第4章　絶対微分学

曲がった空間ではベクトルの微分はユークリッド空間とは異なる取り扱いをしなければならない。ユークリッド空間では偏微分演算子 $\partial/\partial x^\mu$ をベクトルとして扱うことができた。すると, 任意のベクトル v^ν に対して偏微分を作用させた $\partial v^\nu/\partial x^\mu$ は2階のテンソルになるはずである。しかし, 本章で示すように曲がった空間では $\partial v^\mu/\partial x^\mu$ はテンソルとならない。本章では共変微分を導入して, ベクトル, さらには, テンソルの微分がテンソル性をもつように拡張する。

4.1　クリストッフェル記号

前章で測地線の方程式を導出した際に, $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}$ なるクリストッフェル記号を定義した。クリストッフェル記号は, 微小変位に対する基本ベクトルの変化率を表し, 空間を取り扱ううえで重要である。クリストッフェル記号の性質について調べてみよう。その記号の定義を改めて書くと,

$$\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right), \tag{4.1}$$

となる。この記号が, $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}$ なる対称性をもっていることは定義式からただちにわかる。クリストッフェル記号は, 曲がった空間の性質を表すパラメータであるが, テンソルではない。

座標変換におけるクリストッフェル記号の振る舞いを調べれば, クリストッフェル記号がテンソルでないことがわかる。その性質を示すため, $\partial g_{\mu\alpha}/\partial x^\nu$ の座標変換を調べてみる。適当に添え字を入れ替えながら計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g'_{\mu\alpha}}{\partial x'^\nu} &= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial g_{\eta\gamma}}{\partial x^\varepsilon} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} g_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\alpha \partial x'^\nu} g_{\eta\beta}, \\
\frac{\partial g'_{\nu\alpha}}{\partial x'^\mu} &= \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial g_{\varepsilon\gamma}}{\partial x^\eta} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} g_{\beta\gamma} + \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\alpha \partial x'^\mu} g_{\varepsilon\beta}, \\
\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\alpha} &= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial g_{\eta\varepsilon}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha} g_{\beta\varepsilon} + \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} g_{\eta\beta},
\end{aligned}$$

が得られる。これらを組み合わせると, 第 1 種クリストッフェル記号が,

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma}_{\alpha,\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g'_{\mu\alpha}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial g'_{\nu\alpha}}{\partial x'^{\mu}} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}}\left(\frac{\partial g_{\eta\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}} + \frac{\partial g_{\varepsilon\gamma}}{\partial x^{\eta}} - \frac{\partial g_{\eta\varepsilon}}{\partial x^{\gamma}}\right) + \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}g_{\beta\gamma},\end{aligned}$$

のように計算される。この数式の両辺に,

$$\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\omega}}g^{\lambda\omega},$$

を乗じて, ω について縮約をとって得られる数式:

$$\mathit{\Gamma}'^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}}\mathit{\Gamma}^{\lambda}{}_{\eta\varepsilon} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right), \tag{4.2}$$

がクリストッフェル記号の座標変換である。この数式の右辺の第 2 項は一般にゼロとはならないので, クリストッフェル記号はテンソルではないことになる。この両辺に $\partial x^{\beta}/\partial x'^{\kappa}$ を乗じて κ について縮約して得られる数式:

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\kappa}}\mathit{\Gamma}'^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}}\mathit{\Gamma}^{\lambda}{}_{\eta\varepsilon} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}, \tag{4.3}$$

もよく使われる関係式である。

クリストッフェル記号に関する重要な恒等式をもう少し挙げてみよう。前章で示したように, クリストッフェル記号には第 1 種と第 2 種の記号があり,

$$\mathit{\Gamma}_{\lambda,\mu\nu} = \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}\, g_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right),$$

なる関係式によって第 2 種クリストッフェル記号から第 1 種クリストッフェル記号に変換することができる。第 1 種クリストッフェル記号に関して, 添え字の順序を入れ替えて加えると,

$$\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu}\, g_{\alpha\lambda} + \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\, g_{\nu\alpha} = \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}, \tag{4.4}$$

なる関係が得られる。続いて, $g^{\lambda\alpha}g_{\alpha\beta} = \delta_{\beta}{}^{\alpha}$ を偏微分して得られる関係式:

$$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}}g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} = 0,$$

に恒等式 (4.4) を代入すると,

$$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}}g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha}g_{\varepsilon\beta}\mathit{\Gamma}^{\varepsilon}{}_{\nu\alpha} + \mathit{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\beta} = 0,$$

