第6章　リーマン標準座標

人類が長い間, 地球が丸いことに気づかなかったように, 曲がった空間にいる観測者は, 局所的な観測では, 空間の湾曲に気づかない。その事実は, 数学では次のように表現される。空間が曲がっていても, 注目する点の近傍でユークリッド空間に近似できる座標系が選択可能である。どんなに空間が曲がっていても, 狭い範囲では, カルテシアン座標のような平坦な空間の座標系で位置を表してもよいということだ。近似的に適用できる平坦な座標系のうち, 測地線を基準にして座標軸が選ばれた系は測地座標系と呼ばれる。本章では, 測地座標系を介して, 曲がった空間の曲がり具合について考察する。

6.1　測地線の級数展開

既に学んだように, 非ユークリッド空間中の 2 点を結ぶ最短経路は測地線と呼ばれる。この 2 点が互いに近くに存在するとき, 測地線は一意的に決まる。また, ある点 x_0^κ を通り, その接線ベクトルが ξ^κ によって指定される測地線は 1 本しか存在しない。測地線に沿った経路の長さを s としたとき, 測地線は方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{6.1}$$

を満たす。この方程式は, n 個の未知数を含む 2 階の微分方程式である。測地線の始点 x_0^κ と, 始点における接線方向の単位ベクトル:

$$\xi^\kappa \equiv \left(\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}s}\right)_0,$$

が与えられると, 測地線は一意的に決まる。ここで, $(\cdots)_0$ は点 x_0^κ における値を表す。その測地線をテイラー展開によって特定してみよう。すなわち, 測地線 x^κ は,

$$x^\kappa = x_0^\kappa + \left(\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}s}\right)_0 s + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2 x^\kappa}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3 x^\kappa}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 s^3 + \cdots$$

なる形で表されるはずである。測地線の方程式と始点 x_0^κ における条件から, x^κ の s についての導関数を得れば, テイラー級数の展開係数を決定することができる。まず, 1 階の導

関数は ξ^κ である。測地線の方程式 (6.1) から 2 階の導関数は,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 = -\left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 = -\left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\right)_0\xi^\mu\xi^\lambda,$$

である。さらに, この式の両辺を s について微分すれば,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}^3x^\kappa}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 &= -\left(\frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 \\
&= -\left(\frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 \\
&= -\left(\frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - 2\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\Gamma^\kappa{}_{\alpha\lambda}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 \\
&= -\left[\left(\frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)_0 - 2\left(\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\right)_0\left(\Gamma^\kappa{}_{\alpha\lambda}\right)_0\right]\xi^\nu\xi^\mu\xi^\lambda,
\end{aligned}$$

のように 3 階の導関数も得ることができる。これらの導関数を用いて測地線のテイラー級数を 3 次まで展開すれば,

$$\begin{aligned}
x^\kappa(s) = x_0^\kappa + \xi^\kappa s &- \frac{1}{2!}\left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\right)_0\xi^\mu\xi^\lambda s^2 \\
&- \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)_0 - 2\left(\Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}\right)_0\left(\Gamma^\kappa{}_{\alpha\lambda}\right)_0\right]\xi^\nu\xi^\mu\xi^\lambda s^3 - \cdots
\end{aligned} \tag{6.2}$$

が得られる。

6.2　測地座標系

非ユークリッド空間において, クリストッフェル記号 $\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}$ は空間が曲がっていることに起因する量であるが, その量は座標の選び方によって局所的にゼロにすることができる。そのような座標系は**測地座標系**と呼ばれる。

一例として, 球面における測地座標系について考えよう。半径 R の球面における座標 $[\theta,\varphi]$ を考え, $x^1\equiv\theta$, $x^2\equiv\varphi$ のような対応関係を与えると, 明示的にゼロにならないクリストッフェル記号は,

$$\Gamma^1{}_{22} = \sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \cot\theta,$$

