため, 最短コースはメルカトル図法では奇妙に思えるような湾曲した経路を描く。例えば, 東京からニューヨークへ向かう最短経路を考えよう。手元に地球儀とひもがあれば, 最短コースを得ることができる。ひもの両端を東京とニューヨークにおいて, ひもをピンと張ると, そのひもが最短経路となる。得られる最短経路は図 3.1 のような経路になる。その経路は, 東京から出発する際には北北東に向かい, カムチャッカ半島とアラスカ北部を通過した後, ハドソン湾西岸を南下してニューヨークに到着する。図 3.1 (a) は正射図法で最短経路を描いた。この図法は無限遠から地球を眺めた形状と思えばよい。一方, 図 3.1 (b) はメル



(a) Orthographic projection.　　(b) Mercator projection.

図 3.1: 東京からニューヨークへの大円コース

カトル図法である。メルカトル図法では, 最短経路は大きく北に湾曲し, 本当に最短経路

を描いているのか疑いたくなる。出発点の東京の緯度が北緯 35°41′, 終点のニューヨークが北緯 40°43′ であるが, 経路の途中で北極圏に位置する北緯 69° を通過するのである。とはいえ, この経路が最短経路であるので, 東京からニューヨークへ向かう航空機は, この経路に近い経路を航行するのだ。

本章の最後でリーマン幾何学を用いて証明するが, 球面における最短経路は大円コースと呼ばれる経路を描く。大円とは, 球の中心を通る平面で切断したときの球の切断面の形状である。地球儀を見るとわかるように, 赤道と任意の子午線が大円コースの例である。赤道を除く任意の緯線は大円コースではない。なぜなら, 赤道以外の緯線が張る平面は地球の中心を通らないからである。赤道が北緯ゼロ度で東か西にまっすぐ進む経路であり, 子午線は北か南にまっすく進む経路であることを考えると, 大円コースは球面上をまっすく進む経路であると推測できる。任意の大円コースは, メルカトル図法で曲がった経路で描かれるが, それは地図の表現方法に起因し, 正しくはまっすぐな経路と考えるべきである。

大円コースが球面上をまっすぐに進む経路であると考えるのは, 上で述べた赤道と子午線の例から理にかなっているだろう。大円コースが球面における測地線であることから, 強引に議論を拡張して, 測地線がユークリッド空間における直線を湾曲した空間に拡張した図形であると考えてはどうだろうか? 実は, 測地線が直線コースの拡張であることが後の章で数学的に議論されるのである。

3.2　経路の長さ

これまでに述べたように, 曲がった空間における微小距離 $\mathrm{d}s$ は, 計量テンソルを用いて $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ で定義される。例えば, 半径 R の球面を考えた場合, 緯度と経度を θ, φ とすると, $\mathrm{d}s^2 = R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$ と書くことができる。ここで, 緯度 θ は, 北極点を 0, 南極点を π とするように定義されているとする。さらに, $x^1 \equiv \theta$, $x^2 \equiv \varphi$ となるように座標をとると, 計量テンソルは,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin x^0 \end{bmatrix},$$

となる。空間が滑らかに曲がっている限り, すなわち, 2 階微分可能であれば, 空間の任意の点について, このような計量が定義できる。

図 3.2 のように湾曲した経路を考えてみよう。図に示す点 A から B への経路の長さは, 経路に沿って微小距離を足し合わせていけば計算することができる。具体的に書くと,

$$s = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}s = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu},$$

が経路の長さである。曲線上の座標 x^μ は, n 次元空間だとしても, n 個の座標成分がすべて独立しているわけではない。例えば, 3 次元空間の特定の点 $[a^1, a^2, a^3]$ を通る直線は,

$$\frac{x^1 - a^1}{m^1} = \frac{x^2 - a^2}{m^2} = \frac{x^3 - a^3}{m^3},$$

なる数式で表現できる。ここで, m^1, m^2, m^3 は直線の方向を意味する。この数式によると, 一つの座標成分 (例えば x^1) を与えると, 他の $n-1$ 個の座標成分がすべて特定できる。つまり, 自由度が 1 である。

座標の自由度が 1 であるということは, 一つの媒介変数 t を与えると $x^\mu = x^\mu(t)$ のように, すべての座標成分が t の関数として表現できる。その性質は, 一つの座標成分で他の $n-1$ の座標成分を特定できること等価である。なぜならば, $t = x^1$ となるように t を決めれば, $x^\mu = x^\mu(t) = x^\mu(x^1)$ となるので特定の座標成分 x^1 で他の座標成分 x^1 が与えられるからである。

数式の上では, n 個の座標成分が $x^\mu = x^\mu(t)$ のように一つの媒介変数でされるのが扱いやすいだろう。例えば,

$$x = r\cos t, \qquad y = r\sin t,$$

が半径 r の円周を与えることを考えればよい。ただし, 媒介変数 t を用いる場合, t は単調増加, または, 単調減少であるべきである。そうでなければ, 特定の t に対して複数の座標が対応付けられ, 曲線が一意的に定まらないからだ。例えば, 点 A から点 B を結ぶ曲線を考える場合, 点 A から点 B に曲線に沿って移動すると媒介変数 t は単調増加でなければな

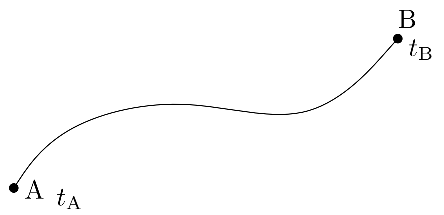


図 3.2: 曲がった空間における経路

らない。単調増加性さえ満たせば, 媒介変数はどのように変化しても構わない。その媒介変数を用いたとき, 点 A から B への経路長は,

$$s = \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t, \tag{3.1}$$

と書くことができる。ここで, 積分区間の両端として設定した t_{A} と t_{B} は座標 x^μ が点 A と B を通過するときの媒介変数 t の値である。

3.3 変分法による定式化

本章で取り扱う測地線とは, 長さが最短になるような経路である。最短経路を求めることは, (3.1) を最小にするための x^μ を決定する問題である。そのような問題は, 変分法によって解決できる。変分棒の解法として, オイラーの微分方程式を解くことが定石である。まず, 本節でオイラーの微分方程式を導出しておこう。

前節で, 任意の二点 A と B の間の経路の長さを数式で記述した。その数式を見ると, 平方根の中に $g_{\mu\nu}$ と $\dot{x}^\mu$ が含まれる。ただし, $\dot{x}^\mu \equiv \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$ とする。さらに, 計量が場所によって変化するのなら, $g_{\mu\nu}$ は x^μ の関数であると考えられる。そのように考えると, 経路長を計算する積分の被積分関数は x^μ と $\dot{x}^\mu$ の関数である。したがって, 点 A から B への経路は,

$$I = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} F(x^1, x^2, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)\mathrm{d}t,$$

なる積分で記述できる。積分経路 $x^\mu(t)$ をわずかにずらした経路 $\bar{x}^\mu \equiv x^\mu(t) + \delta v^\mu(t)$ を考えてみる。この積分経路のずれ $\delta v^\mu(t)$ は非常に小さな値である。一方, 経路の両端である点 A と B はずらしてはならないものとする。つまり, $\delta v^\mu(t_\mathrm{A}) = \delta v^\mu(t_\mathrm{B}) = 0$ は守らなければならない条件である。経路をわずかにずらすことによって, 経路長 $\bar{I}$ は,

$$\begin{aligned}
\bar{I} &= \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} F(x^1 + \delta v^1, x^2 + \delta v^2, \ldots, x^n + \delta v^n, \\
&\qquad\qquad \dot{x}^1 + \delta\dot{v}^1, \dot{x}^2 + \delta\dot{v}^2, \ldots, \dot{x}^n + \delta\dot{v}^n)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \left(F + \frac{\partial F}{\partial x^\mu}\delta v^\mu + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}\delta \dot{v}^\mu \right) \mathrm{d}t \\
&= I + \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\delta v^\mu + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}\delta \dot{v}^\mu \right) \mathrm{d}t \\
&= I + \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta v^\mu \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

となる。右辺を導出するにあたって, 部分積分と $\delta v^\mu(t_\mathrm{A}) = \delta v^\mu(t_\mathrm{B}) = 0$ であることを利用した。経路がわずかにずれたときの積分量の変分を $\delta I \equiv \bar{I} - I$ とすると,

$$\delta I = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta v^\mu \, \mathrm{d}t,$$

と書くことができる。変分法では, 積分 I が最小 (または最大) なる条件では, 経路をわずかにずらしても積分が変化しない, すなわち, $\delta I = 0$ と考える。その考えは, 最小自乗法に類似している。経路の変化に対して経路長が滑らかに変化するのであれば, 最小値 (または最大値) の近傍では経路の変化に対して経路長がほとんど変化しないと考えて $\delta I = 0$ を経路特定の条件とするのだ。いかなる δv^μ に対しても, $\delta I = 0$ が成立するためには,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = 0, \tag{3.2}$$

を満たさなくてはならない。この方程式が変分法における**オイラーの微分方程式**である。この方程式は, 変分法の解を与える一般的な方程式であるにすぎず, 測地線の問題に特化した方程式ではない。測地線を得るには, オイラーの微分方程式に含まれる関数 F に経路長を計算するための被積分関数を代入して議論を進めるとよい。次節で測地線を計算するための議論を進めることにしよう。

3.4 測地線の方程式

前節で変分法の解法となるオイラーの微分方程式を導出した。その方程式に含まれる関数 F に経路長を計算するための被積分関数を代入すれば, 経路長を最小化するための関数を導出することができる。経路長を最小化するための関数とは, 曲がった空間における測地線の方程式のことである。既に述べたように, 経路の長さは,

$$s = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t,$$

によって計算することができる。最短経路とは, 長さ s を最小にする経路である。そのような経路では, わずかに経路をずらしたときの変分は $\delta s = 0$ であると考えられる。つまり, $F = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$ とおいて, オイラーの微分方程式 (3.2) を適用すると最短経路が求められる。なお, $\dot{x}^\mu$ は, $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$ を意味するニュートンの記法である。本節では, 数式を導出過程を簡潔に書くためにニュートンの記法を用いる。

具体的に被積分関数 F を設定してオイラーの微分方程式を計算するため, F を $\dot{x}^\alpha$ と x^α について偏微分しておくと,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{\kappa\lambda}\dot{x}^\kappa\dot{x}^\lambda}} = \frac{g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu}{\dot{s}}, \\
\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{2\sqrt{g_{\kappa\lambda}\dot{x}^\kappa\dot{x}^\lambda}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu,
\end{aligned}$$

が得られる。これらの偏導関数をオイラーの微分方程式に代入すると,

$$\frac{1}{\dot{s}}g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\mu + \frac{1}{\dot{s}}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\nu - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2}g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu - \frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0,$$

が得られる。これをさらに整理すると,

$$g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = 0,$$

となる。さらに, 両辺に $g^{\kappa\alpha}$ を掛けて α についての縮約をとれば,

$$\ddot{x}^\kappa + \frac{1}{2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - \dot{x}^\kappa\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = 0,$$

が得られる。これまで媒介変数 t は s の増加とともに単調増加する任意の変数としていたが, s が t の 1 次関数となるように媒介変数を限定すれば, $\ddot{s}=0$ であるので得られた数式の左辺の最終項がゼロになるので好都合である。媒介変数 t をそのように限定すると,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}=0, \tag{3.3}$$

なる方程式が得られる。これが曲がった空間での最短経路 (**測地線**) を定義する方程式である。多くのテキストでは, $s=t$ となる t を選んで,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}=0, \tag{3.4}$$

のように長さに関する微分方程式で表現している。媒介変数の選び方は本質ではないので, 測地線の方程式は (3.3) でもよいし, (3.4) を選んでもよい。通常, 経路長と媒介変数が一致する仮定での表示 (3.4) が好まれる。しかし, 一般相対性理論において光の軌跡を求める場合, $\mathrm{d}s=0$ となる測地線を計算することに相当するので (3.4) が使えず, 代わりに (3.3) の表記を用いることになる。ところで,

$$\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right), \tag{3.5}$$

のような記号を定義すると測地線の方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}s^2}+\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}=0, \tag{3.6}$$

と書くことができる。ここで定義した $\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}$ は**第 2 種クリストッフェル記号**と呼ばれる。この記号の性質は次章で詳しく調べる。これに対して, $\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}$ に $g_{\lambda\kappa}$ を掛けて κ について縮約をとった量:

$$\mathit{\Gamma}_{\lambda,\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right), \tag{3.7}$$

は**第 1 種クリストッフェル記号**と呼ばれる。第 1 種の記号 $\mathit{\Gamma}_{\lambda,\mu\nu}$ と第 2 種の記号 $\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}$ を, それぞれ, $[\lambda,\mu\nu]$ と $\left\{ {\kappa \atop \mu\nu} \right\}$ となる記号で表記する文献[1]もあるが, 一般相対性理論ではクリストッフェル記号を大文字のガンマ ($\mathit{\Gamma}$) を用いるのが慣習となっている。本書では一般相対性理論の記法を用いることにする。二種類のクリストッフェル記号のうち, 第 2 種の方が頻繁に用いられるため, 単に**クリストッフェル記号**と書いた場合は第 2 種クリストッフェル記号を意味することが多い。

幾何学的意味　基本ベクトルを用いて記述すると, クリストッフェル記号の幾何学的意味が見えてくる。計量テンソルが $g_{\mu\nu}=\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu$ と $g^{\mu\nu}=\boldsymbol{e}^\mu\cdot\boldsymbol{e}^\nu$ であることに注意して第 1 種

[1]矢野健太郎, “リーマン幾何学入門,” 森北出版, ISBN: 978-4627002098, 2006.

クリストッフェル記号の定義式を書き換えると,

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Gamma}_{\lambda,\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\lambda)+\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\boldsymbol{e}_\nu\cdot\boldsymbol{e}_\lambda)-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu}+\boldsymbol{e}_\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\nu}+\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\mu}+\boldsymbol{e}_\nu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\mu}-\boldsymbol{e}_\nu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\lambda}-\boldsymbol{e}_\mu\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\lambda}\right),
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

のように記述できる。数式が 6 個の項で構成され複雑に見えるかもしれないが, この数式は大幅に簡略化できる。簡略化には基本ベクトルに関する性質:

$$
\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu}=\frac{\partial\boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\mu},
$$

を利用するのだ。この性質は, 位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ が 2 階微分可能であることから得られる性質である。この関係式を利用するだけで (3.8) は,

$$
\mathit{\Gamma}_{\lambda,\mu\nu}=\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu},
\tag{3.9}
$$

のように簡略化できるのだ。第 2 種クリストッフェル記号は第 1 種クリストッフェル記号 $\mathit{\Gamma}_{\lambda,\mu\nu}$ に $g^{\kappa\lambda}$ を乗じて λ について縮約をとればよいので,

$$
\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}=(\boldsymbol{e}^\kappa\cdot\boldsymbol{e}^\lambda)\left(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu}\right),
$$

のように書ける。この数式はさらに簡略化することができる。簡略化にあたり, 任意のベクトル $\boldsymbol{a}\equiv a^\mu\boldsymbol{e}_\mu\equiv a_\mu\boldsymbol{e}^\mu$ を考えよう。このベクトルに $\boldsymbol{e}^\lambda$ と $\boldsymbol{e}_\lambda$ を, それぞれ内積すると,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^\lambda &= a^\mu\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}^\lambda = a^\mu\delta_\mu{}^\lambda = a^\lambda,\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda &= a_\mu\boldsymbol{e}^\mu\cdot\boldsymbol{e}_\lambda = a_\mu\delta_\lambda{}^\mu = a_\lambda,
\end{aligned}
$$

が得られる。つまり, ベクトルに $\boldsymbol{e}^\lambda$ を内積すれば第 λ 反変成分が, $\boldsymbol{e}_\lambda$ を内積すれば第 λ 共変成分が得られるのだ。この事実を利用して, 形式的に,

$$
\boldsymbol{e}^\kappa\cdot\boldsymbol{e}^\lambda=(\boldsymbol{e}^\kappa)^\lambda,\qquad \boldsymbol{e}_\lambda\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu}\right)_\lambda,
$$

と書こう。右辺の括弧外の上付き添え字は反変成分, 下付き添え字は共変成分であることを表している。したがって, 第 2 種クリストッフェル記号は,

$$
\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}=(\boldsymbol{e}^\kappa)^\lambda\left(\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu}\right)_\lambda=\boldsymbol{e}^\kappa\cdot\frac{\partial\boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu},
$$

となるのだ。ベクトルの共変成分と反変成分の積を縮約した値であるため, 二つのベクトルの内積に他ならない。二つのベクトルの内積が $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^\lambda b_\lambda$ と書けることを思い出せば

よい。それが上のように計算できる理由である。これらの結果をまとめると, 2 種類のクリストッフェル記号を基本ベクトルを用いて表記すると,

$$\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}^{\kappa} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \qquad \Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \boldsymbol{e}_{\lambda} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}},$$

となるのだ。つまり, クリストッフェル記号は, 位置の微小変化に対する基本ベクトルの変化量を表すということだ。別の表現では,

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} \boldsymbol{e}_{\kappa},$$

という数式で記述できる。平坦な斜交座標系のように基本ベクトルが定ベクトルである座標系ならば, クリストッフェル記号はゼロとなる。

3.5 球面の測地線

リーマン幾何学の応用例として, 球面上の測地線を求めてみよう。国際線の飛行機の航路が曲がっていることで知られるように, 球面上の 2 点間を結ぶ最短距離は曲がったコースをとる。そのコースは大円コースとよばれ, 球の中心を通る平面でその球を切断したときの切り口である。ここでは, リーマン幾何学を用いて, 球面の測地線が大円となることを証明する。

原点 O を中心とする半径 R の球について考えてみる。この球面上の座標を極座標 (θ, φ) で表すことにする。 この球の赤道は xy 平面状にあり, θ は緯度を表す。ただし, 地球の緯度とは異なり, 北極点を $\theta = 0$, 赤道を $\theta = \pi/2$, 南極点を π とするように定義する。一方, φ は経度を表し, x 軸から左回りに計った角度である。この球面上の任意の点 (θ, φ) における微小変位によってつくられる微小長さは,

$$\mathrm{d}s^2 = R^2 \mathrm{d}\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\varphi, \tag{3.10}$$

である。ここで, 一般的なリーマン幾何学の記法にしたがって, $x^1 \equiv \theta$, $x^2 \equiv \varphi$ と書くことにする。そのとき, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて, 微小長さは $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$ と書くことができる。半径 R の球面の場合, (3.10) を見ると, 計量テンソルは,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{bmatrix},$$

であることがわかる。計量テンソルに, 球面の幾何学的な性質が記述されている。

測地線を得るには, 前節で導出した測地線の方程式に, 計量テンソルを代入して計算すればよい。前節で導出した測地線の方程式を再び書くと,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{3.6}$$

である。クリストッフェル記号 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ も前節で定義されており,

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right), \tag{3.5}$$

のように記述される。球面の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ をこの定義式に代入して得られるクリストッフェル記号のうち, ゼロでないものだけを書くと,

$$\Gamma^{1}{}_{22} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^{2}{}_{12} = \Gamma^{2}{}_{21} = \cot\theta,$$

となる。これらを測地線の方程式 (3.6) に代入すると, 微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} - \sin\theta\cos\theta \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \right)^2 = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} + 2\cot\theta \, \frac{d\theta}{ds} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{3.12}$$

が得られる。これらが測地線を特定するための連立微分方程式である。得られた微分方程式のうち, (3.12) を変形すると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\sin^2\theta \, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \right) = 0,$$

となるので,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\sin\theta_0}{R\sin^2\theta}, \tag{3.13}$$

が得られる。右辺の中で $\sin\theta_0/R$ は積分定数である。このような積分定数を想定した理由は後に明らかになる。微小長さを与える数式 (3.10) の両辺を $d\varphi^2$ で割り, (3.13) を代入すると,

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + \sin^2\theta = \frac{\sin^4\theta}{\sin^2\theta_0}, \tag{3.14}$$

を得る。この微分方程式が球面の測地線を決定する式である。測地線の特徴をつかむため, $u = \cot\theta$ とおいて, (3.14) を書き換えると,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\sqrt{\cot^2\theta_0 - u^2}, \tag{3.15}$$

なる微分方程式が得られる。この微分方程式を解き, 変数 u を元に戻すと,

$$\cot\theta + \cot\theta_0 \sin(\varphi - \varphi_0) = 0,$$

なる解が得られる。ここで, φ_0 は積分定数である。この式が球面の測地線を極座標表示した式である。この式の両辺に $R\sin\theta\sin\theta_0$ を乗じ, 三角関数の加法定理を適用すると,

$$R\sin\theta_0\cos\theta + R\cos\theta_0 \left(\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \right) \sin\theta = 0, \tag{3.16}$$

となる。これが球面における測地線の方程式である。球面における座標 θ と φ 以外の記号はすべて定数である。得られた測地線がどのような図形を描くのか, 現時点でわからないので別の表現方法を適用しよう。別の表現方法として, 3 次元の極座標 $[R, \theta, \varphi]$ を直交座標 $[x, y, z]$ に変換してみよう。座標変換が,

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta,$$

であることに注意して (3.16) を書き換えると,

$$-x\cos\theta_0\sin\varphi_0 + y\cos\theta_0\cos\varphi_0 + z\sin\theta_0 = 0,$$

が得られる。この θ_0 と φ_0 は定数であるので, 得られた数式は原点 O を通る平面を表す。この結果は, 原点を通る平面で球を切断したときの切り口が球面上の測地線であることを意味している。つまり, 球面上の測地線が大円であることが導かれたわけだ。さらに, 積分定数 θ_0 と φ_0 は測地線の方向を表している。具体的には, 図 3.3 に示すように, φ_0 は測地線が赤道と交わる方向, θ_0 は測地線が z 軸となす角である。

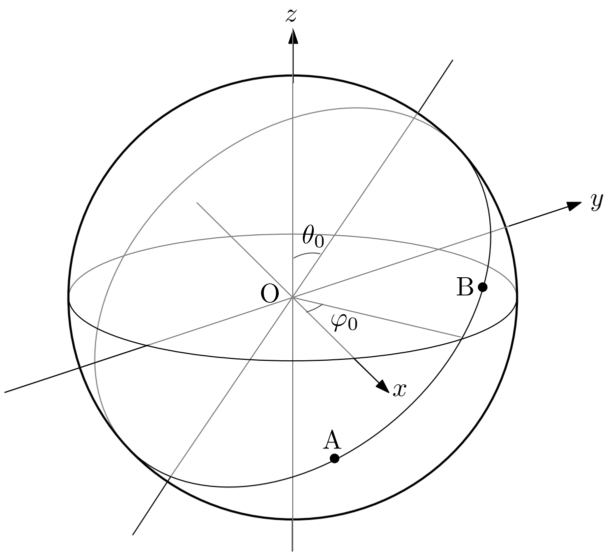


図 3.3: 球面上の 2 点を結ぶ測地線

球面における測地線が大円になる事実を利用すると, 地球上の 2 点間を結ぶ最短コースを得ることができる。例えば, 世界地図の作成に用いられる正距方位図法は, 基準点からの方位と距離が正確に表現できる図法である。その図法で世界地図を描くには, 北極点から伸ばした 2 本の経線と, 任意の大円によってつくられる球面上の三角形に, 球面三角法と呼ばれる公式を適用して求められる。球面三角法によって, 地球上の基準点から対称点に向かう方位と距離が計算できるのである。その計算は, 航空機の航路計算にも用いられる。東京からニューヨークに向かう航空機がアラスカ上空を通過するのは, 最短経路にしたがってのことであるが, メルカトル図法からはわかりにくいだろう。

誤解を招かないように注釈しておくと, 球面三角法はリーマン幾何学の産物ではない。リーマン幾何学が形成されたのは 19 世紀中頃であるが, 球面三角法は 10 世紀あたりにイスラム数学者によって発達した[2]。発達の背景には, 球体の地球上においてメッカまでの距離と方位を計算することだった。ということは, イスラム社会では 10 世紀には地球が丸いことを知っていたということだ。イスラム社会では, ギリシャ天文学を引き継いで地球が丸いことが知られていたようである[3]。リーマン幾何学の 1000 年近くも前に球面三角法が発展していたことは驚くことである。

[2]J. L. Berggren, "Episodes in the Mathematics of Medieval Islam," Springer, ISBN 0-387-40605-0, pp. 173–176, 2003.

[3]Catherine Hess, "Arts of Fire," J. Paul Getty Meseum, p. 29, 2004.

第4章　絶対微分学

曲がった空間ではベクトルの微分はユークリッド空間とは異なる取り扱いをしなければならない。ユークリッド空間では偏微分演算子 $\partial/\partial x^\mu$ をベクトルとして扱うことができた。すると, 任意のベクトル v^ν に対して偏微分を作用させた $\partial v^\nu/\partial x^\mu$ は2階のテンソルになるはずである。しかし, 本章で示すように曲がった空間では $\partial v^\mu/\partial x^\mu$ はテンソルとならない。本章では共変微分を導入して, ベクトル, さらには, テンソルの微分がテンソル性をもつように拡張する。

4.1　クリストッフェル記号

前章で測地線の方程式を導出した際に, ${\Gamma^\kappa}_{\mu\nu}$ なるクリストッフェル記号を定義した。クリストッフェル記号は, 微小変位に対する基本ベクトルの変化率を表し, 空間を取り扱ううえで重要である。クリストッフェル記号の性質について調べてみよう。その記号の定義を改めて書くと,

$$
{\Gamma^\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right), \tag{4.1}
$$

となる。この記号が, ${\Gamma^\kappa}_{\mu\nu} = {\Gamma^\kappa}_{\nu\mu}$ なる対称性をもっていることは定義式からただちにわかる。クリストッフェル記号は, 曲がった空間の性質を表すパラメータであるが, テンソルではない。

座標変換におけるクリストッフェル記号の振る舞いを調べれば, クリストッフェル記号がテンソルでないことがわかる。その性質を示すため, $\partial g_{\mu\alpha}/\partial x^\nu$ の座標変換を調べてみる。適当に添え字を入れ替えながら計算すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g'_{\mu\alpha}}{\partial x'^\nu} &= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial g_{\eta\gamma}}{\partial x^\varepsilon} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} g_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\alpha \partial x'^\nu} g_{\eta\beta}, \\
\frac{\partial g'_{\nu\alpha}}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial g_{\varepsilon\gamma}}{\partial x^\eta} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} g_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\alpha \partial x'^\mu} g_{\varepsilon\beta}, \\
\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\alpha} &= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial g_{\eta\varepsilon}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha} g_{\beta\varepsilon} + \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} g_{\eta\beta},
\end{aligned}
$$

が得られる。これらを組み合わせると, 第1種クリストッフェル記号が,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha,\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{\mu\alpha}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial g'_{\nu\alpha}}{\partial x'^{\mu}} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}}\left(\frac{\partial g_{\eta\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}} + \frac{\partial g_{\varepsilon\gamma}}{\partial x^{\eta}} - \frac{\partial g_{\eta\varepsilon}}{\partial x^{\gamma}}\right) + \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}g_{\beta\gamma},\end{aligned}$$

のように計算される。この数式の両辺に,

$$\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\omega}}g^{\lambda\omega},$$

を乗じて, ω について縮約をとって得られる数式:

$$\Gamma'^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\varepsilon} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right), \tag{4.2}$$

がクリストッフェル記号の座標変換である。この数式の右辺の第2項は一般にゼロとはならないので, クリストッフェル記号はテンソルではないことになる。この両辺に $\partial x^{\beta}/\partial x'^{\kappa}$ を乗じて κ について縮約して得られる数式:

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\kappa}}\Gamma'^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\lambda}{}_{\eta\varepsilon} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}, \tag{4.3}$$

もよく使われる関係式である。

クリストッフェル記号に関する重要な恒等式をもう少し挙げてみよう。前章で示したように, クリストッフェル記号には第1種と第2種の記号があり,

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\, g_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right),$$

なる関係式によって第2種クリストッフェル記号から第1種クリストッフェル記号に変換することができる。第1種クリストッフェル記号に関して, 添え字の順序を入れ替えて加えると,

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\, g_{\alpha\lambda} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\, g_{\nu\alpha} = \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}, \tag{4.4}$$

なる関係が得られる。続いて, $g^{\lambda\alpha}g_{\alpha\beta} = \delta_{\beta}{}^{\alpha}$ を偏微分して得られる関係式:

$$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}}g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} = 0,$$

に恒等式 (4.4) を代入すると,

$$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}}g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha}g_{\varepsilon\beta}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} = 0,$$

が得られる。この数式に $g^{\beta\kappa}$ を乗じて β について縮約をとると,

$$\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\alpha}\, g^{\lambda\alpha} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta}\, g^{\beta\kappa} = 0, \tag{4.5}$$

が得られる。この関係式は, 計量テンソルの独特の性質として成立する数式である。この性質は, 第 4.5 節で取り扱う。

最後に, $\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}$ について, $\lambda = \kappa$ とおいて λ について縮約をとった値に注目してみよう。その値を計算すると,

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2g} G^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}},$$

となる。ここで, g は計量テンソル $g_{\alpha\lambda}$ の行列式, $G^{\lambda\alpha}$ は $g_{\alpha\lambda}$ の余因子である。逆ベクトル系の計量 $g^{\lambda\alpha}$ は $g_{\lambda\alpha}$ の逆行列であるので, $g^{\lambda\alpha} = G^{\lambda\alpha}/g$ が成り立つ。よって, 上のように式変形できたのである。ところで, 行列式 g を x^{μ} について偏微分して得られる偏導関数:

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\lambda}} = \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} G^{\lambda\alpha},$$

を用いて $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}$ を書き直すと,

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^{\mu}}, \tag{4.6}$$

が得られる。この式も重要な公式である。

4.2 共変微分

一般のスカラとベクトルを座標 x^{ν} で偏微分した量について考えてみよう。スカラを偏微分した結果はテンソルとなるのであるが, ベクトルを偏微分した結果は, これから示すようにテンソルの成分とはならない。そこで, 代わりにテンソル成分となるような共変微分とよばれる量を定義する。

座標変換に対して不変な量 $\phi(x') = \phi(x)$ は既に定義したように, スカラとよばれる。スカラを座標 x'^{ν} で偏微分すると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}},$$

となるので $\partial\phi/\partial x^{\mu}$ が共変ベクトルの成分であることがわかる。このように, 共変ベクトルをなす微分係数は, **絶対微分係数**, または, **共変微分係数**と呼ばれる。また, x^{μ} についての共変微分は ∇_{μ} という記号を用いて,

$$\nabla_{\mu}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}},$$

で表す。さらに, 微小変位 $\mathrm{d}x^\lambda$ を与えたときの変化分を $\delta\phi \equiv \mathrm{d}x^\lambda \nabla_\lambda \phi$ で定義し, これを不変量 ϕ の**絶対微分**, または, **共変微分**という。ところで, 通常の偏微分に関しても $\mathrm{d}\phi \equiv \mathrm{d}x^\lambda \, \partial\phi/\partial x^\lambda$ なる微分が定義されているが, これらの間には,

$$\delta\phi = \mathrm{d}\phi,$$

が成り立つ。後に示すが, このように共変微分と通常の微分が等しくなるのはスカラに対する微分のみである。

スカラとは異なり, 共変ベクトルや反変ベクトルは, 通常の微分がテンソルにならない。共変ベクトル v_μ についてその事実を検証しよう。共変ベクトルは座標変換に対して,

$$v'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu,$$

なる変換則が成立するが, これを x'^λ について偏微分すると,

$$\frac{\partial v'_\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu} v_\alpha,$$

を得られる。右辺の第 2 項があるため, この偏導関数はテンソルではない。邪魔な右辺の第 2 項に (4.3) を適用して数式を変形すると,

$$\frac{\partial v'_\mu}{\partial x'^\lambda} - \mathit{\Gamma}'^{\kappa}{}_{\lambda\mu} v'_\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\kappa} - \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\kappa\nu} v_\alpha \right), \tag{4.7}$$

が得られる。この数式を見ると,

$$\nabla_\lambda v_\mu \equiv \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda} - \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\lambda\mu} v_\alpha, \tag{4.8}$$

を定義すれば, $\nabla_\lambda v_\mu$ がテンソルであることがわかる。テンソル性をもつ $\nabla_\lambda v_\mu$ は, 共変ベクトル v_μ の絶対微分係数, または, 共変微分係数と呼ばれる。さらに, 微小変位 $\mathrm{d}x^\lambda$ を乗じて λ について縮約をとった量は共変微分と呼ばれる。具体的に書いてみると,

$$\delta v_\mu = \mathrm{d}v_\mu - \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\lambda\mu} v_\alpha \, \mathrm{d}x^\lambda, \tag{4.9}$$

という関係が得られる。(4.7) に $\mathrm{d}x^\lambda$ を乗じて λ について縮約をとれば, この量が v_μ と同じように共変ベクトルであることがわかる。共変微分は, クリストッフェル記号を因子とする第 2 項を含む。基本ベクトルが場所によって変化しない平坦な空間ではクリストッフェル記号がゼロであるので, 座標 x^μ についての微分が共変微分と等しくなる。つまり, 共変微分の第 2 項は基本ベクトルの変化を補正するための項である。

反変ベクトルについても同様に共変微分を定義することができる。反変ベクトルに関する座標変換式:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} v'^\nu = v^\mu,$$

を x'^{λ} について微分すると,

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial v'^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}}+\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\lambda}}v'^{\alpha}=\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial v^{\mu}}{\partial \kappa},$$

が得られる。続いて左辺第 2 項に (4.3) を適用すると,

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\left(\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}}+\Gamma'^{\nu}{}_{\alpha\lambda}\,v'^{\alpha}\right)=\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\lambda}}\left(\frac{\partial v^{\mu}}{\partial x'^{\kappa}}+\Gamma'^{\mu}{}_{\varepsilon\kappa}\,v'^{\varepsilon}\right),$$

が得られ, この両辺に $\partial x'^{\beta}/\partial x^{\mu}$ を掛けて μ について縮約をとると,

$$\frac{\partial v^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}+\Gamma'^{\beta}{}_{\alpha\lambda}\,v'^{\alpha}=\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\lambda}}\left(\frac{\partial v^{\mu}}{\partial x'^{\kappa}}+\Gamma'^{\mu}{}_{\varepsilon\kappa}\,v'^{\varepsilon}\right),\tag{4.10}$$

なるテンソルの条件を満たす結果を得る。よって, 反変ベクトル v^{μ} に関しては,

$$\nabla_{\lambda}v^{\mu}\equiv\frac{\partial v^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}-\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}v^{\alpha},\tag{4.11}$$

が絶対微分係数, または, 共変微分係数であると定義される。この値についても, 微小変位 $\mathrm{d}x^{\lambda}$ を掛けて λ について縮約をとって, 共変微分を計算してみると, 書いてみると,

$$\delta v^{\mu}=\mathrm{d}v^{\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}\,v^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\lambda},\tag{4.12}$$

という関係を得る。やはりこの値も v^{μ} と同じように反変ベクトルである。

共変ベクトルや反変ベクトルの微分がテンソルにならないことを示すことができた。テンソルにならないのは, 基本ベクトルが場所によって変化することが要因であるので, その補正項としてクリストッフェル記号を伴う項によってテンソル性をもつ導関数, すなわち, 共変微分を定義することができた。共変微分には, 幾何学的解釈を与えることが可能であるので, その解釈について次節で説明する。

4.3 幾何学的解釈

前節で見たように, ベクトルの成分 v^{μ} を座標 x^{ν} で偏微分した結果はテンソルとはならなかった。これは, 座標軸が湾曲し, 場所によって基本ベクトルが変化していることが原因である。例えば, 図 4.1 のように場所によらず一定なベクトル $\boldsymbol{v}$ を考えてみよう。このベクトルは一定であるが座標軸が湾曲しているため, 場所が変わるとベクトルが示す成分が変化してしまっている。この変化こそが, ベクトルの成分 v^{μ} を座標 x^{ν} で偏微分した結果である。このような偏微分によって評価される値は純粋にベクトルの変化量を表した量ではなく, 座標軸の湾曲による見かけの変化量を含んだ値になっている。よって, 本質的なベクトルの変化を評価するには, 見かけの変化量を補正する必要があるのである。

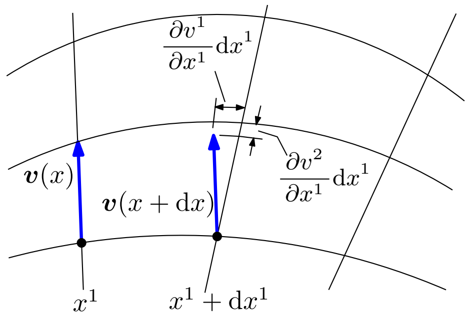


図 4.1: 見かけのベクトル変化

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ を用いたベクトル記法によってベクトルの変化量を調べてみよう。変化を調べるベクトルは $\boldsymbol{v} \equiv v^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ のように反変成分 v^μ を用いて定義されているとする。このベクトルを x^ν について偏微分すると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{e}_\mu + v^\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu},$$

