

第5章 曲率テンソル

前章で共変微分を取り扱い、それをを用いてベクトルの平行移動の概念を曲がった空間でも取り扱えるように拡張した。その記述において、ユークリッド空間との相違点がクリストッフエル記号に現れることがわかった。リーマン幾何学におけるベクトルの平行移動は、測地線に沿って、測地線となす角を不変に保つ移動である。測地線が湾曲している場合、平行移動によってベクトルは徐々に向きを変える。しかも、ベクトル向きの変化は、平行移動でとる経路によって異なる。それこそが空間が曲がっていることの尺度となる。

5.1 曲率テンソル

曲がった空間では、たどった経路に依存して平行移動したベクトルの向きが変化する。向きの変化が経路に依存することが、空間が曲がっている性質を反映する。その理由で、平行移動したベクトルの向き変化の経路依存を占めるパラメータとして、曲率テンソルを導入する。後に示すように、曲率テンソルは共変微分の交換則の不整合と関係している。

前章で示したように、微小変位を与えたときのベクトル v^k の変化量は、共変微分 $\nabla_\mu v^k$ によって表現される。測地線に沿った移動、すなわち、平行移動に関して、共変微分はゼロとなる。しかし、曲がった空間では平行移動によってベクトルが変化しないわけではない。共変微分が、

$$\nabla_\mu v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^\mu} + \Gamma^k_{\mu\lambda} v^\lambda,$$

で表されるため、 $\nabla_\mu v^k = 0$ であっても、 $\Gamma^k_{\mu\lambda}$ がゼロでないため、 $\partial v^k / \partial x^\mu$ がゼロにならないのだ。したがって、曲がった空間では平行移動しても、クリストッフエル記号の影響でベクトルの向きが変化するのである。共変微分の公式に基づき、測地線に沿って ($\nabla_\mu v^k = 0$ の条件で)、 dx^μ の微小変位を与えたときのベクトルの変化を計算すると、

$$dv^k = -\Gamma^k_{\mu\lambda} v^\lambda dx^\mu,$$

となる。クリストッフエル記号がテンソルでないので、このベクトルの変化量もテンソルではない。しかも、ベクトルの変化量は移動させた経路に依存する。

経路依存の影響を調べるため、共変微分の交換関係 $\nabla_\nu \nabla_\mu v^k - \nabla_\mu \nabla_\nu v^k$ を評価してみよ

う。この交換関係を調べる動機は次のようなことである。共変微分を2階重ねると、単純に座標成分での2階微分の項と、クリストッフェル記号を含む項が現れる。共変微分の順序を逆にして互いに差をとると、単純な2階微分は可換であるので互いに相殺し、クリストッフェル記号を含む項のみが抽出される。平行移動の際にベクトルの向きを変えるのはクリストッフェル記号による効果なので好都合というわけだ。

共変微分 $\nabla_\mu v^\kappa$ をさらに x^ν で偏微分してみよう。共変微分 $\nabla_\mu v^\kappa$ が2階の混合テンソルであることに注意し、前節で導出した共変微分の公式を用いれば、

$$\begin{aligned}\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa &= \frac{\partial \nabla_\mu v^\kappa}{\partial x^\nu} + \Gamma^\kappa_{\nu\alpha} \nabla_\mu v^\alpha - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \nabla_\alpha v^\kappa \\ &= \frac{\partial^2 v^\kappa}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} v^\lambda - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\kappa_{\nu\alpha} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} v^\lambda \right) - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} v^\lambda,\end{aligned}$$

が計算できる。この結果に対して添え字 ν と μ を入れ替えて差を計算すると、

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa = \left(\frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\kappa_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \right) v^\lambda,$$

が得られる。ベクトル成分を単純に座標成分で偏微分しただけの項は相殺してくれた。この量は一般にゼロとはならないので、共変微分は可換ではない。それがユークリッド空間との違いである。ここで、

$$R^\kappa_{\lambda\nu\mu} = \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\kappa_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}, \quad (5.1)$$

なる量を定義すると、共変微分の交換関係は、

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa = R^\kappa_{\lambda\nu\mu} v^\lambda, \quad (5.2)$$

と書くことができる。この式の右辺は2つのテンソルの差であるのでテンソルである。さらに、 v^λ が反変ベクトルであるので、 $R^\kappa_{\lambda\nu\mu}$ はテンソルであると結論できる。そのテンソル $R^\kappa_{\lambda\nu\mu}$ はリーマン・クリストッフェルのテンソル、または、**曲率テンソル**と呼ばれる。

共変微分の交換関係は共変ベクトル v_λ についても計算することができる。反変ベクトルに対する共変微分の交換関係 (5.2) を計算したときと同じ手順によって、

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = -R^\kappa_{\lambda\nu\mu} v_\kappa, \quad (5.3)$$

が得られる。この結果に注意すると、任意の混合テンソルに対する共変微分の交換関係を拡張することができる。例えば、テンソル $T_{\sigma\lambda}^\kappa$ に対して共変微分の交換関係を拡張すると、

$$\nabla_\nu \nabla_\mu T_{\sigma\lambda}^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu T_{\sigma\lambda}^\kappa = R^\kappa_{\alpha\nu\mu} T_{\sigma\lambda}^\alpha - R^\alpha_{\lambda\nu\mu} T_{\alpha\lambda}^\kappa - R^\alpha_{\lambda\nu\mu} T_{\sigma\alpha}^\kappa,$$

のようになる。さらに、一般的な混合テンソルに対して交換関係を拡張すると、

$$\begin{aligned} & \nabla_\nu \nabla_\mu T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} - \nabla_\nu \nabla_\mu T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} \\ &= \sum_{i=1}^r R^{\kappa_i}_{\alpha\nu\mu} T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s}^{k_1 k_2 \dots \alpha \dots k_r} - \sum_{i=1}^s R^\alpha_{\lambda_i \nu \mu} T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \alpha \dots \lambda_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

のような関係になるはずである。この交換関係はリッチの公式と呼ばれる。

5.2 曲率テンソルの幾何学的意味

本節では、曲率テンソルの幾何学的な意味を探ってみよう。曲率テンソルの定義式 (5.1) の後半にあるクリストッフェル記号の積和に注意すれば何か見えてくるかもしれない。ベクトルの平行移動の公式によると、 $\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}$ は、ベクトル ξ^λ を x^μ 方向に平行移動したときに、空間の曲がりやが原因でベクトルに生じる変化量の x^α 成分を与える。ということは、 $\Gamma^\kappa_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}$ はベクトル ξ^λ を x^μ 方向に平行移動して、さらに x^ν 方向に平行移動したとき、ベクトルに生じる 2 次の変化量の x^κ 成分に関係した量であろう。曲率テンソル $R^\kappa_{\lambda\nu\mu}$ には、さらに、 $-\Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}$ なる項が含まれている。それは、先ほどの平行移動の順序 (x^ν 方向と x^μ 方向) を入れ替えたときのベクトルに生じる 2 次の変化量を減じているわけである。推測してみると、曲率テンソル $R^\kappa_{\lambda\nu\mu}$ は、 x^ν と x^μ の座標軸で囲まれた周回経路に沿って元の位置に戻るまでベクトルを平行移動したときに生じるベクトルの変化量と関係しているよう思える。

本節での結論としては、上記の推測どおり、曲率テンソルはベクトルを周回経路に沿って平行移動し、もとの位置に戻ってきたとき、ベクトルが最初の状態から変化している量と関係している。例えば、取り扱っている n 次元空間に任意の曲面を設定し、その曲面上の位置を座標 (u, v) で表すとする。図 5.1 に示すように、任意のベクトル ξ^κ を Δu と Δv の微小偏移で囲まれる周回経路に沿って平行移動し、もとの位置に戻ってきたとき、ベクトルが $\tilde{\xi}^\kappa$ に変化しているとする。変化後のベクトル $\tilde{\xi}^\kappa$ は、

$$\tilde{\xi}^\kappa = \xi^\kappa + R^\kappa_{\lambda\nu\mu} \xi^\lambda \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \Delta v, \quad (5.5)$$

なる数式で表される。つまり、周回経路を平行移動したベクトルが変化する量は曲率テンソルの依存し、また、大きな面積を囲む周回経路に沿った平行移動をすると、ベクトルの変化量が大きくなるのがこの数式からわかる。本節では、そのような曲率テンソルの性質を導出する。

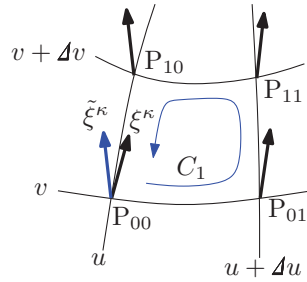


図 5.1: 周回経路に沿ったベクトルの平行移動によるベクトルの変化

5.2.1 周回経路に沿ったベクトルの平行移動

曲がった空間でベクトルを平行移動したとき、ユークリッド空間とは異なり、ベクトルが変化することは既に学んだとおりである。とはいえ、周回経路に沿ってベクトルを平行移動し、もとの位置に戻ったとき、そのベクトルが最初の状態から変化しているという事実は理解しがたいかもしれない。ここでは、具体的なイメージをつかむため極端な例を用いてみよう。

地球上でベクトルを平行移動する場合を考えよう。大きすぎて想像できないのであれば、地球儀やボールを用いても構わない。図 5.2 のように点 P が、経度 0 度の赤道にありとす。まず、真北を向くベクトルを点 P に配置する。このベクトルを、赤道に沿って東経 90 度まで平行移動してみる。東経 90 度の赤道上来たとき、ベクトルはやはり真北を向いている。そのベクトルをさらに、子午線に沿って北極点まで平行移動させる。北極点に到着したとき、そのベクトルは西経 90 度の方角を向いているはずだ。