である。ここで, θ は天頂角, φ は方位角である。この数式から容易にわかるように, $\theta=\pi/2$ においてクリストッフェル記号のすべての成分がゼロになる。つまり, 天頂角 θ と方位角 φ で表現される球面上の座標系は, 赤道上 $(\theta=\pi/2)$ で測地座標系になっている。その事

実は, 赤道と経線が互いに直交する測地線であるので, 局所的に 2 次元のカルテシアン座標系として取り扱えることから理解できるだろう。それに対して, 赤道以外の緯線は経線と直交するが, 測地線ではない。つまり, 赤道以外の緯線は球面上の直線とはみなせないため, クリストッフェル記号がゼロにならない。しかし, その位置が赤道になるように北極点を選びなおせばクリストッフェル記号を確実にゼロにできる。それが測地座標系を作るための座標の選び方の例である。

一般的な座標系において, 測地座標系をつくるための座標変換を考えよう。ある特定の場所 x_0^μ においてクリストッフェル記号がゼロとなるような座標変換を考えるのである。そのような座標変換の候補として,

$$\bar{x}^\kappa = (x^\kappa - x_0^\kappa) - \frac{1}{2}(\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda})_0\,(x^\mu - x_0^\mu)(x^\lambda - x_0^\lambda), \tag{6.3}$$

なる変換によって, x^κ から $\bar{x}^\kappa$ に変換する場合を考える。この新しい座標におけるクリストッフェル記号 $\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}$ は,

$$\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta}\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta},$$

にしたがって変換される。この変換式は, $\bar{x}^\kappa$ 系の原点, すなわち, $x^\kappa = x_0^\kappa$ について書き直せば, 形式的に,

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 (\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta})_0 = \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\right)_0 \left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta}\right)_0 \left(\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}\right)_0, \tag{6.4}$$

となる。座標変換 (6.3) を微分すれば,

$$\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha} = \delta^\kappa{}_\alpha, \qquad \frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} = (\Gamma^\kappa{}_{\gamma\beta})_0,$$

となることから, クリストッフェル記号の座標変換 (6.4) は

$$(\Gamma^\kappa{}_{\gamma\beta})_0 = \delta^\mu{}_\gamma \delta^\lambda{}_\beta (\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda})_0 + (\Gamma^\kappa{}_{\gamma\beta})_0 = (\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\gamma\beta})_0 + (\Gamma^\kappa{}_{\gamma\beta})_0,$$

のように変形される。この方程式から $(\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\gamma\beta})_0 = 0$ が導かれるので, 新しい座標系 $\bar{x}^\kappa$ の原点においてクリストッフェル記号がゼロになることが示された。また, クリストッフェル記号がゼロとなる点 x_0^κ は, 測地座標系の**極**と呼ばれる。紛らわしい名称であるが, 地球が球面であれば, 赤道が測地座標系の極である。北極と南極は測地座標系の極ではない。

このような測地座標系は, 一意的ではなく, 無数に選ぶことができる。上で述べた球面座標において, 任意の点を赤道上に設定する座標変換が無数に存在することからわかる。例えば, (6.3) の代わりに,

$$\begin{aligned}\bar{x}^\kappa = A\,(x^\kappa - x_0^\kappa) &+ \frac{B}{2}(\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda})_0\,(x^\mu - x_0^\mu)(x^\lambda - x_0^\lambda) \\ &+ P^\kappa_{(3)}(x^0 - x_0^0, x^1 - x_0^1, \ldots, x^{n-1} - x_0^{n-1}),\end{aligned}$$

なる変換を適用しても, $(\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\gamma\beta})_0 = 0$ となる。 ただし, A と B は定数, $P^{\kappa}_{(3)}$ は $x^{\mu} - x^{\mu}_0$ に関する 3 次以上の多項式である。また, 次節で紹介するリーマン標準座標も測地座標系の一種である。

6.3　リーマン標準座標

非ユークリッド空間中の点 x^{κ}_0 を通り, その場所における接線方向の単位ベクトル ξ^{κ} となる測地線 x^{κ} は, テイラー級数 (6.2) で計算できる。ここで, $\bar{x}^{\kappa} \equiv \xi^{\kappa}\, s$ なる記号を用いて (6.2) を書き直すと,

$$x^{\kappa} = x^{\kappa}_0 + \bar{x}^{\kappa} - \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)_0 \bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda} - \cdots \tag{6.5}$$