となる。この値は, 表記を見ればわかるようにベクトルであるので, そのうちの第 λ 成分を取り出してみよう。ベクトルの第 λ 成分を取り出すには, (1.18) のように, そのベクトルに逆基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\lambda$ を内積すればよい。その値を計算すると, 結果は,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu}\cdot \boldsymbol{e}^\lambda = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}^\lambda + v^\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu}\cdot \boldsymbol{e}^\lambda = \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \mathit{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}\, v^\mu,$$

となり, 反変ベクトル v^μ の共変微分係数と一致する。この結果から,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu} = \left(\nabla_\nu v^\mu\right)\boldsymbol{e}_\mu,$$

であることがわかる。これでベクトルの共変微分の意味が見えた。共変微分 $\nabla_\mu v^\mu$ は, v^μ の偏導関数ではない。ベクトル $\boldsymbol{v}$ を x^ν について偏微分した結果のベクトルの第 μ 反変成分を与えるのだ。表記は $\nabla_\nu v^\mu$ だが, 意味としては $(\partial \boldsymbol{v}/\partial x^\nu)^\mu$ なのだ。

上の考察を参考にすると, 共変ベクトルの表偏微分の幾何学的意味も予想がつくだろう。ほぼ同一の手順を踏み, 幾何学的意味を確認してみよう。ベクトル $\boldsymbol{v}$ を逆ベクトル系での展開 $\boldsymbol{v} \equiv v_\mu \boldsymbol{e}^\mu$ で表現し, これを x^ν で偏微分してみると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{e}^\mu + v_\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}^\mu}{\partial x^\nu},$$

となる。この結果もベクトルであるので, 逆ベクトル系の第 λ 成分を取り出してみる。その場合, そのベクトルに基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\lambda$ を内積してやればよいことは (1.17) からわかる。計算をしていくと,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu}\cdot \boldsymbol{e}_\lambda = \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}_\lambda + v_\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}^\mu}{\partial x^\nu}\cdot \boldsymbol{e}_\lambda,$$

が導かれるが, ここで, 右辺第 2 項の計算をするにあたり, 一般のベクトルが $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}^\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha$ のように展開できることを考えると, 逆基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ は $\boldsymbol{e}^\mu = (\boldsymbol{e}^\mu\cdot\boldsymbol{e}^\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha = g^{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha$ と展開されるはずである。よって, 上式は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda &= \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} + v_\mu \frac{\partial g^{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\nu}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda \\ &= \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} + v_\mu\left(g_{\alpha\lambda}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + g^{\mu\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\nu}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda\right),\end{aligned}$$

と変形される。さらに, 右辺第 2 項に対して (4.5) を, 第 3 項に対して,

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\alpha}{\partial x^\nu}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda = \mathit{\Gamma}_{\lambda,\alpha\nu} = g_{\varepsilon\lambda}\mathit{\Gamma}^\varepsilon{}_{\alpha\nu},$$

なる関係を適用すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda &= \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - v^\mu\left(g_{\alpha\lambda}\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\varepsilon}\,g^{\mu\varepsilon} + g_{\alpha\lambda}\mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\varepsilon}\,g^{\varepsilon\alpha} - g^{\mu\alpha}g_{\varepsilon\lambda}\mathit{\Gamma}^\varepsilon{}_{\alpha\nu}\right) \\ &= \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\nu} - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}\,v_\mu,\end{aligned}$$

となり, やはりこの量も共変ベクトル v_μ の共変微分係数と一致した。この場合も,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu} = (\nabla_\nu v_\mu)\,\boldsymbol{e}^\mu,$$

が成立するということだ。つまり, 共変微分係数 $\nabla_\nu v_\mu$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ を x^ν について偏微分して得られるベクトルの第 μ 共変成分を与えるということだ。したがって, 共変微分係数 $\nabla_\nu v_\mu$ の幾何学的意味は記号で書くと $(\partial\boldsymbol{v}/\partial x^\nu)_\mu$ ということだ。

共変微分係数は, ベクトルの真の変化量を各座標成分に対して投影した量である。座標についての単なる偏微分は座標軸の湾曲による見かけの変化量を含んでしまうことに対し, 共変微分係数は微小位置変化におけるベクトルの変化量を純粋に表している。

4.4 テンソルの共変微分

ベクトルを座標で偏微分した結果がテンソルでない同様に, 一般的なテンソルの偏微分もテンソルではない。よって, 一般のテンソルについても新たに共変微分を定義するべきである。本節では, 一般的な高階のテンソルの共変微分を導出し, その結果に基づいて, 物理学で頻繁に表れる 2 階のテンソルの公式を導出する。

4.4.1　高階のテンソル

共変ベクトルと反変ベクトルに関する共変微分は, (4.8) と (4.11) で定義されている。 これらの定義から, r 階反変, s 階共変の混合テンソル $T^{\kappa_0\cdots\kappa_{r-1}}_{\lambda_0\cdots\lambda_{s-1}}$ の共変微分係数が,

$$\nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \equiv \frac{\partial T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r} \Gamma^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda_i}\, T^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s}, \tag{4.13}$$

のように拡張できることが類推できる。確かに, この量はテンソルの成分であり, 共変微分係数として定義してもよい。この量がテンソルとなることは, 以下のような数学的帰納法によって証明することができる。

まず, 1 階のテンソルに関しては, (4.8) と (4.11) で定義した量がテンソルであることは既に示したとおりである。次に, r 階反変で s 階共変の混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_{s-1}}$ については, (4.13) て定義された量がテンソルであると仮定しよう。さらに, 混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}$ に任意の反変ベクトル v^{κ_r} を乗じて得られる $r+1$ 階反変で s 階共変の混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \equiv T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} v^{\kappa_r}$ に関して同様の値を計算してみると,

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} &= \frac{\partial T^{\kappa_1\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r+1} \Gamma^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\alpha\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda_i}\, T^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s} \\
&= \frac{\partial T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} v^{\kappa_{r+1}}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r} \Gamma^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s} v^{\kappa_{r+1}} \\
&\qquad + \Gamma^{\kappa_{r+1}}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} v^\alpha - \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda_j}\, T^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s} v^{\kappa_{r+1}} \\
&= \left(\frac{\partial T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r} \Gamma^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda_j}\, T^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s} \right) v^{\kappa_{r+1}} \\
&\qquad + T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \left(\frac{\partial v^{\kappa_{r+1}}}{\partial x^\mu} + \Gamma^{\kappa_{r+1}}{}_{\mu\alpha}\, v^\alpha \right) \\
&= \nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \cdot v^{\kappa_{r+1}} + T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \cdot \nabla_\mu v^{\kappa_{r+1}},
\end{aligned}$$

という結果を得る。この量はテンソルどうしの積和になっている。よって, この結果自体もテンソルである。さらに, 混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}$ に任意の共変ベクトル u_{λ_s} を乗じて得られる r 階反変で $s+1$ 階共変の混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s\lambda_2} \equiv T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} u_{\lambda_s}$ に関して同様の値を計算すると,

$$\nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s\lambda_{s+1}} = \nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \cdot u_{\lambda_{s+1}} + T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \cdot \nabla_\mu u_{\lambda_{s+1}},$$

が得られ, この量もテンソルであることがわかる。以上をまとめてみると, 1 階の共変テンソル, および, 1 階の反変テンソルは, ベクトルの共変微分係数の公式と一致するので, (4.13) で定義された量がテンソルであること示されている。そこで, r 階反変, s 階共変のテンソルについても (4.13) がテンソルであることを仮定すると, 反変成分の階数を 1 つ増

加させた場合, 共変成分の階数を 1 つ増加させた場合の双方について, (4.13) がテンソルであることが示された。 よって, 任意の階数のテンソルに対し, (4.13) がテンソルとなることが証明された。したがって, (4.13) を r 階反変で s 階共変の混合テンソルの共変微分係数と定義する。¶

ところで, 先ほどの証明において, 通常の微分でみられる $\partial(fg)/\partial x = (\partial f/\partial x)g + f(\partial g/\partial x)$ なる関係式を連想しないだろうか。実は, テンソルの共変微分についても同様の関係が成り立つのである。ということで, 一般的な場合についてその性質が成り立つことを改めて検証してみよう。さて, r 階反変で s 階共変のテンソルは, $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s\lambda_{s+1}} = R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}$ のようにテンソルの積で表すことができる。これを (4.13) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\mu (R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}) \\
&\quad = \left(\frac{\partial R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{p} \Gamma^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha} R^{\kappa_0\cdots\alpha\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_q} - \sum_{j=1}^{q} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda_j} R^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s} \right) S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s} \\
&\qquad + R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} \left(\frac{\partial S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=p+1}^{r} \Gamma^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha} S^{\kappa_{p+1}\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=q+1}^{s} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda_j} R^{\kappa_{p+1}\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\alpha\cdots\lambda_s} \right) \\
&\quad = \nabla_\mu R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} \cdot S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s} + R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} \cdot \nabla_\mu S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s},
\end{aligned}
$$

となり, テンソルの積における共変微分には, 通常の微分と同様の関係があることが導かれる。結果だけを書くと,

$$
\nabla_\mu (R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}) = \nabla_\mu R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} \cdot S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s} + R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q} \cdot \nabla_\mu S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}, \tag{4.14}
$$

となる。この関係式は, いかなる階数のテンソルでも成立する。次項で導出した公式を適用し, 2 階テンソルに関する共変微分の公式を導出する。

4.4.2 二階のテンソル

前項で一般的な高階のテンソルについて公式を導出したので, 2 階のテンソルの共変微分は容易に書き下すことができる。物理学では 2 階のテンソルが頻繁に現れるため, その公式を明らかにすることは重要である。

共変微分の公式 (4.13) を利用し, 2 階のテンソルの共変微分の公式を書いておこう。共変テンソル $T_{\mu\nu}$, 反変テンソル $T^{\mu\nu}$, 混合テンソル $T_\mu{}^\nu$, $T^\mu{}_\nu$ を共変微分すると,

$$
\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} T_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} T_{\mu\alpha}, \tag{4.15a}
$$

$$
\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha} T^{\mu\alpha}, \tag{4.15b}
$$

$$\nabla_\lambda T_\mu{}^\nu = \frac{\partial T_\mu{}^\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} T_\alpha{}^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha} T_\mu{}^\alpha, \tag{4.15c}$$

$$\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu = \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} T^\alpha{}_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} T^\mu{}_\alpha, \tag{4.15d}$$

が得られる。これらの数式を見ると, 公式 (4.13) が単純な規則性で書かれていることを再認識するだろう。右辺は, x^λ についての偏微分の後, テンソルの添え字を左から一つずつ媒介変数 α に書き換え, クリストッフェル記号を乗じて, 加算もしくは減算するのだ。対称とする (α で置き換えた) 添え字が反変成分なら加算, 共変なら減算である。乗じられるクリストッフェル記号については, 対称とする添え字が反変成分ならば, 第 1 添え字に α で置き換えた添え字を置き, 第 2 添え字は λ, 第 3 添え字を α とする。対称とする添え字が共変成分ならば, 第 1 添え字が α, 第 2 添え字に λ, 第 3 添え字に対称とする添え字を置く。

前項で 1 階のテンソルの共変微分が, $\partial \boldsymbol{u}/\partial x^\nu$ のようなベクトル微分と関係があることを示した。それを参考に, 2 階の混合テンソル $T_\nu{}^\mu$ の共変微分を確認してみよう。混合テンソル $T_\nu{}^\mu$ は, $T_\nu{}^\mu u^\nu$ のようにベクトルを変換する変換行列として使用されることが多い。そこで, $\boldsymbol{v} = T_\nu{}^\mu u^\nu \boldsymbol{e}_\mu$ とおいて, 偏導関数 $\partial \boldsymbol{v}/\partial x^\lambda$ を調べてみよう。機械的に計算を進めていくと,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\Big(T_\nu{}^\mu u^\nu \boldsymbol{e}_\mu\Big) = \frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} u^\nu \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda} \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\mu u^\nu \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\lambda} \\
&= \frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} u^\nu \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda} \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\eta u^\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_\eta}{\partial x^\lambda} \cdot \boldsymbol{e}^\mu\right) \boldsymbol{e}_\mu \\
&= \frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} u^\nu \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\mu \left(\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha} u^\alpha - \Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha} u^\alpha\right) \boldsymbol{e}_\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} T_\nu{}^\eta u^\nu \boldsymbol{e}_\mu \\
&= \left[T_\nu{}^\mu \nabla_\lambda u^\nu + \left(\frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} - T_\alpha{}^\mu \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda} T_\nu{}^\alpha\right) u^\nu\right] \boldsymbol{e}_\mu,
\end{aligned}$$

が得られる。ベクトルの共変微分を参考にすると, 得られた右辺のブラケット ([]) で囲まれた数式が $\nabla_\lambda T_\nu{}^\mu u^\nu$ と考えるべきだろう。さらに, 解析学における微分の公式と同様に,

$$\nabla_\lambda T_\nu{}^\mu u^\nu = \left(\nabla_\lambda T_\nu{}^\mu\right) u^\nu + T_\nu{}^\mu \left(\nabla_\lambda u^\nu\right),$$

が成立するようにテンソル $T_\nu{}^\mu$ の共変微分を決めると,

$$\nabla_\lambda T_\nu{}^\mu = \frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} T_\alpha{}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} T_\nu{}^\alpha,$$

でなければならない。この数式は, (4.15c) と同一である。このように, ベクトル表記からテンソルの共変微分を定義することもできるのだ。他の混合テンソルも同様にベクトル表記から共変微分を導くことができるはずだ。

4.5　計量テンソルの共変微分

計量テンソルは 2 階のテンソルであるが, 曲がった空間の性質を決めてしまう特別なテンソルであるので, 共変微分に関して特殊な性質をもっている。具体的に言うと, 計量テンソルの共変微分はゼロなのだ。

計量テンソルがゼロであることを証明する材料は既にそろっている。むしろ, 証明が完了していると言っても過言ではない。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変微分がゼロになることを示そう。計量テンソルは 2 階の共変テンソルであるので, 先ほど導出した公式 (4.15a) を用いて共変微分係数を書くと,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha},$$

が得られる。ついでに, 逆行列 $g^{\mu\nu}$ の共変微分係数も書いておこう。その逆行列は 2 階の反変テンソルであるので, 公式 (4.15b) を用いると,

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} g^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha} g^{\mu\alpha},$$

が得られる。これらの右辺に見覚えはないだろうか? 既に導出した関係式 (4.4) と (4.5) に注目すると,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{4.16a}$$

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0, \tag{4.16b}$$

という関係が得られる。つまり, 計量テンソルの共変微分は, 必ず, ゼロになる。計量テンソルの共変微分がゼロとなることは, 基本ベクトルを用いた表記:

$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu, \qquad \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu} \cdot \boldsymbol{e}^\kappa,$$

を利用しても証明することができる。実際に計算してみると,

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\mu} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha\right)(\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\nu) - \frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\nu} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\alpha) \\
&= \boldsymbol{e}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\lambda} + \boldsymbol{e}_\mu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\mu} \cdot \boldsymbol{e}_\nu - \frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\nu} \cdot \boldsymbol{e}_\mu = 0,
\end{aligned}$$

が得られるため, 計量テンソルの共変微分がゼロであると結論できるのだ。第 2 行目から第 3 行目への数式変形では, $\boldsymbol{e}^\alpha$ と内積をとることによってベクトルの第 α 反変成分が, $\boldsymbol{e}_\alpha$ と内積をとることによってベクトルの第 α 共変成分が抽出できることを利用している。も

う少し説明すると, ベクトルの反変成分と別のベクトルの共変成分の積和によって, 二つのベクトルの内積が計算できる。そのような技巧によって第 2 行目から第 3 行目への数式変形を実行した。第 3 行目の数式変形では, ベクトルの 2 階微分可能性から導かれる性質:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\mu},$$

を利用した。逆ベクトル系の計量テンソル $g^{\mu\nu}$ についても, 基本ベクトルを用いて同様に, 共変微分がゼロであることが証明できる。計算手順がまったく同様なので, その証明は省略する。

計量テンソルと逆ベクトル系の計量テンソルは互いに逆行列の関係があるので $g_{\mu\lambda}\, g^{\lambda\nu} = \delta_\mu{}^\nu$ なる関係が成立する。この関係式によると, クロネッカーのデルタ $\delta_\mu{}^\nu$ はテンソルの積であるので, これもテンソルであるといえる。ということは, クロネッカーのデルタについても共変微分を定義してもよいということである。さて, 共変微分を計算すると,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \delta_\nu{}^\lambda &= \frac{\partial \delta_\nu{}^\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\delta_\alpha{}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}\delta_\nu{}^\alpha \\ &= -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

となる。つまり, クロネッカーのデルタの共変微分はゼロである。クロネッカーのデルタは, もともと座標に関係しない量であるので, この共変微分がゼロになるというのは当然の結果である。もし, この値がゼロにならなければ, リーマン幾何学自体の正当性が怪しまれるだろう。そう考えると, この結果は, ひと安心といったところだろうか。

4.6 勾配・発散・回転

リーマン幾何学においても, ベクトル解析でみられる勾配・発散・回転を定義することができる。当然, リーマン幾何学では, それらの量がテンソルになるように定義されるべきであるので, 共変微分を用いて定義される。

勾配　スカラ f の勾配は, スカラを共変微分した値で定義される。すなわち,

$$f_\lambda \equiv \nabla_\lambda f = \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}, \tag{4.18}$$

がリーマン幾何学における勾配ベクトルである。数式に現れているように, この量は共変ベクトルである。しかし, ベクトルを基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の一次結合で表現することを考えると, 勾配ベクトルを反変ベクトルとして表現した方がよいだろう。反変ベクトルで表現するなら, 勾配ベクトルは,

$$f^\kappa = g^{\lambda\kappa} f_\lambda = g^{\lambda\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}, \tag{4.19}$$

のように記述することができる。

発散　電荷から発生する電場のように, ベクトルの湧き出しは, ベクトルの発散と呼ばれる量によって評価される。反変ベクトル v^μ の発散は $\nabla_\mu v^\mu$ で定義される。これをもう少し計算すると,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu v^\mu &= \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\mu\alpha} v^\alpha \\ &= \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^\mu} v^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, v^\mu)}{\partial x^\mu},\end{aligned} \tag{4.20}$$

なる結果が得られる。この変形に関して, (4.6) の関係を用いた。

回転　電流と磁場のように, 右ねじの法則に従って発生するベクトルは, ベクトルの回転と呼ばれる量によって評価される。共変ベクトル v_λ の回転は $\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu$ で定義される。計算してみると,

$$\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda}, \tag{4.21}$$

のようにクリストッフェル記号が打ち消し合い, ベクトル成分の導関数のみが残っている。ベクトルの回転は, この数式が示すように 2 階の共変テンソルである。ベクトル解析では, 回転はベクトルであった。実は, 3 次元の場合に限り, この 2 階の共変テンソルから反変ベクトルをつくることができる。前章で既に紹介したように,

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{\kappa\mu\lambda} \left(\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\kappa\mu\lambda} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}, \tag{4.22}$$

がベクトル解析における回転ベクトルに相当する。この反変ベクトルは, 共変ベクトルの回転 (2 階の共変テンソル) に対応するデュアルテンソルである。

ベクトル解析で学んだように, ベクトル v_μ が勾配ベクトルの場合, その回転は必ずゼロになる。その性質は容易に示すことができ,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu v_\nu - \nabla_\nu v_\mu &= \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \, \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\nu \, \partial x^\mu} = 0,\end{aligned}$$

となる。ただし, $v_\mu = \partial\phi/\partial x^\mu$ とおいた。

相対性理論で現れる量として, 2 階の交代テンソルに関する回転を紹介しておこう。交代テンソルなので, $F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ が成り立つことが前提である。そのとき,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}, \tag{4.23}$$

はテンソルとなる。この量は相対性理論において, マクスウェルの方程式のファラデーの法則と磁場に対するガウスの法則を統合した方程式の記述で現れる。数式 (4.23) がテンソ

ルとなることは, 次のように示すことができる。

$$\begin{aligned}
&\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} \\
&\quad = \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\mu} F_{\alpha\nu} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\nu} F_{\mu\alpha} \ + \ \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\lambda} F_{\alpha\mu} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu} F_{\lambda\alpha} \\
&\qquad + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\lambda} F_{\nu\alpha} \\
&\quad = \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \left(\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\mu} F_{\alpha\nu} + \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\lambda} F_{\nu\alpha}\right) \\
&\qquad - \left(\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\nu} F_{\mu\alpha} + \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\lambda} F_{\alpha\mu}\right) - \left(\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu} F_{\lambda\alpha} + \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda}\right).
\end{aligned}$$

この計算において, クリストッフェル記号が下付き添え字に関して対称であり, $F_{\mu\nu}$ が交代テンソルであることから, 右辺の括弧でくくった成分がすべてゼロになる。したがって,

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu},$$

が成り立つ。つまり, (4.23) は共変微分の和で作られているので, テンソルであるというわけだ。さらに衝撃的な事実として, (4.23) はゼロに等しいのだ。テンソル $F_{\mu\nu}$ の交代性に注意して計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} &= -\left(\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial F_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right),
\end{aligned}$$

が得られる。なお, 第 3 行目位への数式変形は, 単に添え字の記号を書き換えただけであり, 特に変形をしているわけではない。この計算結果から, (4.23) は自身の符号反転と等しいことがわかり, 結論として,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{4.24}$$

が導かれたのだ。マクスウェルの方程式のファラデーの法則と磁場に対するガウスの法則は, 物理法則というよりも, むしろ数学的な性質を表す公式であったわけだ。

ベルトラミの微分係数　ベルトラミの微分係数も紹介しておこう。ベルトラミの微分係数は, 第 1 種と第 2 種の微分係数がある。ベルトラミの第 1 種微分係数は勾配ベクトルの長さの自乗, すなわち,

$$\Delta_1 f \equiv g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}, \tag{4.25}$$

で定義される。ベルトラミの第 2 種微分係数は, 勾配ベクトルの発散, すなわち, ラプラシアンとよばれる量であり,

$$\Delta_2 f \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \right), \tag{4.26}$$

で定義される。次節で 3 次元の座標系に対する応用例を紹介する中で, ラプラシアンの計算に, ベルトラミの第 2 種微分係数を計算する。

4.7　3 次元座標系におけるベクトル微分

円筒座標系と球座標系に対し, 前節で導出した勾配, 発散, 回転の公式を用いて具体的にベクトルの微分を計算しよう。本節での計算によって, ベクトル解析における微分公式が比較的簡単に得られる。ベクトル解析で勾配, 発散, 回転のベクトル公式を導出した経験がある読者なら, リーマン幾何学の公式を用いることによってベクトル微分を計算する労力が大幅に軽減されることに気づくだろう。

4.7.1　円筒座標系

円筒座標系 $[r, \varphi, z]$ についてベクトル微分を実行しよう。ここで, r は座標系における z 軸からの距離, φ は方位角, z は対称軸方向の位置を表す。それらの座標軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。さらに, リーマン幾何学で扱う座標成分として, $[x^1, x^2, x^3] \equiv [r, \varphi, z]$ とする。そのとき, $\boldsymbol{e}_\mu \equiv \partial \boldsymbol{x}/\partial x^\mu$ で定義される ($\boldsymbol{x}$ は位置ベクトル) 基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{e}_2 = r\,\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z,$$

のような関係がある。さらに, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

と書くことができる。これで計算のための準備が整った。

スカラの勾配とラプラシアン　スカラ f が与えられたとき, そのスカラの勾配ベクトルを (4.19) によって計算してみると,

$$\nabla f = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda f \cdot \boldsymbol{e}_\mu = g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \boldsymbol{e}_\mu$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}
$$

となる。さらに, (4.26) で定義されるラプラシアンを計算してみると,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},
\end{aligned}
$$

となる。結果を改めて書くと,

$$
\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z, \tag{4.27}
$$

$$
\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \tag{4.28}
$$

が得られる。これらは, ベクトル解析の公式と一致する。

発散と回転　ベクトル $\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + v_z\boldsymbol{e}_z$ が与えられたとする。このベクトルの発散と回転を計算しよう。まず, 各座標に対する単位ベクトルと基本ベクトルの関係から, ベクトル $\boldsymbol{v}$ の反変成分は,

$$
v^1 = v_r, \qquad v^2 = \frac{1}{r}v_\varphi, \qquad v^3 = v_z,
$$

であることは明らかである。早速, (4.21) によって発散を計算してみると,

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \nabla_\mu v^\mu &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}v^\mu}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\frac{v_\varphi}{r}) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,v_z)\right] \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},
\end{aligned}
$$

を得る。ベクトルの回転については, (4.22) にしたがって計算すると,

$$
\nabla\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\kappa\mu\lambda}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}\boldsymbol{e}_\kappa
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}\left\{\left[\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(r v_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_1\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_2 + \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_3\right\} \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}},
\end{aligned}
$$

が得られる。これらのついても, 改めて結果だけを書くと,

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{4.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}z}\right)\boldsymbol{e}_r \\
&\qquad + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}},
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

が得られる。これらの結果はすべて, ベクトル解析による球座標のベクトル微分公式と一致している。

4.7.2 球座標系

球座標系 $[r, \theta, \varphi]$ についてベクトル微分を実行しよう。それらの座標軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ とする。さらに, リーマン幾何学で扱う座標成分として, $[x^1, x^2, x^3] \equiv [r, \theta, \phi]$ とする。そのとき, $\boldsymbol{e}_\mu \equiv \partial \boldsymbol{x}/\partial x^\mu$ で定義される ($\boldsymbol{x}$ は位置ベクトル) 基本ベクトルは,

$$
\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{e}_2 = r\,\boldsymbol{e}_\theta, \qquad \boldsymbol{e}_3 = r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi,
$$

のような関係がある。さらに, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は,

$$
g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix},
$$

と書くことができる。これで計算のための準備が整った。

スカラの勾配とラプラシアン　スカラ f が与えられたとき, そのスカラの勾配ベクトルを (4.19) によって計算してみると,

$$
\nabla f = g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda f \cdot \boldsymbol{e}_\mu = g^{\mu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\boldsymbol{e}_\mu
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_3 \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,
\end{aligned}
$$

となる。さらに, (4.26) で定義されるラプラシアンを計算してみると,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},
\end{aligned}
$$

となる。結果を改めて書くと,

$$
\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{4.31}
$$

$$
\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \tag{4.32}
$$

が得られる。これらは, ベクトル解析の公式と一致する。

発散と回転　ベクトル $\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ が与えられたとする。このベクトルの発散と回転を計算しよう。まず, 各座標に対する単位ベクトルと基本ベクトルの関係から, ベクトル $\boldsymbol{v}$ の反変成分は,

$$
v^1 = v_r, \qquad v^2 = \frac{1}{r}v_\theta, \qquad v^3 = \frac{1}{r\sin\theta}v_\varphi,
$$

であることは明らかである。早速, (4.21) によって発散を計算してみると,

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \nabla_\mu v^\mu &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}v^\mu}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\, v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\, v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\, v_\varphi)\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi},
\end{aligned}
$$

を得る。ベクトルの回転については, (4.22) にしたがって計算すると,

$$
\nabla\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\kappa\mu\lambda}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}\boldsymbol{e}_\kappa
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, v_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rv_\theta)\right]\boldsymbol{e}_1\right. \\
&\qquad\left. + \left[\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\, v_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_2 + \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_3\right\} \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r \\
&\qquad + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi,
\end{aligned}
$$

が得られる。これらのついても, 改めて結果だけを書くと,

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{4.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{v} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r \\
&\qquad + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi,
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

が得られる。これらの結果はすべて, ベクトル解析による球座標のベクトル微分公式と一致している。

実際に計算した人ならわかるだろうが, ベクトル解析でこの公式を導出するのは骨の折れる作業である。しかし, リーマン幾何学を用いると非常に簡単に, これらの公式を導出することができた。実は, ベクトル解析でこれらの公式を導出するのが煩雑になるのは, 単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ が場所によって異なるため, 単位ベクトルも座標で微分できてしまうことが理由である。リーマン幾何学では単位ベクトルの微分係数はクリストッフェル記号の中に収められ, 上の公式を導出するときには, 既にクリストッフェル記号が相殺された形になっているので計算が楽になっているのである。言い換えれば, ベクトル解析でこれらの計算をしていたときには, どうせ相殺されるはずのクリストッフェル記号を無駄に計算していたことになる。

4.8 ベクトルの平行移動

リーマン幾何学におけるベクトルの平行移動について考えてみよう。ベクトルを平行移動するということは, ベクトルを不変に保ったまま位置を変えるということである。例えば, ベクトル $\boldsymbol{v}$ を平行移動して微小変位 $\mathrm{d}x^\kappa$ させることは,

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{v} \equiv \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0, \tag{4.35}
$$

なる条件を満たすようにベクトルを移動させることである。ユークリッド空間では, この条件は単純に, $\mathrm{d}v^\kappa \equiv (\partial v^\kappa/\partial x^\mu)\mathrm{d}x^\mu = 0$ と書いた場合と一致する。しかし, 曲がった空間において, 平行移動の条件はそのような簡単な形にならないことは, 共変微分の幾何学的解釈として既に説明したとおりである。幾何学的解釈によると, 曲がった空間における平行移動の条件は,

$$\delta v^\kappa \equiv \mathrm{d}v^\kappa + \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu} v^\nu \mathrm{d}x^\mu = 0, \tag{4.36}$$

のように共変微分がゼロとなる条件と一致するのである。ただし, $\delta v^\kappa = \mathrm{d}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^\kappa$ である。つまり, 空間上のある点 P に存在するベクトル v^κ を微小変位 $\mathrm{d}x^\mu$ だけ離れた点 Q に平行移動したとき, そのベクトルは

$$v^\kappa(\mathrm{Q}) = v^\kappa(\mathrm{P}) - \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu} v^\nu \mathrm{d}x^\mu, \tag{4.37}$$

に変化しているということである。 平行移動してもベクトルが変化しないユークリッド空間との違いは, 右辺のクリストッフェル記号が含まれる第 2 項に現れている。つまり, クリストッフェル記号は, 曲がった空間を平行移動した際のベクトルの変化量に関係している。

平行移動の性質を調べてみよう。ユークリッド幾何学では平行移動によってベクトルの長さが不変あり, 二つのベクトルのなす角は, 平行移動に対して不変である。さて, リーマン幾何学でもその性質は成り立つのであろうか。まず, ベクトルの大きさの自乗 $(v)^2 \equiv g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$ の微分を計算すると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(v)^2 &\equiv \mathrm{d}(g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu) \\
&= \mathrm{d}g_{\mu\nu} \cdot v^\mu v^\nu + g_{\mu\nu} \mathrm{d}v^\mu \cdot v^\nu + g_{\mu\nu} v^\mu \cdot \mathrm{d}v^\nu \\
&= \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \mathit{\Gamma}^\beta{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \mathit{\Gamma}^\beta{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} \right) v^\mu v^\nu \mathrm{d}x^\alpha = v^\mu v^\nu \cdot \delta g_{\mu\nu} = 0,
\end{aligned}$$

が得られる。この計算結果によると, ベクトルの長さは平行移動に対して不変である。さて, もう一つの反変ベクトル u^μ についても平行移動し, そのときの内積 $g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$ の変化を計算すると, 先ほどの計算過程を利用すると,

$$\mathrm{d}(g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu) = u^\mu v^\nu \cdot \delta g_{\mu\nu} = 0,$$

であることが容易にわかる。平行移動によって, ベクトルの長さが不変であり, 二つのベクトルの内積が不変であることから, 二つのベクトルがなす角も不変であることが導かれる。なぜなら, ベクトル u^μ と v^μ がなす角度 θ は,

$$\cos\theta \equiv \frac{g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu}{\sqrt{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \cdot g_{\varepsilon\eta} v^\varepsilon v^\eta}},$$

によって定義されるからである。この式の分母も分子も不変であるので, 二つのベクトルがなす角は平行移動によって不変であるというわけだ。曲がった空間を取り扱っていても, リーマン幾何学における平行移動は, ベクトルの長さと二つのベクトルの角度に注目すればユークリッド幾何学と同様の性質が成立するのだ。

ある経路に沿って点を移動させた場合を考えよう。この経路における座標を x^μ, 経路長を s とすると, この経路に沿った単位接線ベクトルは $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ と表される。この単位接線ベクトルが平行移動となる経路を考えてみよう。平行移動とは, 既にみたようにベクトルの共変微分がゼロである移動である。幾何学的解釈で説明したように, ベクトルの共変微分はベクトルの実質的な変化量を表すので, ここで考える移動とは, 物理学的には加速度を生じない経路である。単位接線ベクトル $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ が平行移動となる条件は,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}+\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}=0,$$

である。この式に $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ を掛けて μ について縮約をとれば,

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\nu}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}=0,$$

という関係が得られる。これは測地線を表す式である。よって, 経路に沿った単位接線ベクトルが平行移動となる経路は測地線である。物理的には, 測地線に沿って移動する物体には, 加速度が作用しないことを意味する。例えば, 東京からニューヨークへの航空機の航路はメルカトル図法で描くと曲がったコースとなるが, それは球面上の測地線であるため, 航空機には加速度は作用していない。言い換えると, 無風状態で地球の自転が無視できるとすれば[1], 操縦桿をまっすぐに保って飛行する航空機は測地線をたどるのだ。

リーマン幾何学はアインシュタインの重力理論を記述する道具になっているが, アインシュタインの理論では, 重力はもはや力ではなく, 質量がつくり出す時空の歪みということになっている。つまり, 重力によって質量に引きつけられる運動は, 単に, 測地線に沿った運動ということになる。光でさえも, その近傍では, 時空のひずみによって曲がった測地線に沿って運動することとなる。重力と加速度が等価である前提に立つアインシュタインの重力理論では, 重力場を自由落下する観測者は, 加速度を一切感じず, 無重力状態との区別がつかない。その状況はまさに, 測地線に沿った運動が平行移動であるため, 加速度を感じないという性質で記述することができるのである。

平行移動と測地線の関係がわかったところで, 平行移動の定義を改めて言い換えてみよう。上では, 平行移動された 2 つのベクトルのなす角が一定になることを述べた。それは任意のベクトルに対して成り立つのであるから, 一方を測地線に沿った単位接線ベクトルとしてもよい。それを踏まえて, 「ベクトルの平行移動は, ある点 A に存在するベクトル

[1]厳密には, 地球の自転によってコリオリの力が作用するため, 無風状態であっても航空機は飛行を継続するとともに航路が測地線から少しずつずれる。

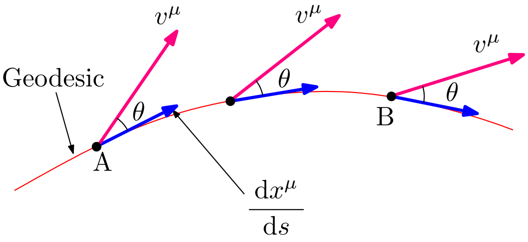


図 4.2: 測地線と平行移動

を別の点 B に平行移動するということは, 点 A と B を通る測地線を描き, ベクトルが測地線となす角度と長さを変えないようにして, ベクトルを移動することである」と定義することができる。(図 4.2 参照)

4.9 フレネ・セレの公式

空間中の曲線について, フレネ・セレの公式によって, 法線や曲率が定式化される。曲率は, ユークリッド空間では直線からのずれを表し, リーマン空間では測地線からのずれを表す。本節では, リーマン空間でのフレネ・セレの公式を導出した後, ユークリッド空間でフレネ・セレの公式を取り扱うことによって, その幾何学的な意味を調べる。

4.9.1 法線と曲率の定式化

リーマン空間中の座標 x^μ を通る曲線を考えよう。座標 x^μ は $x^\mu \equiv x^\mu(s)$ のように長さ s を媒介変数とする関数で表現できるものとする。この座標を媒介変数 s で微分して得られるベクトル:

$$\xi^\mu_{(1)} \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s},$$

は, 長さが 1 のベクトル, すなわち, 単位ベクトルである。なぜなら, リーマン空間中の線素 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ から,

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\xi^\nu_{(1)} = 1,$$

が得られるからである。ここから, 曲線に沿って共変微分することを考えよう。曲線に沿った共変微分を与える演算子を $\delta/\delta s$ と書くことにする。曲線に沿った共変微分とは, 共変微分の演算子 ∇_μ と曲線に沿った単位ベクトル $\xi^\mu_{(1)}$ との内積, すなわち,

$$\frac{\delta}{\delta s} \equiv \xi^\mu_{(1)}\nabla_\mu,$$

である。ベクトル $\xi^{\mu}_{(1)}$ が単位ベクトルであることを表現する関係式 $g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\nu}_{(1)} = 1$ を曲線に沿って共変微分すると,

$$g_{\mu\nu}\frac{\delta\xi^{\mu}_{(1)}}{\delta s}\xi^{\nu}_{(1)} + g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(1)}}{\delta s} = 0,$$