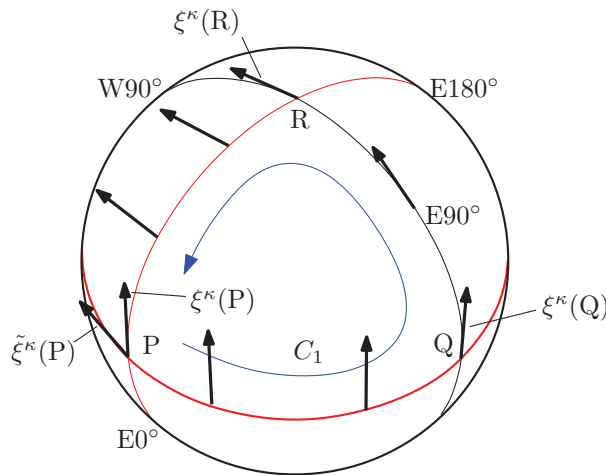


図 5.2: 球面における異なる経路とベクトルの平行移動

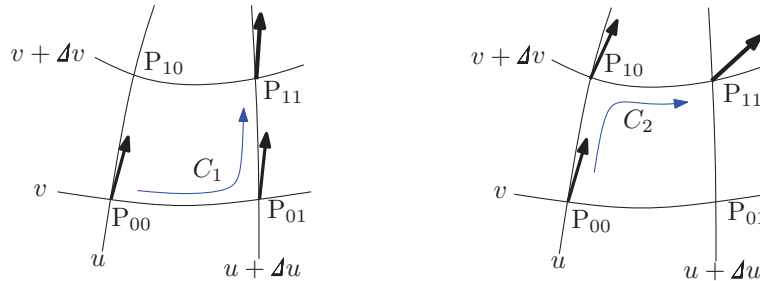
さて、北極点まで移動したベクトルを経度 0 度の子午線に沿って赤道まで平行移動させ。平行移動の間、ベクトルは西を向いている。赤道に到達した場所は経度 0 度の赤道上、

つまり、最初の場所に戻ってきたわけだ。しかし、当初、北を向いていたベクトルは、周回経路を平行移動した結果、西を向いている。つまり、周回経路に沿って平行移動した結果、ベクトルの向きが90度も回転したということである。

このような奇妙な結果は、取り扱う空間が曲がっていることに起因する。つまり、周回経路に沿って平行移動したときのベクトルの変化量を空間の曲がり具合を表す量として使えそうである。以降の節では、曲率テンソルが周回経路におけるベクトルの平行移動と関係した量であることを示す。

5.2.2 一次近似による検証

曲率テンソルが、周回経路におけるベクトルの平行移動と関係していることを検証してみよう。曲がった空間に任意の曲面を配置し、その曲面上の周回経路に沿ってベクトル ξ^κ を平行移動した場合を考える。その曲面上の位置は座標 (u, v) によって記述できる。これら新しい座標 u と v はともに x^1, x^2, \dots, x^n の関数である。まず、図 5.3 のように、座標軸 $u, u + \Delta u, v, v + \Delta v$ の交点に4つの点 $P_{00}, P_{01}, P_{11}, P_{10}$ を配置する。まず、点 P_{00} に任意のベクトル ξ^κ を置き、そのベクトルを点 P_{01} を経由して点 P_{11} に至る経路 C_1 と、点 P_{10} を経由して点 P_{11} に至る経路 C_2 に沿って平行移動した結果を比較してみよう。



(a) Translation of a vector along the path C_1 . (b) Translation of a vector along the path C_2 .

図 5.3: 曲がった空間における微小な平行移動

まず、点 P_{00} から P_{01} へ、ベクトル ξ^κ を平行移動してみる。それには前章で導出した平行移動の公式をそのまま使うことができ、平行移動した結果は、

$$\xi^\kappa(P_{01}) = \xi^\kappa - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \xi^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u,$$

となる。ここで、簡単のため $\xi^\kappa \equiv \xi^\kappa(P_{00})$ と記述した。この平行移動結果に対して、再び平行移動の公式を適用した量:

$$\xi^\kappa(P_{11}; C_1) = \xi^\kappa(P_{01}) - \Gamma^\kappa_{\alpha\lambda}(P_{01}) \xi^\lambda \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} \Delta v,$$

はベクトル $\xi^\kappa(P_{01})$ をさらに点 R まで平行移動したときの結果を表す。言い換えると、ベクトル ξ^λ を経路 C_1 で平行移動した結果である。ここで、点 P_{01} におけるクリストッフエル記号が、

$$\Gamma^\kappa_{\alpha\lambda}(P_{01}) = \Gamma^\kappa_{\alpha\lambda} + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u,$$

なる 1 次近似で書けることから、点 P_{11} まで平行移動されたベクトルは、

$$\begin{aligned} \xi^\kappa(P_{11}; C_1) &= \xi^\kappa - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \xi^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \\ &\quad - \left(\Gamma^\kappa_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \right) \left(\xi^\alpha - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \xi^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \right) \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta v \\ &= \xi^\kappa + \left(\Gamma^\kappa_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta u \Delta v \\ &\quad - \left(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \xi^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} \xi^\lambda \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta v \right) \\ &\quad + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} \xi^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\lambda}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta u^2 \Delta v, \end{aligned}$$

のように計算される。ただし、右辺の最終項が 3 次の微小変化であるため無視できるので、平行移動の結果は、

$$\begin{aligned} \xi^\kappa(P_{11}; C_1) &= \xi^\kappa + \left(\Gamma^\kappa_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta u \Delta v \\ &\quad - \left(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \xi^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} \xi^\lambda \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta v \right), \end{aligned}$$

のように近似できる。経路 C_2 にそった平行移動に関しても同様の手順を踏んで計算してもよいのだが、上式の u と v を入れ替えれば、 $\xi^\kappa(P_{11}; C_2)$ になると気づけば、面倒な計算は不要である。念のため、 $\xi^\kappa(P_{11}; C_2)$ の計算結果を書いておくと、

$$\begin{aligned} \xi^\kappa(P_{11}; C_2) &= \xi^\kappa + \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \Delta u \Delta v \\ &\quad - \left(\Gamma^\kappa_{\nu\lambda} \xi^\lambda \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta v + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \xi^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \right), \end{aligned}$$

である。よって、両者の差をとると、

$$\begin{aligned} &\xi^\kappa(P_{11}; C_1) - \xi^\kappa(P_{11}; C_2) \\ &= \left(\Gamma^\kappa_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta u \Delta v \\ &= R^\kappa_{\alpha\nu\mu} \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

が得られる。このように始点と終点が共通であっても、異なる経路 C_1 と C_2 に沿ったベクトル平行移動は、異なる結果となり、それらの差を計算すると曲率テンソルが現れる。このような説明が、よくテキストに書かれている。しかし、曲率テンソルは周回経路に沿った平行移動に関する量だと述べていたのだが、この状況設定とどのように結びつくのだろうか。

前段落で生じた疑問点は、次のように説明できるかもかもしれない。ベクトル $\xi^\kappa(P_{11}; C_2)$ は ξ^κ を経路 C_2 に沿って平行移動した結果であるが、逆に考えると、 $\xi^\kappa(P_{11}; C_2)$ を、 P_{11} から C_2 を逆にたどって P_{00} まで平行移動すると ξ^κ になると考えることができる。さらに、ベクトル $\xi^\kappa(P_{11}; C_1)$ は、 $\xi^\kappa(P_{11}; C_2)$ を $P_{11} \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{00} \rightarrow P_{01} \rightarrow P_{11}$ の順に平行移動した結果と考えることができる。よって、上記の計算結果は、周回経路に沿ってベクトルを平行移動したときの変化量と同じである。

上記の説明は、正しいような気もするが、素直に周回経路を一周させず、上記の理屈を使っているところがなんとなく怪しい。ためしに上記の計算過程を $P_{11} \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{00} \rightarrow P_{01} \rightarrow P_{11}$ の順にたどって平行移動してみると結果は、

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^\kappa = & a^\kappa + \left(\Gamma^\kappa_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta u \Delta v \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \right) a^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u^2 \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \right) a^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial v} \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \Delta v^2,\end{aligned}$$

となり、曲率テンソル以外の項が残ってしまうのである。二次の微小変化 Δu^2 と Δv^2 が無視できればよいのであるが、それなら、やはり 2 次の微小変化である $\Delta u \Delta v$ が無視できないのはおかしいといった具体に、うまい結果が出ないのである。実は、上の検証方法は多少インチキなのである。素直に周回経路に沿った平行移動を評価するのではなく、異なる経路 C_1 と C_2 に沿った平行移動の差を計算しているのは、周回経路に沿った平行移動では Δu^2 も Δv^2 の項を解決できないことをごまかすためである。次の節では、このようなごまかしをせず、曲率テンソルが周回経路に沿ったベクトルの平行移動に関する量であることを説明する。

5.2.3 二次近似による検証

前節の計算を周回経路に沿ったベクトルの平行移動に適用したときに、二次の微小変化は Δu^2 と Δv^2 が余分に含まれていたことには理由がある。それは、ベクトル ξ^κ を Δu だけ

平行移動した結果を,

$$\xi^\kappa(u + \Delta u, v) \approx \xi^\kappa - \Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u,$$