が得られる。この測地線の座標の式には, 接線ベクトル ξ^{κ} や測地線の長さ s は見かけ上, 消去され, あたかも x^{κ} と $\bar{x}^{\kappa}$ の座標変換のように見える。その事実を利用して, 新しい座標 $\bar{x}^{\kappa}$ の性質を調べてみよう。座標変換 (6.5) を $\bar{x}^{\kappa}$ について解くと,

$$\bar{x}^{\kappa} = x^{\kappa} - x^{\kappa}_0 + P^{\kappa}(x^1 - x^1_0, x^2 - x^2_0, \ldots, x^n - x^n_0), \tag{6.6}$$

となるはずである。ここで, 右辺の第 3 項は $x^{\mu} - x^{\mu}_0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ の 2 次以上の項からなるべき級数である。この新しい座標 $\bar{x}^{\kappa}$ は, x^{κ}_0 $(\bar{x}^{\kappa} = 0)$ を通る測地線上にとられた座標であり,

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^{\kappa}}{\partial x^{\mu}}\right)_0 = \delta^{\kappa}{}_{\mu},$$

なる関係がある。この新しい座標系 $\bar{x}^{\kappa}$ は, x^{κ}_0 を原点とする**リーマン標準座標**と呼ばれる。リーマン標準座標においても, 当然, 測地線の座標は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 \bar{x}^{\kappa}}{\mathrm{d}s^2} + \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^{\mu}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\bar{x}^{\lambda}}{\mathrm{d}s} = 0,$$

なる測地線の方程式が成立するはずである。座標 $\bar{x}^{\kappa} \equiv \xi^{\kappa}\, s$ が測地線の方程式の解の一つであるので, これを測地線の方程式に代入すると, $\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\xi^{\mu}\xi^{\lambda} = 0$ を得る。この結果に, 測地線の長さの自乗 s^2 を乗じると,

$$\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda} = 0, \tag{6.7}$$

が得られる。つまり, 座標系 $\bar{x}^{\kappa}$ は, いたる場所で関係式 (6.7) が成り立つ。この事実をリーマン標準座標の定義とする。言い換えると, 座標系 $\bar{x}^{\kappa}$ がリーマン標準座標であることの必要十分条件は, $\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda} = 0$ が空間のいたる場所で成り立つことである。

標準座標系 $\bar{x}^{\kappa}$ の原点 $\bar{x}^{\kappa}_0$ $(\,=0)$ において, ベクトル ξ^{κ} に接する測地線は,

$$\bar{x}^{\kappa} = \xi^{\kappa}s - \frac{1}{2}(\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda})_0\,\xi^{\mu}\xi^{\lambda}s^2 - \cdots$$

のように級数展開される。しかし, 標準座標系は $\bar{x}^\kappa=\xi^\kappa s$ となるように選ばれた座標系である。よって, 標準座標では $(\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda})_0\xi^\mu\xi^\lambda=0$ なる関係が成立する。この関係が任意のベクトル ξ^μ について成立すること, および, $\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}$ が添え字 μ と λ について対称であることより, $(\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda})_0=0$ であることがわかる。つまり, x_0^κ を原点とするリーマン標準座標は, x_0^κ を極とする測地座標の一種である。

リーマン標準座標系 $\bar{x}^\kappa$ は座標系 x^κ に対して定めた座標系である。別の座標系 x'^κ から定めたリーマン標準座標系を $\bar{x}'^\kappa$ としたとき, これらの標準座標の関係を調べてみよう。まず, $\bar{x}^\kappa$ 系と $\bar{x}'^\kappa$ 系における測地線の接線ベクトルを, それぞれ, ξ^κ, ξ'^κ とすると, $\bar{x}^\kappa=\xi^\kappa s$, $\bar{x}'^\kappa=\xi'^\kappa s$ と書かれるはずである。ところが, ξ^κ は, 原点 x_0^κ で定義される反変ベクトルであるので,

$$\xi'^\kappa=\left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0\xi^\alpha,$$