である。この数式に $\delta g_{\mu\nu}/\delta s$ が含まれないのは, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変微分がゼロであることが理由である。さらに, 計量テンソルが対象テンソルであることから, 上に記述した関係式は,

$$g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(1)}}{\delta s} = 0, \tag{4.38}$$

のように書き換えられる。この数式は $\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s \neq 0$ の条件で, 二つのベクトル $\xi^{\mu}_{(1)}$ と $\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s$ が直交することを意味する。二つのベクトルの直交性を保証しない $\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s = 0$ とはどのような条件だろう? その条件を調べるため, 共変微分の演算子を展開すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\xi^{\mu}_{(1)}}{\delta s} &= \xi^{\alpha}_{(1)}\nabla_{\alpha}\xi^{\mu}_{(1)} = \xi^{\alpha}_{(1)}\left(\frac{\partial\xi^{\mu}_{(1)}}{\partial x^{\alpha}} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\xi^{\beta}_{(1)}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s},
\end{aligned}$$

のように数式変形できる。この数式の右辺をゼロと等号で結ぶと前章で紹介した測地線の方程式になる。つまり, $\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s = 0$ となる条件とは, 曲線 x^{μ} が測地線であることを意味する。そのため, 本節で取り扱う曲線は測地線を除外するものとする。

新たなベクトル $\kappa_{(1)}\xi^{\mu}_{(2)} \equiv \delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s$ を定義しよう。ここで, $\kappa_{(1)}$ はベクトル $\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s$ の長さであり, $\xi^{\mu}_{(2)}$ は単位ベクトルである。つまり, $g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\nu}_{(2)} = 1$ である。しかも, $\xi^{\mu}_{(2)}$ は $\xi^{\mu}_{(1)}$ と直交するので, $g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\nu}_{(2)} = 0$ が成立する。二つのベクトル $\xi^{\mu}_{(1)}$ と $\xi^{\mu}_{(2)}$ の内積がゼロであることを示す数式を s について共変微分すると,

$$\begin{aligned}
g_{\mu\mu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(2)}}{\delta s} + g_{\mu\mu}\xi^{\nu}_{(2)}\frac{\delta\xi^{\mu}_{(1)}}{\delta s} &= g_{\mu\mu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(2)}}{\delta s} + g_{\mu\nu}\xi^{\nu}_{(2)}\kappa_{(1)}\xi^{\mu}_{(2)} \\
&= \kappa_{(1)} + g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(2)}}{\delta s} = 0,
\end{aligned}$$

が得られる。一方, $\xi^{\mu}_{(2)}$ が単位ベクトルであることを示す数式を共変微分すると,

$$g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(2)}\frac{\partial\xi^{\nu}_{(2)}}{\partial s} = 0,$$

が得られる。得られた二つの数式から, ベクトル $\kappa_{(1)}\xi^\mu_{(1)} + \delta\xi^\mu_{(2)}/\delta s$ が, $\xi^\mu_{(1)}$ と $\xi^\mu_{(2)}$ の双方と直交することがわかる。続いて, 新たなベクトル:

$$\kappa_{(2)}\xi^\mu_{(3)} \equiv \kappa_{(1)}\xi^\mu_{(1)} + \frac{\delta\xi^\mu_{(2)}}{\delta s},$$

を定義しよう。ここでも, $\kappa_{(3)}$ はベクトルの大きさであり, $\xi^\mu_{(3)}$ は単位ベクトルである。 先ほど示した数式に注意すると, $\xi^\mu_{(3)}$ が, $\xi^\mu_{(1)}$ と $\xi^\mu_{(2)}$ の双方に対して垂直であることが示せる。しかも, $\xi^\mu_{(3)}$ が単位ベクトルであることを併せて数式で表現すると,

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\xi^\nu_{(3)} = 0, \qquad g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(2)}\xi^\nu_{(3)} = 0, \qquad g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(3)}\xi^\nu_{(3)} = 1,$$

が得られる。これら三つの数式を曲線に沿って共変微分すると,

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\frac{\delta\xi^\nu_{(3)}}{\delta s} = 0, \quad \kappa_{(2)} + g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(2)}\frac{\delta\xi^\nu_{(3)}}{\delta s} = 0, \quad g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(3)}\frac{\delta\xi^\nu_{(3)}}{\delta s} = 0,$$

が得られる。次の段階として,

$$\kappa_{(3)}\xi^\mu_{(4)} \equiv \kappa_{(2)}\xi^\mu_{(2)} + \frac{\delta\xi^\mu_{(3)}}{\delta s},$$

なるベクトルを定義する。新たに定義されたベクトル $\xi^\mu_{(4)}$ が, $\xi^\mu_{(1)}$, $\xi^\mu_{(2)}$, $\xi^\mu_{(3)}$ のどれとも直交するすることが容易に証明できる。

同様の操作を続けて単位行列を逐次定義することができるはずだ。繰り返した結果, 第 n 番目のベクトル:

$$\kappa_{(n-1)}\xi^\mu_{(n)} \equiv \kappa_{(n-2)}\xi^\mu_{(n-2)} + \frac{\delta\xi^\mu_{(n-1)}}{\delta s},$$

までが定義されたとしよう。ここでも, $\kappa_{(n-1)}$ はベクトルの大きさ, $\xi^\mu_{(n)}$ は単位ベクトルである。さらに, $\xi^\mu_{(n)}$ はベクトル $\xi^\mu_{(1)}, \xi^\mu_{(2)}, \ldots, \xi^\mu_{(n-1)}$ のすべてと直交する。これらの情報から,

$$\begin{aligned}
&g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\xi^\mu_{(n)} = 0, \quad g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(2)}\xi^\mu_{(n)} = 0, \quad \ldots, \quad g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(n-1)}\xi^\mu_{(n)} = 0, \\
&g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(n)}\xi^\mu_{(n)} = 1,
\end{aligned}$$

なる関係式が成立する。 これらの関係式を曲線に沿って共変微分すると,

$$\begin{aligned}
&g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\frac{\delta\xi^\mu_{(n)}}{\delta s} = 0, \qquad g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(2)}\frac{\delta\xi^\mu_{(n)}}{\delta s} = 0, \\
&\qquad\vdots \\
&g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(n-2)}\frac{\delta\xi^\mu_{(n)}}{\delta s} = 0, \\
&\kappa_{(n-1)} + g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(n-1)}\frac{\delta\xi^\mu_{(n)}}{\delta s} = 0, \qquad g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(n)}\frac{\delta\xi^\mu_{(n)}}{\delta s} = 0,
\end{aligned}$$

が得られる。これまでと同様に考えれば,

$$\kappa_{(n)}\xi_{(n+1)} \equiv \kappa_{(n-1)}\xi^{\mu}_{(n-1)} + \frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s},$$

のように単位定義されたベクトル $\xi^{\mu}_{(n+1)}$ は, $\xi^{\mu}_{(1)}, \xi^{\mu}_{(2)}, \ldots, \xi^{\mu}_{(n)}$ のすべてのベクトルと内積をとるとゼロになる。しかし, n 次元空間を考えているのであれば直交するベクトルは n 個までしかとることができない。つまり, 内積がゼロとなるためには,

$$\kappa_{(n)}\xi_{(n+1)} = \kappa_{(n-1)}\xi^{\mu}_{(n-1)} + \frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s} = 0,$$

でなければならない。したがって,

$$\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s} = -\kappa_{(n-1)}\xi^{\mu}_{(n-1)},$$

なる関係式が得られるのである。ここまでに得られた関係式をまとめると,

$$\begin{bmatrix} \delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s \\ \delta\xi^{\mu}_{(2)}/\delta s \\ \delta\xi^{\mu}_{(3)}/\delta s \\ \vdots \\ \delta\xi^{\mu}_{(n-1)}/\delta s \\ \delta\xi^{\mu}_{(n)}/\delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\kappa_{(1)} & 0 & \kappa_{(2)} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{(n-1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{\mu}_{(1)} \\ \xi^{\mu}_{(2)} \\ \xi^{\mu}_{(3)} \\ \vdots \\ \xi^{\mu}_{(n-1)} \\ \xi^{\mu}_{(n)} \end{bmatrix}, \qquad (4.39)$$

のように, 定義された単位ベクトルを曲線に沿って共変微分した結果が 1 次変換の形で記述できることがわかる。この関係式は**フレネ・セレの公式**と呼ばれる。ここで, $\xi_{(1)}$ は曲線の接線であり, $\xi_{(m)}$ は第 m 法線 $(m = 1, \ldots, n-1)$, $\kappa_{(m)}$ は第 m 曲率と呼ばれる。特に, n 次元空間では第 $n-1$ 曲率まで定義できることは, (4.39) から明らかである。既に述べたように, 接線 $\xi^{\mu}_{(1)}$ とすべての法線 $\xi^{\mu}_{(m)}$ は互いに直交する。

4.9.2 幾何学的な解釈

曲率 $\kappa_{(m)}$ は曲線のカーブの強さを表す指標である。その解釈を説明するため, 半径 R の円を考えよう。円が原点を中心とするなら, 曲線上の任意の位置は 2 次元のカルテシアン座標を用いて,

$$x^1 = R\cos\theta, \qquad x^2 = R\sin\theta,$$

なる数式で記述できる。その曲線上の長さの微分は $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$ であることに注意して, 座標を長さ s について微分すると,

$$\xi^1_{(1)} = -\sin\theta, \qquad \xi^2_{(1)} = \cos\theta,$$

が得られる。これは曲線の接線ベクトルである。この例ではカルテシアン座標を考えているので, 曲線に沿った共変微分が s について微分する演算と等しいのだ。接線ベクトルを曲線に沿って微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}\xi^1_{(1)}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\cos\theta}{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}\xi^2_{(1)}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\sin\theta}{R},$$

が得られる。フレネ・セレの公式によると, このベクトルは $\kappa_{(1)}\xi^\mu_{(1)}$ に等しいはずなので,

$$\kappa_{(1)} = \frac{1}{R}, \qquad \xi^1_{(1)} = -\cos\theta, \qquad \xi^2_{(1)} = -\sin\theta,$$

である。この例は 2 次元で考えているので, フレネ・セレの公式で取り出せるベクトルは接線ベクトル $\xi^\mu_{(1)}$ と第 1 法線 $\xi^\mu_{(2)}$ までである。ここで取り出せた第 1 曲率 $\kappa_{(1)}$ は曲線の半径の逆数を与えている。この例は曲線が円である場合を取り扱ったが, 一般の曲線においても, 第 1 曲率が瞬時的な半径 (曲率半径) の逆数と考えればよい。

三次元のカルテシアン座標系の曲線を例に, フレネ・セレの公式を適用しよう。三次元におけるフレネセレの公式は,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\xi^\mu_{(1)}}{\mathrm{d}s} &= \kappa_{(1)}\xi^\mu_{(2)}, \\
\frac{\mathrm{d}\xi^\mu_{(2)}}{\mathrm{d}s} &= -\kappa_{(1)}\xi^\mu_{(1)} + \kappa_{(2)}\xi^\mu_{(3)}, \\
\frac{\mathrm{d}\xi^\mu_{(3)}}{\mathrm{d}s} &= -\kappa_{(2)}\xi^\mu_{(2)},
\end{aligned}$$

なる数式で書ける。三次元の場合, 特に, $\boldsymbol{t} \equiv [\xi^\mu_{(1)}]$, $\boldsymbol{n} \equiv [\xi^\mu_{(2)}]$, $\boldsymbol{b} \equiv [\xi^\mu_{(3)}]$ なるベクトルを定義し, 第 1 曲率と第 2 曲率を, それぞれ, $\kappa \equiv \kappa_{(2)}$, $\tau \equiv \kappa_{(3)}$ なる記号で定義すると, フレネ・セレの公式は,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau\boldsymbol{n},$$

なる数式に書き換えられる。既に示したように, フレネ・セレの公式に現れる単位ベクトル $\xi^\mu_{(m)}$ は互いに直交しているので, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ も互いに直交する。特に, 3 次元空間であれば, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$ である。

幾何学的な意味をつかむための例として, 3 次元空間の螺旋を考えよう。図 4.3 のように一定の勾配で z 軸方向に上る螺旋を考えよう。螺旋は, xy 平面への投影で半径 R, 螺旋が z 軸を 1 周まわる間に z 座標が $2\pi H$ だけ増加するとしよう。そのような螺旋は, カルテシアン座標系において,

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta, \qquad z = H\theta,$$

にて経路が与えられる。角度 θ は $[-\pi, \pi)$ の区間に制限されているのでなく, 実数全体で

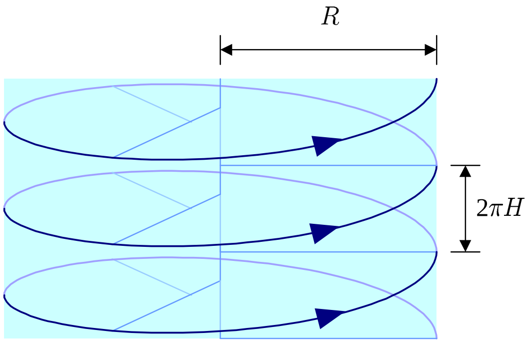


図 4.3: 3 次元中の螺旋

定義される。螺旋を正の方向にたどると, θ は無限に増加するのだ。この螺旋上の微小長さについて, $\mathrm{d}s^2 = (R^2 + H^2)\mathrm{d}\theta^2$ なる関係が成立する。曲線上の点 $[s, y, z]$ を長さ s について微分すると, 接線ベクトル:

$$\boldsymbol{t} = \left[-\frac{R\sin\theta}{\sqrt{R^2+H^2}}, \quad \frac{R\cos\theta}{\sqrt{R^2+H^2}}, \quad \frac{H}{\sqrt{R^2+H^2}} \right],$$

が得られる。接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を s について微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \left[-\frac{R\cos\theta}{R^2+H^2}, \quad -\frac{R\sin\theta}{R^2+H^2}, \quad 0 \right],$$

が得られるので, 第 1 法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と, 第 1 曲率 κ は,

$$\boldsymbol{n} = -\left[\cos\theta, \quad \sin\theta, \quad 0 \right], \qquad \kappa = \frac{R}{R^2+H^2},$$

であることがわかる。螺旋は z 方向にも曲線が流れていくため, 第 1 法線ベクトルが 1 周期するには, $2\pi R$ でなく, $2\pi\sqrt{R^2+H^2}$ の長さが必要となるため, 第 1 曲率は $1/R$ より小さくなる。三次元空間では, 第 2 法線ベクトルは $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$ となるので,

$$\boldsymbol{b} = \left[-\frac{H\sin\theta}{\sqrt{R^2+H^2}}, \quad \frac{H\cos\theta}{\sqrt{R^2+H^2}}, \quad -\frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}} \right],$$

が得られる。さらに, 関係式 $\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}s = -\tau\boldsymbol{n}$ を利用すると, 第 2 曲率:

$$\tau = \frac{H}{R^2+H^2},$$

が得られる。ここで, 第 2 曲率 τ の幾何学的意味を考えてみよう。得られた数式を見ると, $H = 0$ のとき $\tau = 0$ であることがわかる。つまり, 平面上に描かれた円周上では第 2 曲率がゼロということだ。しかし, $H \neq 0$ となる一般の螺旋では第 2 曲率がゼロにならない。第 2 曲率がゼロでないことは, $\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}s \neq 0$ が成立すること, すなわち, 場所によってベクトル $\boldsymbol{b}$ が変化することを意味する。曲線に沿って運動する観測者を仮定し, 観測者の前方が

$\boldsymbol{t}$であり, 側方が$\boldsymbol{n}$である。その場合, $\boldsymbol{b}$は観測者の頭上に向かうベクトルである。曲線に沿って動いたときベクトル$\boldsymbol{b}$が変化するのであれば, $\boldsymbol{t}$と$\boldsymbol{n}$によって張られる平面, すなわち, 観測者が乗った床面が傾いていくはずだ。つまり, 観測者の運動経路がねじれていることを意味する。その意味で解釈すると, 第 2 曲率τは, 経路に沿った単位長さあたりで床面が傾く角度である。したがって, τは**ねじれ率**, または, **捩率** (れいりつ) と呼ばれる。

第5章　曲率テンソル

前章で共変微分を取り扱い, それを用いてベクトルの平行移動の概念を曲がった空間でも取り扱えるように拡張した。その記述において, ユークリッド空間との相違点がクリストッフェル記号に現れることがわかった。リーマン気が学におけるベクトルの平行移動は, 測地線に沿って, 測地線となす角を不変に保つ移動である。測地線が湾曲している場合, 平行移動によってベクトルは徐々に向きを変える。しかも, ベクトル向きの変化は, 平行移動でとる経路によって異なる。それこそが空間が曲がっていることの尺度となる。

5.1　曲率テンソル

曲がった空間では, たどった経路に依存して平行移動したベクトルの向きが変化する。向きの変化が経路に依存することが, 空間が曲がっている性質を反映する。その理由で, 平行移動したベクトルの向き変化の経路依存を占めるパラメータとして, 曲率テンソルを導入する。後に示すように, 曲率テンソルは共変微分の交換則の不整合と関係している。

前章で示したように, 微小変位を与えたときのベクトル v^κ の変化量は, 共変微分 $\nabla_\mu v^\kappa$ によって表現される。測地線に沿った移動, すなわち, 平行移動に関して, 共変微分はゼロとなる。しかし, 曲がった空間では平行移動によってベクトルが変化しないわけではない。共変微分が,

$$\nabla_\mu v^\kappa = \frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} v^\lambda,$$

で表されるため, $\nabla_\mu v^\kappa = 0$ であっても, $\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}$ がゼロでないため, $\partial v^\kappa / \partial x^\mu$ がゼロにならないのだ。したがって, 曲がった空間では平行移動しても, クリストッフェル記号の影響でベクトルの向きが変化するのだ。共変微分の公式に基づき, 測地線に沿って ($\nabla_\mu u^\kappa = 0$ の条件で), $\mathrm{d}x^\mu$ の微小変位を与えたときのベクトルの変化を計算すると,

$$\mathrm{d}v^\kappa = -\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} v^\lambda \, \mathrm{d}x^\mu,$$

となる。クリストッフェル記号がテンソルでないので, このベクトルの変化量もテンソルではない。しかも, ベクトルの変化量は移動させた経路に依存する。

経路依存の影響を調べるため, 共変微分の交換関係 $\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa$ を評価してみよう。この交換関係を調べる動機は次のようなことである。共変微分を 2 階重ねると, 単純に座標成分での 2 階微分の項と, クリストッフェル記号を含む項が現れる。共変微分の順序を逆にして互いに差をとると, 単純な 2 階微分は可換であるので互いに相殺し, クリストッフェル記号を含む項のみが抽出される。平行移動の際にベクトルの向きを変えるのはクリストッフェル記号による効果なので好都合というわけだ。

共変微分 $\nabla_\mu v^\kappa$ をさらに x^ν で偏微分してみよう。共変微分 $\nabla_\mu v^\kappa$ が 2 階の混合テンソルであることに注意し, 前節で導出した共変微分の公式を用いれば,

$$\begin{aligned}\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa &= \frac{\partial \nabla_\mu v^\kappa}{\partial x^\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha} \nabla_\mu v^\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} \nabla_\alpha v^\kappa \\ &= \frac{\partial^2 v^\kappa}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} v^\lambda - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} v^\lambda \right) - \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} v^\lambda,\end{aligned}$$

が計算できる。この結果に対して添え字 ν と μ を入れ替えて差を計算すると,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa = \left(\frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} \right) v^\lambda,$$

が得られる。ベクトル成分を単純に座標成分で偏微分しただけの項は相殺してくれた。この量は一般にゼロとはならないので, 共変微分は可換ではない。それがユークリッド空間との違いである。ここで,

$$R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} = \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}, \tag{5.1}$$

なる量を定義すると, 共変微分の交換関係は,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa = R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} v^\lambda, \tag{5.2}$$

と書くことができる。この式の右辺は 2 つのテンソルの差であるのでテンソルである。さらに, v^λ が反変ベクトルであるので, $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu}$ はテンソルであると結論できる。そのテンソル $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu}$ は**リーマン・クリストッフェルのテンソル**, または, **曲率テンソル**と呼ばれる。

共変微分の交換関係は共変ベクトル v_λ についても計算することができる。反変ベクトルに対する共変微分の交換関係 (5.2) を計算したときと同じ手順によって,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = -R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} v_\kappa, \tag{5.3}$$

が得られる。この結果に注意すると, 任意の混合テンソルに対する共変微分の交換関係に拡張することができる。例えば, テンソル $T_{\sigma\lambda}{}^\kappa$ に対して共変微分の交換関係を拡張すると,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu T_{\sigma\lambda}{}^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu T_{\sigma\lambda}{}^\kappa = R^\kappa{}_{\alpha\nu\mu} T_{\sigma\lambda}{}^\alpha - R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} T_{\alpha\lambda}{}^\kappa - R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} T_{\sigma\alpha}{}^\kappa,$$

のようになる。さらに, 一般的な混合テンソルに対して交換関係を拡張すると,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s} - \nabla_\nu \nabla_\mu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} R^{\kappa_i}{}_{\alpha\nu\mu} T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{i=1}^{s} R^{\alpha}{}_{\lambda_i\nu\mu} T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\alpha\cdots\lambda_s}, \tag{5.4}$$

のような関係になるはずである。この交換関係は**リッチの公式**と呼ばれる。

5.2　曲率テンソルの幾何学的意味

本節では, 曲率テンソルの幾何学的な意味を探ってみよう。曲率テンソルの定義式 (5.1) の後半にあるクリストッフェル記号の積和に注意すれば何か見えてくるかもしれない。ベクトルの平行移動の公式によると, $\varGamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}$ は, ベクトル ξ^λ を x^μ 方向に平行移動したときに, 空間の曲がりが原因でベクトルに生じる変化量の x^α 成分を与える。ということは, $\varGamma^{\kappa}{}_{\nu\alpha}\varGamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}$ はベクトル ξ^λ を x^μ 方向に平行移動して, さらに x^ν 方向に平行移動したとき, ベクトルに生じる 2 次の変化量の x^κ 成分に関係した量であろう。曲率テンソル $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ には, さらに, $-\varGamma^{\kappa}{}_{\mu\alpha}\varGamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}$ なる項が含まれている。それは, 先ほどの平行移動の順序 (x^ν 方向と x^μ 方向) を入れ替えたときのベクトルに生じる 2 次の変化量を減じているわけである。推測してみると, 曲率テンソル $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ は, x^ν と x^μ の座標軸で囲まれた周回経路に沿って元の位置に戻るまでベクトルを平行移動したときに生じるベクトルの変化量と関係しているよう思える。

本節での結論としては, 上記の推測どおり, 曲率テンソルはベクトルを周回経路に沿って平行移動し, もとの位置に戻ってきたとき, ベクトルが最初の状態から変化している量と関係している。例えば, 取り扱っている n 次元空間に任意の曲面を設定し, その曲面上の位置を座標 (u, v) で表すとする。 図 5.1 に示すように, 任意のベクトル ξ^κ を $\varDelta u$ と $\varDelta v$ の微小偏移で囲まれる周回経路に沿って平行移動し, もとの位置に戻ってきたとき, ベクトルが $\tilde{\xi}^\kappa$ に変化しているとする。変化後のベクトル $\tilde{\xi}^\kappa$ は,

$$\tilde{\xi}^\kappa = \xi^\kappa + R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}\,\xi^\lambda \frac{\partial x^\nu}{\partial v}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u \varDelta v, \tag{5.5}$$

なる数式で表される。つまり, 周回経路を平行移動したベクトルが変化する量は曲率テンソルの依存し, また, 大きな面積を囲む周回経路に沿った平行移動をすると, ベクトルの変化量が大きくなることがこの数式からわかる。本節では, そのような曲率テンソルの性質を導出する。

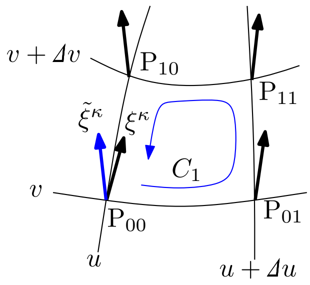


図 5.1: 周回経路に沿ったベクトルの平行移動によるベクトルの変化

5.2.1 周回経路に沿ったベクトルの平行移動

曲がった空間でベクトルを平行移動したとき, ユークリッド空間とは異なり, ベクトルが変化することは既に学んだとおりである。とはいえ, 周回経路に沿ってベクトルを平行移動し, もとの位置に戻ったとき, そのベクトルが最初の状態から変化しているという事実は理解しがたいかもしれない。ここでは, 具体的なイメージをつかむため極端な例を用いてみよう。

地球上でベクトルを平行移動する場合を考えよう。大きすぎて想像できないのであれば, 地球儀やボールを用いても構わない。図 5.2 のように点 P が, 経度 0 度の赤道上にあるとする。まず, 真北を向くベクトルを点 P に配置する。このベクトルを, 赤道に沿って東経 90 度まで平行移動してみる。東経 90 度の赤道上に来たとき, ベクトルはやはり真北を向いている。そのベクトルをさらに, 子午線に沿って北極点まで平行移動させる。北極点に到着したとき, そのベクトルは西経 90 度の方角を向いているはずだ。

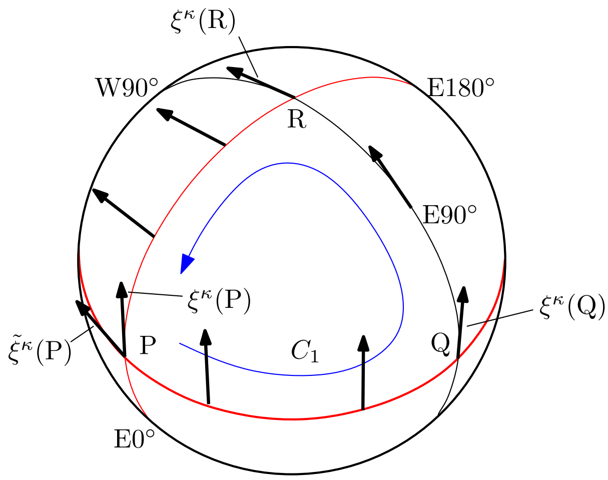


図 5.2: 球面における異なる経路とベクトルの平行移動

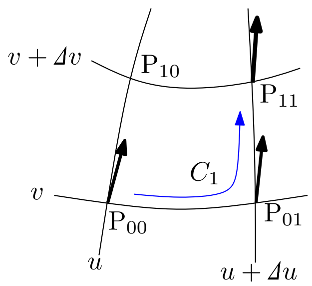
さて, 北極点まで移動したベクトルを経度 0 度の子午線に沿って赤道まで平行移動させる。平行移動の間, ベクトルは西を向いている。赤道に到達した場所は経度 0 度の赤道上,

つまり, 最初の場所に戻ってきたわけだ。しかし, 当初, 北を向いていたベクトルは, 周回経路を平行移動した結果, 西を向いている。つまり, 周回経路に沿って平行移動した結果, ベクトルの向きが 90 度も回転したということである。

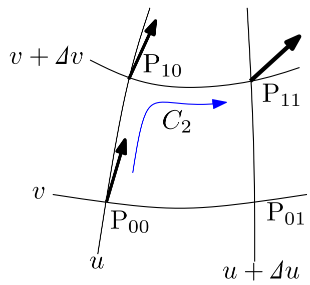
このような奇妙な結果は, 取り扱う空間が曲がっていることに起因する。つまり, 周回経路に沿って平行移動したときのベクトルの変化量を空間の曲がり具合を表す量として使えそうである。以降の節では, 曲率テンソルが周回経路におけるベクトルの平行移動と関係した量であることを示す。

5.2.2　一次近似による検証

曲率テンソルが, 周回経路におけるベクトルの平行移動と関係していることを検証してみよう。曲がった空間に任意の曲面を配置し, その曲面上の周回経路に沿ってベクトル ξ^κ を平行移動した場合を考える。その曲面上の位置は座標 (u, v) によって記述できる。これら新しい座標 u と v はともに $x^1, x^2, \ldots, x^n$ の関数である。まず, 図 5.3 のように, 座標軸 u, $u + \mathit{\Delta} u$, v, $v + \mathit{\Delta} v$ の交点に 4 つの点 P_{00}, P_{01}, P_{11}, P_{10} を配置する。まず, 点 P_{00} に任意のベクトル ξ^κ を置き, そのベクトルを点 P_{01} を経由して点 P_{11} に至る経路 C_1 と, 点 P_{10} を経由して点 P_{11} に至る経路 C_2 に沿って平行移動した結果を比較してみよう。



(a) Translation of a vector along the path C_1.



(b) Translation of a vector along the path C_2.

図 5.3: 曲がった空間における微小な平行移動

まず, 点 P_{00} から P_{01} へ, ベクトル ξ^κ を平行移動してみる。それには前章で導出した平行移動の公式をそのまま使うことができ, 平行移動した結果は,

$$\xi^\kappa(\mathrm{P}_{01}) = \xi^\kappa - \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\xi^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\mathit{\Delta} u,$$

となる。ここで, 簡単のため $\xi^\kappa \equiv \xi^\kappa(\mathrm{P}_{00})$ と記述した。この平行移動結果に対して, 再び平行移動の公式を適用した量:

$$\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}; C_1) = \xi^\kappa(\mathrm{P}_{01}) - \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\alpha\lambda}(\mathrm{P}_{01})\,\xi^\lambda \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}\mathit{\Delta} v,$$

はベクトル $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{01})$ をさらに点 R まで平行移動したときの結果を表す。言い換えると, ベクトル ξ^λ を経路 C_1 で平行移動した結果である。ここで, 点 P_{01} におけるクリストッフェル記号が,

$$\Gamma^\kappa{}_{\alpha\lambda}(\mathrm{P}_{01}) = \Gamma^\kappa{}_{\alpha\lambda} + \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\mathit{\Delta} u,$$

なる 1 次近似で書けることから, 点 P_{11} まで平行移動されたベクトルは,

$$\begin{aligned}
\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}; C_1) &= \xi^\kappa - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\xi^\lambda\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\mathit{\Delta} u \\
&\qquad - \left(\Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\mathit{\Delta} u\right)\left(\xi^\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\xi^\beta\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\mathit{\Delta} u\right)\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} v \\
&= \xi^\kappa + \left(\Gamma^\kappa{}_{\nu\beta}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}\right)\xi^\alpha\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} u\mathit{\Delta} v \\
&\qquad - \left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\xi^\lambda\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\mathit{\Delta} u + \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}\xi^\lambda\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} v\right) \\
&\qquad + \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}\Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta}\xi^\beta\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} u^2\mathit{\Delta} v,
\end{aligned}$$

のように計算される。ただし, 右辺の最終項が 3 次の微小変化であるため無視できるので, 平行移動の結果は,

$$\begin{aligned}
\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}; C_1) = \xi^\kappa &+ \left(\Gamma^\kappa{}_{\nu\beta}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}\right)\xi^\alpha\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} u\mathit{\Delta} v \\
&- \left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\xi^\lambda\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\mathit{\Delta} u + \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}\xi^\lambda\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} v\right),
\end{aligned}$$

のように近似できる。経路 C_2 にそった平行移動に関しても同様の手順を踏んで計算してもよいのだが, 上式の u と v を入れ替えれば, $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}; C_2)$ になると気づけば, 面倒な計算は不要である。念のため, $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}; C_2)$ の計算結果を書いておくと,

$$\begin{aligned}
\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}; C_2) = \xi^\kappa &+ \left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\right)\xi^\alpha\frac{\partial x^\nu}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial v}\mathit{\Delta} u\mathit{\Delta} v \\
&- \left(\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}\xi^\lambda\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} v + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\xi^\lambda\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\mathit{\Delta} u\right),
\end{aligned}$$

である。よって, 両者の差をとると,

$$\begin{aligned}
&\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}; C_1) - \xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}; C_2) \\
&\quad = \left(\Gamma^\kappa{}_{\nu\beta}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}\right)\xi^\alpha\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} u\mathit{\Delta} v \\
&\quad = R^\kappa{}_{\alpha\nu\mu}\,\xi^\alpha\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\mathit{\Delta} u\mathit{\Delta} v,
\end{aligned}$$

が得られる。このように始点と終点が共通であっても, 異なる経路 C_1 と C_2 に沿ったベクトル平行移動は, 異なる結果となり, それらの差を計算すると曲率テンソルが現れる。このような説明が, よくテキストに書かれている。しかし, 曲率テンソルは周回経路に沿った平行移動に関する量だと述べていたのだが, この状況設定とどのように結びつくのだろうか。

前段落で生じた疑問点は, 次のように説明できるかもかもしれない。ベクトル $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11};C_2)$ は ξ^κ を経路 C_2 に沿って平行移動した結果であるが, 逆に考えると, $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11};C_2)$ を, P_{11} から C_2 を逆にたどって P_{00} まで平行移動すると ξ^κ になると考えることができる。さらに, ベクトル $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11};C_1)$ は, $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11};C_2)$ を $\mathrm{P}_{11} \to \mathrm{P}_{10} \to \mathrm{P}_{00} \to \mathrm{P}_{01} \to \mathrm{P}_{11}$ の順に平行移動した結果と考えることができる。よって, 上記の計算結果は, 周回経路に沿ってベクトルを平行移動したときの変化量と同じである。

上記の説明は, 正しいような気もするが, 素直に周回経路を一周させず, 上記の理屈を使っているところがなんとなく怪しい。ためしに上記の計算過程を $\mathrm{P}_{11} \to \mathrm{P}_{10} \to \mathrm{P}_{00} \to \mathrm{P}_{01} \to \mathrm{P}_{11}$ の順にたどって平行移動してみると結果は,

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}^\kappa = a^\kappa &+ \left(\Gamma^\kappa{}_{\nu\beta}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial v} \mathit{\Delta} u \mathit{\Delta} v \\
&+ \left(\frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} \right) a^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial u} \mathit{\Delta} u^2 \\
&+ \left(\frac{\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} \right) a^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial v}\frac{\partial x^\mu}{\partial v} \mathit{\Delta} v^2,
\end{aligned}$$

となり, 曲率テンソル以外の項が残ってしまうのである。二次の微小変化 $\mathit{\Delta} u^2$ と $\mathit{\Delta} v^2$ が無視できればよいのであるが, それなら, やはり 2 次の微小変化である $\mathit{\Delta} u \mathit{\Delta} v$ が無視できないのはおかしいといった具体に, うまい結果が出ないのである。実は, 上の検証方法は多少インチキなのである。素直に周回経路に沿った平行移動を評価するのではなく, 異なる経路 C_1 と C_2 に沿った平行移動の差を計算しているのは, 周回経路に沿った平行移動では $\mathit{\Delta} u^2$ も $\mathit{\Delta} v^2$ の項を解決できないことをごまかすためである。次の節では, このようなごまかしをせず, 曲率テンソルが周回経路に沿ったベクトルの平行移動に関する量であることを説明する。

5.2.3 二次近似による検証

前節の計算を周回経路に沿ったベクトルの平行移動に適用したときに, 二次の微小変化は $\mathit{\Delta} u^2$ と $\mathit{\Delta} v^2$ が余分に含まれていたことには理由がある。それは, ベクトル ξ^κ を $\mathit{\Delta} u$ だけ

平行移動した結果を,

$$\xi^\kappa(u+\varDelta u, v) \approx \xi^\kappa - \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}\xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u,$$

のように 1 次近似で書いていたことが理由である。既に結果を示しているので予想できるだろうが, 計算過程には 2 次の微小変化までが必要である。 つまり, 平行移動の公式も 2 次近似しておくべきである。ベクトルの平行移動の公式には 2 次の項が存在しないわけではない。書いていなかっただけなのだ。 だから経路を周回したとき, 結果がおかしくなっていたわけである。ベクトル ξ^κ を $\varDelta u$ だけ平行移動した結果を 2 次近似として書くと,

$$\begin{aligned}\xi^\kappa(u+\varDelta u, v) &= \xi^\kappa - \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}\xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\varGamma^\kappa{}_{\mu\beta}\varGamma^\beta{}_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)\xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u^2,\end{aligned}$$

となる。この近似式は後で証明することとして, 周回経路に沿ってベクトル ξ^κ を平行移動してみよう。まず, $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{01})$ は上記の 2 次近似の公式をそのまま適用し,

$$\begin{aligned}\xi^\kappa(\mathrm{P}_{01}) &= \xi^\kappa - \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}\xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\varGamma^\kappa{}_{\mu\beta}\varGamma^\beta{}_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)\xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u^2,\end{aligned}$$