のように1次近似で書いていたことが理由である。既に結果を示しているので予想できるだろうが、計算過程には2次の微小変化までが必要である。つまり、平行移動の公式も2次近似しておくべきである。ベクトルの平行移動の公式には2次の項が存在しないわけではない。書いていなかっただけなのだ。だから経路を周回したとき、結果がおかしくなっていたわけである。ベクトル ξ^κ を Δu だけ平行移動した結果を2次近似として書くと、

$$\begin{aligned} \xi^\kappa(u + \Delta u, v) &= \xi^\kappa - \Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u^2, \end{aligned}$$

となる。この近似式は後で証明することとして、周回経路に沿ってベクトル ξ^κ を平行移動してみよう。まず、 $\xi^\kappa(P_{01})$ は上記の2次近似の公式をそのまま適用し、

$$\begin{aligned} \xi^\kappa(P_{01}) &= \xi^\kappa - \Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u^2, \end{aligned}$$

となる。この結果に対して、さらに、平行移動の2次近似の公式を適用すると $\xi^\kappa(P_{11})$ を得ることができる。近似の次数とともに無視できない項が増加したので、数式が長くなるが、具体的に書くと、

$$\begin{aligned} \xi^\kappa(P_{11}) &= \xi^\kappa(P_{01}) - \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}(P_{01}) \xi^\alpha(P_{01}) \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta}(P_{01}) \Gamma^\beta_{\lambda\alpha}(P_{01}) - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\alpha(P_{01}) \frac{\partial x^\lambda}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u^2 \\ &= \xi^\kappa - \left(\Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u + \Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \Delta v \right) \xi^\alpha \\ &\quad + \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \Delta u \Delta v \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\alpha \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u^2 + \frac{\partial x^\lambda}{\partial v} \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \Delta v^2 \right), \end{aligned}$$

のように計算される。ここで、クリストッフエル記号は、

$$\Gamma^\kappa_{\mu\alpha}(P_{01}) = \Gamma^\kappa_{\mu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \xi^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u,$$

なる1次近似を適用した。クリストッフェル記号についても2次近似まで必要な気がするが、実際に計算すればわかるように、2次の項は ξ^κ の変化に対して3次以上の項にしか寄与しないので1次近似で十分である。同様に計算を進めると、 $\xi^\kappa(P_{10})$ は、

$$\begin{aligned}\xi^\kappa(P_{10}) &= \xi^\kappa - \Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \Delta v \\ &\quad + \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial v} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \Delta u \Delta v \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial v} \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \Delta v^2,\end{aligned}$$

となる。さらにベクトルを平行移動し、点 P_{00} まで戻ってきたときの結果を初期状態 ξ^κ と区別するため、 $\tilde{\xi}^\kappa(P_{00})$ と書くことにすると、

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^\kappa &= \xi^\kappa + \left(\Gamma^\kappa_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta u \Delta v \\ &= \xi^\kappa + R^\kappa_{\alpha\nu\mu} \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} \Delta u \Delta v,\end{aligned}$$

となる。これで先ほどの疑問は解消した。確かに、微小な周回経路に沿った平行移動でベクトルは変化し、その変化量は曲率テンソルと関係があることがわかった。

先ほど後回しにした2次近似の証明であるが、結局はテイラー級数展開である。平行移動の1次近似式より、ベクトル ξ^κ の1階微分は、

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial u} = -\Gamma^\kappa_{\mu\alpha} \xi^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial u},$$

と書くことができる。これをさらに、 u で偏微分すると、

$$\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial u^2} = \left(\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\alpha \frac{\partial x^\lambda}{\partial u} \frac{\partial x^\mu}{\partial u},$$

となる。これらの偏微分導関数を用いて、 ξ^κ を Δu について展開してやると上で述べた2次近似式が得られる。◀

5.3 曲率テンソルの性質

曲率テンソル $R^\kappa_{\lambda\nu\mu}$ は4階のテンソルであり、その要素数も多い。扱う次元が n 次元であれば、曲率テンソルの成分数は n^4 である。例えば、一般相対性理論の場合、 $n=4$ であるので成分数は256個となる。とはいえ、曲率テンソルの成分には対称性があるため、独立な成分はそれよりもかなり少ない。具体的には、曲率テンソル $R^\kappa_{\lambda\nu\mu}$ には、

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = -R^\kappa_{\lambda\nu\mu}, \quad (5.6)$$

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} + R^{\kappa}{}_{\nu\lambda\mu} + R^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda} = 0, \quad (5.7)$$

の関係が成立する。これらの関係は曲率テンソルの定義式(5.1)から容易に導かれる。特に、(5.7)は**ビアンキの第1恒等式**と呼ばれる。曲率テンソルにはさらに対称性があるが、 $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ のような混合テンソルの形態では対称性が見えにくい。そのかわり、次の段落で定義するような共変テンソルの形態にすると、さらに対称性が見えてくる。

曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}$ に計量テンソル $g_{\alpha\kappa}$ を乗じて α について縮約をとった量 $R_{\kappa\lambda\nu\mu} \equiv g_{\alpha\kappa} R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}$ は**共変曲率テンソル**と呼ばれる。共変曲率テンソルにも曲率テンソルと同様に、添え字の間に対称性、反対称性がある。それらの性質を列挙すれば、

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -R_{\lambda\kappa\nu\mu}, \quad (5.8)$$

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -R_{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad (5.9)$$

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R_{\nu\mu\kappa\lambda}, \quad (5.10)$$

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} + R_{\kappa\mu\lambda\nu} + R_{\kappa\nu\mu\lambda} = 0, \quad (5.11)$$

が成立する。結局、これらの対称性があるので曲率テンソルの独立成分は n^4 よりもずっと小さな数になる。独立成分の数については、本節の最後で考えることとして、その前に、共変曲率テンソルの対称性を証明しておこう。

まず、(5.8)は計量テンソル $g_{\lambda\kappa}$ に対して共変微分の交換関係を計算すれば検証できる。リッチの公式を用いれば、 $g_{\lambda\kappa}$ に対する共変微分の交換関係は、

$$\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}g_{\lambda\kappa} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}g_{\lambda\kappa} = -R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}g_{\alpha\kappa} - R^{\alpha}{}_{\kappa\nu\mu}g_{\lambda\alpha},$$

となる。前章で示したように計量テンソルの共変微分がゼロであるのでこの式は恒等的にゼロとなる。よって、 $R^{\alpha}{}_{\lambda\nu\mu}g_{\alpha\kappa} = -R^{\alpha}{}_{\kappa\nu\mu}g_{\lambda\alpha}$ となり、その結果、(5.8)が得られる。また、 $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ が ν と μ について反対称であることから、(5.9)も明らかである。さらに、(5.7)に $g_{\kappa\alpha}$ を乗じて κ について縮約をとれば、(5.11)が成立することもわかる。

残りの性質(5.10)は、共変曲率テンソル $R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$ を具体的に計算すれば導出できる。定義にしたがって計算すると、共変曲率テンソルは、

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\nu\mu} &= \left(\frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda} \right) g_{\alpha\kappa} \\ &= \frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}} \\ &\quad + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\lambda}g_{\alpha\kappa} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda}g_{\alpha\kappa} \\ &= \frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\left(\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}g_{\beta\kappa} + \Gamma^{\beta}{}_{\nu\kappa}g_{\alpha\beta}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \left(\Gamma^\beta_{\mu\alpha} g_{\beta\kappa} + \Gamma^\beta_{\nu\kappa} g_{\alpha\beta} \right) + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\mu} \\
= & \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} g_{\alpha\kappa}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\beta_{\nu\kappa} g_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\beta_{\mu\kappa} g_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

のように展開される。この式の右辺の第1項と第2項に、

$$\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} g_{\alpha\kappa} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa} \right),$$

なる公式を適用すると、

$$\begin{aligned}
R_{\kappa\lambda\nu\mu} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \right) \\
& - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\beta_{\nu\kappa} g_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\beta_{\mu\kappa} g_{\alpha\beta}, \quad (5.12)
\end{aligned}$$

となるので (5.10) が導かれる。◻

それでは、共変曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ の独立成分の数について考察してみよう。ここで、取り扱う空間の次元は n 次元であるとする。まず、(5.8) のように κ と λ について反対称であるため、 $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ が独立となる (κ, λ) の組み合わせは $n(n-1)/2$ 通りである。また、 $\kappa = \lambda$ となる成分 ($R_{11\nu\mu}$, $R_{22\nu\mu}$, $R_{33\nu\mu}$, ...) はゼロである。もう一方、(5.9) のように ν と μ についても反対称であるので、 $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ が独立となる (ν, μ) の組み合わせも $n(n-1)/2$ 通りである。やはり、 $\nu = \mu$ となる成分 ($R_{\kappa\lambda 11}$, $R_{\kappa\lambda 22}$, $R_{\kappa\lambda 33}$, ...) もゼロである。

共変曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ は、(5.10) のように、 (κ, λ) と (ν, μ) に対して対称である。上で考察したように、 (κ, λ) も、 (ν, μ) もそれぞれ、 $n(n-1)/2$ 通りの組み合わせをとるので、 $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ が独立となる $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ の組み合わせの数は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \left[\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right] = \frac{1}{8} n(n-1)(n^2 - n + 2),$$

となる。算出された組み合わせは、次数 n が十分に大きいとき、 n^4 と比べると8分の1になっているので、対称性によって共変曲率テンソルの独立成分の数がかなり少なくなっていることがわかる。しかし、まだそれだけではない。添え字の巡回に関する性質 (5.11) による従属成分を除外しなければならない。