が得られる。この数式に $g^{\beta\kappa}$ を乗じて β について縮約をとると,

$$\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\alpha}\, g^{\lambda\alpha} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta}\, g^{\beta\kappa} = 0, \tag{4.5}$$

が得られる。この関係式は, 計量テンソルの独特の性質として成立する数式である。この性質は, 第 4.5 節で取り扱う。

最後に, $\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}$ について, $\lambda = \kappa$ とおいて λ について縮約をとった値に注目してみよう。その値を計算すると,

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2g} G^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}},$$

となる。ここで, g は計量テンソル $g_{\alpha\lambda}$ の行列式, $G^{\lambda\alpha}$ は $g_{\alpha\lambda}$ の余因子である。逆ベクトル系の計量 $g^{\lambda\alpha}$ は $g_{\lambda\alpha}$ の逆行列であるので, $g^{\lambda\alpha} = G^{\lambda\alpha}/g$ が成り立つ。よって, 上のように式変形できたのである。ところで, 行列式 g を x^{μ} について偏微分して得られる偏導関数:

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\lambda}} = \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} G^{\lambda\alpha},$$

を用いて $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}$ を書き直すと,

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^{\mu}}, \tag{4.6}$$

が得られる。この式も重要な公式である。

4.2 共変微分

一般のスカラとベクトルを座標 x^{ν} で偏微分した量について考えてみよう。スカラを偏微分した結果はテンソルとなるのであるが, ベクトルを偏微分した結果は, これから示すようにテンソルの成分とはならない。そこで, 代わりにテンソル成分となるような共変微分とよばれる量を定義する。

座標変換に対して不変な量 $\phi(x') = \phi(x)$ は既に定義したように, スカラとよばれる。スカラを座標 x'^{ν} で偏微分すると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}},$$

となるので $\partial\phi/\partial x^{\mu}$ が共変ベクトルの成分であることがわかる。このように, 共変ベクトルをなす微分係数は, **絶対微分係数**, または, **共変微分係数**と呼ばれる。また, x^{μ} についての共変微分は ∇_{μ} という記号を用いて,

$$\nabla_{\mu} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}},$$

で表す。さらに, 微小変位 $\mathrm{d}x^\lambda$ を与えたときの変化分を $\delta\phi \equiv \mathrm{d}x^\lambda \nabla_\lambda \phi$ で定義し, これを不変量 ϕ の**絶対微分**, または, **共変微分**という。ところで, 通常の偏微分に関しても $\mathrm{d}\phi \equiv \mathrm{d}x^\lambda \, \partial\phi/\partial x^\lambda$ なる微分が定義されているが, これらの間には,

$$\delta\phi = \mathrm{d}\phi,$$

が成り立つ。後に示すが, このように共変微分と通常の微分が等しくなるのはスカラに対する微分のみである。

スカラとは異なり, 共変ベクトルや反変ベクトルは, 通常の微分がテンソルにならない。共変ベクトル v_μ についてその事実を検証しよう。共変ベクトルは座標変換に対して,

$$v'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu,$$

なる変換則が成立するが, これを x'^λ について偏微分すると,

$$\frac{\partial v'_\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial v_\nu}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu} v_\alpha,$$

を得られる。右辺の第 2 項があるため, この偏導関数はテンソルではない。邪魔な右辺の第 2 項に (4.3) を適用して数式を変形すると,

$$\frac{\partial v'_\mu}{\partial x'^\lambda} - {\Gamma'}^{\kappa}{}_{\lambda\mu} v'_\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\kappa} - \Gamma^\alpha{}_{\kappa\nu} v_\alpha\right), \tag{4.7}$$

が得られる。この数式を見ると,

$$\nabla_\lambda v_\mu \equiv \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} v_\alpha, \tag{4.8}$$

を定義すれば, $\nabla_\lambda v_\mu$ がテンソルであることがわかる。テンソル性をもつ $\nabla_\lambda v_\mu$ は, 共変ベクトル v_μ の絶対微分係数, または, 共変微分係数と呼ばれる。さらに, 微小変位 $\mathrm{d}x^\lambda$ を乗じて λ について縮約をとった量は共変微分と呼ばれる。具体的に書いてみると,

$$\delta v_\mu = \mathrm{d}v_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} v_\alpha \, \mathrm{d}x^\lambda, \tag{4.9}$$