となる。この結果に対して, さらに, 平行移動の 2 次近似の公式を適用すると $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11})$ を得ることができる。近似の次数とともに無視できない項が増加したので, 数式が長くなるが, 具体的に書くと,

$$\begin{aligned}\xi^\kappa(\mathrm{P}_{11}) &= \xi^\kappa(\mathrm{P}_{01}) - \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}(\mathrm{P}_{01})\,\xi^\alpha(\mathrm{P}_{01})\,\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\varGamma^\kappa{}_{\mu\beta}(\mathrm{P}_{01})\,\varGamma^\beta{}_{\lambda\alpha}(\mathrm{P}_{01}) - \frac{\partial \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)\xi^\alpha(\mathrm{P}_{01})\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u^2 \\ &= \xi^\kappa - \left(\varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u + \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial v}\varDelta v\right)\xi^\alpha \\ &\qquad + \left(\varGamma^\kappa{}_{\mu\beta}\varGamma^\beta{}_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)\xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial v}\varDelta u\varDelta v \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\varGamma^\kappa{}_{\mu\beta}\varGamma^\beta{}_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)\xi^\alpha\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u^2 + \frac{\partial x^\lambda}{\partial v}\frac{\partial x^\mu}{\partial v}\varDelta v^2\right),\end{aligned}$$

のように計算される。ここで, クリストッフェル記号は,

$$\varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}(\mathrm{P}_{01}) = \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha} + \frac{\partial \varGamma^\kappa{}_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta}\xi^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial u}\varDelta u,$$

なる1次近似を適用した。クリストッフェル記号についても2次近似まで必要な気がするが, 実際に計算すればわかるように, 2次の項は ξ^κ の変化に対して3次以上の項にしか寄与しないので1次近似で十分である。同様に計算を進めると, $\xi^\kappa(\mathrm{P}_{10})$ は,

$$\begin{aligned}\xi^\kappa(\mathrm{P}_{10}) = \xi^\kappa - {\Gamma^\kappa}_{\mu\alpha}\xi^\alpha\frac{\partial x^\mu}{\partial v}\varDelta v \\ &+ \left({\Gamma^\kappa}_{\mu\beta}{\Gamma^\beta}_{\lambda\alpha} - \frac{\partial {\Gamma^\kappa}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial {\Gamma^\kappa}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)\xi^\alpha\frac{\partial x^\lambda}{\partial v}\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\varDelta u\varDelta v \\ &+ \frac{1}{2}\left({\Gamma^\kappa}_{\mu\beta}{\Gamma^\beta}_{\lambda\alpha} - \frac{\partial {\Gamma^\kappa}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)\xi^\alpha\frac{\partial x^\lambda}{\partial v}\frac{\partial x^\mu}{\partial v}\varDelta v^2,\end{aligned}$$

となる。さらにベクトルを平行移動し, 点 P_{00} まで戻ってきたときの結果を初期状態 ξ^κ と区別するため, $\tilde{\xi}^\kappa(\mathrm{P}_{00})$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^\kappa &= \xi^\kappa + \left({\Gamma^\kappa}_{\nu\beta}{\Gamma^\beta}_{\mu\alpha} - {\Gamma^\kappa}_{\mu\beta}{\Gamma^\beta}_{\nu\alpha} + \frac{\partial {\Gamma^\kappa}_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial {\Gamma^\kappa}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}\right)\xi^\alpha\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\varDelta u\varDelta v \\ &= \xi^\kappa + {R^\kappa}_{\alpha\nu\mu}\,\xi^\alpha\frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\nu}{\partial v}\varDelta u\varDelta v,\end{aligned}$$

となる。これで先ほどの疑問は解消した。確かに, 微小な周回経路に沿った平行移動でベクトルは変化し, その変化量は曲率テンソルと関係があることがわかった。

先ほど後回しにした2次近似の証明であるが, 結局はテイラー級数展開である。平行移動の1次近似式より, ベクトル ξ^κ の1階微分は,

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial u} = -{\Gamma^\kappa}_{\mu\alpha}\xi^\kappa\frac{\partial x^\mu}{\partial u},$$

と書くことができる。これをさらに, u で偏微分すると,

$$\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial u^2} = \left({\Gamma^\kappa}_{\mu\beta}{\Gamma^\beta}_{\lambda\alpha} - \frac{\partial {\Gamma^\kappa}_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\right)\xi^\alpha\frac{\partial x^\lambda}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial u},$$

となる。これらの偏微分導関数を用いて, ξ^κ を $\varDelta u$ について展開してやると上で述べた2次近似式が得られる。¶

5.3 曲率テンソルの性質

曲率テンソル ${R^\kappa}_{\lambda\nu\mu}$ は4階のテンソルであり, その要素数も多い。扱う次元が n 次元であれば, 曲率テンソルの成分数は n^4 である。 例えば, 一般相対性理論の場合, $n = 4$ であるので成分数は256個となる。とはいえ, 曲率テンソルの成分には対称性があるため, 独立な成分はそれよりもかなり少ない。具体的には, 曲率テンソル ${R^\kappa}_{\lambda\nu\mu}$ には,

$${R^\kappa}_{\lambda\mu\nu} = -{R^\kappa}_{\lambda\nu\mu}, \tag{5.6}$$

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} + R^{\kappa}{}_{\nu\lambda\mu} + R^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda} = 0, \tag{5.7}$$

の関係が成立する。これらの関係は曲率テンソルの定義式 (5.1) から容易に導かれる。特に, (5.7) は**ビアンキの第 1 恒等式**と呼ばれる。曲率テンソルにはさらに対称性があるが, $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ のような混合テンソルの形態では対称性が見えにくい。そのかわり, 次の段落で定義するような共変テンソルの形態にすると, さらに対称性が見えてくる。

曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}$ に計量テンソル $g_{\alpha\kappa}$ を乗じて α について縮約をとった量 $R_{\kappa\lambda\nu\mu} \equiv g_{\alpha\kappa}R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}$ は**共変曲率テンソル**と呼ばれる。共変曲率テンソルにも曲率テンソルと同様に, 添え字の間に対称性, 反対称性がある。それらの性質を列挙すれば,

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -R_{\lambda\kappa\nu\mu}, \tag{5.8}$$

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -R_{\kappa\lambda\mu\nu}, \tag{5.9}$$

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R_{\nu\mu\kappa\lambda}, \tag{5.10}$$

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} + R_{\kappa\mu\lambda\nu} + R_{\kappa\nu\mu\lambda} = 0, \tag{5.11}$$

が成立する。結局, これらの対称性があるので曲率テンソルの独立成分は n^4 よりもずっと小さな数になる。独立成分の数については, 本節の最後で考えることとして, その前に, 共変曲率テンソルの対称性を証明しておこう。

まず, (5.8) は計量テンソル $g_{\lambda\kappa}$ に対して共変微分の交換関係を計算すれば検証できる。リッチの公式を用いれば, $g_{\lambda\kappa}$ に対する共変微分の交換関係は,

$$\nabla_\nu \nabla_\mu\, g_{\lambda\kappa} - \nabla_\mu \nabla_\nu\, g_{\lambda\kappa} = -R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu} g_{\alpha\kappa} - R^{\alpha}{}_{\kappa\nu\mu} g_{\lambda\alpha},$$

となる。前章で示したように計量テンソルの共変微分がゼロであるのでこの式は恒等的にゼロとなる。よって, $R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu} g_{\alpha\kappa} = -R^{\alpha}{}_{\kappa\nu\mu} g_{\lambda\alpha}$ となり, その結果, (5.8) が得られる。 また, $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ が ν と μ について反対称であることから, (5.9) も明らかである。さらに, (5.7) に $g_{\kappa\alpha}$ を乗じて κ について縮約をとれば, (5.11) が成立することもわかる。

残りの性質 (5.10) は, 共変曲率テンソル $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ を具体的に計算すれば導出できる。定義にしたがって計算すると, 共変曲率テンソルは,

$$\begin{aligned}
R_{\kappa\lambda\nu\mu} &= \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda} \right) g_{\alpha\kappa} \\
&= \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda} g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\nu} \\
&\qquad\qquad + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda} g_{\alpha\kappa} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda} g_{\alpha\kappa} \\
&= \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda} g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda} \left(\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha} g_{\beta\kappa} + \Gamma^{\beta}{}_{\nu\kappa} g_{\alpha\beta} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\left(\mathit{\Gamma}^{\beta}{}_{\mu\alpha}g_{\beta\kappa} + \mathit{\Gamma}^{\beta}{}_{\nu\kappa}g_{\alpha\beta}\right) + \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}$$

$$= \frac{\partial \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\lambda}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\mathit{\Gamma}^{\beta}{}_{\nu\kappa}g_{\alpha\beta} + \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\mathit{\Gamma}^{\beta}{}_{\nu\kappa}g_{\alpha\beta},$$

のように展開される。この式の右辺の第 1 項と第 2 項に,

$$\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda}g_{\alpha\kappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\ \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\kappa}}\right),$$

なる公式を適用すると,

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}\right)$$
$$- \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\mathit{\Gamma}^{\beta}{}_{\nu\kappa}g_{\alpha\beta} + \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\mathit{\Gamma}^{\beta}{}_{\mu\kappa}g_{\alpha\beta}, \tag{5.12}$$

となるので (5.10) が導かれる。¶

それでは, 共変曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ の独立成分の数について考察してみよう。ここで, 取り扱う空間の次元は n 次元であるとする。まず, (5.8) のように κ と λ について反対称であるため, $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ が独立となる (κ, λ) の組み合わせは $n(n-1)/2$ 通りである。また, $\kappa = \lambda$ となる成分 ($R_{11\nu\mu}$, $R_{22\nu\mu}$, $R_{33\nu\mu}$, $\ldots$) はゼロである。もう一方, (5.9) のように ν と μ についても反対称であるので, $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ が独立となる (ν, μ) の組み合わせも $n(n-1)/2$ 通りである。やはり, $\nu = \mu$ となる成分 ($R_{\kappa\lambda 11}$, $R_{\kappa\lambda 22}$, $R_{\kappa\lambda 33}$, $\ldots$) もゼロである。

共変曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ は, (5.10) のように, (κ, λ) と (ν, μ) に対して対称である。上で考察したように, (κ, λ) も, (ν, μ) もそれぞれ, $n(n-1)/2$ 通りの組み合わせをとるので, $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ が独立となる $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ の組み合わせの数は,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2} + 1\right] = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2 - n + 2),$$

となる。算出された組み合わせは, 次数 n が十分に大きいとき, n^4 と比べると 8 分の 1 になっているので, 対称性によって共変曲率テンソルの独立成分の数がかなり少なくなっていることがわかる。しかし, まだそれだけではない。添え字の巡回に関する性質 (5.11) による従属成分を除外しなければならない。

添え字の巡回に関する性質 (5.11) は, 添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ のどれか 2 つ以上が同じ数値である場合, 既に述べた対称性に含まれる。具体的には, $\kappa = \lambda$ の場合と, $\kappa = \nu$ の場合, (5.11) は (5.10) を考慮すると, (5.8) と同一である。一方, $\kappa = \nu$, $\kappa = \mu$, $\lambda = \nu$, $\lambda = \mu$ のどれかの場合, (5.11) は (5.10) を考慮すると, (5.9) と同一である。さらに, 添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ のどれか 3 つ以上が同じ数値である場合, それに対応する成分 $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ はゼロとなる。つまり, まだ考慮されていない対称性は, 添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ がすべて異なる数値である場合である。

添え字 (κ,λ,ν,μ) がすべて異なる場合について, $(\kappa,\lambda,\nu,\mu)=(1,2,3,4)$ の場合を例にして考えてみよう。これらの添え字を任意に並べ替えると,

$$\begin{array}{cccccc}
(1,2,3,4) & (1,2,4,3) & (1,3,2,4) & (1,3,4,2) & (1,4,2,3) & (1,4,3,2) \\
(2,1,3,4) & (2,1,4,3) & (2,3,1,4) & (2,3,4,1) & (2,4,1,3) & (2,4,3,1) \\
(3,1,2,4) & (2,1,4,2) & (3,2,1,4) & (3,2,4,1) & (2,4,1,2) & (3,4,2,1) \\
(4,1,2,3) & (4,1,3,2) & (4,2,1,3) & (4,2,3,1) & (4,2,1,2) & (4,2,2,1)
\end{array}$$

のように 24 通りの組み合わせが可能である。しかし, これらのうちのほとんどは独立ではなく, 基本的な組み合わせから κ と λ の交換, ν と μ の交換, または, (κ,λ) と (ν,μ) の交換によって実現できてしまう。その基本的な組み合わせとは,

$$(1,2,3,4) \quad (1,3,4,2) \quad (1,4,2,3)$$

の 3 通りだけである。つまり, R_{1234} の添え字を並べ替えて得られる 24 通りの組み合わせのうち, 基本的な組み合わせは 3 通りしかない。したがって, 上記の 24 通りのうちの独立成分は 3 個と言いたいところであるが, ここで条件 (5.11) を考慮に入れる。ここでの基本的な組み合わせは,

$$R_{1234}+R_{1342}+R_{1423}=0,$$

という形で (5.11) が適用される組み合わせである。つまり, 独立成分の数は 2 個である。添え字 (κ,λ,ν,μ) がすべて異なる他の場合もまったく同じように, 条件 (5.11) を考慮に入れると, 独立成分が 1 つずつ減少する。添え字 (κ,λ,ν,μ) がすべて異なる組み合わせは, n 個の整数から任意の 4 つの整数を選択する組み合わせなので, $n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$ 通り存在する。よって, 共変曲率テンソルの独立成分の数は,

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2)-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=\frac{1}{12}n^2(n^2-1),$$

となる。次元 n が大きい場合には, 独立成分の数は n^4 の 12 分の 1 になっている。相対性理論における時空は $n=4$ であるので, その場合, 256 個の成分のうち独立成分はわずか 20 個である。相対性理論で議論される 4 次元時空における曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ のうち, 独立成分は図 5.4 に示す網掛けの部分だけである。曲率テンソルは四つの添え字 (κ, λ, ν, μ) をもつので, 紙面でテンソル成分を描くため, 工夫をしている。図は, 4×4 の行列を 4×4 の配列に並べている。大きな行列の行と列は, それぞれ, κ と λ に対応し, 内部の小行列の行と列は, ぞれぞれ, ν と μ に対応する。曲率テンソルの成分の対称性を示すため, 独立成分には A_1 から A_{21} のように番号を付けておいた。実際の独立成分は, A_1 から A_{20} までの 20 個であり, 図に示すように, $A_{21}=-(A_6+A_{10})$ である。また, 確実にゼロである成分は淡色表示してある。確実にゼロなる成分は 256 成分中の 112 成分を占めるのだ。この図から改めてわかるように, 曲率テンソルは形式的な成分のうち 10 % 未満しか有効な情報が含まれていない密度が薄いテンソルである。

λ

$\mu \quad \mu \quad \mu \quad \mu$

	0	0	0	0	0	$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{A_3}$	0	A_2	$\mathbf{A_7}$	$\mathbf{A_8}$	0	A_3	A_8	$\mathbf{A_{12}}$
	0	0	0	0	$-A_1$	0	$\mathbf{A_4}$	$\mathbf{A_5}$	$-A_2$	0	$\mathbf{A_9}$	$\mathbf{A_{10}}$	$-A_3$	0	$\mathbf{A_{21}}$	$\mathbf{A_{13}}$
	0	0	0	0	$-A_2$	$-A_4$	0	$\mathbf{A_6}$	$-A_7$	$-A_9$	0	$\mathbf{A_{11}}$	$-A_8$	$-A_{21}$	0	$\mathbf{A_{14}}$
ν	0	0	0	0	$-A_3$	$-A_5$	$-A_6$	0	$-A_8$	$-A_{10}$	$-A_{11}$	0	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	0
	0	$-A_1$	$-A_2$	$-A_3$	0	0	0	0	0	A_4	A_9	A_{21}	0	A_5	A_{10}	A_{13}
	A_1	0	$-A_4$	$-A_5$	0	0	0	0	$-A_4$	0	$\mathbf{A_{15}}$	$\mathbf{A_{16}}$	$-A_5$	0	A_{16}	$\mathbf{A_{17}}$
	A_2	A_4	0	$-A_6$	0	0	0	0	$-A_9$	$-A_{15}$	0	$\mathbf{A_{18}}$	$-A_{10}$	$-A_{16}$	0	$\mathbf{A_{19}}$
ν	A_3	A_5	A_6	0	0	0	0	0	$-A_{21}$	$-A_{16}$	$-A_{18}$	0	$-A_{13}$	$-A_{17}$	$-A_{19}$	0
	0	$-A_2$	$-A_7$	$-A_8$	0	$-A_4$	$-A_9$	$-A_{21}$	0	0	0	0	0	A_6	A_{11}	A_{14}
	A_2	0	$-A_9$	$-A_{10}$	A_4	0	$-A_{15}$	$-A_{16}$	0	0	0	0	$-A_6$	0	A_{18}	A_{19}
	A_7	A_9	0	$-A_{11}$	A_9	A_{15}	0	$-A_{18}$	0	0	0	0	$-A_{11}$	$-A_{18}$	0	$\mathbf{A_{20}}$
ν	A_8	A_{10}	A_{11}	0	A_{21}	A_{16}	A_{18}	0	0	0	0	0	$-A_{14}$	$-A_{19}$	$-A_{20}$	0
	0	$-A_3$	$-A_8$	$-A_{12}$	0	$-A_5$	$-A_{10}$	$-A_{13}$	0	$-A_6$	$-A_{11}$	$-A_{14}$	0	0	0	0
	A_3	0	$-A_{21}$	$-A_{13}$	A_5	0	$-A_{16}$	$-A_{17}$	A_6	0	$-A_{18}$	$-A_{19}$	0	0	0	0
κ	A_8	A_{21}	0	$-A_{14}$	A_{10}	A_{16}	0	$-A_{19}$	A_{11}	A_{18}	0	$-A_{20}$	0	0	0	0
ν	A_{12}	A_{13}	A_{14}	0	A_{13}	A_{17}	A_{19}	0	A_{14}	A_{19}	A_{20}	0	0	0	0	0

$A_{21} = -(A_6 + A_{10})$

図 5.4: 曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ の独立成分

5.4 リッチテンソル

前節で考察したように, 曲率テンソルは成分数と比較すると情報が少ないテンソルである。言い換えると, 無駄が多いテンソルである。そこで, 曲率テンソル $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ の添え字に関して $\kappa = \nu$ として縮約し, 無駄が少ないテンソルを定義しよう。新たなテンソルを,

$$R_{\lambda\mu} = R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu}, \tag{5.13}$$

によって定義するのだ。この量はテンソルの添え字に関して縮約した量であるので, 確かにテンソル性をもつ。この量 $R_{\lambda\mu}$ は**リッチテンソル**と呼ばれる。さらに, $R_{\lambda\mu}$ に $g^{\lambda\mu}$ を乗じて, λ と μ に関して縮約すると,

$$R = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu}, \tag{5.14}$$

なるスカラが得られる。このスカラは**スカラ曲率**と呼ばれる。スカラ曲率は $R = R^{\mu}{}_{\mu}$ とも書けるので, リッチテンソルのトレースである。

曲率テンソルには多くの対称性があったのだが, リッチテンソルには対称性があるだろうか。リッチテンソルには,

$$R_{\lambda\nu} = R_{\mu\lambda}, \tag{5.15}$$

なる対称性がある。これにより, n 次元空間におけるリッチテンソルの独立成分の数は, $n(n+1)/2$ 個である。相対性理論における時空 ($n = 4$) ならば, 独立成分の数は 10 個であ

る。前節までの曲率テンソルに比べ, リッチテンソルは情報量を密に格納したテンソルであるといえる。

リッチテンソルに関する対称性 (5.15) は簡単に証明できる。証明のために注目するのは, 対称性 $R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R_{\nu\mu\kappa\lambda}$ である。この対称性に, $g^{\kappa\nu}$ を乗じて κ と ν について縮約をとってみる。左辺に対応する縮約は,

$$g^{\kappa\nu} R_{\kappa\lambda\nu\mu} = g^{\nu\kappa} R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R^{\nu}{}_{\lambda\nu\mu} = R_{\lambda\mu},$$

である。一方, 右辺に対応する縮約は,

$$g^{\kappa\nu} R_{\nu\mu\kappa\lambda} = R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\lambda} = R_{\mu\lambda},$$

である。これらの計算が成立することは, 共変曲率テンソルの定義式 $R_{\kappa\lambda\nu\mu} = g_{\alpha\kappa} R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}$ から明らかである。これらの数式は等しいはずだから,

$$R_{\lambda\mu} = R_{\mu\lambda},$$

が成立する。つまり, リッチテンソル $R_{\lambda\mu}$ は対称テンソルである。¶

5.5 曲率計算の例

曲率テンソルやスカラ曲率のイメージをつかむため, 典型的な曲面においてテンソルを計算してみよう。典型的な曲面として, 球面とトーラスを扱い, 曲率が正だけでなく負の値をとることが確認できるだろう。

5.5.1 球面座標

曲率テンソルのイメージをつかむため, 球面座標系において曲率テンソルやリッチテンソルを計算してみよう。取り扱うのは, 半径 a の球面に設定されてた座標系 $[x^1, x^2] \equiv [\theta, \varphi]$ である。ここで, θ は北極点を $\theta = 0$ とする緯度 (天頂角), φ は経度である。既に何度も取り扱ったように, 計量テンソルは,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

となる。取り扱う空間が 2 次元であるので, 計量テンソルは 2×2 の行列となる。球面座標は, 曲がった空間であるので, 場所によって基本ベクトルが変化する。その基本ベクト

ルの変化率を反映するクリストッフェル記号は,

$$[\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda}] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ \hline 0 & \cot\theta \\ \cot\theta & 0 \end{array}\right], \tag{5.17}$$

となる。この行列表示において, セパレータ (—) によって上下を二つの 2×2 行列に分離した。上の行列は $\kappa=0$ に, 下の行列は $\kappa=1$ に対応する。各行列は, ν が行番号, λ が列番号となるように成分表示した。

クリストッフェル記号に公式によって定められた演算を実行すると, リーマン曲率テンソルが得られる。球面の取り扱いにおいて, リーマン曲率テンソルは 16 個の成分をもち,

$$[R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & \sin^2\theta \\ 0 & 0 & -\sin^2\theta & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{5.18}$$

のように記述される。ここで, 2×2 の行列の成分に 2×2 の行列を記述した。リーマン曲率テンソル $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ について, 外側の行列が第 κ 行, 第 λ 列を表し, 内側の行列が第 ν 行, 第 μ 列を表す。リーマン曲率テンソルを $R_{\kappa\lambda\nu\mu} = g_{\kappa\alpha}R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}$ によって, 反変成分を共変成分に書き換えると,

$$[R_{\kappa\lambda\nu\mu}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & a^2\sin^2\theta \\ 0 & 0 & -a^2\sin^2\theta & 0 \\ \hline 0 & -a^2\sin^2\theta & 0 & 0 \\ a^2\sin^2\theta^2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{5.19}$$

が得られる。この時点で, 曲率テンソルに含まれる独立成分は $a^2\sin^2\theta$ の 1 個しか存在しない。球面座標に関わらす, いかなる 2 次元の座標系に関して, $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ は 1 個しか独立成分をもたないのだ。その事実は, 先ほど, n 次元であれば独立成分数が $n^2(n^2-1)/12$ であるという公式を導出したことから明らかだ。曲率テンソルの成分が 16 個であることを考えると, 非常に無駄である。

リーマンの曲率テンソルが無駄にサイズが大きいため, $R_{\lambda\mu} = R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu}$ によって成分を縮約し, リッチテンソル $R_{\lambda\mu}$ に変換すると,

$$[R_{\lambda\mu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}, \qquad [R^{\lambda}{}_{\mu}] = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{bmatrix}, \tag{5.20}$$

が得られる。なお, ここに書いた第 2 のテンソルは, ${R^\lambda}_\mu = g^{\nu\lambda} R_{\nu\mu}$ である。リッチテンソルのトレース $R \equiv {R^\lambda}_\lambda = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu}$ は,

$$R = \frac{2}{a^2}, \tag{5.21}$$

のように, ガウス曲率の 2 倍となる。簡単な例であるが, 曲率テンソルが空間の曲率と関係があることがこの例からわかる。しかし, 誤解しないように補足しておく。この結果でスカラ曲率 R がガウス曲率の 2 倍になったのは, 取り扱っている次元が 2 次元 (曲面) だからである。いかなる場合でも, スカラ曲率 R がガウスの 2 倍になるわけではない。取り扱う次元によってその倍率が異なるのだ。その規則性は第 5.7 節で説明する。

5.5.2 トーラス表面

前に取り扱ったが, トーラス表面における座標系について考えてみよう。トーラスの条件設定として, 半径 b の円筒を円環に沿って曲げた形状を考える。そのとき, 円筒の中心軸が半径 a の円を描くように曲げるのだ。トーラスの表面を $[\varphi, \theta]$ なる座標によって表すとする。そのトーラス表面は, 3 次元のカルテシアン座標系 $[x, y, z]$ では,

$$x = (a + b\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (a + b\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = b\cos\theta\sin\theta,$$

で与えられる。ここで, トーラス表面の座標を $[x^1, x^2] \equiv [\varphi, \theta]$ のように対応づけると, 計量テンソルは,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} (a + b\cos\theta)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

のように与えられる。設定した座標系は, φ について対称であるので計量テンソルは φ に依存しない。一方, 計量テンソルは θ に依存する。特に, $\theta = 0$ はトーラスが最も外側であり, $\theta = \pi$ はトーラスが内側にある場合に対応する。それにしたがい, 計量テンソルは大きさが変化する。

トーラス表面でも, 基本ベクトルは位置に依存して変化するため, クリストッフェル記号は一般的にゼロにならない。クリストッフェル記号の計算公式にしたがって計算すると,

$$[{\mathit{\Gamma}^\kappa}_{\nu\lambda}] = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\dfrac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta} \\ -\dfrac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta} & 0 \\ \hline \dfrac{a + b\cos\theta}{r}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \tag{5.23}$$

が得られる。トーラスにおいて, $\theta = 0, \pi$ においてクリストッフェル記号が局所的にゼロになる。これは, ϕ と θ の座標軸が, 互い値直交し, 測地線と一致することを意味する。その性質については次章で説明する。

トーラス表面は曲がった空間であるので, 曲率テンソルは一般にゼロになることはない。定義にしたがって計算すると,

$$[R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & \dfrac{(a+b\cos\theta)\cos\theta}{b} \\ 0 & 0 & -\dfrac{(a+b\cos\theta)\cos\theta}{b} & 0 \\ \hline 0 & -\dfrac{b\cos\theta}{a+b\cos\theta} & 0 & 0 \\ \dfrac{b\cos\theta}{a+b\cos\theta} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad (5.24)$$

が得られる。曲率テンソルの反変成分を共変成分に変換すると, $f(\theta) \equiv b\,(a+b\cos\theta)\cos\theta$ なる記号を用いて,

$$[R_{\kappa\lambda\nu\mu}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & f(\theta) \\ 0 & 0 & -f(\theta) & 0 \\ \hline 0 & -f(\theta) & 0 & 0 \\ f(\theta) & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad (5.25)$$

が得られる。このように, 曲率テンソルを 4 階の共変テンソルとして記述すると, 独立成分は $b\,(a+b\cos\theta)\cos\theta$ だけになる。その事実は, 2 次元空間では曲率テンソルの独立成分が理論的に 1 個しか存在しないので当然の性質である。

曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ は 16 個の成分のうち, 独立成分が 1 個しかないという無駄なテンソルである。その成分を縮約し, リッチテンソルを計算すると,

$$[R_{\lambda\mu}] = \begin{bmatrix} \dfrac{b\cos\theta}{a+b\cos\theta} & 0 \\ 0 & \dfrac{(a+b\cos\theta)\cos\theta}{b} \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

が得られる。さらに, リッチテンソルを反変成分と共変成分をもつ混合テンソルとして表現すると,

$$[R^{\lambda}{}_{\mu}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta}{b\,(a+b\cos\theta)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos\theta}{b\,(a+b\cos\theta)} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

なる形で記述できる。この混合テンソルのトレースをとるとスカラ曲率:

$$R = \frac{2\cos\theta}{b\,(a + b\cos\theta)}, \tag{5.28}$$

が得られる。得られたスカラ曲率は興味深い。スカラ曲率は, $\theta = \pm\pi/2$ で $R = 0$ となる。その θ は 3 次元のカルテシアン座標において, $|z|$ が最大となる条件であり, 対象となる位置がトーラスの中心軸の真上 (または真下) に位置する。対象となる位置がトーラスの中心軸より外側では $R > 0$, 中心軸より内側では $R < 0$ となる。このような 3 次元空間で設定された曲面において, 負のスカラ曲率 $R < 0$ は鞍部点のような形状に対応する。

典型的な場所 $\theta = 0, \pi$ におけるスカラ曲率 R に注目しよう。前者 $(\theta = 0)$ はトーラスの外周である。座標 φ を一定に保って θ を変化させると, 半径 b の円を描く。一方, θ を一定に保って φ を変化させると, トーラスの外周をたどり半径 $a+b$ の円を描く。これらの曲率半径の逆数の積がガウス曲率である。つまり, トーラス外周のガウス曲率は $1/b\,(a+b)$ である。これに対して, スカラ曲率 R は $\theta = 0$ においてガウス曲率の 2 倍, すなわち, $R = 2/a\,(a+b)$ である。さらに, $\theta = \pi$ ではスカラ曲率は $R = -2/a\,(a-b)$ となり, やはり, ガウス曲率の 2 倍である。前項で注釈したように, 2 次元の曲面を取り扱っている理由によって, スカラ曲率がガウス曲率の 2 倍に等しいのだ。

5.6 ビアンキの恒等式

曲率テンソル $R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}$ の共変成分の添え字の巡回に関するビアンキの第 1 恒等式については既に紹介した。曲率テンソルの共変微分にも, 添え字の巡回に関する同様の恒等式が成立する。その恒等式は,

$$\nabla_\omega R_{\kappa\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R_{\kappa\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R_{\kappa\lambda\omega\nu} = 0, \tag{5.29}$$

なる形態の関係式であり, **ビアンキの第 2 恒等式**と呼ばれる。この恒等式は, 一般相対性理論において重要な公式である。

5.6.1 恒等式の導出

本項では, ビアンキの第 2 項等式を導出する。ある共変ベクトル v_λ の共変微分 $\nabla_\mu v_\lambda$ は 2 階の共変テンソルである。よって, その量をさらに共変微分した量にも, リッチの公式を適用することができ,

$$\nabla_\omega \nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\omega \nabla_\mu v_\lambda = -R^{\alpha}{}_{\mu\omega\nu} \nabla_\alpha v_\lambda - R^{\alpha}{}_{\lambda\omega\nu} \nabla_\mu v_\alpha \tag{5.30a}$$

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \nabla_\omega v_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\omega v_\lambda = -R^\alpha{}_{\omega\nu\mu} \nabla_\alpha v_\lambda - R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} \nabla_\omega v_\alpha \tag{5.30b}$$

$$\nabla_\mu \nabla_\omega \nabla_\nu v_\lambda - \nabla_\omega \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = -R^\alpha{}_{\mu\omega\nu} \nabla_\alpha v_\lambda - R^\alpha{}_{\lambda\mu\omega} \nabla_\nu v_\alpha, \tag{5.30c}$$

のような関係が成立する。もう一方, リッチの公式:

$$-\nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda + \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} v_\alpha,$$

を x^ω で偏微分した量を計算してみる。添え字を適当に入れ替えたものを含め,

$$-\nabla_\omega \nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda + \nabla_\omega \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = (\nabla_\omega R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu}) v_\alpha + R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} \nabla_\omega v_\alpha \tag{5.31a}$$

$$-\nabla_\nu \nabla_\mu \nabla_\omega v_\lambda + \nabla_\nu \nabla_\omega \nabla_\mu v_\lambda = (\nabla_\nu R^\alpha{}_{\lambda\mu\omega}) v_\alpha + R^\alpha{}_{\lambda\mu\omega} \nabla_\nu v_\alpha \tag{5.31b}$$

$$-\nabla_\mu \nabla_\omega \nabla_\nu v_\lambda + \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\omega v_\lambda = (\nabla_\mu R^\alpha{}_{\lambda\omega\nu}) v_\alpha + R^\alpha{}_{\lambda\omega\nu} \nabla_\mu v_\alpha, \tag{5.31c}$$

を書いておく。ここで, 書き下した 6 つの等式をすべて加算すると,

$$-(R^\alpha{}_{\mu\omega\nu} + R^\alpha{}_{\omega\nu\mu} + R^\alpha{}_{\nu\mu\omega}) \nabla_\alpha v_\lambda + (\nabla_\omega R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\lambda\omega\nu}) v_\alpha = 0, \tag{5.32}$$

が得られる。この式の左辺の第 1 項はビアンキの第 1 恒等式によって恒等的にゼロとなる。第 2 項が任意の共変ベクトル v_α に対してゼロとなるためには,

$$\nabla_\omega R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\lambda\omega\nu} = 0,$$

を満たさなければならない。ここに得られた条件が, 上で紹介したビアンキの第 2 恒等式である。¶

5.6.2 アインシュタインテンソル

前項で導出したビアンキの第 2 恒等式は, 重力場におけるアインシュタインの方程式につながる重要な公式である。本項では, ビアンキの第 2 恒等式を変形して, アインシュタインの方程式を導出してみる。まず, 前節で導出したビアンキの第 2 恒等式は,

$$\nabla_\omega R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\lambda\omega\nu} = 0,$$

なる形で書かれる。この恒等式に関して $\alpha = \mu$ とおいて縮約をとれば,

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} - \nabla_\nu R_{\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\lambda\nu} = 0,$$

となる。さらに, 両辺に $g_{\lambda\mu}$ を乗じて縮約をとる。その際に, $R_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} = R$, および,

$$R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu} g^{\lambda\mu} = R_{\kappa\lambda\nu\mu} g^{\kappa\alpha} g^{\lambda\mu} = R_{\mu\nu\lambda\kappa} g^{\kappa\alpha} g^{\lambda\mu} = R^\lambda{}_{\nu\lambda\kappa} g^{\kappa\alpha} = R_{\nu\kappa} g^{\kappa\alpha} = R_\nu{}^\alpha,$$

であることに注意すると, その結果は,

$$2\,\nabla_\alpha R_\nu{}^\alpha - \nabla_\nu R = 0,$$

となる。この結果は,

$$\nabla_\alpha \left(R_\nu{}^\alpha - \frac{1}{2} R\,\delta_\nu{}^\alpha \right) = 0, \tag{5.33}$$

と書くこともできる。つまり,

$$G_\nu{}^\alpha = R_\nu{}^\alpha - \frac{1}{2} R\,\delta_\nu{}^\alpha, \tag{5.34}$$

なるテンソル $G_\nu{}^\alpha$ を定義すれば,

$$\nabla_\alpha G_\nu{}^\alpha = 0, \tag{5.35}$$

となる。 このように定義されたテンソル $G_\nu{}^\alpha$ は**アインシュタインテンソル**と呼ばれる。

アインシュタインテンソルの共変微分がゼロになる, というのは一般相対性理論において重要な性質, というよりも基本方程式である。本書の本質ではないので詳しい説明を省くが, ビアンキの第 2 恒等式が重要である理由は, 曲率テンソルが計量テンソルの 2 階微分で構成されていることに起因する。物理学的な考察によって, 計量テンソルが重力場のポテンシャルと関連があることがわかっている。重力場のポテンシャルは, 2 階微分すると重力源, すなわち, 質量分布に関係した物理量になる。ビアンキの第 2 項等式は, その質量分布の流れの方程式, すなわち, 質量保存則を記述しているわけだ。

上記の考えに基づいて, アインシュタインテンソル $G_\nu{}^\alpha$ は重力の源となる質量分布に対応する。相対性理論によると, 質量分布はエネルギーや運動量の分布として, エネルギー運動量テンソル $T_\nu{}^\alpha$ で表現される。一般相対性理論による重力場の方程式は,

$$G_\nu{}^\alpha = \frac{8\pi G}{c^4} T_\nu{}^\alpha,$$

のように, アインシュタインテンソルがエネルギー運動量テンソルの定数倍であるとう等式で記述されている。なお, この方程式に $g_{\alpha\mu}$ を乗じて縮約した方程式:

$$G_{\nu\mu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\nu\mu},$$

を重力場の方程式として扱うことが多い。その場合, アインシュタインテンソルは,

$$G_{\nu\mu} = R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} R g_{\nu\mu}, \tag{5.36}$$

となる。ここで, $8\pi G/c^4$ は方程式が成立するための比例定数である。具体的には, G が万有引力定数, c が光速である。重力場の方程式は, 空間中のエネルギー・運動量が与えられたとき, この方程式を解けば時空の計量が導き出されるという方程式である。つまり, アインシュタイン方程式はビアンキの第 2 恒等式の応用である。

5.7　リーマン曲率

前節でガウス曲率を扱ったので, その比較としてリーマン曲率を紹介しよう。リーマン曲率とは, 空間の任意の点 x^κ を通る測地線の曲率である。正確にいうと, 次のように定義される。空間の任意の点 x^κ に存在する二つの反変ベクトル u^κ と v^κ が与えられたとき, それらのベクトルが張る平面に接して, 点 x^κ を通るすべての測地線のガウス曲率 (点 x^κ における値) がガウス曲率である。そのように定義されるリーマン曲率は,

$$k = -\frac{R_{\kappa\lambda\nu\mu} u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{\left(g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} - g_{\mu\nu} g_{\nu\kappa}\right) u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}, \tag{5.37}$$