添え字の巡回に関する性質 (5.11) は、添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ のどれか2つ以上が同じ数値である場合、既に述べた対称性に含まれる。具体的には、 $\kappa = \lambda$ の場合と、 $\kappa = \nu$ の場合、(5.11) は (5.10) を考慮すると、(5.8) と同一である。一方、 $\kappa = \nu$, $\kappa = \mu$, $\lambda = \nu$, $\lambda = \mu$ のどれかの場合、(5.11) は (5.10) を考慮すると、(5.9) と同一である。さらに、添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ のどれか3つ以上が同じ数値である場合、それに対応する成分 $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ はゼロとなる。つまり、まだ考慮されていない対称性は、添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ がすべて異なる数値である場合である。

添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ がすべて異なる場合について, $(\kappa, \lambda, \nu, \mu) = (1, 2, 3, 4)$ の場合を例にして考えてみよう。これらの添え字を任意に並べ替えると,

$$\begin{aligned} &(1, 2, 3, 4) \quad (1, 2, 4, 3) \quad (1, 3, 2, 4) \quad (1, 3, 4, 2) \quad (1, 4, 2, 3) \quad (1, 4, 3, 2) \\ &(2, 1, 3, 4) \quad (2, 1, 4, 3) \quad (2, 3, 1, 4) \quad (2, 3, 4, 1) \quad (2, 4, 1, 3) \quad (2, 4, 3, 1) \\ &(3, 1, 2, 4) \quad (3, 1, 4, 2) \quad (3, 2, 1, 4) \quad (3, 2, 4, 1) \quad (3, 4, 1, 2) \quad (3, 4, 2, 1) \\ &(4, 1, 2, 3) \quad (4, 1, 3, 2) \quad (4, 2, 1, 3) \quad (4, 2, 3, 1) \quad (4, 3, 1, 2) \quad (4, 3, 2, 1) \end{aligned}$$

のように 24 通りの組み合わせが可能である。しかし, これらのうちのほとんどは独立ではなく, 基本的な組み合わせから κ と λ の交換, ν と μ の交換, または, (κ, λ) と (ν, μ) の交換によって実現できてしまう。その基本的な組み合わせとは,

$$(1, 2, 3, 4) \quad (1, 3, 4, 2) \quad (1, 4, 2, 3)$$

の 3 通りだけである。つまり, R_{1234} の添え字を並べ替えて得られる 24 通りの組み合わせのうち, 基本的な組み合わせは 3 通りしかない。したがって, 上記の 24 通りのうちの独立成分は 3 個と言いたいところであるが, ここで条件 (5.11) を考慮に入れる。ここでの基本的な組み合わせは,

$$R_{1234} + R_{1342} + R_{1423} = 0,$$

という形で (5.11) が適用される組み合わせである。つまり, 独立成分の数は 2 個である。添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ がすべて異なる他の場合もまったく同じように, 条件 (5.11) を考慮に入れると, 独立成分が 1 つずつ減少する。添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ がすべて異なる組み合わせは, n 個の整数から任意の 4 つの整数を選択する組み合わせなので, $n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$ 通り存在する。よって, 共変曲率テンソルの独立成分の数は,

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{1}{12}n^2(n^2-1),$$

となる。次元 n が大きい場合には, 独立成分の数は n^4 の 12 分の 1 になっている。相対性理論における時空は $n = 4$ であるので, その場合, 256 個の成分のうち独立成分はわずか 20 個である。相対性理論で議論される 4 次元時空における曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ のうち, 独立成分は図 5.4 に示す網掛けの部分だけである。曲率テンソルは四つの添え字 $(\kappa, \lambda, \nu, \mu)$ をもつので, 紙面でテンソル成分を描くため, 工夫をしている。図は, 4×4 の行列を 4×4 の配列に並べている。大きな行列の行と列は, それぞれ, κ と λ に対応し, 内部の小行列の行と列は, それぞれ, ν と μ に対応する。曲率テンソルの成分の対称性を示すため, 独立成分には A_1 から A_{21} のように番号を付けておいた。実際の独立成分は, A_1 から A_{20} までの 20 個であり, 図に示すように, $A_{21} = -(A_6 + A_{10})$ である。また, 確実にゼロである成分は淡色表示してある。確実にゼロなる成分は 256 成分中の 112 成分を占めるのだ。この図から改めてわかるように, 曲率テンソルは形式的な成分のうち 10% 未満しか有効な情報が含まれていない密度が薄いテンソルである。

	→ λ															
	→ μ				→ μ				→ μ				→ μ			
	0	0	0	0	0	A ₁	A ₂	A ₃	0	A ₂	A ₇	A ₈	0	A ₃	A ₈	A ₁₂
	0	0	0	0	-A ₁	0	A ₄	A ₅	-A ₂	0	A ₉	A ₁₀	-A ₃	0	A ₂₁	A ₁₃
	0	0	0	0	-A ₂	-A ₄	0	A ₆	-A ₇	-A ₉	0	A ₁₁	-A ₈	-A ₂₁	0	A ₁₄
	0	0	0	0	-A ₃	-A ₅	-A ₆	0	-A ₈	-A ₁₀	-A ₁₁	0	-A ₁₂	-A ₁₃	-A ₁₄	0
↓ v	0	-A ₁	-A ₂	-A ₃	0	0	0	0	0	A ₄	A ₉	A ₂₁	0	A ₅	A ₁₀	A ₁₃
	A ₁	0	-A ₄	-A ₅	0	0	0	0	-A ₄	0	A ₁₅	A ₁₆	-A ₅	0	A ₁₆	A ₁₇
	A ₂	A ₄	0	-A ₆	0	0	0	0	-A ₉	-A ₁₅	0	A ₁₈	-A ₁₀	-A ₁₆	0	A ₁₉
↓ v	A ₃	A ₅	A ₆	0	0	0	0	0	-A ₂₁	-A ₁₆	-A ₁₈	0	-A ₁₃	-A ₁₇	-A ₁₉	0
	0	-A ₂	-A ₇	-A ₈	0	-A ₄	-A ₉	-A ₂₁	0	0	0	0	0	A ₆	A ₁₁	A ₁₄
	A ₂	0	-A ₉	-A ₁₀	A ₄	0	-A ₁₅	-A ₁₆	0	0	0	0	-A ₆	0	A ₁₈	A ₁₉
	A ₇	A ₉	0	-A ₁₁	A ₉	A ₁₅	0	-A ₁₈	0	0	0	0	-A ₁₁	-A ₁₈	0	A ₂₀
↓ v	A ₈	A ₁₀	A ₁₁	0	A ₂₁	A ₁₆	A ₁₈	0	0	0	0	0	-A ₁₄	-A ₁₉	-A ₂₀	0
	0	-A ₃	-A ₈	-A ₁₂	0	-A ₅	-A ₁₀	-A ₁₃	0	-A ₆	-A ₁₁	-A ₁₄	0	0	0	0
	A ₃	0	-A ₂₁	-A ₁₃	A ₅	0	-A ₁₆	-A ₁₇	A ₆	0	-A ₁₈	-A ₁₉	0	0	0	0
↓ v	A ₈	A ₂₁	0	-A ₁₄	A ₁₀	A ₁₆	0	-A ₁₉	A ₁₁	A ₁₈	0	-A ₂₀	0	0	0	0
	A ₁₂	A ₁₃	A ₁₄	0	A ₁₃	A ₁₇	A ₁₉	0	A ₁₄	A ₁₉	A ₂₀	0	0	0	0	0

$A_{21} = -(A_6 + A_{10})$

図 5.4: 曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ の独立成分

5.4 リッチテンソル

前節で考察したように、曲率テンソルは成分数と比較すると情報が少ないテンソルである。言い換えると、無駄が多いテンソルである。そこで、曲率テンソル $R^{\kappa\lambda\nu\mu}$ の添え字に関して $\kappa = \nu$ として縮約し、無駄が少ないテンソルを定義しよう。新たなテンソルを、

$$R_{\lambda\mu} = R^{\kappa\lambda\kappa\mu}, \quad (5.13)$$

によって定義するのだ。この量はテンソルの添え字に関して縮約した量であるので、確かにテンソル性をもつ。この量 $R_{\lambda\mu}$ はリッチテンソルと呼ばれる。さらに、 $R_{\lambda\mu}$ に $g^{\lambda\mu}$ を乗じて、 λ と μ に関して縮約すると、

$$R = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu}, \quad (5.14)$$

なるスカラが得られる。このスカラはスカラ曲率と呼ばれる。スカラ曲率は $R = R^{\mu}_{\mu}$ と書けるので、リッチテンソルのトレースである。

曲率テンソルには多くの対称性があったのだが、リッチテンソルには対称性があるだろうか。リッチテンソルには、

$$R_{\lambda\nu} = R_{\mu\lambda}, \quad (5.15)$$

なる対称性がある。これにより、 n 次元空間におけるリッチテンソルの独立成分の数は、 $n(n+1)/2$ 個である。相対性理論における時空 ($n = 4$) ならば、独立成分の数は 10 個であ

る。前節までの曲率テンソルに比べ、リッチテンソルは情報量を密に格納したテンソルであるといえる。

リッチテンソルに関する対称性 (5.15) は簡単に証明できる。証明のために注目するのは、対称性 $R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R_{\nu\mu\kappa\lambda}$ である。この対称性に、 $g^{\kappa\nu}$ を乗じて κ と ν について縮約をとってみる。左辺に対応する縮約は、

$$g^{\kappa\nu} R_{\kappa\lambda\nu\mu} = g^{\nu\kappa} R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R^{\nu}_{\lambda\nu\mu} = R_{\lambda\mu},$$

である。一方、右辺に対応する縮約は、

$$g^{\kappa\nu} R_{\nu\mu\kappa\lambda} = R^{\kappa}_{\mu\kappa\lambda} = R_{\mu\lambda},$$