のように変換される。この式の両辺に s を乗じると,

$$\bar{x}'^\kappa=\left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0\bar{x}^\alpha, \tag{6.8}$$

なる関係が得られる。つまり, リーマン標準座標系 $\bar{x}^\kappa$ と $\bar{x}'^\kappa$ は互いに, 1 次変換で結び付けられる。

6.4 偏導関数のテンソル性

一般に, テンソルを座標について偏微分した量はテンソルにならない。しかし, リーマン標準座標系の原点では, テンソルの偏微分がテンソルになる。この特殊な関係は, 非ユークリッド空間の特徴を学ぶ上で有効な情報となるので, リーマン標準座標系の原点における導関数のテンソル性について調べてみる。

例として, 一般の座標系 x^κ において定義された 2 階の反変テンソル $T^{\mu\lambda}$ について考えよう。このテンソルを標準座標系 $\bar{x}^\nu$ に座標変換したテンソルを $\bar{T}^{\mu\lambda}$ とする。このとき, $\bar{T}^{\mu\lambda}$ を $\bar{x}^\nu$ で偏微分した量 $\partial\bar{T}^{\mu\lambda}/\partial\bar{x}^\nu$ は $\bar{x}^\kappa=0$ において, テンソルの性質をもつ。その性質は, 以下のように証明することができる。

一般の座標系におけるテンソル $T^{\mu\lambda}$ とリーマン標準座標系におけるテンソル $\bar{T}^{\mu\lambda}$ の間には,

$$\bar{T}^{\mu\lambda}=\frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta},$$

なる関係が成立する。また, 前節で学んだように, 異なるリーマン標準座標への変換は,

$$\bar{x}'^\kappa=\left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0\bar{x}^\alpha,$$

のような 1 次変換となるので, 異なる標準座標の間でのテンソルの変換は,

$$\bar{T}'^{\mu\lambda} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)_0 \left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)_0 \bar{T}^{\alpha\beta},$$

となる。この式の両辺を $\bar{x}'^{\nu}$ で偏微分すると,

$$\frac{\partial \bar{T}'^{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}'^{\nu}} = \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}}\right)_0 \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right)_0 \left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)_0 \frac{\partial \bar{T}^{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}},$$

となる。つまり, $\bar{x}^{\kappa} = 0$ では,

$$\left(\frac{\partial \bar{T}'^{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}'^{\nu}}\right)_0 = \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \bar{T}^{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\right)_0, \tag{6.9}$$

となるので, $(\partial \bar{T}^{\mu\lambda}/\partial \bar{x}^{\mu})_0$ がテンソルであることを意味している。¶

リーマン標準座標系の原点におけるテンソルの偏導関数 $(\partial \bar{T}^{\mu\lambda}/\partial \bar{x}^{\nu})_0$ は, それをもとの座標系 x^{κ} の点 x_0^{κ} における量に変換された偏導関数 $(\partial T^{\mu\lambda}/\partial x^{\nu})_0$ と等しい。それは, 次のようにして証明される。まず, 偏導関数 $(\partial T^{\mu\lambda}/\partial x^{\nu})_0$ は

$$\left(\frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{T}^{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\right)_0,$$

なる変換則にしたがうのだが,

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}}\right)_0 = \delta^{\gamma}{}_{\nu}, \qquad \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\right)_0 = \delta^{\mu}{}_{\alpha},$$

であることに注意すると,

$$\left(\frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{T}^{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}}\right)_0, \tag{6.10}$$