のように定義される。この値が上に書いたようなスカラ曲率の性質をもつことは, 第 7 章で説明する部分空間の知識がなければ証明できないので, 証明は後に譲ることにしよう。本章ではこの定義式を素直に受け入れて議論を進める。

リーマン曲率 k が任意の点において, ベクトル u^κ と v^κ の選び方に依存しないと仮定すれは, リーマン曲率の定義式から,

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -k\left(g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa}\right)$$

が得られる。ここで, 両辺に $g^{\nu\kappa} g^{\mu\lambda}$ を乗じて縮約をとれば, $R = -k\left(n - n^2\right)$ が得られる。この等式を得るにあたって, 左辺が,

$$g^{\kappa\nu} g^{\lambda\mu} R_{\kappa\lambda\nu\mu} = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} = R,$$

であり, 一方, 右辺が,

$$g^{\kappa\nu} g^{\lambda\mu}\left(g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa}\right) = \delta^\kappa{}_\lambda \delta^\lambda{}_\kappa - \delta^\mu{}_\mu \delta^\nu{}_\nu = \delta^\kappa{}_\kappa - \delta^\mu{}_\mu \delta^\nu{}_\nu = n - n^2,$$

であることを利用した。なお, n は空間の次元数である。したがって, リーマン曲率は,

$$k = \frac{R}{n\left(n-1\right)}, \tag{5.38}$$

なる関係を満たす。前節で, 球面座標を取り扱った際, スカラ曲率 R がガウス曲率の 2 倍であることを示した。その性質が成立していたのは, $n = 2$ だったからだ。取り扱う次元が 4 次元だったら, スカラ曲率 R はガウス曲率の $4 \times 3 = 12$ 倍となっていたわけだ。

ベクトル u^μ と v^μ の選び方によらず, リーマン曲率が $k = 0$ となる条件は, $R_{\kappa\lambda\nu\mu} = 0$ である。そのような空間は**平坦な空間**と呼ばれる。

5.7.1 シューアの定理

リーマン曲率からの派生として, シューアの定理を紹介しよう。シューアの定理とは, 次のような性質を主張する。空間の各点でリーマン曲率が, それを定義する二つの方向 u^μ と v^μ に無関係であるならば, そのリーマン曲率は空間のいたるところで定数である。

空間中の任意の点で二つのベクトル u^μ と v^μ をとったとき, それらが張る平面に接する測地線の曲率 k が, u^μ と v^μ の選びに無関係であるならば, 曲率テンソルは,

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -k\,(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}), \tag{5.39}$$

なる形でなければならない。それは本節の冒頭で述べたとおりである。リーマン曲率 k は, 定数である必要はなく, 座標の関数であってもよい。曲率テンソル (5.39) をビアンキの恒等式:

$$\nabla_\omega R_{\kappa\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R_{\kappa\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R_{\kappa\lambda\omega\nu} = 0,$$

に代入すると,

$$\begin{aligned}(\nabla_\omega k)(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}) + (\nabla_\nu k)(g_{\mu\lambda}g_{\omega\kappa} - g_{\omega\lambda}g_{\mu\kappa})& \\ + (\nabla_\mu k)(g_{\omega\lambda}g_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda}g_{\omega\kappa}) &= 0,\end{aligned}$$

が得られる。この数式を計算するにあたり, リーマン曲率 k が座標の関数であること, 計量テンソルの共変微分がゼロであることに注意した。この数式に $g^{\mu\lambda}$ を乗じて縮約すれば,

$$(n-2)\left[(\nabla_\omega k)\,g_{\nu\kappa} - (\nabla_\nu k)\,g_{\omega\kappa}\right] = 0,$$

が得られる。この数式に再び, $g^{\omega\kappa}$ を乗じて縮約すれば,

$$(n-1)(n-2)\,\nabla_\nu k = 0, \tag{5.40}$$

が得られる。この計算結果は, $n \geq 3$ の場合に,

$$\nabla_\nu k = \frac{\partial k}{\partial x^\nu} = 0,$$

が成立することを示唆する。つまり, 3 次元以上の空間では, リーマン曲率 k がそれを指定するベクトル u^μ と v^μ に無関係であるならば, k は空間のいたるところで一定である。これが**シューアの定理**である。このように, 空間全体にわたって曲率が一定である空間は, **定曲率空間**と呼ばれる。

5.7.2　アインシュタイン空間

リーマン空間中の任意の点 x^μ において, 互いに直交する n 個のベクトル $h_{(\alpha)}^{\mu}$ を考えよう。空間が n 次元であるので, 直交する n 個のベクトルを選ぶことは可能だ。ここで, α はベクトルの番号, μ は反変成分を表す添え字である。ベクトルの番号 α のように括弧を伴う添え字には総和の規約を適用しないことにする。ベクトル $h_{(\alpha)}^{\ \mu}$ が単位ベクトルであるとすれば,

$$g_{\mu\lambda} h_{(\alpha)}^{\ \mu} h_{(\beta)}^{\ \lambda} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{5.41}$$

が成立するはずだ。これらのベクトルのように, 空間の特定の点で設定された n 個の互いに直交するベクトルの集合は, **直交 $\boldsymbol{n}$ 重系**と呼ばれる。これらの単位ベクトルも, 当然,

$$h_{(\alpha)\,\mu} = g_{\lambda\mu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda}, \tag{5.42}$$

のように反変ベクトルから共変ベクトルに変換できる。このとき, 共変ベクトル $h_{(\alpha)\,\lambda}$ と反変ベクトル $h_{(\alpha)}^{\ \lambda}$ は,

$$h_{(\alpha)\,\lambda} h_{(\beta)}^{\ \lambda} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{5.43}$$

なる関係を満たす。この関係は既に述べたベクトルの直交関係を表しているだけだ。この関係式は,

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} h_{(\alpha)\,\lambda} h_{(\alpha)}^{\ \mu} = \delta_\lambda{}^\mu, \tag{5.44}$$

のように書くこともできる。わかりにくいかもしれないので解説しよう。これらの数式において, n 個の互いに直交する単位ベクトルを,

$$[h_{(\alpha)\,\lambda}] = \begin{bmatrix} h_{(1)\,1} & h_{(1)\,2} & \cdots & h_{(1)\,n} \\ h_{(2)\,1} & h_{(2)\,2} & \cdots & h_{(2)\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{(n)\,1} & h_{(n)\,2} & \cdots & h_{(n)\,n} \end{bmatrix},$$

$$[h_{(\alpha)}^{\ \lambda}] = \begin{bmatrix} h_{(1)}^{\ 1} & h_{(2)}^{\ 1} & \cdots & h_{(n)}^{\ 1} \\ h_{(1)}^{\ 2} & h_{(2)}^{\ 2} & \cdots & h_{(n)}^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{(1)}^{\ n} & h_{(2)}^{\ n} & \cdots & h_{(n)}^{\ n} \end{bmatrix},$$

のように行列として配置すれば, 関係式 (5.43) は, 行列 $[h_{(\alpha)\,\lambda}]$ と $[h_{(\alpha)}^{\ \lambda}]$ が逆行列の関係であることを示唆している。任意の行列とその逆行列の積は可換であるので, (5.44) も成立するはずだ。さらに, (5.44) に $g^{\lambda\nu}$ を乗じて縮約すれば,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} h_{(\alpha)}^{\ \mu} h_{(\alpha)}^{\ \nu} = g^{\mu\nu}, \tag{5.45}$$

なる関係が得られる。互いに直交するようにとはいえ, 空間中に勝手に設定した単位ベクトルの成分どうしの積和によって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が特定できるとは驚きに値する。

導入した直交 n 重系からベクトル二つを選べばリーマン曲率が定義できる。例えば, $h_{(\alpha)}^{\ \kappa}$ と $h_{(\beta)}^{\ \kappa}$ を選べば, リーマン曲率は,

$$k_{(\alpha)(\beta)} = -\frac{R_{\kappa\lambda\nu\mu}\, h_{(\alpha)}^{\ \nu} h_{(\beta)}^{\ \mu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda} h_{(\beta)}^{\ \kappa}}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})\, h_{(\alpha)}^{\ \nu} h_{(\beta)}^{\ \mu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda} h_{(\beta)}^{\ \kappa}},$$

のように定義される。この数式の右辺に関して, $\alpha \neq \beta$ であれば, 分母は 1 に等しい。検証のため, 分母を計算してみると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Donom} &= (g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})\, h_{(\alpha)}^{\ \nu} h_{(\beta)}^{\ \mu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda} h_{(\beta)}^{\ \kappa} \\
&= h_{(\alpha)\,\lambda} h_{(\beta)\,\kappa} h_{(\alpha)}^{\ \lambda} h_{(\beta)}^{\ \kappa} - \delta_{(\alpha)(\beta)}\delta_{(\alpha)(\beta)} \\
&= \delta_{(\alpha)(\alpha)}\delta_{(\beta)(\beta)} - \delta_{(\alpha)(\beta)}\delta_{(\alpha)(\beta)} = 1,
\end{aligned}$$

が確かに得られる。ここで, 第 2 行目へ数式変形において, 第 1 項には (5.41) を, 第 2 項には (5.42) を利用した。第 3 行目への数式変形には (5.43) 利用した。クロネッカーのデルタに付したカッコつきの添え字について総和の規約を適用しない。その結果として, リーマン曲率の分母が 1 であることが示せた。したがって, 互いに直交する二つの単位ベクトル $h_{(\alpha)}^{\ \kappa}$ と $h_{(\beta)}^{\ \kappa}$ によって定まるリーマン曲率は,

$$k_{(\alpha)(\beta)} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}\, h_{(\alpha)}^{\ \nu} h_{(\beta)}^{\ \mu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda} h_{(\beta)}^{\ \kappa}, \tag{5.46}$$

となるのだ。リーマン曲率 $k_{(\alpha)(\beta)}$ に対して, β について総和をとれば,

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta=1}^{n} k_{(\alpha)(\beta)} &= -R_{\kappa\lambda\nu\mu}\, h_{(\alpha)}^{\ \nu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda} \sum_{\beta=0}^{n-1} h_{(\beta)}^{\ \mu} h_{(\beta)}^{\ \kappa} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}\, h_{(\alpha)}^{\ \nu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda}\, g^{\mu\kappa} \\
&= g^{\mu\kappa} R_{\kappa\lambda\mu\nu}\, h_{(\alpha)}^{\ \nu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda} = R_{\lambda\nu}\, h_{(\alpha)}^{\ \nu} h_{(\alpha)}^{\ \lambda},
\end{aligned}$$

のように, リッチテンソルを用いた関係式が得られる。ここで, $k_{(\alpha)(\alpha)} = 0$ とした。第 1 行目の数式変形は (5.45) を利用した。第 2 行目の数式変形は, 曲率テンソル (添え字 ν と μ) の反対称性を使った後に, リッチテンソルの定義式を利用した。得られた曲率は, ベクトル $h_{(\alpha)}^{\ \mu}$ と $h_{(\beta)}^{\ \mu}$ で定まるリーマン曲率に対して, すべての β にわたる総和である。その意味で, その総和は $h_{(\alpha)}^{\ \mu}$ に対する**平均曲率**である。さらに, その曲率をすべての α にわたって総和を計算すると,

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} k_{(\alpha)(\beta)} = R_{\lambda\nu} \sum_{\alpha=1}^{n} h_{(\alpha)}^{\ \lambda} h_{(\alpha)}^{\ \nu} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\nu} = R,$$

が得られる。つまり, 設定した直交 n 重系のあらゆる単位ベクトルの組み合わせにわたってリーマン曲率の総和をとれば, スカラ曲率 R が得られるのだ。この結果は, 単位ベクトルの取り方に依存しないのだ。

平均曲率の議論を一般化して, ベクトル u^μ に対する平均曲率を考えよう。その曲率を M とすると,

$$M = \frac{R_{\lambda\nu}\, u^\lambda u^\nu}{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta},$$

となる。ここで, ベクトル u^μ は, 単位ベクトルとは限らないので, 分母によってベクトルの長さで正規化している。ベクトル u^μ を変化させたとき, 平均曲率 M が特定の条件で極値をもつか調べよう。極値をもつならば, $\partial M/\partial u^\mu = 0$ を満たすはずだ。その条件を方程式として記述すると,

$$\frac{2R_{\lambda\mu}\, u^\lambda \left(g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta\right) - 2g_{\beta\mu} u^\beta \left(R_{\lambda\nu}\, u^\lambda u^\nu\right)}{\left(g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta\right)^2} = 0,$$

が得られる。なお, 総和の規約は分子と分母で個別に適用されるとする。ペアになって総和の規約が適用されている添え字は, 別の添え字に書き換えてもよいので, この方程式は,

$$\frac{2}{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} \left(R_{\lambda\mu} u^\lambda - g_{\lambda\mu} \frac{R_{\lambda\nu}\, u^\lambda u^\nu}{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}\, u^\lambda \right) = 0,$$

のように書き換えられる。この方程式は, さらに整理すると,

$$\left(R_{\lambda\mu} - M g_{\lambda\mu}\right) u^\lambda = 0, \tag{5.47}$$

のように簡略化される。この条件を満たすとき, 平均曲率が極値をもつということだ。数式 (5.47) は, ベクトルの成分 u^λ について連立 1 次方程式を構成している。連立方程式の解なる u^λ が, M が極値となる方向を与える。その解は, **リッチの主方向**と呼ばれる。

連立方程式 (5.47) の係数がゼロとなる場合, リッチの主方向 u^λ が特定できない。そのような条件を満たす (条件に陥る) 空間は, **アインシュタイン空間**と呼ばれる。つまり, アインシュタイン空間は,

$$R_{\lambda\mu} = M g_{\lambda\mu},$$

なる性質をもっているということだ。この数式に $g^{\lambda\mu}$ を乗じて縮約をとれば, $g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} = nM$ が得られる。この数式をさらに簡略化すると,

$$M = \frac{R}{n}, \tag{5.48}$$

となる。つまり, アインシュタイン空間での平均曲率は, スカラ曲率 R の $1/n$ 倍である。さらに, この数式は,

$$R_{\lambda\mu} = \frac{1}{n}\, R g_{\lambda\mu}, \tag{5.49}$$

なる方程式に書き換えられる。この方程式がアインシュタイン空間の定義式である。

アインシュタインの宇宙定数　重力場の方程式 (5.36) を真空 ($T_{\nu\mu} = 0$) の条件を適用すると, $R_{\nu\mu} = Rg_{\nu\mu}/2$ となり, アインシュタイン空間の条件 (5.49) に合致しない。アインシュタイン空間が定曲率空間の仮定に基づくのだから, 合致しなくても当然である。一般相対性理論では, 時間を座標軸の一つに含んでいるため, 定曲率空間を仮定すると, 時空の曲率が時間に依存せず, 一定でなければならない。一般相対性理論の空間は重力の時空なので, 空間に曲率があるということは, 重力が存在する。重力が存在すれば, 互いに引き合うため, 宇宙は時間経過とともに収縮し, 時空の曲率が時間に依存するのだ。諸説によると, アインシュタインは曲率が時間に依存することを嫌い, 方程式 (5.36) を,

$$R_{\nu\mu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\nu\mu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\nu\mu},$$

のように書き換えた。追加された項 $\Lambda g_{\nu\mu}$ が宇宙項と呼ばれる項であり, その係数 Λ は**宇宙定数**と呼ばれる。この宇宙項の追加は, 計量テンソル $g_{\nu\mu}$ の共変微分がゼロであることを利用した絶妙な処置である。つまり, 宇宙項を追加してもビアンキの第 2 恒等式は成立できるのだ。ここで, 宇宙項を追加した方程式に, 真空の条件 $T_{\nu\mu} = 0$ と, アインシュタイン空間の条件 (5.49) を代入すると,

$$R = \frac{2n}{n-2}\Lambda,$$

が得られ, 空間の平均曲率が宇宙定数に比例することが導かれる。このとき, 双方の方程式 (5.36) と (5.49) が成立し, 定常的な宇宙の解が得られる。宇宙定数は, 重力場における斥力として作用し, 本来, 宇宙に作用する万有引力と釣りあり, 定常的な宇宙を保っているという解釈だ。しかし, ハッブルの観測によって宇宙の膨張が発見され, 宇宙を記述する解は定常的ではなくなった。数学的に宇宙定数の存在は許容できるものの, 宇宙論的観測に基づき, 宇宙定数はかなり小さい値だと認識されている[1]。

5.7.3　平坦な空間

本項では, リーマン幾何学における特殊な空間, 具体的には $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} = 0$ となる空間について説明する。曲率テンソル $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ は周回経路に沿ったベクトルの平行移動の結果, ベクトルが受ける変化に関する量である。そのベクトルの変化は空間が曲がっていることが起因しているため, $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ は空間の湾曲を表現する量である。その曲率テンソルがゼロとなるとなる空間は平坦であると考えることができる。その平坦な空間とは, 実は, ユークリッド空間なのである。

[1]冨田憲二, “パリティ物理学コース 相対性理論,” 丸善, ISBN 4-621-03477-4, p. 34, 1990.

ユークリッド空間中に互いに直交する座標軸 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をとったとする。そのような座標系では, 微小距離の自乗 $\mathrm{d}s^2$ は, 座標の微小変化の自乗和:

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x^n)^2,$$

で与えられる。一般の座標系では, 微小距離の自乗が $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu x^\nu$ のような 2 次形式で表現されることを考えると, ユークリッド空間における直交座標系では計量テンソルが $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ となるわけである。ここで, 定数の変換行列 $a^\kappa{}_\alpha$ $(= a_\kappa{}^\alpha)$ を仮定し, $x'^\kappa = a^\kappa{}_\alpha x^\alpha$ によって座標変換をしたとする。このとき, 変換された座標系における計量テンソルは,

$$g'_{\mu\nu} = \bar{a}_\alpha{}^\mu \bar{a}^\beta{}_\nu \delta_{\alpha\beta} = \bar{a}_\alpha{}^\mu \bar{a}^\alpha{}_\mu,$$

となる。ただし, $\bar{a}^\alpha{}_\mu$ は変換行列 $a^\alpha{}_\mu$ の逆行列である。つまり, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ であった座標系から, 1 次変換によって, 計量テンソルを任意の定数行列にすることが可能である。逆に考えれば, 計量テンソルが定数行列であれば, 適当な 1 次変換によって $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ とすることができる。よって, ユークリッド空間とは, 適切な座標変換によって計量テンソルの要素をすべて定数にできる空間である。これに関して, 一つの定理が導かれる。

定理 5.1 リーマン空間が局所的にユークリッド空間であるための必要条件は, 曲率テンソルが $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} = 0$ となることである。

この定理の正当性を証明してみよう。まず, $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} = 0$ が必要条件であることは明らかである。ユークリッド空間中に斜交座標を設定すれば, $g_{\mu\nu}$ が定数となるので, $\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} = 0$ となる。したがって, 曲率テンソルの成分もすべてゼロ, すなわち, $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} = 0$ となるのである。また, 任意の座標変換を施したとしても, $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu}$ のテンソル性により,

$$R'^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\eta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu}R^\eta{}_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

となるので, いかなる座標変換を用いても曲率テンソルの成分はゼロである。

続いて, 十分条件であることを証明しよう。このためには, $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} = 0$ なる条件が与えられたとき, x^κ を適当な座標変換によって x'^κ に変換したとき, $g'_{\mu\nu}$ を定数にできることを証明すればよい。計量テンソルの導関数には,

$$\frac{\partial g'_{\mu\lambda}}{\partial x'^\nu} = \Gamma'^\alpha{}_{\nu\mu} g'_{\alpha\lambda} + \Gamma'^\alpha{}_{\nu\lambda} g'_{\mu\alpha},$$

なる関係があるので, $g'_{\mu\lambda}$ が定数となるためには, 任意のクリストッフェル記号の成分について $\Gamma'^\alpha{}_{\nu\mu} = 0$ が成立すればよい。クリストッフェル記号に対する座標変換:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\lambda}\Gamma'^\alpha{}_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda},$$

に, ${\Gamma'}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0$ を代入することによって得られる関係式:

$$\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}, \tag{5.50}$$

を満足する x'^{α} が存在することを示せばよい。言い換えると, この偏微分方程式が $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}=0$ の条件で完全積分可能であることを示せばよい。この微分方程式を x^{ν} について偏微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}&=\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}+\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\\&=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}}\left(\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}+\frac{\partial \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right),\end{aligned}$$

となる。この式の左辺が添え字 μ と ν に対して可換であるので, この方程式は,

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}}\left(\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}+\frac{\partial \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}-\frac{\partial \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}\right)=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}}R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}=0,$$

と書き直すことができる。この方程式は $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}=0$ ならば例外なくゼロとなるので, 微分演算子が可換である事実に矛盾しない。よって, $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}=0$ ならば, 方程式 (5.50) は積分可能であり, $g'_{\mu\nu}$ を定数にする座標変換が存在する。逆に, $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}\neq 0$ ならば, 微分演算子が可換である事実に矛盾が生じるため, 方程式 (5.50) 自体が成立しないので, $g'_{\mu\nu}$ を定数とする解は存在しない。

第6章　リーマン標準座標

人類が長い間, 地球が丸いことに気づかなかったように, 曲がった空間にいる観測者は, 局所的な観測では, 空間の湾曲に気づかない。その事実は, 数学では次のように表現される。空間が曲がっていても, 注目する点の近傍でユークリッド空間に近似できる座標系が選択可能である。どんなに空間が曲がっていても, 狭い範囲では, カルテシアン座標のような平坦な空間の座標系で位置を表してもよいということだ。近似的に適用できる平坦な座標系のうち, 測地線を基準にして座標軸が選ばれた系は測地座標系と呼ばれる。本章では, 測地座標系を介して, 曲がった空間の曲がり具合について考察する。

6.1　測地線の級数展開

既に学んだように, 非ユークリッド空間中の 2 点を結ぶ最短経路は測地線と呼ばれる。この 2 点が互いに近くに存在するとき, 測地線は一意的に決まる。また, ある点 x_0^κ を通り, その接線ベクトルが ξ^κ によって指定される測地線は 1 本しか存在しない。測地線に沿った経路の長さを s としたとき, 測地線は方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}=0, \tag{6.1}$$

を満たす。この方程式は, n 個の未知数を含む 2 階の微分方程式である。測地線の始点 x_0^κ と, 始点における接線方向の単位ベクトル:

$$\xi^\kappa\equiv\left(\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}s}\right)_0,$$

が与えられると, 測地線は一意的に決まる。ここで, $(\cdots)_0$ は点 x_0^κ における値を表す。その測地線をテイラー展開によって特定してみよう。すなわち, 測地線 x^κ は,

$$x^\kappa=x_0^\kappa+\left(\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}s}\right)_0 s+\frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 s^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3x^\kappa}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 s^3+\cdots$$

なる形で表されるはずである。測地線の方程式と始点 x_0^κ における条件から, x^κ の s についての導関数を得れば, テイラー級数の展開係数を決定することができる。まず, 1 階の導

関数は ξ^κ である。測地線の方程式 (6.1) から 2 階の導関数は,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 = -\left(\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 = -\left(\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\right)_0\xi^\mu\xi^\lambda,$$

である。さらに, この式の両辺を s について微分すれば,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}^3x^\kappa}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 &= -\left(\frac{\partial\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} + \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} + \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 \\
&= -\left(\frac{\partial\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} + \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} + \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\mathit{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 \\
&= -\left(\frac{\partial\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - 2\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu}\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\alpha\lambda}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 \\
&= -\left[\left(\frac{\partial\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)_0 - 2\left(\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu}\right)_0\left(\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\alpha\lambda}\right)_0\right]\xi^\nu\xi^\mu\xi^\lambda,
\end{aligned}$$

のように 3 階の導関数も得ることができる。これらの導関数を用いて測地線のテイラー級数を 3 次まで展開すれば,

$$\begin{aligned}
x^\kappa(s) = x_0^\kappa + \xi^\kappa s &- \frac{1}{2!}\left(\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\right)_0\xi^\mu\xi^\lambda s^2 \\
&- \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)_0 - 2\left(\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu}\right)_0\left(\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\alpha\lambda}\right)_0\right]\xi^\nu\xi^\mu\xi^\lambda s^3 - \cdots
\end{aligned} \tag{6.2}$$

が得られる。

6.2 測地座標系

非ユークリッド空間において, クリストッフェル記号 $\mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}$ は空間が曲がっていることに起因する量であるが, その量は座標の選び方によって局所的にゼロにすることができる。そのような座標系は**測地座標系**と呼ばれる。

一例として, 球面における測地座標系について考えよう。半径 R の球面における座標 $[\theta, \varphi]$ を考え, $x^1 \equiv \theta$, $x^2 \equiv \varphi$ のような対応関係を与えると, 明示的にゼロにならないクリストッフェル記号は,

$$\mathit{\Gamma}^1{}_{22} = \sin\theta\cos\theta, \qquad \mathit{\Gamma}^2{}_{12} = \mathit{\Gamma}^2{}_{21} = \cot\theta,$$

である。ここで, θ は天頂角, φ は方位角である。この数式から容易にわかるように, $\theta = \pi/2$ においてクリストッフェル記号のすべての成分がゼロになる。つまり, 天頂角 θ と方位角 φ で表現される球面上の座標系は, 赤道上 $(\theta = \pi/2)$ で測地座標系になっている。その事

実は, 赤道と経線が互いに直交する測地線であるので, 局所的に 2 次元のカルテシアン座標系として取り扱えることから理解できるだろう。それに対して, 赤道以外の緯線は経線と直交するが, 測地線ではない。つまり, 赤道以外の緯線は球面上の直線とはみなせないため, クリストッフェル記号がゼロにならない。しかし, その位置が赤道になるように北極点を選びなおせばクリストッフェル記号を確実にゼロにできる。それが測地座標系を作るための座標の選び方の例である。

一般的な座標系において, 測地座標系をつくるための座標変換を考えよう。ある特定の場所 x_0^μ においてクリストッフェル記号がゼロとなるような座標変換を考えるのである。そのような座標変換の候補として,

$$\bar{x}^\kappa = (x^\kappa - x_0^\kappa) - \frac{1}{2}({\mathit{\Gamma}^\kappa}_{\mu\lambda})_0\,(x^\mu - x_0^\mu)(x^\lambda - x_0^\lambda), \tag{6.3}$$

なる変換によって, x^κ から $\bar{x}^\kappa$ に変換する場合を考える。この新しい座標におけるクリストッフェル記号 ${\bar{\mathit{\Gamma}}^\kappa}_{\mu\lambda}$ は,

$$\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}{\mathit{\Gamma}^\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta}{\bar{\mathit{\Gamma}}^\kappa}_{\mu\lambda} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta},$$

にしたがって変換される。この変換式は, $\bar{x}^\kappa$ 系の原点, すなわち, $x^\kappa = x_0^\kappa$ について書き直せば, 形式的に,

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 ({\mathit{\Gamma}^\alpha}_{\gamma\beta})_0 = \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\right)_0 \left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta}\right)_0 \left({\bar{\mathit{\Gamma}}^\kappa}_{\mu\lambda}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}\right)_0, \tag{6.4}$$

となる。座標変換 (6.3) を微分すれば,

$$\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha} = {\delta^\kappa}_\alpha, \qquad \frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} = ({\mathit{\Gamma}^\kappa}_{\gamma\beta})_0,$$

となることから, クリストッフェル記号の座標変換 (6.4) は

$$({\mathit{\Gamma}^\kappa}_{\gamma\beta})_0 = {\delta^\mu}_\gamma {\delta^\lambda}_\beta ({\bar{\mathit{\Gamma}}^\kappa}_{\mu\lambda})_0 + ({\mathit{\Gamma}^\kappa}_{\gamma\beta})_0 = ({\bar{\mathit{\Gamma}}^\kappa}_{\gamma\beta})_0 + ({\mathit{\Gamma}^\kappa}_{\gamma\beta})_0,$$

のように変形される。この方程式から $({\bar{\mathit{\Gamma}}^\kappa}_{\gamma\beta})_0 = 0$ が導かれるので, 新しい座標系 $\bar{x}^\kappa$ の原点においてクリストッフェル記号がゼロになることが示された。また, クリストッフェル記号がゼロとなる点 x_0^κ は, 測地座標系の**極**と呼ばれる。紛らわしい名称であるが, 地球が球面であれば, 赤道が測地座標系の極である。北極と南極は測地座標系の極ではない。

このような測地座標系は, 一意的ではなく, 無数に選ぶことができる。上で述べた球面座標において, 任意の点を赤道上に設定する座標変換が無数に存在することからわかる。例えば, (6.3) の代わりに,

$$\begin{aligned}\bar{x}^\kappa = A\,(x^\kappa - x_0^\kappa) &+ \frac{B}{2}({\mathit{\Gamma}^\kappa}_{\mu\lambda})_0\,(x^\mu - x_0^\mu)(x^\lambda - x_0^\lambda)\\ &\qquad + P_{(3)}^\kappa(x^0 - x_0^0, x^1 - x_0^1, \ldots, x^{n-1} - x_0^{n-1}),\end{aligned}$$

なる変換を適用しても, $(\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\gamma\beta})_0 = 0$ となる。ただし, A と B は定数, $P^{\kappa}_{(3)}$ は $x^{\mu} - x^{\mu}_0$ に関する3次以上の多項式である。また, 次節で紹介するリーマン標準座標も測地座標系の一種である。

6.3 リーマン標準座標

非ユークリッド空間中の点 x^{κ}_0 を通り, その場所における接線方向の単位ベクトル ξ^{κ} となる測地線 x^{κ} は, テイラー級数 (6.2) で計算できる。ここで, $\bar{x}^{\kappa} \equiv \xi^{\kappa} s$ なる記号を用いて (6.2) を書き直すと,

$$x^{\kappa} = x^{\kappa}_0 + \bar{x}^{\kappa} - \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)_0 \bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda} - \cdots \tag{6.5}$$

が得られる。この測地線の座標の式には, 接線ベクトル ξ^{κ} や測地線の長さ s は見かけ上, 消去され, あたかも x^{κ} と $\bar{x}^{\kappa}$ の座標変換のように見える。その事実を利用して, 新しい座標 $\bar{x}^{\kappa}$ の性質を調べてみよう。座標変換 (6.5) を $\bar{x}^{\kappa}$ について解くと,

$$\bar{x}^{\kappa} = x^{\kappa} - x^{\kappa}_0 + P^{\kappa}(x^1 - x^1_0, x^2 - x^2_0, \dots, x^n - x^n_0), \tag{6.6}$$

となるはずである。ここで, 右辺の第3項は $x^{\mu} - x^{\mu}_0$ $(\mu = 1, 2, \dots, n)$ の2次以上の項からなるべき級数である。この新しい座標 $\bar{x}^{\kappa}$ は, x^{κ}_0 $(\bar{x}^{\kappa} = 0)$ を通る測地線上にとられた座標であり,

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}\right)_0 = \delta^{\kappa}{}_{\mu},$$

なる関係がある。この新しい座標系 $\bar{x}^{\kappa}$ は, x^{κ}_0 を原点とする**リーマン標準座標**と呼ばれる。リーマン標準座標においても, 当然, 測地線の座標は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 \bar{x}^{\kappa}}{\mathrm{d}s^2} + \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^{\mu}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^{\lambda}}{\mathrm{d}s} = 0,$$

なる測地線の方程式が成立するはずである。座標 $\bar{x}^{\kappa} \equiv \xi^{\kappa} s$ が測地線の方程式の解の一つであるので, これを測地線の方程式に代入すると, $\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\xi^{\mu}\xi^{\lambda} = 0$ を得る。この結果に, 測地線の長さの自乗 s^2 を乗じると,

$$\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda} = 0, \tag{6.7}$$

が得られる。つまり, 座標系 $\bar{x}^{\kappa}$ は, いたる場所で関係式 (6.7) が成り立つ。この事実をリーマン標準座標の定義とする。言い換えると, 座標系 $\bar{x}^{\kappa}$ がリーマン標準座標であることの必要十分条件は, $\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda} = 0$ が空間のいたる場所で成り立つことである。

標準座標系 $\bar{x}^{\kappa}$ の原点 $\bar{x}^{\kappa}_0$ $(\,= 0)$ において, ベクトル ξ^{κ} に接する測地線は,

$$\bar{x}^{\kappa} = \xi^{\kappa} s - \frac{1}{2}(\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda})_0\, \xi^{\mu}\xi^{\lambda} s^2 - \cdots$$

のように級数展開される。しかし, 標準座標系は $\bar{x}^\kappa = \xi^\kappa s$ となるように選ばれた座標系である。よって, 標準座標では $(\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda})_0 \xi^\mu \xi^\lambda = 0$ なる関係が成立する。この関係が任意のベクトル ξ^μ について成立すること, および, $\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}$ が添え字 μ と λ について対称であることより, $(\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda})_0 = 0$ であることがわかる。つまり, x_0^κ を原点とするリーマン標準座標は, x_0^κ を極とする測地座標の一種である。

リーマン標準座標系 $\bar{x}^\kappa$ は座標系 x^κ に対して定めた座標系である。別の座標系 x'^κ から定めたリーマン標準座標系を $\bar{x}'^\kappa$ としたとき, これらの標準座標の関係を調べてみよう。まず, $\bar{x}^\kappa$ 系と $\bar{x}'^\kappa$ 系における測地線の接線ベクトルを, それぞれ, ξ^κ, ξ'^κ とすると, $\bar{x}^\kappa = \xi^\kappa s$, $\bar{x}'^\kappa = \xi'^\kappa s$ と書かれるはずである。ところが, ξ^κ は, 原点 x_0^κ で定義される反変ベクトルであるので,

$$\xi'^\kappa = \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \xi^\alpha,$$

のように変換される。この式の両辺に s を乗じると,

$$\bar{x}'^\kappa = \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \bar{x}^\alpha, \tag{6.8}$$

なる関係が得られる。つまり, リーマン標準座標系 $\bar{x}^\kappa$ と $\bar{x}'^\kappa$ は互いに, 1 次変換で結び付けられる。

6.4 偏導関数のテンソル性

一般に, テンソルを座標について偏微分した量はテンソルにならない。しかし, リーマン標準座標系の原点では, テンソルの偏微分がテンソルになる。この特殊な関係は, 非ユークリッド空間の特徴を学ぶ上で有効な情報となるので, リーマン標準座標系の原点における導関数のテンソル性について調べてみる。

例として, 一般の座標系 x^κ において定義された 2 階の反変テンソル $T^{\mu\lambda}$ について考えよう。このテンソルを標準座標系 $\bar{x}^\nu$ に座標変換したテンソルを $\bar{T}^{\mu\lambda}$ とする。このとき, $\bar{T}^{\mu\lambda}$ を $\bar{x}^\nu$ で偏微分した量 $\partial\bar{T}^{\mu\lambda}/\partial\bar{x}^\nu$ は $\bar{x}^\kappa = 0$ において, テンソルの性質をもつ。その性質は, 以下のように証明することができる。

一般の座標系におけるテンソル $T^{\mu\lambda}$ とリーマン標準座標系におけるテンソル $\bar{T}^{\mu\lambda}$ の間には,

$$\bar{T}^{\mu\lambda} = \frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta},$$

なる関係が成立する。また, 前節で学んだように, 異なるリーマン標準座標への変換は,

$$\bar{x}'^\kappa = \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \bar{x}^\alpha,$$

のような 1 次変換となるので, 異なる標準座標の間でのテンソルの変換は,

$$\bar{T}'^{\mu\lambda} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)_0 \left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)_0 \bar{T}^{\alpha\beta},$$

となる。この式の両辺を $\bar{x}'^{\nu}$ で偏微分すると,

$$\frac{\partial \bar{T}'^{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}'^{\nu}} = \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)_0 \left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)_0 \frac{\partial \bar{T}^{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}},$$

となる。つまり, $\bar{x}^{\kappa} = 0$ では,

$$\left(\frac{\partial \bar{T}'^{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}'^{\nu}}\right)_0 = \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \bar{T}^{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\right)_0, \tag{6.9}$$

となるので, $(\partial \bar{T}^{\mu\lambda}/\partial \bar{x}^{\mu})_0$ がテンソルであることを意味している。¶

リーマン標準座標系の原点におけるテンソルの偏導関数 $(\partial \bar{T}^{\mu\lambda}/\partial \bar{x}^{\nu})_0$ は, それをもとの座標系 x^{κ} の点 x_0^{κ} における量に変換された偏導関数 $(\partial T^{\mu\lambda}/\partial x^{\nu})_0$ と等しい。それは, 次のようにして証明される。まず, 偏導関数 $(\partial T^{\mu\lambda}/\partial x^{\nu})_0$ は

$$\left(\frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{T}^{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\right)_0,$$

なる変換則にしたがうのだが,

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}}\right)_0 = \delta^{\gamma}{}_{\nu}, \qquad \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\right)_0 = \delta^{\mu}{}_{\alpha},$$

であることに注意すると,

$$\left(\frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{T}^{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}}\right)_0, \tag{6.10}$$