である。これらの計算が成立することは、共変曲率テンソルの定義式 $R_{\kappa\lambda\nu\mu} = g_{\alpha\kappa} R^{\alpha}_{\lambda\nu\mu}$ から明らかである。これらの数式は等しいはずだから、

$$R_{\lambda\mu} = R_{\mu\lambda},$$

が成立する。つまり、リッチテンソル $R_{\lambda\mu}$ は対称テンソルである。◻

5.5 曲率計算の例

曲率テンソルやスカラー曲率のイメージをつかむため、典型的な曲面においてテンソルを計算してみよう。典型的な曲面として、球面とトーラスを扱い、曲率が正だけでなく負の値をとることが確認できるだろう。

5.5.1 球面座標

曲率テンソルのイメージをつかむため、球面座標系において曲率テンソルやリッチテンソルを計算してみよう。取り扱うのは、半径 a の球面に設定された座標系 $[x^1, x^2] \equiv [\theta, \varphi]$ である。ここで、 θ は北極点を $\theta = 0$ とする緯度 (天頂角)、 φ は経度である。既に何度も取り扱ったように、計量テンソルは、

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

となる。取り扱う空間が2次元であるので、計量テンソルは 2×2 の行列となる。球面座標は、曲がった空間であるので、場所によって基本ベクトルが変化する。その基本ベクトル

ルの変化率を反映するクリストッフェル記号は,

$$[\Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta \cos\theta \\ \hline 0 & \cot\theta \\ \cot\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

となる。この行列表示において、セパレータ (—) によって上下を二つの 2×2 行列に分離した。上の行列は $\kappa = 0$ に、下の行列は $\kappa = 1$ に対応する。各行列は、 ν が行番号、 λ が列番号となるように成分表示した。

クリストッフェル記号に公式によって定められた演算を実行すると、リーマン曲率テンソルが得られる。球面の取り扱いにおいて、リーマン曲率テンソルは 16 個の成分をもち、

$$[R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin^2\theta \\ 0 & 0 & -\sin^2\theta & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

のように記述される。ここで、 2×2 の行列の成分に 2×2 の行列を記述した。リーマン曲率テンソル $R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu}$ について、外側の行列が第 κ 行、第 λ 列を表し、内側の行列が第 ν 行、第 μ 列を表す。リーマン曲率テンソルを $R_{\kappa\lambda\nu\mu} = g_{\kappa\alpha} R^{\alpha}_{\lambda\nu\mu}$ によって、反変成分を共変成分に書き換えると、

$$[R_{\kappa\lambda\nu\mu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a^2 \sin^2\theta \\ 0 & 0 & -a^2 \sin^2\theta & 0 \\ \hline 0 & -a^2 \sin^2\theta & 0 & 0 \\ a^2 \sin^2\theta^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

が得られる。この時点で、曲率テンソルに含まれる独立成分は $a^2 \sin^2\theta$ の 1 個しか存在しない。球面座標に関わらず、いかなる 2 次元の座標系に関して、 $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ は 1 個しか独立成分をもたないのだ。その事実は、先ほど、 n 次元であれば独立成分数が $n^2(n^2 - 1)/12$ であるという公式を導出したことから明らかだ。曲率テンソルの成分が 16 個であることを考えると、非常に無駄である。

リーマンの曲率テンソルが無駄にサイズが大きいため、 $R_{\lambda\mu} = R^{\kappa}_{\lambda\kappa\mu}$ によって成分を縮約し、リッチテンソル $R_{\lambda\mu}$ に変換すると、

$$[R_{\lambda\mu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad [R^{\lambda}_{\mu}] = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

が得られる。なお、ここに書いた第2のテンソルは、 $R^\lambda{}_\mu = g^{\nu\lambda} R_{\nu\mu}$ である。リッチテンソルのトレース $R \equiv R^\lambda{}_\lambda = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu}$ は、

$$R = \frac{2}{a^2}, \quad (5.21)$$

のように、ガウス曲率の2倍となる。簡単な例であるが、曲率テンソルが空間の曲率と関係があることがこの例からわかる。しかし、誤解しないように補足しておく。この結果でスカラ曲率 R がガウス曲率の2倍になったのは、取り扱っている次元が2次元(曲面)だからである。いかなる場合でも、スカラ曲率 R がガウスの2倍になるわけではない。取り扱う次元によってその倍率が異なるのだ。その規則性は第5.7節で説明する。

5.5.2 トーラス表面

前に取り扱ったが、トーラス表面における座標系について考えてみよう。トーラスの条件設定として、半径 b の円筒を円環に沿って曲げた形状を考える。そのとき、円筒の中心軸が半径 a の円を描くように曲げるのだ。トーラスの表面を $[\varphi, \theta]$ なる座標によって表すとする。そのトーラス表面は、3次元のカルテシアン座標系 $[x, y, z]$ では、

$$x = (a + b \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (a + b \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = b \sin \theta,$$

で与えられる。ここで、トーラス表面の座標を $[x^1, x^2] \equiv [\varphi, \theta]$ のように対応づけると、計量テンソルは、

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} (a + b \cos \theta)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

のように与えられる。設定した座標系は、 φ について対称であるので計量テンソルは φ に依存しない。一方、計量テンソルは θ に依存する。特に、 $\theta = 0$ はトーラスが最も外側であり、 $\theta = \pi$ はトーラスが内側にある場合に対応する。それにしたがって、計量テンソルは大きさが変化する。

トーラス表面でも、基本ベクトルは位置に依存して変化するため、クリストッフェル記号は一般的にゼロにならない。クリストッフェル記号の計算公式にしたがって計算すると、

$$[\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b \sin \theta}{a + b \cos \theta} \\ -\frac{b \sin \theta}{a + b \cos \theta} & 0 \\ \frac{a + b \cos \theta}{r} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

が得られる。トーラスにおいて、 $\theta = 0, \pi$ においてクリストッフェル記号が局所的にゼロになる。これは、 ϕ と θ の座標軸が、互い値直交し、測地線と一致することを意味する。その性質については次章で説明する。

トーラス表面は曲がった空間であるので、曲率テンソルは一般にゼロになることはない。定義にしたがって計算すると、

$$[R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & \frac{(a+b\cos\theta)\cos\theta}{b} \\ 0 & 0 & -\frac{(a+b\cos\theta)\cos\theta}{b} & 0 \\ \hline 0 & -\frac{b\cos\theta}{a+b\cos\theta} & 0 & 0 \\ \frac{b\cos\theta}{a+b\cos\theta} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.24)$$

が得られる。曲率テンソルの反変成分を共変成分に変換すると、 $f(\theta) \equiv b(a+b\cos\theta)\cos\theta$ なる記号を用いて、

$$[R_{\kappa\lambda\nu\mu}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & f(\theta) \\ 0 & 0 & -f(\theta) & 0 \\ \hline 0 & -f(\theta) & 0 & 0 \\ f(\theta) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (5.25)$$

が得られる。このように、曲率テンソルを4階の共変テンソルとして記述すると、独立成分は $b(a+b\cos\theta)\cos\theta$ だけになる。その事實は、2次元空間では曲率テンソルの独立成分が理論的に1個しか存在しないので当然の性質である。

曲率テンソル $R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ は16個の成分のうち、独立成分が1個しかないという無駄なテンソルである。その成分を縮約し、リッチテンソルを計算すると、

$$[R_{\lambda\mu}] = \left[\begin{array}{cc} \frac{b\cos\theta}{a+b\cos\theta} & 0 \\ 0 & \frac{(a+b\cos\theta)\cos\theta}{b} \end{array} \right], \quad (5.26)$$

が得られる。さらに、リッチテンソルを反変成分と共変成分をもつ混合テンソルとして表現すると、

$$[R^{\lambda}_{\mu}] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\cos\theta}{b(a+b\cos\theta)} & 0 \\ 0 & \frac{\cos\theta}{b(a+b\cos\theta)} \end{array} \right], \quad (5.27)$$

なる形で記述できる。この混合テンソルのトレースをとるとスカラ曲率:

$$R = \frac{2 \cos \theta}{b(a + b \cos \theta)}, \quad (5.28)$$

が得られる。得られたスカラ曲率は興味深い。スカラ曲率は、 $\theta = \pm\pi/2$ で $R = 0$ となる。その θ は 3 次元のカルテシアン座標において、 $|z|$ が最大となる条件であり、対象となる位置がトーラスの中心軸の真上(または真下)に位置する。対象となる位置がトーラスの中心軸より外側では $R > 0$, 中心軸より内側では $R < 0$ となる。このような 3 次元空間で設定された曲面において、負のスカラ曲率 $R < 0$ は鞍部点のような形状に対応する。

典型的な場所 $\theta = 0, \pi$ におけるスカラ曲率 R に注目しよう。前者 ($\theta = 0$) はトーラスの外周である。座標 φ を一定に保って θ を変化させると、半径 b の円を描く。一方、 θ を一定に保って φ を変化させると、トーラスの外周をたどり半径 $a+b$ の円を描く。これらの曲率半径の逆数の積がガウス曲率である。つまり、トーラス外周のガウス曲率は $1/b(a+b)$ である。これに対して、スカラ曲率 R は $\theta = 0$ においてガウス曲率の 2 倍、すなわち、 $R = 2/a(a+b)$ である。さらに、 $\theta = \pi$ ではスカラ曲率は $R = -2/a(a-b)$ となり、やはり、ガウス曲率の 2 倍である。前項で注釈したように、2 次元の曲面を取り扱っている理由によって、スカラ曲率がガウス曲率の 2 倍に等しいのだ。