なる関係が得られる。このように, 一例として 2 階のテンソルの 1 階偏導関数が点 x_0^{κ} においてテンソルとしての性質をもつことを示したが, 任意のテンソル $\bar{T}^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}$ の m 階の偏導関数も, リーマン標準座標系の原点ではテンソルとしての性質をもつ。それを形式的に書くと,

$$\left(\frac{\partial^m \bar{T}'^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial \bar{x}'^{\nu_1}\cdots\partial \bar{x}'^{\nu_m}}\right)_0 = \left(\frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\gamma_t}}{\partial x'^{\nu_t}}\cdot\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\alpha_r}}\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial x'^{\lambda_s}}\cdot\frac{\partial^m \bar{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}}{\partial \bar{x}^{\gamma_1}\cdots\partial \bar{x}^{\gamma_m}}\right)_0, \tag{6.11}$$

を示す。しかも, この m 階の偏導関数は, もとの座標系 x^{κ} における量に変換しても, 点 x_0^{κ} では値が変化しない。つまり,

$$\left(\frac{\partial^m \bar{T}^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}\cdots\partial \bar{x}^{\nu_m}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^m T^{\mu_1\cdots\mu_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial x^{\nu_1}\cdots\partial x^{\nu_m}}\right)_0, \tag{6.12}$$

が成立する。このように, テンソルの種類や偏導関数の階数に関係なく, リーマン標準座標系の原点では, テンソルの偏導関数がテンソルの性質をもつ。リーマン標準座標系の原点ではクリストッフェル記号がゼロであるので, その場所における 1 階の偏導関数は共変微分と一致する。しかし, 2 階以上の偏導関数は共変微分とは一致しないことに注意しておく。なぜなら, 偏微分の演算子 $\partial/\partial x^\mu$ と $\partial/\partial x^\nu$ は可換であるが, 共変微分の演算子 ∇_μ と ∇_ν は非可換であるからである。

6.5　標準テンソル

クリストッフェル記号は一般にテンソルではないが, リーマン標準座標系の原点ではテンソルとして振舞う。そのため, クリストッフェル記号のリーマン標準座標系の原点における量を標準テンソルと呼ぶ。

座標系 x^κ から生成したリーマン標準座標 $\bar{x}^\kappa$ におけるクリストッフェル記号を $\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\lambda}$, また, 座標系 x'^κ から生成したリーマン標準座標 $\bar{x}'^\kappa$ におけるクリストッフェル記号を $\bar{\Gamma}'^\kappa{}_{\mu\lambda}$ とする。通常の座標変換に基づくと, このクリストッフェル記号は,

$$\bar{\Gamma}'^\kappa{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial \bar{x}'^\kappa}{\partial \bar{x}^\alpha}\left(\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial \bar{x}'^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial \bar{x}'^\lambda}\bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial \bar{x}'^\mu \partial \bar{x}'^\lambda}\right),$$

なる変換にしたがう。ここで,

$$\bar{x}'^\kappa = \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \bar{x}^\alpha, \qquad \bar{x}^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\kappa}\right)_0 \bar{x}'^\kappa,$$

なる関係に注意すると,

$$\bar{\Gamma}'^\kappa{}_{\mu\lambda} = \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\right)_0 \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}\right)_0 \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma},$$

なる性質が導かれる。つまり, クリストッフェル記号は, リーマン標準座標系の原点で 3 階のテンソルとして振る舞う。さらに, この式の両辺を $\bar{x}'^\nu$ で偏微分すると,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}'^\kappa{}_{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}'^\nu} = \left(\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\nu}\right)_0 \left(\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\right)_0 \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}\right)_0 \frac{\partial \bar{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial \bar{x}^\eta},$$

となる。すなわち, 偏導関数 $\partial \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}/\partial \bar{x}^\nu$ はリーマン標準座標系の原点にあたる点 x_0^κ でテンソルとして振る舞う。同様に, クリストッフェル記号の高階の導関数も点 x_0^κ でテンソルとして振る舞う。リーマン標準座標系の原点におけるクリストッフェル記号は**標準テンソル**と呼ばれる。

リーマン標準座標系では, クリストッフェル記号の偏微分に関する添え字の巡回に対称性がある。リーマン標準座標系のいたる場所で成立する関係 (6.7) を $\bar{x}^\nu$ について偏微分