なる関係が得られる。このように, 一例として 2 階のテンソルの 1 階偏導関数が点 x_0^{κ} においてテンソルとしての性質をもつことを示したが, 任意のテンソル $\bar{T}^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}$ の m 階の偏導関数も, リーマン標準座標系の原点ではテンソルとしての性質をもつ。それを形式的に書くと,

$$\left(\frac{\partial^m \bar{T}'^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial \bar{x}'^{\nu_1}\cdots\partial \bar{x}'^{\nu_m}}\right)_0 = \left(\frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\gamma_t}}{\partial x'^{\nu_t}} \cdot \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\alpha_r}}\right.$$
$$\left. \cdot \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial x'^{\lambda_s}} \cdot \frac{\partial^m \bar{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}}{\partial \bar{x}^{\gamma_1}\cdots\partial \bar{x}^{\gamma_m}}\right)_0, \tag{6.11}$$

を示す。しかも, この m 階の偏導関数は, もとの座標系 x^{κ} における量に変換しても, 点 x_0^{κ} では値が変化しない。つまり,

$$\left(\frac{\partial^m \bar{T}^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}\cdots\partial \bar{x}^{\nu_m}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^m T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial x^{\nu_1}\cdots\partial x^{\nu_m}}\right)_0, \tag{6.12}$$

が成立する。このように, テンソルの種類や偏導関数の階数に関係なく, リーマン標準座標系の原点では, テンソルの偏導関数がテンソルの性質をもつ。リーマン標準座標系の原点ではクリストッフェル記号がゼロであるので, その場所における 1 階の偏導関数は共変微分と一致する。しかし, 2 階以上の偏導関数は共変微分とは一致しないことに注意しておく。なぜなら, 偏微分の演算子 $\partial/\partial x^\mu$ と $\partial/\partial x^\nu$ は可換であるが, 共変微分の演算子 ∇_μ と ∇_ν は非可換であるからである。

6.5 標準テンソル

クリストッフェル記号は一般にテンソルではないが, リーマン標準座標系の原点ではテンソルとして振舞う。そのため, クリストッフェル記号のリーマン標準座標系の原点における量を標準テンソルと呼ぶ。

座標系 x^κ から生成したリーマン標準座標 $\bar{x}^\kappa$ におけるクリストッフェル記号を $\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}$, また, 座標系 x'^κ から生成したリーマン標準座標 $\bar{x}'^\kappa$ におけるクリストッフェル記号を $\bar{\Gamma}'^\kappa{}_{\mu\lambda}$ とする。通常の座標変換に基づくと, このクリストッフェル記号は,

$$\bar{\Gamma}'^\kappa{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial \bar{x}'^\kappa}{\partial \bar{x}^\alpha}\left(\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial \bar{x}'^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial \bar{x}'^\lambda}\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial \bar{x}'^\mu \partial \bar{x}'^\lambda}\right),$$

なる変換にしたがう。ここで,

$$\bar{x}'^\kappa = \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \bar{x}^\alpha, \qquad \bar{x}^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\kappa}\right)_0 \bar{x}'^\kappa,$$

なる関係に注意すると,

$$\bar{\Gamma}'^\kappa{}_{\mu\lambda} = \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\right)_0 \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}\right)_0 \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma},$$

なる性質が導かれる。つまり, クリストッフェル記号は, リーマン標準座標系の原点で 3 階のテンソルとして振る舞う。さらに, この式の両辺を $\bar{x}'^\nu$ で偏微分すると,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}'^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}'^\nu} = \left(\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu}\right)_0 \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\right)_0 \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}\right)_0 \frac{\partial \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial \bar{x}^\eta},$$

となる。すなわち, 偏導関数 $\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}/\partial \bar{x}^\nu$ はリーマン標準座標系の原点にあたる点 x_0^κ でテンソルとして振る舞う。同様に, クリストッフェル記号の高階の導関数も点 x_0^κ でテンソルとして振る舞う。リーマン標準座標系の原点におけるクリストッフェル記号は**標準テンソル**と呼ばれる。

リーマン標準座標系では, クリストッフェル記号の偏微分に関する添え字の巡回に対称性がある。リーマン標準座標系のいたる場所で成立する関係 (6.7) を $\bar{x}^\nu$ について偏微分すると,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda + \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\nu\lambda}\bar{x}^\lambda + \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}\bar{x}^\mu = 0,$$

となる。この式の両辺に $\bar{x}^\nu$ を乗じて, 添え字 ν について縮約し, (6.7) の関係に注意すれば,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda\bar{x}^\nu = 0,$$

なる関係式が得られる。当然, 左辺の $\bar{x}^\mu$, $\bar{x}^\lambda$, $\bar{x}^\nu$ の順序を入れ替えても値は変化しないはずなので,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\bar{x}^\nu\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda = \frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\bar{x}^\lambda\bar{x}^\nu\bar{x}^\mu = 0,$$

が成立する。また, 総和をとるために変化させる添え字は別の文字で書いても意味が変わらないので, この数式は

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda\bar{x}^\nu = 0,$$

と書いてもよい。ここで, この数式の左から 3 つの辺を加算すると,

$$\left(\frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}\right)\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda\bar{x}^\nu = 0,$$

が得られる。この関係式は任意の $\bar{x}^\mu$ について成立するはずだから, 必然的に,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}^\nu} + \frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\nu\mu}}{\partial \bar{x}^\lambda} + \frac{\partial \bar{\Gamma}^\kappa{}_{\lambda\nu}}{\partial \bar{x}^\mu} = 0, \tag{6.13}$$

なる添え字の巡回に関する対称性がクリストッフェル記号の偏導関数について成立しなければならない。

6.6 計量テンソルのテイラー展開

本節では, 計量テンソル $\bar{g}_{\mu\nu}$ をテイラー級数展開してみよう。後に示すように, その展開係数に曲率テンソルが現れ, その事実から, リッチテンソルが空間の湾曲による体積歪みを与える量であることが導かれる。

計量テンソルは, 空間座標に依存しており, それが微分可能な関数であれば, テイラー級数で記述することができる。リーマン標準座標の原点 x_0^κ を中心に, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ をテイラー級数展開すると,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = (\bar{g}_{\mu\nu})_0 + \left(\frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^\alpha}\right)_0 \bar{x}^\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta}\right)_0 \bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta + \cdots \tag{6.14}$$

なる形で書くことができる。それでは, 計量テンソル $\bar{g}_{\mu\nu}$ を 2 次の項までテイラー展開してみよう。まず, 1 次の展開係数はゼロである。なぜなら,

$$\frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} = \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\alpha\mu} g_{\kappa\nu} + \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\alpha\nu} g_{\mu\kappa},$$

なる関係が成立するため, クリストッフェル記号がゼロとなる原点では計量テンソルの 1 階微分がゼロとなるからである。

一方, 2 次の展開係数は曲率テンソルが関係している。リーマン標準座標系の原点では, 曲率テンソル $\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ は, その定義式からクリストッフェル記号を含む項が消え,

$$\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} = \frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}},$$

と書くことができる。曲率テンソル $\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ に, 添え字 λ と μ を交換した $\bar{R}^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda}$ を加算すると,

$$\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} + \bar{R}^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}} + \frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\lambda\mu}}{\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\nu\mu}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} = -3\frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}},$$

なる関係が得られる。この関係を導出するには, (6.13) の関係を用いた。よって,

$$\frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}} = -\frac{1}{3}(\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} + \bar{R}^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda}), \tag{6.15}$$

と書き直すことができる。また, この式の左辺を展開すると,

$$\frac{\partial \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}} = \frac{\partial \bar{g}^{\kappa\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda} \bar{g}_{\kappa\alpha} + \frac{1}{2}\bar{g}^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\nu\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\lambda}} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{\lambda\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\alpha}}\right),$$

となるが, 計量テンソルの微分には,

$$\frac{\partial \bar{g}^{\kappa\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} = -(\bar{\varGamma}^{\kappa}{}_{\mu\beta}\bar{g}^{\beta\alpha} + \bar{\varGamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}\bar{g}^{\alpha\beta}),$$

なる関係があるため, 原点において第 1 項はゼロになる。さらに, (6.13) の両辺に $\bar{g}_{\kappa\sigma}$ を乗じて添え字 κ について縮約すると,

$$-\frac{1}{3}(\bar{R}_{\sigma\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\sigma\mu\nu\lambda}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\nu\sigma}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\lambda}} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{\lambda\sigma}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\sigma}}\right),$$

を得る。この関係式に, 添え字 σ と ν を交換した式:

$$-\frac{1}{3}(\bar{R}_{\nu\lambda\sigma\mu} + \bar{R}_{\nu\mu\sigma\lambda}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\sigma\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\lambda}} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{\lambda\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\sigma}} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\sigma\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\nu}}\right),$$

を加算し, 曲率テンソルの対称性に注意すれば,

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\lambda}} = \frac{1}{3}(\bar{R}_{\kappa\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\kappa\nu\mu\lambda}), \tag{6.16}$$

が得られる。さらに, (6.16) と, その添え字 μ と ν を交換した式の差を, 曲率テンソルの対称性に注意して計算すると,

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\nu}}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\lambda} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\mu}}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\lambda} = -\frac{1}{3}(2\bar{R}_{\kappa\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\kappa\mu\nu\lambda} - \bar{R}_{\kappa\nu\mu\lambda})$$
$$= -\frac{1}{3}(2\bar{R}_{\kappa\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\kappa\mu\nu\lambda} + \bar{R}_{\kappa\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\kappa\mu\lambda\nu}) = -\bar{R}_{\nu\mu\kappa\lambda},$$

が得られる。これを改めて書き直すと,

$$\bar{R}_{\nu\mu\kappa\lambda} = \frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\mu}}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\lambda} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\nu}}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\lambda}, \tag{6.17}$$

なる関係式が得られる。計量テンソルの 2 階微分 (6.16) をテイラー級数 (6.14) に代入すると, 計量テンソルの 2 次展開は,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = (\bar{g}_{\mu\nu})_0 - \frac{1}{3}(\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta})_0\, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta, \tag{6.18}$$

のように書かれることがわかる。この式が,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = (\bar{g}_{\mu\nu})_0 \left[\delta^\kappa{}_\nu - \frac{1}{3}(\bar{R}^\kappa{}_{\alpha\nu\beta})_0\, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta\right],$$

のように書けることに注目し, 原点の近傍座標 $\bar{x}^\alpha$ の 2 次近似として, 計量テンソル $\bar{g}_{\mu\nu}$ の行列式 $\bar{g}$ は,

$$\bar{g} \simeq (\bar{g})_0 \left[1 - \frac{1}{3}(\bar{R}_{\alpha\beta})_0\, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta\right], \tag{6.19}$$

のように書くことができる。ここで, $(\bar{g})_0$ はリーマン標準座標の原点における計量テンソル $\bar{g}_{\mu\nu}$ の行列式である。さらに, n 次元空間における体積素は, 座標 $\bar{x}^\alpha$ についての 2 次近似として,

$$\sqrt{\bar{g}}\, \mathrm{d}\bar{x}^0 \mathrm{d}\bar{x}^1 \cdots \mathrm{d}\bar{x}^{n-1} \simeq \sqrt{(\bar{g})_0} \left[1 - \frac{1}{6}(\bar{R}_{\alpha\beta})_0\, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta\right] \mathrm{d}\bar{x}^0 \mathrm{d}\bar{x}^1 \cdots \mathrm{d}\bar{x}^{n-1}, \tag{6.20}$$

のように, リッチテンソル $\bar{R}_{\alpha\beta}$ を含む形で記述できることになる。空間がユークリッド空間であれば, リッチテンソルがゼロとなるので, リッチテンソルは, 空間の湾曲による体積歪みを与える量であると考えることができる。

第7章　部分空間と曲面論

本章では, n 次元空間の中の部分空間を取り扱う。部分空間とは, 空間の制限された領域ではなく, 少ない次元で取り扱える空間である。例えば, 3次元空間中の球面は, 天頂角と方位角で場所を特定できるので, 2次元となる。それが部分空間の例である。現実に我々が視覚的に認識できるのは3次元空間までなので, 身近な部分空間とは, 3次元中の曲面 (2次元空間), せいぜい, その中に存在する曲線 (1次元空間) であろう。本章では, 一般的な n 次元空間を取り扱うため, 3次元空間中の曲面をさらに拡張した理論を構成する。その理論の副産物として, 球面における測地線が大円でなければならないことなどが導かれる。

7.1　部分空間

部分空間とは, 単に体積的に制限された領域ではない。もとの空間の一部分であり, かつ, 特定の条件ものとで少ない次元で取り扱える空間のことである。例えば, 3次元のカルテシアン座標系 $[x, y, z]$ において, $z = 0$ のみを取り扱うのであれば, 座標 $[x, y]$ のみで位置を特定できる。これが部分空間の例である。この場合, 部分空間は3次元空間中の平面ということだ。別の例として, 定数 a を用いて,

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad z = a\cos\theta,$$

のように, 三つの座標成分が二つのパラメータ $[\theta, \varphi]$ で一意的に決まるような空間を考えることができる。その空間は, 3次元空間中の球面である。二つのパラメータで位置が特定できるので, 球面は2次元である。したがって, 球面も3次元の部分空間の例である。

7.1.1　第1基本テンソル

本項で示すように, リーマン空間中の部分空間もリーマン空間である。その事実によって, 部分空間中の線素も, 後に示すように計量テンソルを用いた2次形式で記述できる。特に, 部分空間の計量テンソルは第1基本テンソルとも呼ばれる。

部分空間の導入にあたり, これまで考えてきた n 次元のリーマン空間を V_n なる記号で記述することにしよう。その空間から m 次元 $(m < n)$ の空間 V_m を取りだす。いうまでもなく, n 次元空間の任意の点は座標 $[x^1, x^2, \ldots, x^n]$ で特定され, 微小距離は $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$ で与えられる。空間 V_n において, 座標 x^μ が m 個のパラメータで表現できるように点の集合が選ばれたとき, その集合は n 次元空間中に m 次元の部分空間をつくっている。座標 x^μ が m 個のパラメータで表現できるとは,

$$x^\mu = x^\mu(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

のように, 座標 x^μ が, $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m$ の関数として記述できることを意味する。この関数は, これまでの議論と同様, 1 価関数であれば非線形であっても構わない。部分空間の次元が m であることは, 座標 x^μ をパラメータ $\hat{x}^j$ について偏微分して得られる行列:

$$B_j{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^j} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m),$$

の階数 (rank) が m であるという意味である。このとき, パラメータ $[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m]$ が m 次元部分空間の座標であると考えるのだ。なお, 本章において, 座標や他の数学的量で部分空間で定義される量であることを区別するために, $\hat{x}$ や $\bar{g}$ のように, 文字の上にアクセント記号を付して記述することにする。

空間中の微小距離も, 部分空間の座標 $[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m]$ で書き換えることができる。空間 V_n において, 空間中の微小距離 $\mathrm{d}s$ は, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ のように与えられる。この数式を変形すると,

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^k}\mathrm{d}\hat{x}^j\mathrm{d}\hat{s}^k = B_j{}^\mu B_k{}^\nu\, g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\hat{x}^j\mathrm{d}\hat{x}^k,$$

となるので, 部分空間 V_m の計量 $\hat{g}_{jk}$ を用いて,

$$\mathrm{d}s^2 = \hat{g}_{jk}\,\mathrm{d}\hat{x}^j\mathrm{d}\hat{x}^k, \tag{7.1}$$

なる形で微小距離が記述できそうだ。ここで, 変換行列 $B_j{}^\mu$ は,

$$B_j{}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^j},$$

のように定義した。この変換行列を用いて, 部分空間における計量テンソルが,

$$\hat{g}_{jk} = B_j{}^\mu B_k{}^\nu\, g_{\mu\nu}, \tag{7.2}$$

のように変換される。線素が (7.1) のように記述できるので, 部分空間も m 次元のリーマン空間である。なお, 部分空間 V_m の計量テンソル $\hat{g}_{jk}$ は**第 1 基本テンソル**と呼ばれる。

空間 V_n の中で選ばれた二つの微小ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ と δx^μ がなす角は, 部分空間 V_m において測った角度と等しい。この性質は, $\mathrm{d}x^\mu$ と δx^μ の内積と, ベクトルの大きさの関係を調べれば正当性を示すことができる。計算する前に,

$$\mathrm{d}x^\mu = B_j{}^\mu \mathrm{d}\hat{x}^j, \qquad \delta x^\mu = B_j{}^\mu \delta\hat{x}^j,$$

であることに注意しておこう。二つのベクトルがなす角を θ とし, リーマン空間におけるなす角 θ の定義にしたがって, 余弦関数 $\cos\theta$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \delta x^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}\sqrt{g_{\mu\nu}\delta x^\mu \delta x^\nu}} \\
&= \frac{g_{\mu\nu}B_j{}^\mu B_k{}^\nu \mathrm{d}\hat{x}^j \delta\hat{x}^k}{\sqrt{g_{\mu\nu}B_j{}^\mu B_k{}^\nu \mathrm{d}\hat{x}^j \mathrm{d}\hat{x}^k}\sqrt{g_{\mu\nu}B_j{}^\mu B_k{}^\nu \delta\hat{x}^j \delta\hat{x}^k}} \\
&= \frac{\hat{g}_{jk}\mathrm{d}\hat{x}^j \delta\hat{x}^k}{\sqrt{\hat{g}_{jk}\mathrm{d}\hat{x}^j \mathrm{d}\hat{x}^k}\sqrt{\hat{g}_{jk}\delta\hat{x}^j \delta\hat{x}^k}},
\end{aligned}$$

が得られる。この数式の左辺は V_n における角度に相当し, 右辺は部分空間 V_m における角度に相当する。したがって, 二つのベクトルがなす角は, 部分空間から見ても等しいということだ。

部分空間 V_m から見た角度とそれを包含する高次元空間 V_n から見た角度が等しいのは当然と思える結果かもしれない。例えば, 図 7.1 に示すように, 球面に二つのベクトルを配置して, それらがなす角を球面上測ったとき θ が得られたとする。その角度を 3 次元空間から測っても θ が得られるということだ。そもそも, その操作は, 同一の角度を測っているわけであって, V_m から測るか V_n から測るかは, 分度器の当て方を指定しているに過ぎない。そのような状況を想像すると, 角度が等しいというのは, ごく当然の性質ということだ。

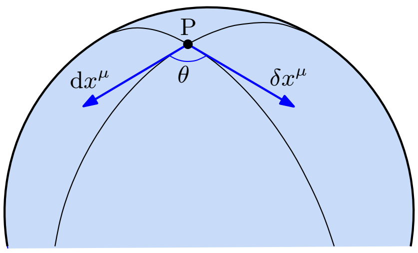


図 7.1: 球面に接する二つのベクトル間の角度

球面座標系　部分空間の例として, 3 次元空間中の球面座標について調べてみよう。カルテシアン座標系 $[x, y, z]$ において, 原点 O に半径 a の球が存在し, その球面の位置を $[\theta, \varphi]$

なる二つのパラメータで特定する。ここで, θ は天頂角, φ は方位角であるとする。このとき, 3 次元空間中の座標 $[x, y, z]$ は,

$$x = a \sin\theta \cos\varphi, \quad y = a \sin\theta \sin\varphi, \quad z = a \cos\theta,$$

によって $[\theta, \varphi]$ と関係づけられる。ここで, $[x^1, x^2, x^3] \equiv [x, y, z]$, $[\hat{x}^0, \hat{x}^1] \equiv [\theta, \varphi]$ のように記号を設定しよう。そのとき, 変換行列は,

$$[B_j{}^\mu] = \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

のように, 2 行 3 列の行列として設定できる。ここで, $B_j{}^\mu$ の添え字 j が行に対応し, μ が列に対応する。この変換行列を用いて部分空間における第 1 基本テンソル (計量テンソル) $\hat{g}_{jk}$ を算出してみるのだ。なお, 3 次元のカルテシアン座標系の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は 3 行 3 列の単位行列である。第 1 基本テンソルまでの中間形態として, $B_k{}^\nu g_{\mu\nu}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} [B_k{}^\nu g_{\mu\nu}] &= \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

が得られる。ここで, k が行に, μ が列に対応するように行列表記した。カルテシアン座標系の計量テンソルが単位行列なので, $B_k{}^\nu g_{\mu\nu}$ は外見的に $B_k{}^\nu$ と同じである。続いて, $\hat{g}_{jk} = B_j{}^\mu (B_k{}^\nu g_{\mu\nu})$ を計算すると,

$$\begin{aligned} [\hat{g}_{jk}] &= \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ -a\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

が得られる。この結果によって, $\mathrm{d}s^2 = a^2\,\mathrm{d}\theta^2 + a^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$ が得られるわけだ。この結果は球面座標におけるよく知られた微小距離と一致するはずだ。いうまでもなく, 球面座標は 3 次元空間中に設定される部分空間の一例である。よく知られた部分空間の例において第 1 基本テンソルを計算することによって, 部分空間イメージができたのではないだろうか。

7.1.2 接線と法線

部分空間は, 3 次元空間中における球面のように, 特定の条件にしたがって空間の一部を占める点の集合である。球面の例では, 球面に接する線 (接線) や, 球面に垂直なベクトル (法線) が設定できる。同様に, 一般の部分空間に対して, 接線や法線が設定できる。

上のように言ったものの, 一般の n 次元空間において, m 次元の部分空間に接する状況が想像できないだろう。我々は 3 次元までしか視角的に見えないのだから仕方のないことだ。そのような理由で, 残念ながら, 3 次元中の曲面の接線・法線までしか想像できない。あとはルールを決めるのだ。部分空間 V_m でのベクトルが $\hat{v}^j$ で, そのベクトルを空間 V_n の座標系で表現すると v^μ になる仮定する。そのとき, n 次元のベクトル v^μ は V_m への接ベクトルである, という決まりごとにしたがって議論を発展させるのだ。

部分空間 V_m における微小ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ は, 空間 V_n から見ると, 部分空間を構成する曲面のような空間[1] に含まれる微小ベクトルである。その微小ベクトルは, そのような曲面 (すなわち V_m) に接する直線を与えると考えることができる。ここで, 部分空間 V_m の中の微小ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ を数式で表現すると,

$$\mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^j}\mathrm{d}\hat{x}^j = B_j{}^\mu \mathrm{d}\hat{x}^j,$$

が得られる。このように数式を書くと, $B_j{}^\mu$ が空間 V_n において, 部分空間 V_m への接ベクトルであるとの解釈ができる。わかりにくいので解説しよう。空間 V_n の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_\mu$, 部分空間 V_m の基本ベクトルを $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ とする。部分空間 V_m 上の微小ベクトルの反変成分を $\mathrm{d}\hat{x}^j$ とし, それを V_n から見たときの反変成分を $\mathrm{d}x^\mu$ とする。そのとき,

$$\boldsymbol{e}_\nu\,\mathrm{d}x^\nu = \hat{\boldsymbol{e}}_j\,\mathrm{d}\hat{x}^j,$$

が成立する。この数式に逆基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ を内積すると,

$$\mathrm{d}x^\mu = \boldsymbol{e}^\mu \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j\,\mathrm{d}\hat{x}^j,$$

が得られる。ここで, 基本ベクトルの性質 $\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ を利用した。この関係式から, $B_j{}^\mu = \hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \boldsymbol{e}^\mu$ であることがわかる。つまり, $B_j{}^\mu$ は部分空間 V_m の基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ を空間 V_n から見たときの第 μ 反変成分である。部分空間 V_m 上のベクトルは, 空間 V_n から見ると V_m への接ベクトルである。したがって, $B_j{}^\mu$ は空間 V_m への接ベクトルを与える。なお, 既に書いたように, $B_j{}^\mu$ を配列した行列の階数が m であるので, V_m に接する独立なベクトルは m 個とれる。つまり, $B_j{}^\mu$ に関して, 添え字 j は m 個存在する接ベクトルを区

[1] 2 次元を超えた次元であるが n 次元全体より小さいので, 超曲面と呼びたいところだ。しかし, 超曲面は $n-1$ 次元空間に与えられた専門用語であるので, その名称は適切ではない。ということで, 曲面のような空間と呼ぶしかないか。

別するための番号 $(j=1,2,\ldots,m)$ あり, 添え字 μ はベクトルの反変成分を指定する番号 $(\mu=1,2,\ldots,n)$ である。

上に書いたように, ${B_j}^\mu$ は V_m 上の基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ の第 μ 反変成分を与えるので, 基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ は, $\hat{\boldsymbol{e}}_j = {B_j}^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ のように表現できる。基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ の 1 次結合も V_m 上のベクトルであるので, V_n からみると V_m への接ベクトルである。つまり,

$$\boldsymbol{v} = \hat{v}^j \hat{\boldsymbol{e}}_j = {B_j}^\mu \hat{v}^j \boldsymbol{e}_\mu,$$

は V_m への接ベクトルということだ。したがって,

$$v^\mu = {B_j}^\mu \hat{v}^j, \tag{7.3}$$

は V_m への接ベクトルの反変成分を与える。なお, $\hat{v}^\mu$ は任意の実数である。

空間 V_n は n 次元空間であるから, n 個だけ独立なベクトルがとれる。部分空間 V_m に接する位置で, 既に m 個だけ独立なベクトルが V_m への接ベクトルとして確保されているので, 残りの $n-m$ 個は V_m と垂直なベクトル, すなわち, 法線ベクトルである。法線ベクトルを与える要素として, ${B_P}^\mu$ $(P=m+1,m+2,\ldots,n)$ をとることにしよう。このような仮定において,

$$g_{\mu\nu}{B_j}^\mu {B_P}^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu}{B_P}^\mu {B_Q}^\nu = \delta_{PQ} \quad (P,Q=m,m+1,\ldots,n-1),$$

が成立する。つまり, 反変ベクトル ${B_P}^\mu$ は, いかなる ${B_j}^\mu$ と直交する。言い換えると, 反変ベクトル ${B_P}^\mu$ は V_m に対して法線ベクトルとして振る舞う。一方, 法線ベクトルどうし (${B_P}^\mu$ と ${B_Q}^\mu$) も互いに直交する。このように定義された ${B_P}^\mu$ は**単位法線**と呼ばれる。接線ベクトルは, $v^\mu = {B_j}^\mu \hat{v}^j$ のように V_n と V_m の間で変換できたが, 法線ベクトルは変換ができない。なぜなら, 法線ベクトルは部分空間 V_m では定義できないからだ。

変換行列 ${B_j}^\mu$ の反変成分と共変成分を変換するため, 一般の空間 V_n と同様に, 反変基本テンソル $\hat{g}^{jk}$ を定義しよう。定義された反変基本テンソルを用いて,

$$B^j{}_\mu = g_{\mu\nu}\hat{g}^{jk}{B_k}^\nu,$$

のように反変成分と共変成分を互いに変換できるとする。そのように定義すれば,

$$B^j{}_\lambda {B_k}^\lambda = g_{\nu\lambda}\hat{g}^{ja}{B_a}^\nu {B_k}^\lambda = \hat{g}_{ak}\hat{g}^{ja},$$

が成立するはずだ。ここで, 計量テンソルの座標変換 $\hat{g}_{ak} = g_{\nu\lambda}{B_a}^\nu {B_k}^\lambda$ を利用した。また, V_m の法線に関して, $B_{P\lambda} = g_{\mu\nu}{B_P}^\nu$ と考えれば,

$${B_\mu}^j {B_k}^\mu = \delta^j{}_k, \quad B_{P\mu}{B_Q}^\mu = \delta_{PQ}, \quad B^j{}_\mu B^\mu{}_P = 0, \quad B_{P\lambda}{B_k}^\mu = 0, \tag{7.4}$$

が成立する。トリッキーな記述だが, これらの等式は, $[B^j{}_\mu, B_{P\mu}]$ からつくった n 行 n 列の行列と, $[B_j{}^\mu, B_P{}^\mu]$ からつくった n 行 n 列の行列が互いに逆行列の関係にあることを示唆している。これらの数式をまとめて,

$$B^j{}_\mu B_j{}^\nu + B_{P\mu} B_P{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu, \tag{7.5}$$

のように書くこともできる。ここで, P にも $P = m+1, m+2, \ldots, n$ の範囲でアインシュタインの総和の規約が適用される。この数式から,

$$\hat{g}^{jk} B_j{}^\eta B_k{}^\lambda + B_P{}^\eta B_P{}^\lambda = g^{\lambda\eta}, \tag{7.6a}$$

$$\hat{g}^{jk} B^j{}_\mu B^k{}_\eta + B_{P\mu} B_{P\eta} = g_{\mu\eta}, \tag{7.6b}$$

が得られる。第 1 式は (7.5) に $g^{\mu\eta}$ を乗じて縮約をとることによって得られる。第 2 式は $g^{\lambda\eta}$ を乗じて縮約をとることによって得られる。

7.1.3　クリストッフェル記号

部分空間 V_m もリーマン空間となるので, クリストッフェル記号を定義できる。クリストッフェル記号は計量テンソルを座標で偏微分することによって実現できる。既に示したように, 部分空間での計量テンソルは,

$$\hat{g}_{jk} = B_j{}^\mu B_k{}^\nu g_{\mu\nu},$$

によって与えられる。部分空間 V_m でのクリストッフェル記号は, 空間 V_n と同様に,

$$\hat{\mathit{\Gamma}}^h{}_{jk} = \frac{\hat{g}^{ha}}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{ka}}{\partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \hat{g}_{ja}}{\partial \hat{x}^k} - \frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \hat{x}^a}\right),$$

によって定義される。ここで, 偏微分が部分空間の座標 $\hat{x}^\mu$ について演算されることに注意が必要だ。クリストッフェル記号を得るため, 計量テンソルを偏微分すると,

$$\frac{\partial \hat{g}_{ka}}{\partial \hat{x}^j} = \frac{\partial B_k{}^\mu}{\partial \hat{x}^j} B_a{}^\nu g_{\mu\nu} + B_k{}^\mu \frac{\partial B_a{}^\nu}{\partial \hat{x}^j} g_{\mu\nu} + B_k{}^\mu B_a{}^\nu B_j{}^\lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda},$$
$$\frac{\partial \hat{g}_{ja}}{\partial \hat{x}^k} = \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^k} B_a{}^\nu g_{\mu\nu} + B_j{}^\mu \frac{\partial B_a{}^\nu}{\partial \hat{x}^k} g_{\mu\nu} + B_j{}^\mu B_a{}^\nu B_k{}^\lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda},$$
$$\frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \hat{x}^a} = \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^a} B_k{}^\nu g_{\mu\nu} + B_j{}^\mu \frac{\partial B_k{}^\nu}{\partial \hat{x}^a} g_{\mu\nu} + B_j{}^\mu B_k{}^\nu B_a{}^\lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda},$$

が得られる。右辺の第 3 項は, 空間 V_n の座標についての偏微分で記述するため, $\partial/\partial \hat{x}^j = B_j{}^\lambda(\partial/\partial x^\lambda)$ なる関係を利用した。計算を進めるにあたり,

$$\frac{\mathrm{d}B_j{}^\mu}{\mathrm{d}\hat{x}^k} = \frac{\mathrm{d}B_k{}^\mu}{\mathrm{d}\hat{x}^j} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \hat{x}^j\, \partial \hat{x}^k},$$

に注意すると, 上記の偏微分を組み合わせて,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{ka}}{\partial \hat{x}^j}+\frac{\partial \hat{g}_{ja}}{\partial \hat{x}^k}-\frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \hat{x}^a}\right)=\frac{1}{2}B_a{}^{\nu}B_j{}^{\lambda}B_k{}^{\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)+B_a{}^{\nu}\frac{\partial B_k{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^j}g_{\mu\nu},$$

が得られる。クリストッフェル記号 $\hat{\Gamma}^h{}_{jk}$ を計算するには, この数式に $\hat{g}^{ha}$ を乗じて縮約をとればよいので,

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^h{}_{jk} &= \frac{\hat{g}^{ha}}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{ka}}{\partial \hat{x}^j}+\frac{\partial \hat{g}_{ja}}{\partial \hat{x}^k}-\frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \hat{x}^a}\right)\\
&= \hat{g}^{ha}B_a{}^{\nu}\left[\frac{1}{2}B_j{}^{\lambda}B_k{}^{\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)+\frac{\partial B_k{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^j}g_{\mu\nu}\right]\\
&= B^h{}_{\eta}\left[B_j{}^{\lambda}B_k{}^{\mu}\cdot\frac{g^{\eta\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)+\frac{\partial B_k{}^{\eta}}{\partial \hat{x}^j}\right],
\end{aligned}$$

のように計算される。ここで, $B^h{}_{\eta}=\hat{g}^{ha}g_{\eta\nu}B_a{}^{\nu}$ である。したがって, 部分空間 V_m におけるクリストッフェル記号は,

$$\hat{\Gamma}^h{}_{jk}=B^h{}_{\eta}\left(B_j{}^{\lambda}B_k{}^{\mu}\,\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}+\frac{\partial B_k{}^{\eta}}{\partial \hat{x}^j}\right), \tag{7.7}$$

なる公式によって空間 V_n のクリストッフェル記号と関係づけられる。なお, 右辺の第 2 項はクリストッフェル記号がテンソルでないことに起因する。関係式 (7.7) は, クリストッフェルの記号が $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}=(\partial \boldsymbol{e}_{\nu}/\partial x^{\lambda})\cdot\boldsymbol{e}^{\mu}$ のように, 基本ベクトルの導関数によって定義されることを利用すると,

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^h{}_{jk} &= \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_j}{\partial \hat{x}^k}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h=\frac{\partial (B_j{}^{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu})}{\partial \hat{x}^k}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h\\
&= \frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k}\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h+B_j{}^{\nu}\,\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\nu}}{\partial \hat{x}^k}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h\\
&= \frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k}\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h+B_j{}^{\nu}\,\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}}B_k{}^{\lambda}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h\\
&= \frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k}\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h+B_j{}^{\nu}B_k{}^{\lambda}B^h{}_{\mu}\,\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\boldsymbol{e}^{\mu}\\
&= \frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k}B^h{}_{\mu}+B_j{}^{\nu}B_k{}^{\lambda}B^h{}_{\mu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda},
\end{aligned}$$

のように部分空間中のクリストフェルの記号が計算される。この計算結果は, (7.7) と同一である。むしろ, この導出方法の方が少ない計算で公式 (7.7) が導出できる。

球面座標系　本節で導出した (7.7) の正当性を確認するため, 球面座標系のクリストッフェル記号を計算しよう。ここで, V_n は 3 次元のカルテシアン座標, V_m が 3 次元空間中の球面

を表す2次元の座標系であるとする。カルテシアン座標系ではクリストッフェル記号が完全にゼロになるので, 計算すべき数式は,

$$\hat{\Gamma}^h{}_{jk} = B^h{}_\eta \frac{\partial B_k{}^\eta}{\partial \hat{x}^j},$$

である。変換行列 $B_k{}^\eta$ は前に計算した。その変換行列の反変成分と共変成分の立場を変え, $B^h{}_\eta$ を計算しよう。この計算には, 計量テンソルの逆行列 $\hat{g}^{ha}$ が必要であるが, 既に計算された計量テンソル $\hat{g}_{ha}$ から容易に計算できる。そのように既に得られた計算材料を用いると, $B^h{}_\eta$ は,

$$\begin{aligned}
[B^h{}_\eta] &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a^2 \sin^2\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{a} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{a} & -\dfrac{\sin\theta}{a} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{a\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{a\sin\theta} & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

のように計算される。ここで, h と η は, それぞれ, 行と列に対応する。続いて, $\partial B_k{}^\eta / \partial \hat{x}^j$ を計算すると,

$$\left[\frac{\partial B_k{}^\eta}{\partial \hat{x}^j}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & -a\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ \hline -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & 0 \end{array}\right],$$

が得られる。この行列は, 2行3列の小行列を2行1列の大行列に含む形で記述した。小行列の行と列は, それぞれ, k と η に対応する。一方, 大行列の行は j に対応する。これらの計算結果を用いてクリストッフェル記号を計算すると,

$$[\hat{\Gamma}^h{}_{jk}] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ \hline 0 & \cot\theta \\ \cot\theta & 0 \end{array}\right],$$

が得らえる。この計算結果において, 小行列の行と列は, それぞれ, j と k に対応し, 大行列の行は h に対応する。当然であるが, この計算結果は第3章で計算されたクリストッフェルの記号と一致する。

7.1.4　オイラー・スカウテンの曲率テンソル

空間 V_n と部分空間 V_m との間の変換行列 ${B_j}^\mu$ は, 添え字 j に関して共変ベクトル, μ に関して反変ベクトルである。なぜなら, 既に書いたように, ${B_j}^\mu = \hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \boldsymbol{e}^\mu$ であることから, ${B_j}^\mu$ は, 空間 V_n から見た基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ の第 μ 成分である。これと同時に, ${B_j}^\mu$ は空間 V_m から見た逆基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ の第 j 共変成分である。その意味で, ${B_j}^\mu$ は反変ベクトルと共変ベクトルの性質をもち合わせている。