5.6 ビアンキの恒等式

曲率テンソル $R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$ の共変成分の添え字の巡回に関するビアンキの第 1 恒等式については既に紹介した。曲率テンソルの共変微分にも、添え字の巡回に関する同様の恒等式が成立する。その恒等式は、

$$\nabla_{\omega} R_{\kappa\lambda\nu\mu} + \nabla_{\nu} R_{\kappa\lambda\mu\omega} + \nabla_{\mu} R_{\kappa\lambda\omega\nu} = 0, \quad (5.29)$$

なる形態の関係式であり、**ビアンキの第 2 恒等式** と呼ばれる。この恒等式は、一般相対性理論において重要な公式である。

5.6.1 恒等式の導出

本項では、ビアンキの第 2 項等式を導出する。ある共変ベクトル v_{λ} の共変微分 $\nabla_{\mu} v_{\lambda}$ は 2 階の共変テンソルである。よって、その量をさらに共変微分した量にも、リッチの公式を適用することができ、

$$\nabla_{\omega} \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} v_{\lambda} - \nabla_{\nu} \nabla_{\omega} \nabla_{\mu} v_{\lambda} = -R^{\alpha}_{\mu\omega\nu} \nabla_{\alpha} v_{\lambda} - R^{\alpha}_{\lambda\omega\nu} \nabla_{\mu} v_{\alpha} \quad (5.30a)$$

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \nabla_\omega v_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\omega v_\lambda = -R^\alpha_{\omega\nu\mu} \nabla_\alpha v_\lambda - R^\alpha_{\lambda\nu\mu} \nabla_\omega v_\alpha \quad (5.30b)$$

$$\nabla_\mu \nabla_\omega \nabla_\nu v_\lambda - \nabla_\omega \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = -R^\alpha_{\mu\omega\nu} \nabla_\alpha v_\lambda - R^\alpha_{\lambda\mu\omega} \nabla_\nu v_\alpha, \quad (5.30c)$$

のような関係が成立する。もう一方, リッチの公式:

$$-\nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda + \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = R^\alpha_{\lambda\nu\mu} v_\alpha,$$

を x^ω で偏微分した量を計算してみる。添え字を適当に入れ替えたものを含め,

$$-\nabla_\omega \nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda + \nabla_\omega \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = (\nabla_\omega R^\alpha_{\lambda\nu\mu}) v_\alpha + R^\alpha_{\lambda\nu\mu} \nabla_\omega v_\alpha \quad (5.31a)$$

$$-\nabla_\nu \nabla_\mu \nabla_\omega v_\lambda + \nabla_\nu \nabla_\omega \nabla_\mu v_\lambda = (\nabla_\nu R^\alpha_{\lambda\mu\omega}) v_\alpha + R^\alpha_{\lambda\mu\omega} \nabla_\nu v_\alpha \quad (5.31b)$$

$$-\nabla_\mu \nabla_\omega \nabla_\nu v_\lambda + \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\omega v_\lambda = (\nabla_\mu R^\alpha_{\lambda\omega\nu}) v_\alpha + R^\alpha_{\lambda\omega\nu} \nabla_\mu v_\alpha, \quad (5.31c)$$

を書いておく。ここで, 書き下した6つの等式をすべて加算すると,

$$-(R^\alpha_{\mu\omega\nu} + R^\alpha_{\omega\nu\mu} + R^\alpha_{\nu\mu\omega}) \nabla_\alpha v_\lambda + (\nabla_\omega R^\alpha_{\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R^\alpha_{\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R^\alpha_{\lambda\omega\nu}) v_\alpha = 0, \quad (5.32)$$

が得られる。この式の左辺の第1項はビアンキの第1恒等式によって恒等的にゼロとなる。第2項が任意の共変ベクトル v_α に対してゼロとなるためには,

$$\nabla_\omega R^\alpha_{\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R^\alpha_{\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R^\alpha_{\lambda\omega\nu} = 0,$$

を満たさなければならない。ここに得られた条件が, 上で紹介したビアンキの第2恒等式である。¶

5.6.2 アインシュタインテンソル

前項で導出したビアンキの第2恒等式は, 重力場におけるアインシュタインの方程式につながる重要な公式である。本項では, ビアンキの第2恒等式を変形して, アインシュタインの方程式を導出してみる。まず, 前節で導出したビアンキの第2恒等式は,

$$\nabla_\omega R^\alpha_{\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R^\alpha_{\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R^\alpha_{\lambda\omega\nu} = 0,$$

なる形で書かれる。この恒等式に関して $\alpha = \mu$ とおいて縮約をとれば,

$$\nabla_\alpha R^\alpha_{\lambda\nu\mu} - \nabla_\nu R_{\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\lambda\nu} = 0,$$

となる。さらに, 両辺に $g_{\lambda\mu}$ を乗じて縮約をとる。その際に, $R_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} = R$, および,

$$R^\alpha_{\lambda\nu\mu} g^{\lambda\mu} = R_{\kappa\lambda\nu\mu} g^{\kappa\alpha} g^{\lambda\mu} = R_{\mu\nu\lambda\kappa} g^{\kappa\alpha} g^{\lambda\mu} = R^\lambda_{\nu\lambda\kappa} g^{\kappa\alpha} = R_{\nu\kappa} g^{\kappa\alpha} = R_\nu^\alpha,$$

であることに注意すると、その結果は、

$$2 \nabla_\alpha R_\nu^\alpha - \nabla_\nu R = 0,$$

となる。この結果は、

$$\nabla_\alpha \left(R_\nu^\alpha - \frac{1}{2} R \delta_\nu^\alpha \right) = 0, \quad (5.33)$$

と書くこともできる。つまり、

$$G_\nu^\alpha = R_\nu^\alpha - \frac{1}{2} R \delta_\nu^\alpha, \quad (5.34)$$

なるテンソル G_ν^α を定義すれば、

$$\nabla_\alpha G_\nu^\alpha = 0, \quad (5.35)$$

となる。このように定義されたテンソル G_ν^α は**アインシュタインテンソル**と呼ばれる。

アインシュタインテンソルの共変微分がゼロになる、というのは一般相対性理論において重要な性質、というよりも基本方程式である。本書の本質ではないので詳しい説明を省くが、ビアンキの第2恒等式が重要である理由は、曲率テンソルが計量テンソルの2階微分で構成されていることに起因する。物理学的な考察によって、計量テンソルが重力場のポテンシャルと関連があることがわかっている。重力場のポテンシャルは、2階微分すると重力源、すなわち、質量分布に関係した物理量になる。ビアンキの第2項等式は、その質量分布の流れの方程式、すなわち、質量保存則を記述しているわけだ。

上記の考えに基づいて、アインシュタインテンソル G_ν^α は重力の源となる質量分布に対応する。相対性理論によると、質量分布はエネルギーや運動量の分布として、エネルギー運動量テンソル T_ν^α で表現される。一般相対性理論による重力場の方程式は、

$$G_\nu^\alpha = \frac{8\pi G}{c^4} T_\nu^\alpha,$$

のように、アインシュタインテンソルがエネルギー運動量テンソルの定数倍であるとう等式で記述されている。なお、この方程式に $g_{\alpha\mu}$ を乗じて縮約した方程式:

$$G_{\nu\mu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\nu\mu},$$

を重力場の方程式として扱うことが多い。その場合、アインシュタインテンソルは、

$$G_{\nu\mu} = R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} R g_{\nu\mu}, \quad (5.36)$$

となる。ここで、 $8\pi G/c^4$ は方程式が成立するための比例定数である。具体的には、 G が万有引力定数、 c が光速である。重力場の方程式は、空間中のエネルギー・運動量が与えられたとき、この方程式を解けば時空の計量が導き出されるという方程式である。つまり、アインシュタイン方程式はビアンキの第2恒等式の応用である。

5.7 リーマン曲率

前節でガウス曲率を扱ったので、その比較としてリーマン曲率を紹介しよう。リーマン曲率とは、空間の任意の点 x^κ を通る測地線の曲率である。正確にいうと、次のように定義される。空間の任意の点 x^κ に存在する二つの反変ベクトル u^κ と v^κ が与えられたとき、それらのベクトルが張る平面に接して、点 x^κ を通るすべての測地線のガウス曲率 (点 x^κ における値) がガウス曲率である。そのように定義されるリーマン曲率は、

$$k = -\frac{R_{\kappa\lambda\nu\mu}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\nu}g_{\nu\kappa})u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}, \quad (5.37)$$

のように定義される。この値が上に書いたようなスカラ曲率の性質をもつことは、第7章で説明する部分空間の知識がなければ証明できないので、証明は後に譲ることにしよう。本章ではこの定義式を素直に受け入れて議論を進める。

リーマン曲率 k が任意の点において、ベクトル u^κ と v^κ の選び方に依存しないと仮定すれば、リーマン曲率の定義式から、

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -k(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})$$

が得られる。ここで、両辺に $g^{\nu\kappa}g^{\mu\lambda}$ を乗じて縮約をとれば、 $R = -k(n - n^2)$ が得られる。この等式を得るにあたって、左辺が、

$$g^{\kappa\nu}g^{\lambda\mu}R_{\kappa\lambda\nu\mu} = g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu} = R,$$

であり、一方、右辺が、

$$g^{\kappa\nu}g^{\lambda\mu}(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}) = \delta^\kappa_\lambda\delta^\lambda_\kappa - \delta^\mu_\mu\delta^\nu_\nu = \delta^\kappa_\kappa - \delta^\mu_\mu\delta^\nu_\nu = n - n^2,$$