すると,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}+\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}\bar{x}^{\lambda}+\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\nu}\bar{x}^{\mu}=0,$$

となる。この式の両辺に $\bar{x}^{\nu}$ を乗じて, 添え字 ν について縮約し, (6.7) の関係に注意すれば,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}\bar{x}^{\nu}=0,$$

なる関係式が得られる。当然, 左辺の $\bar{x}^{\mu}$, $\bar{x}^{\lambda}$, $\bar{x}^{\nu}$ の順序を入れ替えても値は変化しないはずなので,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}\bar{x}^{\nu}=\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\bar{x}^{\nu}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}=\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\bar{x}^{\lambda}\bar{x}^{\nu}\bar{x}^{\mu}=0,$$

が成立する。また, 総和をとるために変化させる添え字は別の文字で書いても意味が変わらないので, この数式は

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}\bar{x}^{\nu}=\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}\bar{x}^{\nu}=\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}\bar{x}^{\nu}=0,$$

と書いてもよい。ここで, この数式の左から 3 つの辺を加算すると,

$$\left(\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}\bar{x}^{\nu}=0,$$

が得られる。この関係式は任意の $\bar{x}^{\mu}$ について成立するはずだから, 必然的に,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}}+\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\mu}}{\partial \bar{x}^{\lambda}}+\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\lambda\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}}=0, \tag{6.13}$$

なる添え字の巡回に関する対称性がクリストッフェル記号の偏導関数について成立しなければならない。

6.6　計量テンソルのテイラー展開

本節では, 計量テンソル $\bar{g}_{\mu\nu}$ をテイラー級数展開してみよう。後に示すように, その展開係数に曲率テンソルが現れ, その事実から, リッチテンソルが空間の湾曲による体積歪みを与える量であることが導かれる。

計量テンソルは, 空間座標に依存しており, それが微分可能な関数であれば, テイラー級数で記述することができる。リーマン標準座標の原点 x_0^{κ} を中心に, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ をテイラー級数展開すると,

$$\bar{g}_{\mu\nu}=(\bar{g}_{\mu\nu})_0+\left(\frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}}\right)_0\bar{x}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}\partial \bar{x}^{\beta}}\right)_0\bar{x}^{\alpha}\bar{x}^{\beta}+\cdots \tag{6.14}$$

なる形で書くことができる。それでは, 計量テンソル $\bar{g}_{\mu\nu}$ を 2 次の項までテイラー展開してみよう。まず, 1 次の展開係数はゼロである。なぜなら,

$$\frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} = \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\alpha\mu} g_{\kappa\nu} + \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\alpha\nu} g_{\mu\kappa},$$

なる関係が成立するため, クリストッフェル記号がゼロとなる原点では計量テンソルの 1 階微分がゼロとなるからである。

一方, 2 次の展開係数は曲率テンソルが関係している。リーマン標準座標系の原点では, 曲率テンソル $\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ は, その定義式からクリストッフェル記号を含む項が消え,

$$\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} = \frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}},$$

と書くことができる。曲率テンソル $\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ に, 添え字 λ と μ を交換した $\bar{R}^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda}$ を加算すると,

$$\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} + \bar{R}^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}} + \frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\lambda\mu}}{\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\mu}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} = -3\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}},$$

なる関係が得られる。この関係を導出するには, (6.13) の関係を用いた。よって,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}} = -\frac{1}{3}(\bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} + \bar{R}^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda}), \tag{6.15}$$

と書き直すことができる。また, この式の左辺を展開すると,

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}} = \frac{\partial \bar{g}^{\kappa\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\nu\lambda} \bar{g}_{\kappa\alpha} + \frac{1}{2}\bar{g}^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\nu\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\lambda}} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{\lambda\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\alpha}}\right),$$

となるが, 計量テンソルの微分には,

$$\frac{\partial \bar{g}^{\kappa\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} = -(\bar{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\beta}\bar{g}^{\beta\alpha} + \bar{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\beta}\bar{g}^{\alpha\beta}),$$