反変ベクトルや共変ベクトルは, 共変微分に関して, 若干異なる性質を示す。任意の反変ベクトル u^μ と共変ベクトル u_μ の共変微分は, 第 4 章で導出したように,

$$\delta u^\mu = \mathrm{d}u^\mu + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}x^\nu\,u^\lambda, \quad \delta u_\mu = \mathrm{d}u_\mu + {\mathit{\Gamma}^\alpha}_{\lambda\mu}\,\mathrm{d}x^\lambda\,u_\alpha,$$

となる。このように, 右辺第 2 項は, 基本ベクトルが座標によって変化することに対する補正項として追加されている。変換行列 ${B_j}^\mu$ の共変微分は, 基本的には第 4 章にしたがうのだが, 注意すべきことがある。それは, 反変性は空間 V_n で, 共変性は空間 V_m で, というように性質ごとに対象とする空間が異なることである。その取り扱いを決めるため, $\hat{u}_j v^\mu$ のように, 空間 V_m で定義された共変ベクトル $\hat{v}_j$ と空間 V_n で定義された反変ベクトル v^μ の積を共変微分してみよう。微積分の公式にしたがって計算すると,

$$\begin{aligned}
\delta(\hat{u}_j v^\mu) &= (\delta\hat{u}_j)\,v^\mu + \hat{u}_j\,(\delta v^\mu) \\
&= (\mathrm{d}\hat{u}_j - {\hat{\mathit{\Gamma}}^h}_{kj}\,\mathrm{d}\hat{x}^k\,\hat{u}_h)\,v^\mu + \hat{u}_j\,(\mathrm{d}v^\mu + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}x^\nu\,v^\lambda) \\
&= \mathrm{d}(\hat{u}_j v^\mu) + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}x^\nu\,\hat{u}_j v^\lambda - {\hat{\mathit{\Gamma}}^h}_{kj}\,\mathrm{d}\hat{x}^k\,\hat{u}_h v^\mu,
\end{aligned}$$

が得られる。これを参考に ${B_j}^\mu$ の共変微分を書き下すのだ。そもそも, ${B_j}^\mu$ が $\hat{u}_j v^\mu$ のような構造であるはずなので, 同一の規則性で共変微分が記述できるはずなのだ。上の計算結果を適用すると,

$$\delta{B_j}^\mu = \mathrm{d}{B_j}^\mu + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}x^\nu\,{B_j}^\lambda - {\hat{\mathit{\Gamma}}^h}_{kj}\,\mathrm{d}\hat{x}^k\,{B_h}^\mu, \tag{7.8}$$

が得られる。これが ${B_j}^\mu$ の共変微分というわけだ。この数式から共変微分係数 $\hat{\nabla}_k{B_j}^\mu$ に書き換えたいのだが, 上の数式には $\mathrm{d}x^\nu$ と $\mathrm{d}\hat{x}^k$ が混在するので注意が必要だ。ここで,

$$\mathrm{d}x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial\hat{x}^k}\,\mathrm{d}\hat{x}^k = {B_k}^\nu\,\mathrm{d}\hat{x}^k,$$

を利用すれば, 微小変化量は $\mathrm{d}\hat{x}^k$ で統一できる。したがって, ${B_j}^\mu$ の共変微分係数は,

$$\hat{\nabla}_k{B_j}^\mu = \frac{\partial{B_j}^\mu}{\partial\hat{x}^k} + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}{B_k}^\nu{B_j}^\lambda - {\hat{\mathit{\Gamma}}^h}_{kj}{B_h}^\mu, \tag{7.9}$$

のように書くことができる。このように定義された共変微分係数は, V_m に沿って拡張された共変微分係数, または, ファン・デア・ベルデン-ボルトロッティの共変微分係数と呼

ばれる。ここまでたどってきた数式変形によって明らかなように, この種の共変微分係数はテンソルとして振る舞う。

変換行列の共変微分係数 $\hat{\nabla}_k B_j{}^\nu$ は, **オイラー・スカウテンの曲率テンソル**として定義される。その定義を見るには, $B_j{}^\mu = \partial x^\mu / \partial \hat{x}^j$ に注意して共変微分係数を書き直す。計算過程も書くと,

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_k B_j{}^\mu &= \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^k} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} B_k{}^\nu B_j{}^\lambda - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} B_h{}^\mu \\ &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \hat{x}^j} - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^h},\end{aligned}$$

となる。これが**オイラー・スカウテンの曲率テンソル**だ。オイラー・スカウテンの曲率テンソルは, $H_{kj}{}^\mu$ なる記号で記述される。その定義を改めて書くと,

$$H_{kj}{}^\mu = \hat{\nabla}_k B_j{}^\mu = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \hat{x}^j} - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^h}, \tag{7.10}$$

となるわけだ。オイラー・スカウテンの曲率テンソルは, 空間 V_n に対する部分空間 V_m の曲率テンソルとも呼ばれる。なお, このテンソルが曲率テンソルと呼ばれる理由は, 本項の後に示すように, V_m が V_n 中の平面からどれくらい逸脱するかを表現することに由来する。

定義式 (7.10) から明らかなように, オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{kj}{}^\mu$ は j と k に関して対称である。さらに, $B^a{}_\mu H_{jk}{}^\mu = 0$ なる性質を満足する。その性質を示すには, 実際に計算してみるとよい。オイラー・スカウテンの曲率テンソルの定義に注意して計算すると,

$$\begin{aligned}B^a{}_\mu H_{jk}{}^\mu &= B^a{}_\mu \left(\frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^k} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} B_k{}^\nu B_j{}^\lambda - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} B_h{}^\mu \right) \\ &= B^a{}_\mu \left(\frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^k} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} B_k{}^\nu B_j{}^\lambda \right) - \hat{\Gamma}^a{}_{kj},\end{aligned}$$

が得られる。第 2 行目に (7.7) を適用すると,

$$B^a{}_\mu H_{jk}{}^\mu = 0, \tag{7.11}$$

が得られる。オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{jk}{}^\mu$ は, 添え字 μ に関して V_n の反変ベクトルであると解釈すれば, あらゆる $B_j{}^\mu$ に直交する。つまり, $H_{jk}{}^\mu$ は V_m に垂直なベクトルを与える。したがって, $H_{jk}{}^\mu$ は,

$$H_{jk}{}^\mu = H_{jk\,P} B_P{}^\mu,$$

のように, $B_P{}^\mu$ の 1 次結合として表される。ここで, $H_{jk\,P}$ は 1 次結合のために導入した展開係数であり,

$$H_{jk\,P} = g_{\mu\nu} H_{jk}{}^\mu B_P{}^\nu,$$

によって算出される。この定義式から明らかなように, 添え字 j と k に対してテンソルとして振る舞う。曲率テンソル $H_{jk\,P}$ は, 部分空間 V_m の**第 2 基本テンソル**と呼ばれる。

超曲面の法線　部分空間の次元が $m = n - 1$ の場合, その部分空間がなす幾何学形態は超曲面と呼ばれる。その場合, 部分空間 V_m に垂直なベクトルは, 一つしか独立にとることはできない。区別の必要性がないので, 添え字 P を廃止し,

$$B^\mu \equiv B_n{}^\mu, \qquad H_{jk,n-1} \equiv H_{jk},$$

とおけば,

$$H_{jk}{}^\mu = H_{jk} B^\mu,$$

となる。さらに, 特別な例として, V_n が 3 次元のユークリッド空間 (すなわち, $n = 3$) で, $m = 2$ のとき, H_{jk} は,

$$\mathrm{II} = H_{11}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^1 + 2H_{12}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 + H_{22}\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2,$$

のような微分幾何学における第 2 基本形式を与える。第 2 基本形式が 3 次元中の曲面が平面から逸脱する度合いを表示するので, オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{jk}{}^\mu$ は, 部分空間 V_m が V_n 中の平面からの逸脱度合いを表すための係数と考えればよいだろう。

球面座標でのオイラー・スカウテンの曲率テンソル　球面座標について $H_{jk}{}^\mu$ を計算し, 幾何学的なイメージをつかむことにしよう。空間 V_n が 3 次元のカルテシアン座標系とすれば, $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = 0$ である。その場合, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは,

$$H_{kj}{}^\mu = \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^k} - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} B_h{}^\mu,$$

によって計算できる。変換行列 $B_j{}^\mu$ やクリストッフェル記号 $\hat{\Gamma}^h{}_{kj}$ は, 既に本章で計算された結果を使うことにする。その結果, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは,

$$[H_{kj}{}^\mu] = \left[\begin{array}{ccc} -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ -a\sin^2\theta\cos\varphi & -a\sin^2\theta\cos\varphi & -a\sin^2\theta\cos\theta \end{array}\right],$$

が得られる。結果を示す数式は, 2 行 2 列の小行列が 2 行 1 列に並んだ形で記述している。小行列の行と列が添え字 j と μ に対応する。大行列の列は k に対応する。この行列表記に関して, 添え字 μ に関してベクトルとして解釈すると, $H_{kj}{}^\mu$ は球面 V_m の法線ベクトルであることがわかる。ここで,

$$[H_{kj}] = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a\sin^2\theta \end{bmatrix}, \qquad [B^\mu] = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix},$$

なる行列を定義すれば, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは, $H_{kj}{}^\mu = H_{kj} B^\mu$ のように書ける。ここで, B^μ は V_m の単位法線ベクトルである。いうまでもなく, そのベクトルは空間 V_m に含まれず, 空間 V_n のベクトルである。

7.2 部分空間上の曲線

部分空間が 2 次元以上の次数をもつとき, 部分空間上に曲線を描くことが可能だ。本節では, 部分空間 V_m に描いた曲線の性質について調べてみる。曲線は部分空間における座標 $\hat{x}^h$ を用い, $\hat{x}^h(s)$ のように長さ s の関数として表現するものとする。また, これを空間 V_n から見たとき, その曲線は $x^\mu(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m)$ のように $\hat{x}^h$ の関数として記述される。

曲線の性質を調べるには, 絶対曲率, 相対曲率, 法曲率というパラメータを使用する。それらのパラメータを特定してみよう。空間 V_n から見た曲線 x^μ について, 長さで微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = B_j{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}, \tag{7.12}$$

が得られる。ここで, $B_j{}^\mu = \partial x^\mu / \partial \hat{x}^j$ である。この微分は, 曲線に沿った微小変位を長さで正規化したベクトルを与える。言い換えると, 単位接線ベクトルを与えるわけだ。この接線ベクトルを曲線に沿って共変微分すると,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = B_j{}^\mu \frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} + H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}, \tag{7.13}$$

が得られる。ここで, $H_{jk}{}^\mu \equiv \hat{\nabla}_j B_k{}^\mu$ はオイラー・スカウテンの曲率テンソルである。この場合, 共変部分の対象に $B_h{}^\mu$ が含まれるので, 必然的にオイラー・スカウテンの曲率テンソルが出現するわけだ。後に改めて説明するが, 算出された導関数は添え字 μ についてベクトルとして見るとよい。右辺の第 1 項は $B_k{}^\mu$ によって V_m 上のベクトルであり, 第 2 項は $H_{jk}{}^\mu$ によって V_m の法線ベクトルである。

導関数 (7.13) の全体 (または左辺) は, **絶対曲率ベクトル**と呼ばれ, 右辺の第 1 項は**相対曲率ベクトル**, 第 2 項は**法曲率ベクトル**である。さらに, 曲率ベクトルの長さは, それぞれ, **絶対曲率**, **相対曲率**, **法曲率**なる名称で呼ばれている。上で述べたように, $B_h{}^\mu$ をベクトル成分とする相対曲率ベクトルは V_m の接ベクトルである。一方, $H_{jk}{}^\mu$ をベクトル成分とする法曲率ベクトルは V_m の法線ベクトルである。

定理 7.1 絶対曲率ベクトルは, 相対曲率ベクトルと法曲率ベクトルの和である。

この性質は, 数式 (7.13) に記載したとおり, つまり, 曲率ベクトルの定義そのものである。それ以外の説明は特にない。

定理 7.2 絶対曲率の自乗は, 相対曲率と法曲率の二乗和に等しい。

この性質も, (7.13) に記載した曲率ベクトルの定義から直接的にわかる性質である。相対曲率ベクトルが V_m の接ベクトルであり, 法曲率ベクトルが V_m の法線ベクトルである

ので, それらベクトルは互いに直交する。絶対曲率ベクトルはそれらの合成ベクトルである。したがって, 絶対曲率は, 相対曲率と法曲率を底辺, 高さとする直角三角形の斜辺に相当するので, 性質 2 が成立する。

定理 7.3 絶対曲率を A, 法曲率を N, 絶対曲率ベクトルと法曲率ベクトルがなす角度を θ とすると, $N = A\cos\theta$ が成立する。

この性質も, 定義から即座にわかる。絶対曲率ベクトルを A^μ, 法曲率ベクトルを N^μ としたとき, $g_{\mu\nu}A^\mu N^\nu = AN\cos\theta$ が成立する。これは, リーマン幾何学における $\cos\theta$ の定義からただちに導かれる事実である。

定理 7.4 曲線 x^μ が V_n の測地線であれば, x^μ は部分空間 V_m の測地線である。

測地線の方程式は, 接線ベクトル $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ の共変微分がゼロになるという方程式である。つまり, x^μ が V_n 測地線であるということは,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = B_j{}^\mu \frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} + H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が成立するということだ。しかも, $B_j{}^\mu$ と $H_{jk}{}^\mu$ が互いに直交するベクトルであるので, 第 2 項と第 3 項は個別にゼロでなければならない。そのうち, 第 2 項がゼロになる条件は,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} = 0,$$

に書き換えることができ, それは V_m 上での測地線の方程式である。したがって, x^μ が V_n で測地線になっていれば部分空間 V_m でも測地線である。

定理 7.5 曲線 $\hat{x}^j(s)$ が V_m 上の測地線であるための必要十分条件は, 曲線 $x^\mu(s)$ の絶対曲率ベクトルが V_m に垂直であることだ。

曲線 $\hat{x}^j$ が V_m 上の測地線であるならば, $\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ の共変微分がゼロである。すなわち, (7.13) の右辺の第 1 項がゼロであるので,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s},$$

が成立しなければならない。この数式によると, 絶対曲率ベクトルに $B_j{}^\mu$ が含まれないため, 絶対曲率ベクトルが V_m に垂直になっている。したがって, 必要条件が証明された。

絶対曲率ベクトルが V_m に垂直であると仮定しよう。そのような条件のもとでは, 測地線の方程式 (7.13) の右辺の右辺の第 1 項はゼロでなければならない。右辺の第 1 項がゼロとなるには,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} = 0,$$

であるはずであり, これは $\hat{x}^j$ が V_m 上の測地線であることを意味している。ゆえに, 十分条件も証明できた。したがって, 定理 7.5 が証明できた。¶

考えてみれば, V_m における測地線の絶対曲率が V_m に垂直であるのは当然の性質である。それを満たさなければ, 曲率が V_m から観測できてしまうということだ。曲率が V_m から観測できるということは, その曲線の湾曲を V_m から認識できることを意味するので, V_m における測地線として矛盾するわけだ。

定理 7.5 からただちに, 球面上の測地線が大円コースとなることという事実に納得がいく。大円は, 3 次元空間中の平面に描かれた円であるので, $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ を s について共変微分すると, 図 7.2 に示すように, その結果は円の中心に向かうベクトルとなる。そのベクトルは円周と直交する。それは, 球面と直交することを意味する。この場合, 3 次元空間が V_n, 球面

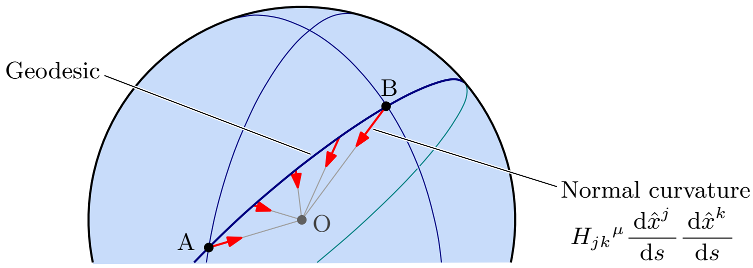


図 7.2: 大円コースの曲率ベクトル

が V_m であるので, 絶対距離率ベクトルが V_m に垂直であり, 相対曲率がゼロである。大円から少しでもはずれた経路をとると, 相対曲率をもつことになり, 曲線が曲がっていることが V_m から認識できる。そうなると, V_m において測地線ではなくなるのだ。そのように考えると, 球面における測地線は大円コース以外にあり得ない。

定理 7.6 部分空間中の曲線上の 1 点における法曲率ベクトルは, この点でこの曲線に接する部分空間の測地線の法曲率ベクトルに等しい。

法曲率ベクトル $H_{jk}{}^{\mu}(\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}\hat{x}^k/\mathrm{d}s)$ は, 曲線の方向 $\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ のみで決まるので, $\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ が同一であれば, 異なる部分空間であっても, 必ず, 等しくなる。さらに, $(\delta/\delta s)\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s = 0$ であれば,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = H_{jk}{}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s},$$

である。つまり, 絶対曲率ベクトルが法曲率ベクトルと等しくなる。その場合, 異なる部分空間であっても法曲率ベクトルが等しくなるはずだ。¶

7.2.1　平均曲率

部分空間 V_m は m 次元であるので, 互いに直交する m 個の単位ベクトルが選択できるはずだ。部分空間 V_m の座標で記述したとき, それらを $\hat{h}_{(a)}^{\,j}$ としよう。互いに直交する単位ベクトルを数式で記述すると,

$$\hat{g}_{jk} h_{(a)}^{\,j} h_{(b)}^{\,k} = \delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, \ldots, m),$$

となる。単位ベクトルは, 座標を長さ s で微分した導関数であるので, 単位ベクトル $h_{(a)}^{\,j}$ を法曲率の数式における $\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ に代入すると, 単位ベクトルが向かう方向の法曲線ベクトルが得られる。つまり, $H_{jk}{}^{\mu} h_{(a)}^{\,j} h_{(a)}^{\,k}$ が法曲率ベクトルというわけだ。その法曲率ベクトルを m 個のベクトルの方向にわたり平均値をとると,

$$\frac{1}{m} \sum_{a=1}^{m} H_{jk}{}^{\mu} \hat{h}_{(a)}^{\,j} \hat{h}_{(a)}^{\,k} = \frac{1}{m} H_{jk}{}^{\mu} g^{jk}, \tag{7.14}$$

となる。右辺を得るにあたって,

$$\sum_{a=1}^{m} \hat{h}_{(a)}^{\,j} \hat{h}_{(a)}^{\,k} = \hat{g}^{jk},$$

なる関係を利用した。この関係式は, 第 5.7.2 項で直交 n 重系を導入した際に得られた公式である。この公式は空間 V_n において導出されたのだが, 部分空間 V_m でも成立するはずだ。得られた数式 (7.14) は, 単位ベクトル $\hat{h}_{(a)}^{\,j}$ の選び方に依存せず一定値である。このベクトル $H_{jk}{}^{\mu} g^{jk}/m$ は**平均曲率ベクトル**と呼ばれる。さらに, そのベクトルの長さは**平均曲率**と呼ばれる。ここで得られた平均曲率の性質を改めて書くと, 次のようになる。

定理 7.7 部分空間上の点において, 互いに直交する m 個の方向の法曲率ベクトルを平均すると, それらの方向の選択に無関係な定ベクトルが得られる。

7.2.2　曲率線

一般に法曲率は, 曲線の方向に依存する。曲率が極値をとる方向は**主方向**と呼ばれる。主方向おける曲率, すなわち, 極値となる曲率は**主曲率**と呼ばれる。これらの用語は, 既に第 5.7.2 項で導入した用語と同一である。

特別な場合として, 超曲面 $(m = n - 1)$ を部分空間として選んだときの主方位や主曲率を説明しよう。この条件では, 特定の単位法線は 1 本しか選択できない。その法線を B^μ とすると, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは,

$$H_{jk}{}^\mu = H_{jk} B^\mu,$$

のようになる。部分空間である超曲面に接する方向 $\hat{h}^j$ に対する超曲面の法曲率 N は,

$$N = \frac{H_{jk} \hat{h}^j \hat{h}^k}{\hat{g}_{jk} \hat{h}^j \hat{h}^k},$$

で与えられる。法曲率 N が極値をとるには,

$$(H_{jk} - N g_{jk})\, \hat{h}^k = 0, \tag{7.15}$$

を満足しなければならない。とはいえ, $k = 1, 2, \ldots, m$ にわたって m 個の独立な方程式が確保できると, $\hat{h}^k = 0$ という面白くない解が得られる。そんなつまらない解は望んでいない。我々が望む解を説明するため, 方程式 (7.15) に $\hat{g}^{kl}$ を乗じて縮約すると,

$$H_{jk} \hat{g}^{kl} \hat{h}^j = N \hat{h}^l,$$

が得られる。我々が興味あるのは, この方程式で表される固有値問題の解である。法曲率 N は行列 $H_{jk}\hat{g}^{kl}$ の固有値であり, ベクトル $\hat{h}^l$ は固有値 N に対する固有ベクトルなのだ。固有値 N は, 方程式:

$$|H_{jk} \hat{g}^{kl} - N \delta_j{}^l| = 0, \tag{7.16}$$

の解であり, それが法曲率 N を与える。固有値として得られた法曲率 N は**主曲率**と呼ばれ, それに対応する固有ベクトル $\hat{h}^l$ は**主方向**と呼ばれる。その主方向を連ねて描いた曲線は**主曲線**と呼ばれる。つまり, 主曲線は主方向に曲線が延びている。

固有値問題 (7.16) の解として，すべて異なる固有値 $N_{(1)}, N_{(2)}, \ldots, N_{(n-1)}$ が存在し, それらに対応して固有ベクトル $h_{(1)}^{\ \mu}, h_{(2)}^{\ \mu}, \ldots, h_{(n-1)}^{\ \mu}$ が定まるとする。その固有ベクトルが主方位だ。このとき, 主方位 $h_{(a)}^{\ \mu}$ と $h_{(b)}^{\ \mu}$ について方程式を改めて書くと,

$$\begin{aligned}(H_{jk} - N_{(a)} \hat{g}_{jk})\, \hat{h}_{(a)}^{\ k} &= 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, n-1),\\ (H_{jk} - N_{(b)} \hat{g}_{jk})\, h_{(b)}^{\ k} &= 0 \quad (b = 1, 2, \ldots, n-1),\end{aligned}$$

が得られる。第 1 式に $\hat{h}_{(b)}^{\ j}$ を, 第 1 式に $\hat{h}_{(a)}^{\ j}$ を乗じて縮約し, 互いの差をとると,

$$(N_{(a)} - N_{(b)})\, \hat{g}_{jk} \hat{h}_{(a)}^{\ j} \hat{h}_{(b)}^{\ k} = 0,$$

が得られる。上で設けた仮定により, $a \neq b$ ならば $N_{(a)} \neq N_{(b)}$ なので, この方程式は,

$$\hat{g}_{jk} \hat{h}_{(a)}^{\ j} \hat{h}_{(b)}^{\ k} = 0, \tag{7.17}$$

のように書き換えてもよい。つまり, 主方向は $n-1$ 個だけ存在し, 互いに直交するのだ。主方向 $\hat{h}^j_{(a)}$ は超曲面に接する $n-1$ 重系を構成している。したがって, 任意の単位ベクトル $\hat{h}^j$ は, これらの主方向の 1 次結合:

$$\hat{h}^j = \hat{h}^j_{(1)} \cos\alpha_1 + \hat{h}^j_{(2)} \cos\alpha_2 + \cdots + \hat{h}^j_{(n-1)} \cos\alpha_{n-1},$$

となるはずだ。ただし, α_h $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ は, ベクトル $\hat{h}^j$ と主方向 $\hat{h}^j_{(h)}$ のなす角である。この数式を,

$$N = \frac{H_{jk}\hat{h}^j\hat{h}^k}{\hat{g}_{jk}\hat{h}^j\hat{h}^k} = H_{jk}\hat{h}^j\hat{h}^k,$$

に代入すると,

$$N = N_{(0)} \cos^2\alpha_0 + N_{(1)} \cos^2\alpha_1 + \cdots + N_{(n-2)} \cos^2\alpha_{n-2},$$

が得られる。ただし,

$$N_{(a)} = H_{jk}\hat{h}^j_{(a)}\hat{h}^k_{(a)},$$

であり, $a \neq b$ のとき $H_{jk}\hat{h}^j_{(a)}\hat{h}^k_{(b)} = 0$ となる。

一般の m 次元であっても考え方は同じである。ただし, この場合, 部分空間 V_m に垂直で互いに直交する単位ベクトル ${B_P}^\mu$ は $n-m$ 個だけ存在する。そのとき, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは,

$$H_{jk}{}^{\mu} = H_{jk\,P}{B_P}^{\mu},$$

となる。この場合に満足すべき方程式は,

$$(H_{jk\,P} - N_P\,\hat{g}_{jk})\,\hat{h}^j = 0, \tag{7.18}$$

であり, N_P は法線 ${B_P}^\mu$ に対応する**主曲率**, $\hat{h}^j$ は法線 ${B_P}^\mu$ に対応する**主方向**である。また, 主方向を連ねると**曲率線**なる曲線が形成される。したがって, 一般の V_m に関しては, 主方向や曲率線は法線 ${B_P}^\mu$ の選択に依存する。

7.2.3 漸近曲線

部分空間中の曲線が, ある点で法曲率がゼロである場合, 漸近曲線と呼ばれる。空間 V_n は対象とする点において部分空間 V_m に接する前提で議論をしている。3 次元空間の特定の点に接する曲面を考えると, 激しくうねっている面が接する場合, 法曲率が大きいと想像するとよい。法曲率がゼロに近づくということは, V_n と V_m が非常に緩やかに重なっている状態である。そのイメージは, 3 次元中の曲面だけでなく, 一般の n 次元中の部分空間に対しても成り立つと思えばよい。その意味で, 法曲率がゼロになる曲線とは, V_n と V_m が漸近する状態にあると思えばよい。

簡単な説明のため, 部分空間が超曲面である場合を取り扱おう。その場合, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは ${H_{jk}}^{\mu} = H_{jk} B^{\mu}$ なる形式で書かれる。この超曲面に接する二つのベクトルを $\hat{u}^j$, $\hat{v}^j$ とするとき,

$$H_{jk} \hat{u}^j \hat{v}^k = 0,$$

を満足するならば, $\hat{u}^j$ と $\hat{v}^j$ は超曲面上で互いに**共役な方向**をもっていると表現される。また, その方向が常に互いに共役となるような超曲面上の二つの曲線群は, **互いに共役**であると表現される。前節で取り扱った主方向 $\hat{h}_{(a)}^{\ j}$ は, その条件を満たすので, 互いに共役だということになる。

超曲面上の特定の方向 $\hat{u}^j$ が自分自身と共役なら, $\hat{u}^j$ が指定する方向は**漸近方向**と呼ばれる。自分自身と共役であるとは,

$$H_{jk} \hat{u}^j \hat{u}^k = 0,$$

を満たすことである。曲線が常に漸近方向に向かっている場合, その曲線は**漸近曲線**と呼ばれる。すなわち,

$$ {H_{jk}}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{7.19}$$

であれば, 曲線 $x^j(s)$ は漸近曲線である。漸近曲線に関する性質を紹介しよう。

定理 7.8 超曲面上の曲線が漸近曲線であるための必要十分条件は, その絶対曲率ベクトルが超曲面に接していることである。

曲線 x^j が漸近曲線なら, 漸近曲線の定義 (7.19) によると,

$$ {H_{jk}}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が成立する。その場合, 絶対曲率ベクトルは,

$$\frac{\delta}{\delta s} \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} = {B_j}^{\mu} \frac{\delta}{\delta s} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s},$$

のようになる。この状態は, 法曲率がゼロであるので, これは絶対曲率ベクトルが超平面に接していることに相当する。したがって, 必要条件は証明された。一方, 絶対曲率ベクトルが超平面に接していれば, 必然的に,

$$ {H_{jk}}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

となるので, 十分条件も成立する。¶

定理 7.9 超曲面上のある曲線が, これを包含する空間 V_n の測地線となるための必要十分条件は, その曲線が超曲面上の測地線であると同時に, 漸近曲線であることである。

必要条件を証明しよう。曲線 x^μ が V_n 上の測地線であるならば,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = B_j{}^\mu \frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} + H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が満たされるはずだ。第 1 項と第 2 項は互いに直交しているので, 個別にゼロになるはずだ。すなわち,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \text{and} \quad H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が満たされるということだ。第 1 式は曲線 $\hat{x}^j$ が超曲面上の測地線であることを意味している。第 2 式は法線曲率がゼロであるので, $\hat{x}^j$ が漸近曲線であることを意味している。すなわち, 必要条件が証明された。

続いて十分条件を証明する。曲線 $\hat{x}^j$ が超曲面上の測地線であり, かつ, 漸近曲線であるならば,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \text{and} \quad H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が満たされるはずなので, $(\delta/\delta s)(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s) = 0$ となる。したがって, 曲線 $x^\mu(s)$ は空間 V_n 上の測地線である。したがって, 十分条件も証明された。¶

上記の議論を一般の部分空間 V_m について拡張しよう。部分空間に垂直で, かつ, 互いに垂直なベクトルは $n-m$ 個だけとることが可能だ。そのような V_m に垂直なベクトルを $B_P{}^\mu$ とすれば, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは $H_{jk}{}^\mu = H_{jk\,P}B_P{}^\mu$ なる形態で書ける。ここで, $H_{jk\,P}$ は垂直なベクトル $B_P{}^\mu$ のとり方に依存する量である。とはいえ, 一般的な部分空間 V_m で漸近方向や漸近曲線を定義するには, 法線のとり方に依存せず, 超曲面における手続きに準じることが望ましい。その目的のため,

$$g_{\mu\nu}H_{jk}{}^\mu H_{ab}{}^\nu = H_{jk}{}^\mu H_{ab\,\mu},$$

なるテンソルを用い,

$$H_{jk}{}^\mu H_{ab\,\mu}\hat{u}^j\hat{v}^k\hat{u}^a\hat{v}^b = 0,$$

によって共役方向 $\hat{u}^j$ と $\hat{v}^j$ を定義することにしよう。この定義なら, 法線 $B_P{}^\mu$ のとり方と無関係であるが, $m = n-1$ であれば $H_{jk}{}^\mu = H_{jk}B^\mu$ となり,

$$H_{jk}{}^\mu H_{ab\,\mu}\hat{u}^j\hat{v}^k\hat{u}^a\hat{v}^b = H_{jk}H_{ab}\hat{u}^j\hat{v}^k\hat{u}^a\hat{v}^b = (H_{jk}\hat{u}^j\hat{v}^k)^2 = 0,$$

によって共役方向の基準が $H_{jk}\hat{u}^j\hat{v}^k = 0$ と等価になるので, 超曲面における手続きと逸脱しない。これまでと同様に, 常に互いに共役な接線をもつ二つの曲線群を**互いに共役な曲線群**, 自分自身に共役な方向を**漸近方向**, 常に漸近方向に向かう曲線を**漸近曲線**と呼んでやるのだ。漸近曲線 $\hat{x}^j(s)$ については,

$$H_{jk}{}^\mu H_{ab\,\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^a}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^b}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{7.20}$$

が成立するというわけだ。この関係式は,

$$H_{jk}{}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}=0,$$

と書いてもよい。この関係式が成立するということは, 定理 7.8 と定理 7.9 は一般の部分空間 V_m においても成立する。

7.3 全測地曲面

部分空間 V_m 上のいかなる測地線も, 空間 V_n から見たときでも測地線になっていれば, その部分空間は**全測地曲面**と呼ばれる。全測地曲面の最も簡単な例は, V_n が 3 次元のカルテシアン空間であり, V_m が 3 次元中に設定された平面である場合だ。この場合, V_m 上の測地線は平面 V_m 上の直線である。その直線は, 3 次元カルテシアン座標系でも直線なので測地線である。

一般的に, 全測地曲面の条件を探ってみよう。部分空間 V_m 上の曲線 $\hat{x}^j(s)$ が V_m 上で測地線であるならば,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}=0,$$

が成立する。これが V_n 上でも測地線であるなら,

$$B_j{}^{\mu}\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}+H_{jk}{}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}=0,$$

を満たすはずだから, V_m 上のいかなる曲線に対しても,

$$H_{jk}{}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}=0,$$

を満たさなければならない。この関係式が任意の $\hat{x}^j$ について成立するには,

$$H_{jk}{}^{\mu}=0, \tag{7.21}$$

でなければならない。このように説明した結果を性質として記述すると次のようになる。

定理 7.10 部分空間が全測地的であるための必要十分条件は $H_{jk}{}^{\mu}=0$ を満たすことである。

定理 7.11 全測地曲面は極小集合体であり, その曲率線は不定である。

ここで新たな用語「極小集合体」が登場した。その用語は後で説明する。

部分空間 V_m に接するベクトルが与えられ, それを $\hat{v}^j$ としよう。そのベクトルを空間 V_n 上のベクトルとみなせば,

$$v^\mu = B_j{}^\mu \hat{v}^j,$$

のように変換できる。部分空間 V_m を全測地曲面として, 上記ベクトルの変換則を共変微分すると,

$$\delta v^\mu = B_j{}^\mu \delta\hat{v}^j + H_{jk}{}^\mu \hat{v}^k \,\mathrm{d}\hat{x}^j = B_j{}^\mu \delta\hat{v}^j,$$

が得られる。ここで, V_m が全測地曲面であることから定理 7.10 にしたがい, $H_{jk}{}^\mu = 0$ を適用した。その結果として次の性質が得られる。

定理 7.12 全測地曲面 V_m に接するあるベクトルを, 外部空間 V_n おいて曲面に沿って平行移動すれば, 平行移動後のベクトルは依然と V_m に平行なまま曲面に接している。

部分空間 V_m 上の 1 点で主曲率方向が不定になる場合, その点は V_m の**臍点** (さいてん) と呼ばれる。主曲率方向が不定になるということは, すべての方向に対して曲率が一定となることを意味している。部分空間の接点が臍点となる条件は,

$$H_{jk}{}^\mu = \hat{g}_{jk} H^\mu, \tag{7.22}$$

が成立することだ。この数式に $\hat{g}^{jk}$ を乗じて縮約をとれば, $\hat{g}^{jk} H_{jk}{}^\mu = m H^\mu$ が得られる。その結果を改めて書くと,

$$H^\mu = \frac{1}{m} \hat{g}^{jk} H_{jk}{}^\mu, \tag{7.23}$$

となる。したがって, 臍点の条件は,

$$H_{jk}{}^\mu = \frac{1}{m} \hat{g}^{ab} H_{ab}{}^\mu g_{jk}, \tag{7.24}$$

のように書くことができる。仮に, この条件が部分空間 V_m のあらゆる点で成立するならば, その部分空間は**全臍曲面**と呼ばれる。全測地曲面は, 全臍曲面の特殊なケースである。

7.3.1 極小集合体

すでに極小集合体なる名称が出てきたので説明をしておこう。空間 V_n の中に, $m-1$ 次元の閉じた部分空間 V_{m-1} が与えられたとする。別に選ばれた m 次元の部分空間 V_m が完全に V_{m-1} を包含し, 閉じた空間 V_{m-1} によって制限された m 次元の体積が極値をとるとき, V_m は**極小集合体**と呼ばれる。

与えられた m 次元の部分空間 V_m が極小集合体であるための条件を探ってみよう。部分空間 V_m 上の点は, $x^\mu(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m)$ であるとする。部分空間 V_m の体積の一部は, V_{m-1} で制限されているとする。その制限された m 次元の体積は,

$$\iint \cdots \int_{V_m} \sqrt{\hat{g}}\, \mathrm{d}\hat{x}^1\, \mathrm{d}\hat{x}^2 \cdots \mathrm{d}\hat{x}^m,$$

で与えられる。この積分は, 形式的に部分空間 V_m における体積を算出するための m 重積分となっているが, 部分空間 V_{m-1} による体積制限が積分区間に反映されているとする。また, $\hat{g}$ は V_m における計量テンソル $\hat{g}_{jk}$ の行列式である。この計量テンソルは,

$$\hat{g}_{jk} = B_j{}^\mu B_k{}^\nu g_{\mu\nu},$$

のように空間 V_n の計量から変換される。

上記の積分が極値をもつという観点から, 変分法を利用してみよう。極値をもつことから第 1 変分がゼロであると考える。その仮定からオイラーの微分方程式を構成すると,

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial \sqrt{\hat{g}}}{\partial B_j{}^\mu} - \frac{\partial \sqrt{\hat{g}}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{7.25}$$