であることを利用した。なお、 n は空間の次元数である。したがって、リーマン曲率は、

$$k = \frac{R}{n(n-1)}, \quad (5.38)$$

なる関係を満たす。前節で、球面座標を取り扱った際、スカラ曲率 R がガウス曲率の2倍であることを示した。その性質が成立していたのは、 $n = 2$ だったからだ。取り扱う次元が4次元だったら、スカラ曲率 R はガウス曲率の $4 \times 3 = 12$ 倍となっていたわけだ。

ベクトル u^μ と v^μ の選び方によらず、リーマン曲率が $k = 0$ となる条件は、 $R_{\kappa\lambda\nu\mu} = 0$ である。そのような空間は**平坦な空間**と呼ばれる。

5.7.1 シューアの定理

リーマン曲率からの派生として、シューアの定理を紹介しよう。シューアの定理とは、次のような性質を主張する。空間の各点でリーマン曲率が、それを定義する二つの方向 u^μ と v^μ に無関係であるならば、そのリーマン曲率は空間のいたるところで定数である。

空間中の任意の点で二つのベクトル u^μ と v^μ をとったとき、それらが張る平面に接する測地線の曲率 k が、 u^μ と v^μ の選びに無関係であるならば、曲率テンソルは、

$$R_{\kappa\lambda\nu\mu} = -k (g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}), \quad (5.39)$$

なる形でなければならない。それは本節の冒頭で述べたとおりである。リーマン曲率 k は、定数である必要はなく、座標の関数であってもよい。曲率テンソル (5.39) をビアンキの恒等式:

$$\nabla_\omega R_{\kappa\lambda\nu\mu} + \nabla_\nu R_{\kappa\lambda\mu\omega} + \nabla_\mu R_{\kappa\lambda\omega\nu} = 0,$$

に代入すると、

$$\begin{aligned} (\nabla_\omega k)(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}) + (\nabla_\nu k)(g_{\mu\lambda}g_{\omega\kappa} - g_{\omega\lambda}g_{\mu\kappa}) \\ + (\nabla_\mu k)(g_{\omega\lambda}g_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda}g_{\omega\kappa}) = 0, \end{aligned}$$

が得られる。この数式を計算するにあたり、リーマン曲率 k が座標の関数であること、計量テンソルの共変微分がゼロであることに注意した。この数式に $g^{\mu\lambda}$ を乗じて縮約すれば、

$$(n-2) \left[(\nabla_\omega k) g_{\nu\kappa} - (\nabla_\nu k) g_{\omega\kappa} \right] = 0,$$

が得られる。この数式に再び、 $g^{\omega\kappa}$ を乗じて縮約すれば、

$$(n-1)(n-2) \nabla_\nu k = 0, \quad (5.40)$$

が得られる。この計算結果は、 $n \geq 3$ の場合に、

$$\nabla_\nu k = \frac{\partial k}{\partial x^\nu} = 0,$$

が成立することを示唆する。つまり、3次元以上の空間では、リーマン曲率 k がそれを指定するベクトル u^μ と v^μ に無関係であるならば、 k は空間のいたるところで一定である。これが**シューアの定理**である。このように、空間全体にわたって曲率が一定である空間は、**定曲率空間**と呼ばれる。

5.7.2 アインシュタイン空間

リーマン空間中の任意の点 x^μ において、互いに直交する n 個のベクトル $h_{(\alpha)}^\mu$ を考えよう。空間が n 次元であるので、直交する n 個のベクトルを選ぶことは可能だ。ここで、 α は

ベクトルの番号, μ は反変成分を表す添え字である。ベクトルの番号 α のように括弧を伴う添え字には総和の規約を適用しないことにする。ベクトル $h_{(\alpha)}^\mu$ が単位ベクトルであるとすれば,

$$g_{\mu\lambda} h_{(\alpha)}^\mu h_{(\beta)}^\lambda = \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.41)$$

が成立するはずだ。これらのベクトルのように, 空間の特定の点で設定された n 個の互いに直交するベクトルの集合は, **直交 n 重系** と呼ばれる。これらの単位ベクトルも, 当然,

$$h_{(\alpha)\mu} = g_{\lambda\mu} h_{(\alpha)}^\lambda, \quad (5.42)$$

のように反変ベクトルから共変ベクトルに変換できる。このとき, 共変ベクトル $h_{(\alpha)\lambda}$ と反変ベクトル $h_{(\alpha)}^\lambda$ は,

$$h_{(\alpha)\lambda} h_{(\beta)}^\lambda = \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.43)$$

なる関係を満たす。この関係は既に述べたベクトルの直交関係を表しているだけだ。この関係式は,

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} h_{(\alpha)\lambda} h_{(\alpha)}^\mu = \delta_{\lambda}^\mu, \quad (5.44)$$

のように書くこともできる。わかりにくいかもしれないので解説しよう。これらの数式において, n 個の互いに直交する単位ベクトルを,

$$[h_{(\alpha)\lambda}] = \begin{bmatrix} h_{(1)1} & h_{(1)2} & \cdots & h_{(1)n} \\ h_{(2)1} & h_{(2)2} & \cdots & h_{(2)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{(n)1} & h_{(n)2} & \cdots & h_{(n)n} \end{bmatrix},$$

$$[h_{(\alpha)}^\lambda] = \begin{bmatrix} h_{(1)}^1 & h_{(2)}^1 & \cdots & h_{(n)}^1 \\ h_{(1)}^2 & h_{(2)}^2 & \cdots & h_{(n)}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{(1)}^n & h_{(2)}^n & \cdots & h_{(n)}^n \end{bmatrix},$$

のように行列として配置すれば, 関係式 (5.43) は, 行列 $[h_{(\alpha)\lambda}]$ と $[h_{(\alpha)}^\lambda]$ が逆行列の関係であることを示唆している。任意の行列とその逆行列の積は可換であるので, (5.44) も成立するはずだ。さらに, (5.44) に $g^{\lambda\nu}$ を乗じて縮約すれば,

$$\sum_{\alpha=1}^n h_{(\alpha)}^\mu h_{(\alpha)}^\nu = g^{\mu\nu}, \quad (5.45)$$

なる関係が得られる。互いに直交するようにはいへ, 空間中に勝手に設定した単位ベクトルの成分どうしの積和によって計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が特定できるとは驚きに値する。

導入した直交 n 重系からベクトル二つを選べばリーマン曲率が定義できる。例えば, $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ と $h_{(\beta)}^{\kappa}$ を選べば, リーマン曲率は,

$$k_{(\alpha)(\beta)} = -\frac{R_{\kappa\lambda\nu\mu} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\kappa}}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}) h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\kappa}},$$

のように定義される。この数式の右辺に関して, $\alpha \neq \beta$ であれば, 分母は 1 に等しい。検証のため, 分母を計算してみると,

$$\begin{aligned} \text{Donom} &= (g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}) h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\kappa} \\ &= h_{(\alpha)\lambda} h_{(\beta)\kappa} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\kappa} - \delta_{(\alpha)(\beta)} \delta_{(\alpha)(\beta)} \\ &= \delta_{(\alpha)(\alpha)} \delta_{(\beta)(\beta)} - \delta_{(\alpha)(\beta)} \delta_{(\alpha)(\beta)} = 1, \end{aligned}$$

が確かに得られる。ここで, 第 2 行目へ数式変形において, 第 1 項には (5.41) を, 第 2 項には (5.42) を利用した。第 3 行目への数式変形には (5.43) 利用した。クロネッカーのデルタに付したカッコつきの添え字について総和の規約を適用しない。その結果として, リーマン曲率の分母が 1 であることが示せた。したがって, 互いに直交する二つの単位ベクトル $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ と $h_{(\beta)}^{\kappa}$ によって定まるリーマン曲率は,

$$k_{(\alpha)(\beta)} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\kappa}, \quad (5.46)$$

となるのだ。リーマン曲率 $k_{(\alpha)(\beta)}$ に対して, β について総和をとれば,

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^n k_{(\alpha)(\beta)} &= -R_{\kappa\lambda\nu\mu} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\alpha)}^{\lambda} \sum_{\beta=0}^{n-1} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\beta)}^{\kappa} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\alpha)}^{\lambda} g^{\mu\kappa} \\ &= g^{\mu\kappa} R_{\kappa\lambda\mu\nu} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\alpha)}^{\lambda} = R_{\lambda\nu} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\alpha)}^{\lambda}, \end{aligned}$$

のように, リッチテンソルを用いた関係式が得られる。ここで, $k_{(\alpha)(\alpha)} = 0$ とした。第 1 行目の数式変形は (5.45) を利用した。第 2 行目の数式変形は, 曲率テンソル (添え字 ν と μ) の反対称性を使った後に, リッチテンソルの定義式を利用した。得られた曲率は, ベクトル $h_{(\alpha)}^{\mu}$ と $h_{(\beta)}^{\mu}$ で定まるリーマン曲率に対して, すべての β にわたる総和である。その意味で, その総和は $h_{(\alpha)}^{\mu}$ に対する平均曲率である。さらに, その曲率をすべての α にわたって総和を計算すると,

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n k_{(\alpha)(\beta)} = R_{\lambda\nu} \sum_{\alpha=1}^n h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\alpha)}^{\nu} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\nu} = R,$$

が得られる。つまり, 設定した直交 n 重系のあらゆる単位ベクトルの組み合わせにわたってリーマン曲率の総和をとれば, スカラ曲率 R が得られるのだ。この結果は, 単位ベクトルの取り方に依存しないのだ。

平均曲率の議論を一般化して、ベクトル u^μ に対する平均曲率を考えよう。その曲率を M とすると、

$$M = \frac{R_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu}{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta},$$