なる関係があるため, 原点において第 1 項はゼロになる。さらに, (6.13) の両辺に $\bar{g}_{\kappa\sigma}$ を乗じて添え字 κ について縮約すると,

$$-\frac{1}{3}(\bar{R}_{\sigma\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\sigma\mu\nu\lambda}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\nu\sigma}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\lambda}} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{\lambda\sigma}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\nu}} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\nu\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\sigma}}\right),$$

を得る。この関係式に, 添え字 σ と ν を交換した式:

$$-\frac{1}{3}(\bar{R}_{\nu\lambda\sigma\mu} + \bar{R}_{\nu\mu\sigma\lambda}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\sigma\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\lambda}} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{\lambda\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\sigma}} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\sigma\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\nu}}\right),$$

を加算し, 曲率テンソルの対称性に注意すれば,

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\nu}}{\partial \bar{x}^{\mu}\partial \bar{x}^{\lambda}} = \frac{1}{3}(\bar{R}_{\kappa\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\kappa\nu\mu\lambda}), \tag{6.16}$$

が得られる。さらに, (6.16) と, その添え字 μ と ν を交換した式の差を, 曲率テンソルの対称性に注意して計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\nu}}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\lambda} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\mu}}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\lambda} &= -\frac{1}{3}(2\bar{R}_{\kappa\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\kappa\mu\nu\lambda} - \bar{R}_{\kappa\nu\mu\lambda}) \\ &= -\frac{1}{3}(2\bar{R}_{\kappa\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\kappa\mu\nu\lambda} + \bar{R}_{\kappa\lambda\nu\mu} + \bar{R}_{\kappa\mu\lambda\nu}) = -\bar{R}_{\nu\mu\kappa\lambda},\end{aligned}$$

が得られる。これを改めて書き直すと,

$$\bar{R}_{\nu\mu\kappa\lambda} = \frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\mu}}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\lambda} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\kappa\nu}}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\lambda}, \tag{6.17}$$

なる関係式が得られる。計量テンソルの 2 階微分 (6.16) をテイラー級数 (6.14) に代入すると, 計量テンソルの 2 次展開は,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = (\bar{g}_{\mu\nu})_0 - \frac{1}{3}(\bar{R}_{\mu\alpha\nu\beta})_0\, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta, \tag{6.18}$$

のように書かれることがわかる。この式が,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = (\bar{g}_{\mu\nu})_0 \left[\delta^\kappa{}_\nu - \frac{1}{3}(\bar{R}^\kappa{}_{\alpha\nu\beta})_0\, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta\right],$$

のように書けることに注目し, 原点の近傍座標 $\bar{x}^\alpha$ の 2 次近似として, 計量テンソル $\bar{g}_{\mu\nu}$ の行列式 $\bar{g}$ は,

$$\bar{g} \simeq (\bar{g})_0 \left[1 - \frac{1}{3}(\bar{R}_{\alpha\beta})_0\, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta\right], \tag{6.19}$$

のように書くことができる。ここで, $(\bar{g})_0$ はリーマン標準座標の原点における計量テンソル $\bar{g}_{\mu\nu}$ の行列式である。さらに, n 次元空間における体積素は, 座標 $\bar{x}^\alpha$ についての 2 次近似として,

$$\sqrt{\bar{g}}\, \mathrm{d}\bar{x}^0 \mathrm{d}\bar{x}^1 \cdots \mathrm{d}\bar{x}^{n-1} \simeq \sqrt{(\bar{g})_0}\, \left[1 - \frac{1}{6}(\bar{R}_{\alpha\beta})_0\, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta\right] \mathrm{d}\bar{x}^0 \mathrm{d}\bar{x}^1 \cdots \mathrm{d}\bar{x}^{n-1}, \tag{6.20}$$

のように, リッチテンソル $\bar{R}_{\alpha\beta}$ を含む形で記述できることになる。空間がユークリッド空間であれば, リッチテンソルがゼロとなるので, リッチテンソルは, 空間の湾曲による体積歪みを与える量であると考えることができる。