が得られる。この方程式を変形して, 体積が極値をとる条件を簡単な形で抽出することにしよう。数式変形にあたり, 行列式 $\hat{g}$ に関して,

$$\hat{g} = |\hat{g}_{jk}| = |B_j{}^\mu B_k{}^\nu g_{\mu\nu}|,$$

なる関係が成立することに注意すると, 偏導関数 $\partial\sqrt{\hat{g}}/\partial B_j{}^\mu$ が,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sqrt{\hat{g}}}{\partial B_j{}^\mu} &= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{g}_{ab}} \frac{\partial \hat{g}_{ab}}{\partial B_j{}^\mu} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}}\, \hat{g} g^{ab} \left(\delta_a{}^b B_j{}^\nu g_{\mu\nu} + \delta_j{}^b B_a{}^\lambda g_{\lambda\mu}\right) \\
&= \sqrt{\hat{g}}\, \hat{g}^{ja} B_a{}^\nu g_{\mu\nu} = \sqrt{\hat{g}}\, B^j{}_\mu,
\end{aligned}$$

のように計算できる。この計算結果をさらに $\hat{x}^j$ について偏微分すると, (7.25) 左辺の第 1 項が計算できる。その計算は,

$$\begin{aligned}
\text{1st term of LHS} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial \sqrt{\hat{g}}}{\partial B_j{}^\mu} &= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{g}_{ab}} \frac{\partial \hat{g}_{ab}}{\partial \hat{x}^j} B^j{}_\mu + \sqrt{\hat{g}}\, \frac{\partial B^j{}_\mu}{\partial \hat{x}^j} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}}\, \hat{g}\, \hat{g}_{ab} \left(\hat{\Gamma}^h{}_{ja} \hat{g}_{hb} + \hat{\Gamma}^h{}_{jb} \hat{g}_{ah}\right) B^j{}_\mu + \sqrt{\hat{g}}\, \frac{\partial B^j{}_\mu}{\partial \hat{x}^j} \\
&= \sqrt{\hat{g}} \left(\frac{\partial B^j{}_\mu}{\partial \hat{x}^j} + B^j{}_\mu \hat{\Gamma}^b{}_{jb} \right),
\end{aligned}$$

のように実行できる。一方, (7.25) の左辺の第 2 項は,

$$\begin{aligned}
\text{2nd term of LHS} &= \frac{\partial\sqrt{\hat{g}}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}}\,\frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{g}_{ab}}\frac{\partial \hat{g}_{ab}}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}}\,\hat{g}\,\hat{g}^{ab}B_a{}^\nu B_b{}^\lambda \frac{\partial \hat{g}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{\sqrt{\hat{g}}}{2}\hat{g}^{ab}B_a{}^\nu B_b{}^\lambda (\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\lambda}g_{\nu\alpha}) \\
&= \sqrt{\hat{g}}\,B^b{}_\alpha \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\lambda}B_b{}^\lambda,
\end{aligned}$$

のように計算される。これらの結果に基づいてオイラーの微分方程式 (7.25) の左辺を計算すると,

$$\text{LHS} = \sqrt{\hat{g}}\left(\frac{\partial B^j{}_\mu}{\partial \hat{x}^j} + B^j{}_\mu \hat{\mathit{\Gamma}}^b{}_{jb} - B^b{}_\alpha \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\lambda}B_b{}^\lambda\right) = \sqrt{\hat{g}}\,\nabla_b B^b{}_\mu,$$

のように簡単な形になる。しかも, $B^b{}_\mu$ の共変微分はオイラー・スカウテンの曲率テンソルになるので,

$$\nabla_b B^b{}_\mu = \nabla_b(\hat{g}^{bj}g_{\mu\eta}B_j{}^\eta) = \hat{g}^{bj}g_{\mu\eta}\nabla_b B_j{}^\eta = \hat{g}^{bj}g_{\mu\eta}H_{bj}{}^\eta,$$

が得られ, 結局, オイラーの微分方程式 (7.25) は,

$$\hat{g}^{ab}H_{ab}{}^\mu = 0, \tag{7.26}$$

なる数式まで簡略化された。実にシンプルだ。これが, 部分空間 V_m が極小集合体となるための条件である。したがって, 極小集合体に関する性質は以下のようになる。

定理 7.13 空間 V_n 中の部分空間 V_m が極小集合体となるための必要十分条件は, 平均曲率ベクトルがゼロであることである。

7.3.2 ワインガルテンの公式

部分空間 V_m に接する m 個のベクトル $B_j{}^\mu$ と, それらに垂直な $n-m$ 個のベクトル $B_P{}^\mu$ は, $g_{\mu\nu}B_j{}^\mu B_P{}^\nu = 0$ を満たす。この関係式を部分空間に沿って ($\hat{x}^k$ について) 共変微分するすると,

$$g_{\mu\nu}H_{jk}{}^\mu B_P{}^\nu + g_{\mu\nu}B_j{}^\mu\,\hat{\nabla}_k B_P{}^\nu = 0,$$

が得られる。ここで, $B_j{}^\mu$ の共変微分がオイラー・スカウテンの曲率テンソルであるが, 法線ベクトル $B_P{}^\nu$ の共変微分は曲率テンソルとは無関係であることに注意が必要だ。ここで, $H_{jk\,P} = g_{\mu\nu}H_{jk}{}^\mu B_P{}^\nu$ なる関係に注意しながら, 両辺に $\hat{g}^{hj}$ を乗じて縮約すると,

$$H^h{}_{k\,P} + B^h{}_\nu \hat{\nabla}_k B_P{}^\nu = 0,$$

が得られる。この数式変形では, $H^h{}_{k\,P} = g^{hk}H_{jk\,P}$ にも注意した。この数式に $B_h{}^\mu$ を乗じて縮約すれば,

$$B_h{}^\mu H^h{}_{k\,P} + B_h{}^\mu B^h{}_\nu \hat{\nabla}_k B_P{}^\nu = 0,$$

が得られるのだが, $B_h{}^\mu B^h{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - B_Q{}^\mu B_{Q\,\nu}$ なる関係に注意すれば,

$$B_h{}^\mu H^h{}_{k\,P} + (\delta^\mu{}_\nu - B_Q{}^\mu B_{Q\,\nu})\,\hat{\nabla}_k B_P{}^\nu = 0, \tag{7.27}$$

が得られる。ここで,

$$L_{kPQ} \equiv g_{\mu\nu}\,(\hat{\nabla}_k B_P{}^\mu)\,B_Q{}^\nu, \tag{7.28}$$

なるテンソルを定義すれば, (7.27) は,

$$B_h{}^\mu H^h{}_{k\,P} + \hat{\nabla}_k B_P{}^\mu - L_{k\,PQ}B_Q{}^\mu = 0,$$

のなる形で書ける。この数式は,

$$\hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = -B_h{}^\mu H^h{}_{k\,P} + L_{k\,PQ}B_Q{}^\mu, \tag{7.29}$$

なる形に書き換えるのがよい。この公式は, 微分幾何学における**ワインガルテンの公式**の拡張版である。3 次元空間における曲面を扱う微分幾何学では, ワインガルテンの公式は, (7.29) 右辺の第 2 項が存在しないはずだ。その理由は後に説明する。

部分空間 V_m の法線に関する恒等式 $g_{\mu\nu}B_P{}^\mu B_{P\,\nu} = \delta_{PQ}$ を曲面に沿って共変微分すれば,

$$g_{\mu\nu}\left[(\hat{\nabla}_j B_P{}^\mu)\,B_{P\,\nu} + B_P{}^\mu\,(\hat{\nabla}_j B_{P\,\nu})\right] = 0,$$

が得られるので, ただちに,

$$L_{j\,PQ} + L_{j\,QP} = 0, \tag{7.30}$$

であることがわかる。つまり, $L_{j\,PQ}$ は, 添え字 P と Q について交代テンソルとなる。また, $L_{j\,PQ}$ は $B_P{}^\mu$ に関する V_m の**第 3 基本テンソル**である。

特別な例として, 空間 V_m が超曲面の場合, すなわち, $m = n-1$ の場合, V_m の法線が 1 個しか存在しないので, 必然的に $L_{j\,PQ} = 0$ となる。そのとき, ワインガルテンの公式は,

$$\hat{\nabla}_k B^\mu = -B_h{}^\mu H^h{}_k, \tag{7.31}$$

となるのだ。この例は, 3 次元空間における曲面を扱う問題も包含する。したがって, 3 次元空間における曲面を扱う場合, ワインガルテンの公式は (7.31) の形態になる。すなわち, (7.29) の右辺の第 2 項が存在しない形である。

定理 7.14 全測地曲面の法線はすべて互いに平行である。

超曲面の曲率線について考えよう。曲率線を $\hat{x}^j(s)$ とする。曲率線の方向が $\hat{h}^j$ なる単位ベクトルで表されているならば, (7.15) で示したように, $(H_{jk} - N\hat{g}_{jk})\,\hat{h}^k = 0$ が成立する。この関係式に $\hat{g}^{aj}$ を乗じて縮約すれば,

$$H^a{}_k\hat{h}^k - N\hat{h}^a = 0,$$

が得られる。曲線の方向に対応する単位ベクトルは, $\hat{h}^j = \mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ であるはずだから, 得られた数式は,

$$H^a{}_k\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} - N\frac{\mathrm{d}\hat{x}^a}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{7.32}$$

と書けるはずだ。ワインガルテンの公式 (7.31) の両辺に $\mathrm{d}\hat{x}^k/\mathrm{d}s$ を内積し, (7.32) に注意すると,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}\hat{\nabla}_k B^\mu + NB_h{}^\mu\frac{\mathrm{d}\hat{x}^a}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{7.33}$$

が得られる。この数式の左辺は, 曲線に沿った単位ベクトルと, B^μ の共変微分係数の内積であるので, B^μ を曲線に沿って共変微分した導関数 $\delta B^\mu/\delta s$ である。右辺について, $B_h{}^\mu = \partial x^\mu/\partial\hat{x}^h$ に注意する。その結果, (7.33) は,

$$\frac{\delta B^\mu}{\delta s} = N\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}, \tag{7.34}$$

のような形態に書き換えられる。

7.4 リッチの公式

部分空間 V_m におけるリッチの公式の振る舞いを調べよう。リッチの公式とは, 曲がった空間で共変微分の交換則が成立しないことに起因する。リーマン・クリストッフェルの曲率テンソル $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu}$ はリッチの法則を利用して空間の湾曲具合を表現するテンソルであった。当然, 部分空間もリーマン空間なのでリッチの公式にしたがうのであるが, 本項では $B_j{}^\mu$ にリッチの公式を適用して振る舞いを調べる。

変換行列 $B_j{}^\mu$ は V_n と V_m の添え字が混在しているので, リッチの公式の振る舞いが興味深い。変換行列 $B_j{}^\mu$ について, 実際に計算をしてリッチの公式を確認しよう。部分空間 V_m での座標変換行列の共変微分係数は,

$$\hat{\nabla}_k B_j{}^\mu = \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial\hat{x}^k} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}B_k{}^\nu B_j{}^\lambda - B_h{}^\mu\hat{\mathit{\Gamma}}^h{}_{kj},$$

となる。この時点で 3 階のテンソルとなっているので, これを共変微分すると複雑な形になるが, その共変微分は,

$$\hat{\nabla}_h\hat{\nabla}_k B_j{}^\mu = \frac{\partial^2 B_j{}^\mu}{\partial\hat{x}^h\partial\hat{x}^k} + \frac{\partial\mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}B_h{}^\nu B_k{}^\alpha B_j{}^\beta + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\partial B_k{}^\alpha}{\partial\hat{x}^h}B_j{}^\beta$$

$$
\begin{aligned}
&+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}B_k{}^{\alpha}\frac{\partial B_j{}^{\beta}}{\partial \hat{x}^h}-\frac{\partial B_a{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^h}\hat{\Gamma}^a{}_{kj}-B_a{}^{\mu}\frac{\partial \hat{\Gamma}^a{}_{kj}}{\partial \hat{x}^h}\\
&+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}B_h{}^{\nu}\left(\frac{\partial B_j{}^{\eta}}{\partial \hat{x}^{\mu}}+\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta}B_k{}^{\alpha}B_j{}^{\beta}-B_a{}^{\eta}\hat{\Gamma}^a{}_{kj}\right)\\
&+\left(\frac{\partial B_k{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^a}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}B_a{}^{\alpha}B_j{}^{\beta}-B_h{}^{\mu}\hat{\Gamma}^b{}_{ak}\right)\hat{\Gamma}^a{}_{hj}\\
&+\left(\frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^a}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}B_a{}^{\alpha}B_k{}^{\beta}-B_h{}^{\mu}\hat{\Gamma}^b{}_{aj}\right)\hat{\Gamma}^a{}_{hk},
\end{aligned}
\tag{7.35}
$$

のように計算できる。この計算結果に基づき, リッチの公式を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\hat{\nabla}_h\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}-\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_h B_j{}^{\mu}\\
&\quad=\left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\nu\beta}\right)B_h{}^{\nu}B_k{}^{\alpha}B_j{}^{\beta}\\
&\qquad\quad-B_a{}^{\mu}\left(\frac{\partial \hat{\Gamma}^a{}_{kj}}{\partial \hat{x}^h}-\frac{\partial \hat{\Gamma}^a{}_{hj}}{\partial \hat{x}^k}+\hat{\Gamma}^a{}_{hb}\hat{\Gamma}^b{}_{kj}-\hat{\Gamma}^a{}_{kb}\hat{\Gamma}^b{}_{hj}\right),
\end{aligned}
$$

が得られる。得られた数式の右辺について, 二つの括弧の中は, それぞれ, 空間 V_n と部分空間 V_m におけるリーマン・クリストッフェルの曲率テンソルである。したがって,

$$
\hat{\nabla}_h\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}-\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_h B_j{}^{\mu}=R^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu}B_j{}^{\beta}B_k{}^{\alpha}B_h{}^{\nu}-B_a{}^{\mu}\hat{R}^a{}_{jkh}, \tag{7.36}
$$

なる関係が得られる。この結果に, さらに, $B^b{}_{\mu}$ を乗じて収縮すると,

$$
B^b{}_{\mu}\hat{\nabla}_h\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}-B^b{}_{\mu}\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_h B_j{}^{\mu}=R^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu}B^b{}_{\mu}B_j{}^{\beta}B_k{}^{\alpha}B_h{}^{\nu}-\hat{R}^b{}_{jkh}, \tag{7.37}
$$

が得られる。公式の形態として興味深い。右辺が二つの曲率テンソルの差になっている。一方が, V_n におけるリーマン・クリストッフェルの曲率テンソル $R^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu}$ に対して, 反変成分には $B^b{}_{\beta}$ を, 共変成分には $B_h{}^{\nu}$ のような変換行列を乗じた量である。もう一方が, V_m における曲率テンソル $\hat{R}^b{}_{jkh}$ である。

導出した法則 (7.37) はさらに簡略化できる。簡略化の鍵は, $\hat{\nabla}_h(B^b{}_{\mu}\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu})$ である。この共変微分は, 公式の通りに計算を実行すると,

$$
\hat{\nabla}_h(B^b{}_{\mu}\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu})=(\hat{\nabla}_h B^b{}_{\mu})(\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu})+B^b{}_{\mu}\hat{\nabla}_h\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}, \tag{7.38}
$$

のようになる。しかし, 左辺の被微分関数は, $B_b{}^{\mu}$ と $H_{hj}{}^{\mu}$ の直交関係 (7.11) に注意すると,

$$
B^b{}_{\mu}\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}=B^b{}_{\mu}H_{kj}{}^{\mu}=0,
$$

であることがわかる。つまり, (7.38) の左辺はゼロである。したがって,

$$
B^b{}_{\mu}\hat{\nabla}_h\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}=-(\hat{\nabla}_h B^b{}_{\mu})(\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}),
$$

であることが導かれる。この関係式を (7.37) に代入して整理すると,

$$\hat{R}^b{}_{jkh} = R^\mu{}_{\beta\alpha\nu} B^b{}_\mu B_j{}^\beta B_k{}^\alpha B_h{}^\nu + H_k{}^b{}_\mu H_{hj}{}^\mu - H_h{}^b{}_\mu H_{kj}{}^\mu, \tag{7.39}$$

なる**ガウスの方程式**が得られる。この方程式において, $\hat{R}^b{}_{jkh}$ は部分空間の**絶対曲率テンソル**, 一方, $H_k{}^b{}_\mu H_{hj}{}^\mu - H_h{}^b{}_\mu H_{kj}{}^\mu$ は**相対曲率テンソル**と呼ばれる。ガウスの定理から, 二つの性質が主張できる。

定理 7.15 局所ユークリッド空間中の全測地曲面は, やはり, 局所ユークリッド空間である。

わかりにくいかもしれないので補足しよう。この性質では, 空間 V_n が局所的にユークリッド空間になっている場所を含む。その空間の部分空間 V_m が V_n に対して全測地曲面である場合, V_m は局所的にユークリッド空間になっている, という意味だ。空間 V_n が局所ユークリッド空間なので, 対称とする場所では $R^\mu{}_{\beta\alpha\nu} = 0$ である。部分空間 V_m が全測地曲面であるので, $H_{hj}{}^\mu = 0$ が成立する。その場合, ガウスの方程式によって, 少なくとも対象とする場所では $\hat{R}^b{}_{jkh} = 0$ が成立するので, V_m は局所ユークリッド空間である。

定理 7.16 定曲率空間中の全臍曲面は, やはり, 定曲率空間である。

この性質も補足が必要だろう。空間 V_n のリーマン曲率が場所によらず一定であるとする。このとき, 部分空間 V_m は, あらゆる場所で主曲率方向が不定, すなわち, あらゆる場所が臍点となっている。そのとき, 部分空間 V_m も定曲率空間である, という意味である。リーマン曲率 k を与えると, それに対応する曲率テンソルは,

$$R_{\alpha\lambda\nu\mu} = -k\,(g_{\nu\lambda} g_{\mu\alpha} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\alpha}),$$

である。この曲率テンソルは (5.37) で定義されている。この数式の両辺に $g^{\alpha\kappa}$ を乗じて縮約すると,

$$R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu} = k\,(g_{\mu\lambda}\delta^\kappa{}_\nu - g_{\nu\lambda}\delta^\kappa{}_\mu),$$

となる。空間 V_n が定曲率空間であるので, スカラ曲率 k が定数であるということだ。部分空間 V_m が全臍曲面であるので, V_m のあらゆる場所で,

$$H_{jk}{}^\mu = 0,$$

が成立する。この条件は, (7.22) で与えられている。これらをガウスの方程式に代入すると,

$$\begin{aligned}\hat{R}^h{}_{ajk} &= k\,(g_{jk}\delta^h{}_a - g_{ak}\delta^h{}_j) + H^\lambda H_\lambda\,(g_{jk}\delta^h{}_a - g_{ak}\delta^h{}_j)\\ &= (k + H^\lambda H_\lambda)(g_{jk}\delta^h{}_a - g_{ak}\delta^h{}_j),\end{aligned}$$

が得られる。この計算結果によって, 部分空間 V_m のリーマン曲率は $k + H^\lambda H_\lambda$ となり, シューアの定理によって, その曲率が定数であることがいえる。この結果から, 次の性質も主張できる。

定理 7.17 定曲率空間中の全臍曲面の平均曲率は一定である。

この性質は, $H^\lambda H_\lambda$ が定数であることを意味する。

法線 $B_P{}^\mu$ に対して共変微分を実行してみよう。この場合, $B_P{}^\mu$ は1階の反変テンソルとみなし, 共変微分係数は,

$$\hat{\nabla}_j B_P{}^\mu = \frac{\partial B_P{}^\mu}{\partial \hat{x}^j} + \varGamma^\mu{}_{\nu\lambda} B_j{}^\nu B_P{}^\lambda,$$

のようになる。この導関数をさらに $\hat{x}^k$ について共変微分する。共変微分にあたり, $\hat{\nabla}_j B_P{}^\mu$ が1階反変成分と1階の共変成分をもつ2階の混合テンソルとみなすのだ。共変微分を実行すると,

$$\hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_j B_P{}^\mu = \frac{\partial^2 B_P{}^\mu}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} B_k{}^\alpha B_j{}^\nu B_P{}^\lambda + \varGamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{\partial B_j{}^\nu}{\partial \hat{x}^k} B_P{}^\lambda + \varGamma^\mu{}_{\nu\lambda}$$
$$+ \varGamma^\mu{}_{\alpha\beta} B_k{}^\alpha \left(\frac{\partial B_P{}^\beta}{\partial \hat{x}^j} + \varGamma^\beta{}_{\nu\lambda} B_j{}^\nu B_P{}^\lambda \right) + \left(\frac{\partial B_P{}^\mu}{\partial \hat{x}^h} + \varGamma^\mu{}_{\nu\lambda} B_h{}^\nu B_P{}^\lambda \right) \hat{\varGamma}^h{}_{kj},$$

が得られる。この結果を利用して, 共変微分における交換則の不整合を計算すると,

$$\hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_j B_P{}^\mu - \hat{\nabla}_j \hat{\nabla}_k B_P{}^\mu$$
$$= \left(\frac{\partial \varGamma^\mu{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varGamma^\mu{}_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} + \varGamma^\mu{}_{\alpha\beta} \varGamma^\beta{}_{\nu\lambda} - \varGamma^\mu{}_{\nu\beta} \varGamma^\beta{}_{\alpha\lambda} \right) B_k{}^\alpha B_j{}^\nu B_P{}^\lambda, \tag{7.40}$$

が得られる。右辺の括弧の中は空間 V_n における曲率テンソルなので, この方程式は,

$$\hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_j B_P{}^\mu - \hat{\nabla}_j \hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = R^\mu{}_{\lambda\nu\alpha} B_k{}^\alpha B_j{}^\nu B_P{}^\lambda, \tag{7.41}$$

なる形態に書き換えられる。これが部分空間 V_m の法線方向 B_P^μ に関するリッチの公式である。

法線を取り扱うならば, ワインガルテンの公式を再び取り上げるべきだろう。既に, (7.29) に公式を書いておいたが, ワインガルテンの公式は,

$$\hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = -B_a{}^\mu H^a{}_{kP} + L_{kPQ} B_Q{}^\mu,$$

のように記述される。この公式を部分空間において, $\hat{x}^h$ について共変微分すると,

$$\hat{\nabla}_h \hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = -B_a{}^\mu H^a{}_{kP} - B_Q{}^\mu H_{haQ} H^a{}_{kP} + (\hat{\nabla}_h L_{kPQ}) B_Q{}^\mu + L_{kPQ} (\hat{\nabla}_h B_Q{}^\mu),$$

が得られる。この数式に再び, ワインガルテンの公式:

$$\hat{\nabla}_h B_Q{}^\mu = -B_a{}^\mu H^a{}_{hQ} + L_{hQR} B_Q{}^\mu,$$

を代入すると,

$$\hat{\nabla}_h\hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = -B_a{}^\mu\hat{\nabla}_h H^a{}_{kP} - B_Q{}^\mu H_{haQ}H^a{}_{kP} + (\hat{\nabla}_h L_{kPQ})\,B_Q{}^\mu$$
$$+ L_{kPQ}\,(-B_a{}^\mu H^a{}_{hQ} + L_{hQR}B_Q{}^\mu),$$

が得られる。この 2 階共変微分係数をリッチの公式 (7.41) に代入すると,

$$-(\hat{\nabla}_h H^a{}_{kP} - \hat{\nabla}_k H^a{}_{hP})\,B_a{}^\mu - (H_{haQ}H^a{}_{kP} - H_{kaQ}H^a{}_{hP})\,B_Q{}^\mu$$
$$+ (\hat{\nabla}_h L_{kPQ} - \hat{\nabla}_k L_{hPQ})\,B_Q{}^\mu - (L_{kPQ}H^a{}_{hQ} - L_{hPQ}H^a{}_{kQ})\,B_a{}^\mu$$
$$+ (L_{kPQ}L_{hQR} - L_{hPQ}L_{kQR})\,B_Q{}^\mu = R^\mu{}_{\lambda\alpha\nu}B_h{}^\alpha B_k{}^\nu B_P{}^\lambda,$$

が得られる。左辺が複雑になっているように見えるが, 両辺に $B^b{}_\mu$ を乗じて μ について縮約すれば,

$$\hat{\nabla}_h H^b{}_{kP} - \hat{\nabla}_k H^a{}_{hP} - L_{kPQ}H^b{}_{hQ} + L_{hPQ}H^b{}_{kQ} = -R^\mu{}_{\lambda\alpha\nu}B_h{}^\alpha B_k{}^\nu B_P{}^\lambda B^a{}_\mu, \qquad (7.42)$$

のように項を減らすことができる。得られた方程式は**コダッチの方程式**と呼ばれる。一方, もとの数式に $B_{S\mu}$ を乗じて μ について縮約すれば, 別の項を代わりに残すことができる。計算を実行すると,

$$\hat{\nabla}_h L_{kPS} - \hat{\nabla}_k L_{hPS} + H_{kaS}H^a{}_{hP} - H_{haS}H^a{}_{kP}$$
$$+ L_{kPS}L_{hSR} - L_{hPS}L_{kSR} = R_{\eta\lambda\alpha\nu}B_h{}^\alpha B_k{}^\nu B_P{}^\lambda B_S{}^\eta, \qquad (7.43)$$

が得られる。右辺については, $B_{S\mu} = g_{\mu\eta}B_S{}^\eta$ なる関係を利用した。この方程式は**リッチの方程式**と呼ばれる。

7.5 リーマン曲率の幾何学的解釈

第 5 章において, すでにリーマン曲率 k が与えられた二つのベクトル u^μ と v^μ が張る平面に接する測地線のガウス曲率であると説明した。そのようなリーマン曲率 k は,

$$k = \frac{R_{\kappa\lambda\nu\mu}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda})\,u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa},$$

のように定義される。リーマン曲率 k が上記のスカラ曲率の性質をもつことは本章に譲り, 証明を省略していたのだった。第 7 章も最終節にきて, 証明できる材料がそろってきたのでリーマン曲率 k がスカラ曲率, しかも, ガウス曲率と一致することを証明しよう。

空間 V_n の座標系としてリーマンの標準座標を用いることにしよう。しかも, 議論の対象とする点を原点に選ぶ。このように座標を設定すると, 原点を通るすべての測地線は,

$$x^\kappa = \left(\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}s}\right)_0 s,$$

のように記述できる。なお, $(\cdots)_0$ は原点における関数値を意味する。このとき, 原点から延びる二つのベクトル u^κ と v^κ が張る平面に接するすべての測地線がつくる曲面の方程式は,

$$x^\kappa = (u^\kappa \alpha + v^\kappa \beta)\, s, \tag{7.44}$$

なる形で書かれる。ただし, α と β は任意の定数である。ここで, $\bar{x}^0 \equiv \alpha s$, $\bar{x}^1 \equiv \beta s$ のように曲面座標を定義すれば, 曲面の方程式 (7.44) は,

$$x^\kappa = u^\kappa \bar{x}^1 + v^\kappa \bar{x}^2, \tag{7.45}$$

のように書き換えられる。さらに,

$$B_j{}^\kappa \equiv \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^j} \qquad (j = 0, 1),$$

なる変換行列を定義すれば, $B_1{}^\kappa = u^\kappa$, $B_2{}^\kappa = u^\kappa$ と書ける。そのとき, 曲面上の第 1 基本テンソル $\bar{g}_{jk} = B_j{}^\mu B_k{}^\nu g_{\mu\nu}$ は,

$$\bar{g}_{11} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad \bar{g}_{12} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu, \quad \bar{g}_{22} = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu, \tag{7.46}$$

となる。続いて, オイラー・スカウテンの曲率テンソル:

$$H_{jk}{}^\mu = \bar{\nabla}_j B_k{}^\mu = \frac{\partial B_k{}^\mu}{\partial \bar{x}^j} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} B_j{}^\nu B_k{}^\lambda - B_h{}^\mu \bar{\mathit{\Gamma}}^h{}_{jk}, \tag{7.47}$$

の標準座標の原点における値を特定しよう。変換行列 $B_j{}^\mu$ が定数なので, $\partial B_k{}^\mu / \partial \bar{x}^j = 0$ である。また, 標準座標は, 原点でクリストッフェル記号がゼロ, すなわち, $(\mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda})_1 = 0$ である。したがって, (7.47) の右辺の第 1 項と第 2 項はゼロになる。そのとき, $H_{jk}{}^\mu$ は曲面の接ベクトル $B_j{}^\mu$ と平行であることになる。本来, オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{jk}{}^\mu$ は曲面に対する法線ベクトルを与えるはずなので, 平行と垂直を両立するためには, ゼロでなければならない。したがって, 標準座標系での原点において,

$$(H_{jk}{}^\mu)_0 = 0, \qquad (\bar{\mathit{\Gamma}}^h{}_{jk})_0 = 0, \tag{7.48}$$

が成立しなければならない。

ガウスの方程式を用いて曲面座標系の原点における曲率を特定しよう。ガウスの方程式は,

$$\bar{R}_{bjkh} = R_{\mu\beta\alpha\nu} B_b{}^\mu B_j{}^\beta B_k{}^\alpha B_h{}^\nu + H_{kb}{}^\mu H_{hj\mu} - H_{hb}{}^\mu H_{kj\mu},$$

なる形式で記述される。右辺の第 2 項と第 3 項が原点でゼロとなることは前段落から明らかである。すなわち, 原点では,

$$(\bar{R}_{bjkh})_0 = (R_{\mu\beta\alpha\nu})_0,$$

が成立する。ここで, 曲面空間が 2 次元であることに注意すると面白いことがわかる。既に第 5 章で計算して気づいたように, 2 次元では 16 成分ある曲率テンソル $\bar{R}_{bjkh}$ に独立成分が 1 個しか存在しないのだ。その代表値は $\bar{R}_{1212}$ とするのが適切だろう。この考察によって, 原点における曲率テンソルは,

$$(\bar{R}_{1212})_0 = (R_{\mu\beta\alpha\nu})_0\, {B_1}^\mu {B_2}^\beta {B_1}^\alpha {B_2}^\nu = (R_{\mu\beta\alpha\nu})_0\, u^\mu v^\beta u^\alpha v^\nu,$$

となる。これで証明のための材料がそろったわけだ。

曲率テンソル $\bar{R}_{1212}$ の座標変換に対する性質を調べてみよう。座標変換は, $\bar{x}'^j = \bar{x}'^j(\bar{x}^0, \bar{x}^1)$ のように 2 次元空間における座標変換である。本来, $\bar{R}_{bjkh}$ はテンソル性をもつため,

$$\bar{R}'_{ljkh} = \bar{R}_{abcd} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{x}'^l} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial \bar{x}'^j} \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial \bar{x}'^k} \frac{\partial \bar{x}^d}{\partial \bar{x}'^h},$$

なる変換則が成立する。この変換則にしたがって $\bar{R}'_{1212}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
\bar{R}'_{1212} = \bar{R}'_{ljkh} = \bar{R}_{abcd} & \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^d}{\partial \bar{x}'^2} \\
= \quad & \bar{R}_{1212} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} + \bar{R}_{0110} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \\
& + \bar{R}_{1001} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} + \bar{R}_{1010} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \\
= \bar{R}_{2121} & \left(\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} - \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \right)^2,
\end{aligned}$$

が得られる。この計算にあたり, 曲率テンソル $\bar{R}_{abcd}$ が (a, b) の組み合わせと (c, d) の組み合わせについて反対称であることに注意すれば便利である。つまり, $a = b$, または, $c = d$ となる組み合わせでは $\bar{R}_{abcd} = 0$ となるということだ。だから, 可能な (a, b, c, d) の組み合わせは 16 個あるのみ関わらず, 途中計算では 4 個しか組み合わせが現れないのだ。便宜上であるが, ここで,

$$\mathit{\Delta} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} \end{vmatrix},$$

なる行列式 (ヤコビアン) を定義すると, 曲率テンソルの変換則は,

$$\bar{R}'_{1212} = \mathit{\Delta}^2\, \bar{R}_{1212},$$

のように書ける。一方, 曲面上の計量テンソル $\bar{g}_{jk}$ の行列式 $\bar{g}$ は,

$$\begin{aligned}\bar{g} &= \bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21} \\ &= g_{\nu\lambda}u^{\nu}u^{\lambda}\, g_{\mu\kappa}v^{\mu}v^{\kappa} - g_{\nu\kappa}u^{\nu}v^{\kappa}\, g_{\mu\lambda}v^{\mu}u^{\lambda} \\ &= (g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda})\, u^{\nu}v^{\mu}u^{\lambda}v^{\kappa},\end{aligned}$$

のように計算できる。この計算において, (7.46) で明らかにした計量テンソルの要素を代入した。第 2 章で説明したように, 計量テンソルは $\sqrt{\bar{g}}\,\mathrm{d}\bar{x}^1\mathrm{d}\bar{x}^2$ で面積素の面積[2]である。その面積[3]は, 座標変換に対して, $\sqrt{\bar{g}'} = \sqrt{\bar{g}}\,|\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\bar{x}'|$ のように変換される。ここで, $|\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\bar{x}'|$ はヤコビアンであり, 先ほど定義した記号を用いると, $|\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\bar{x}'| \equiv \varDelta$ である。したがって, $\bar{g}' = \varDelta^2\,\bar{g}$ が成立する。ゆえに,

$$\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}} = \frac{R_{\nu\mu\lambda\kappa}\, u^{\nu}v^{\mu}u^{\lambda}v^{\kappa}}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda})\, u^{\nu}v^{\mu}u^{\lambda}v^{\kappa}}, \tag{7.49}$$

は座標変換に対して不変である。すなわち, リーマン曲率と定義した値 k は,

$$k = -\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}}, \tag{7.50}$$

なる値をもち, しかもスカラである。そのスカラがガウス曲率に等しくなることを次の段落以降で示そう。

リーマン曲率 $k = -\bar{R}_{1212}/\bar{g}$ の正体を調べるため, これまでの議論にしたがって具体的に計算してみよう。曲率テンソルは, (5.12) で導出した結果に基づき,

$$\begin{aligned}\bar{R}_{klhj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\bar{g}_{jk}}{\partial\bar{x}^h\,\partial\bar{x}^l} + \frac{\partial^2\bar{g}_{hl}}{\partial\bar{x}^j\,\partial\bar{x}^k} - \frac{\partial^2\bar{g}_{jl}}{\partial\bar{x}^h\,\partial\bar{x}^k} - \frac{\partial^2\bar{g}_{hk}}{\partial\bar{x}^j\,\partial\bar{x}^l}\right) \\ - \bar{\varGamma}^a{}_{jl}\bar{\varGamma}^b{}_{hk}\bar{g}_{ab} + \bar{\varGamma}^a{}_{hl}\bar{\varGamma}^b{}_{jk}\bar{g}_{ab},\end{aligned}$$

のように計算できるのだが, 既に示したように, 原点において $\bar{\varGamma}^h{}_{jk} = 0$ となるので, 曲率テンソルは,

$$\begin{aligned}\bar{R}_{1212} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\bar{g}_{11}}{\partial\bar{x}^2\,\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{g}_{22}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^1} - \frac{\partial^2\bar{g}_{21}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^2} - \frac{\partial^2\bar{g}_{12}}{\partial\bar{x}^2\,\partial\bar{x}^1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\bar{g}_{11}}{\partial\bar{x}^2\,\partial\bar{x}^2} - \frac{\partial^2\bar{g}_{21}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\bar{g}_{22}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^1},\end{aligned}$$

となる。その結果, リーマン曲率は,

$$k = -\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}} = \frac{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2\bar{g}_{11}}{\partial\bar{x}^2\,\partial\bar{x}^2} - \dfrac{\partial^2\bar{g}_{21}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2\bar{g}_{22}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^1}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}}, \tag{7.51}$$

[2]本来のように n 次元空間を取り扱うのであれば, n 次元の超体積素の体積に相当する。
[3]先ほどと同様, 本来は n 次元の体積に相当する。

であることが特定できた。

上の計算に対抗し, 計量テンソル $\bar{g}_{jk}$ で指定される曲面のガウス曲率を, 微分幾何学の公式にしたがって算出しよう。計量 $\bar{g}_{jk}$ から直接, ガウス曲率を計算できる公式がブリオキ (Brioschi) によって提案[4] されている。ブリオキの公式によると,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^1} & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1} & \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^2} & \bar{g}_{12} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2} & \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1} & \bar{g}_{12} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix},$$

なる二つの行列を定義すると, ガウス曲率 K は,

$$K = \frac{\det A - \det B}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}},$$

で計算できる。ここで, det は行列式を与える演算子とする。我々が想定している座標系は, 原点で $\bar{\Gamma}^h{}_{jk} = 0$ となるのだから, 計量テンソルの 1 階の導関数はゼロである。しかし, 2 階の導関数はゼロとは限らない。そのように考えると, 行列 A と B は簡略化され, それらの行列式は,

$$\begin{aligned} \det A &= \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^1} \right) \left(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21} \right), \\ \det B &= 0, \end{aligned}$$

のように計算できる。したがって, ガウス曲率は,

$$K = -\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^1}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}},$$

となり, (7.51) に示したリーマン曲率 k と一致した。よって, リーマン曲率は, 指定した二つのベクトルによって張られる平面に接する測地線のガウス曲率に等しい。¶

[4]Shlomo Sternberg, "Curvature in Mathematics and Physics," Dover Publications Inc., ISBN-13: 978-0-486-47855-5, p. 40, 2012.