となる。ここで、ベクトル u^μ は、単位ベクトルとは限らないので、分母によってベクトルの長さで正規化している。ベクトル u^μ を変化させたとき、平均曲率 M が特定の条件で極値をもつか調べよう。極値をもつならば、 $\partial M / \partial u^\mu = 0$ を満たすはずだ。その条件を方程式として記述すると、

$$\frac{2R_{\lambda\mu} u^\lambda (g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta) - 2g_{\beta\mu} u^\beta (R_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu)}{(g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta)^2} = 0,$$

が得られる。なお、総和の規約は分子と分母で個別に適用されるとする。ペアになって総和の規約が適用されている添え字は、別の添え字に書き換えてもよいので、この方程式は、

$$\frac{2}{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} \left(R_{\lambda\mu} u^\lambda - g_{\lambda\mu} \frac{R_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu}{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta} u^\lambda \right) = 0,$$

のように書き換えられる。この方程式は、さらに整理すると、

$$(R_{\lambda\mu} - M g_{\lambda\mu}) u^\lambda = 0, \quad (5.47)$$

のように簡略化される。この条件を満たすとき、平均曲率が極値をもつということだ。数式 (5.47) は、ベクトルの成分 u^λ について連立 1 次方程式を構成している。連立方程式の解なる u^λ が、 M が極値となる方向を与える。その解は、**リッチの主方向**と呼ばれる。

連立方程式 (5.47) の係数がゼロとなる場合、リッチの主方向 u^λ が特定できない。そのような条件を満たす (条件に陥る) 空間は、**アインシュタイン空間**と呼ばれる。つまり、アインシュタイン空間は、

$$R_{\lambda\mu} = M g_{\lambda\mu},$$

なる性質をもっているということだ。この数式に $g^{\lambda\mu}$ を乗じて縮約をとれば、 $g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} = nM$ が得られる。この数式をさらに簡略化すると、

$$M = \frac{R}{n}, \quad (5.48)$$

となる。つまり、アインシュタイン空間での平均曲率は、スカラ曲率 R の $1/n$ 倍である。さらに、この数式は、

$$R_{\lambda\mu} = \frac{1}{n} R g_{\lambda\mu}, \quad (5.49)$$

なる方程式に書き換えられる。この方程式がアインシュタイン空間の定義式である。

アインシュタインの宇宙定数 重力場の方程式 (5.36) を真空 ($T_{\nu\mu} = 0$) の条件を適用すると, $R_{\nu\mu} = Rg_{\nu\mu}/2$ となり, アインシュタイン空間の条件 (5.49) に合致しない。アインシュタイン空間が定曲率空間の仮定に基づくのだから, 合致しなくても当然である。一般相対性理論では, 時間を座標軸の一つに含んでいるため, 定曲率空間を仮定すると, 時空の曲率が時間に依存せず, 一定でなければならない。一般相対性理論の空間は重力の時空なので, 空間に曲率があるということは, 重力が存在する。重力が存在すれば, 互いに引き合うため, 宇宙は時間経過とともに収縮し, 時空の曲率が時間に依存するのだ。諸説によると, アインシュタインは曲率が時間に依存することを嫌い, 方程式 (5.36) を,

$$R_{\nu\mu} - \frac{1}{2}Rg_{\nu\mu} + \Lambda g_{\nu\mu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\nu\mu},$$

のように書き換えた。追加された項 $\Lambda g_{\nu\mu}$ が宇宙項と呼ばれる項であり, その係数 Λ は**宇宙定数**と呼ばれる。この宇宙項の追加は, 計量テンソル $g_{\nu\mu}$ の共変微分がゼロであることを利用した絶妙な処置である。つまり, 宇宙項を追加してもビアンキの第2恒等式は成立できるのだ。ここで, 宇宙項を追加した方程式に, 真空の条件 $T_{\nu\mu} = 0$ と, アインシュタイン空間の条件 (5.49) を代入すると,

$$R = \frac{2n}{n-2}\Lambda,$$

が得られ, 空間の平均曲率が宇宙定数に比例することが導かれる。このとき, 双方の方程式 (5.36) と (5.49) が成立し, 定常的な宇宙の解が得られる。宇宙定数は, 重力場における斥力として作用し, 本来, 宇宙に作用する万有引力と釣り合い, 定常的な宇宙を保っているという解釈だ。しかし, ハッブルの観測によって宇宙の膨張が発見され, 宇宙を記述する解は定常的ではなくなった。数学的に宇宙定数の存在は許容できるものの, 宇宙論的観測に基づき, 宇宙定数はかなり小さい値だと認識されている¹。

5.7.3 平坦な空間

本項では, リーマン幾何学における特殊な空間, 具体的には $R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu} = 0$ となる空間について説明する。曲率テンソル $R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu}$ は周回経路に沿ったベクトルの平行移動の結果, ベクトルが受ける変化に関する量である。そのベクトルの変化は空間が曲がっていることが起因しているため, $R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu}$ は空間の湾曲を表現する量である。その曲率テンソルがゼロとなる空間は平坦であると考えることができる。その平坦な空間とは, 実は, ユークリッド空間なのである。

ユークリッド空間中に互いに直交する座標軸 x_1, x_2, \dots, x_n をとったとする。そのよう

¹富田憲二, “パリティ物理学コース 相対性理論,” 丸善, ISBN 4-621-03477-4, p. 34, 1990.

な座標系では、微小距離の自乗 ds^2 は、座標の微小変化の自乗和:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2,$$

で与えられる。一般の座標系では、微小距離の自乗が $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ のような2次形式で表現されることを考えると、ユークリッド空間における直交座標系では計量テンソルが $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ となるわけである。ここで、定数の変換行列 $a^\kappa_\alpha (= a_\kappa^\alpha)$ を仮定し、 $x'^\kappa = a^\kappa_\alpha x^\alpha$ によって座標変換をしたとする。このとき、変換された座標系における計量テンソルは、

$$g'_{\mu\nu} = \bar{a}_\alpha^\mu \bar{a}_\nu^\beta \delta_{\alpha\beta} = \bar{a}_\alpha^\mu \bar{a}_\mu^\alpha,$$

となる。ただし、 \bar{a}_μ^α は変換行列 a^α_μ の逆行列である。つまり、 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ であった座標系から、1次変換によって、計量テンソルを任意の定数行列にすることが可能である。逆に考えれば、計量テンソルが定数行列であれば、適当な1次変換によって $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ とすることができる。よって、ユークリッド空間とは、適切な座標変換によって計量テンソルの要素をすべて定数にできる空間である。これに関して、一つの定理が導かれる。

定理 5.1 リーマン空間が局所的にユークリッド空間であるための必要条件は、曲率テンソルが $R^\kappa_{\lambda\nu\mu} = 0$ となることである。

この定理の正当性を証明してみよう。まず、 $R^\kappa_{\lambda\nu\mu} = 0$ が必要条件であることは明らかである。ユークリッド空間中に斜交座標を設定すれば、 $g_{\mu\nu}$ が定数となるので、 $\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = 0$ となる。したがって、曲率テンソルの成分もすべてゼロ、すなわち、 $R^\kappa_{\lambda\nu\mu} = 0$ となるのである。また、任意の座標変換を施したとしても、 $R^\kappa_{\lambda\nu\mu}$ のテンソル性により、

$$R'^\kappa_{\lambda\nu\mu} = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\eta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} R^\eta_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

となるので、いかなる座標変換を用いても曲率テンソルの成分はゼロである。

続いて、十分条件であることを証明しよう。このためには、 $R^\kappa_{\lambda\nu\mu} = 0$ なる条件が与えられたとき、 x^κ を適当な座標変換によって x'^κ に変換したとき、 $g'_{\mu\nu}$ を定数にできることを証明すればよい。計量テンソルの導関数には、

$$\frac{\partial g'_{\mu\lambda}}{\partial x'^\nu} = \Gamma'^\alpha_{\nu\mu} g'_{\alpha\lambda} + \Gamma'^\alpha_{\nu\lambda} g'_{\mu\alpha},$$

なる関係があるので、 $g'_{\mu\lambda}$ が定数となるためには、任意のクリストッフエル記号の成分について $\Gamma'^\alpha_{\nu\mu} = 0$ が成立すればよい。クリストッフエル記号に対する座標変換:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\kappa} \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\lambda} \Gamma'^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda},$$

に, $\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ を代入することによって得られる関係式:

$$\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}, \quad (5.50)$$

を満足する x'^{α} が存在することを示せばよい。言い換えると, この偏微分方程式が $R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu} = 0$ の条件で完全積分可能であることを示せばよい。この微分方程式を x^{ν} について偏微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} &= \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\kappa}} \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \left(\Gamma^{\kappa}_{\nu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} + \frac{\partial \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right), \end{aligned}$$

となる。この式の左辺が添え字 μ と ν に対して可換であるので, この方程式は,

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \left(\Gamma^{\kappa}_{\nu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} + \frac{\partial \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \frac{\partial \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} \right) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu} = 0,$$

と書き直すことができる。この方程式は $R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu} = 0$ ならば例外なくゼロとなるので, 微分演算子が可換である事実に矛盾しない。よって, $R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu} = 0$ ならば, 方程式 (5.50) は積分可能であり, $g'_{\mu\nu}$ を定数にする座標変換が存在する。逆に, $R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu} \neq 0$ ならば, 微分演算子が可換である事実に矛盾が生じるため, 方程式 (5.50) 自体が成立しないので, $g'_{\mu\nu}$ を定数とする解は存在しない。