という関係が得られる。(4.7) に $\mathrm{d}x^\lambda$ を乗じて λ について縮約をとれば, この量が v_μ と同じように共変ベクトルであることがわかる。共変微分は, クリストッフェル記号を因子とする第 2 項を含む。基本ベクトルが場所によって変化しない平坦な空間ではクリストッフェル記号がゼロであるので, 座標 x^μ についての微分が共変微分と等しくなる。つまり, 共変微分の第 2 項は基本ベクトルの変化を補正するための項である。

反変ベクトルについても同様に共変微分を定義することができる。反変ベクトルに関する座標変換式:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} v'^\nu = v^\mu,$$

を x'^λ について微分すると,

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial v'^\nu}{\partial x'^\lambda}+\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\lambda}v'^\alpha=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial v^\mu}{\partial \kappa},$$

が得られる。続いて左辺第 2 項に (4.3) を適用すると,

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x'^\lambda}+\Gamma'^{\nu}{}_{\alpha\lambda}\,v'^\alpha\right)=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x'^\kappa}+\Gamma'^{\mu}{}_{\varepsilon\kappa}\,v'^\varepsilon\right),$$

が得られ, この両辺に $\partial x'^\beta/\partial x^\mu$ を掛けて μ について縮約をとると,

$$\frac{\partial v^\beta}{\partial x'^\lambda}+\Gamma'^{\beta}{}_{\alpha\lambda}\,v'^\alpha=\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x'^\kappa}+\Gamma'^{\mu}{}_{\varepsilon\kappa}\,v'^\varepsilon\right), \tag{4.10}$$

なるテンソルの条件を満たす結果を得る。よって, 反変ベクトル v^μ に関しては,

$$\nabla_\lambda v^\mu \equiv \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\lambda}-\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}v^\alpha, \tag{4.11}$$

が絶対微分係数, または, 共変微分係数であると定義される。この値についても, 微小変位 $\mathrm{d}x^\lambda$ を掛けて λ について縮約をとって, 共変微分を計算してみると, 書いてみると,

$$\delta v^\mu=\mathrm{d}v^\mu-\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}\,v^\alpha\,\mathrm{d}x^\lambda, \tag{4.12}$$

という関係を得る。やはりこの値も v^μ と同じように反変ベクトルである。

共変ベクトルや反変ベクトルの微分がテンソルにならないことを示すことができた。テンソルにならないのは, 基本ベクトルが場所によって変化することが要因であるので, その補正項としてクリストッフェル記号を伴う項によってテンソル性をもつ導関数, すなわち, 共変微分を定義することができた。共変微分には, 幾何学的解釈を与えることが可能であるので, その解釈について次節で説明する。

4.3 幾何学的解釈

前節で見たように, ベクトルの成分 v^μ を座標 x^ν で偏微分した結果はテンソルとはならなかった。これは, 座標軸が湾曲し, 場所によって基本ベクトルが変化していることが原因である。例えば, 図 4.1 のように場所によらず一定なベクトル $\boldsymbol{v}$ を考えてみよう。このベクトルは一定であるが座標軸が湾曲しているため, 場所が変わるとベクトルが示す成分が変化してしまっている。この変化こそが, ベクトルの成分 v^μ を座標 x^ν で偏微分した結果である。このような偏微分によって評価される値は純粋にベクトルの変化量を表した量ではなく, 座標軸の湾曲による見かけの変化量を含んだ値になっている。よって, 本質的なベクトルの変化を評価するには, 見かけの変化量を補正する必要があるのである。

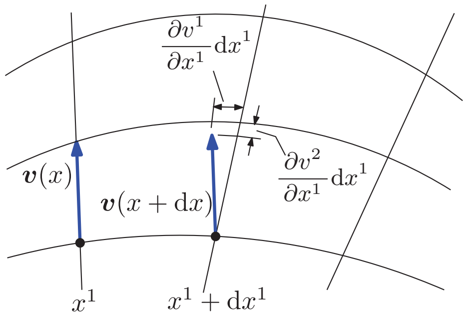

図 4.1: 見かけのベクトル変化

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ を用いたベクトル記法によってベクトルの変化量を調べてみよう。変化を調べるベクトルは $\boldsymbol{v} \equiv v^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ のように反変成分 v^μ を用いて定義されているとする。このベクトルを x^ν について偏微分すると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{e}_\mu + v^\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu},$$

となる。この値は, 表記を見ればわかるようにベクトルであるので, そのうちの第 λ 成分を取り出してみよう。ベクトルの第 λ 成分を取り出すには, (1.18) のように, そのベクトルに逆基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\lambda$ を内積すればよい。その値を計算すると, 結果は,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu}\cdot \boldsymbol{e}^\lambda = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}^\lambda + v^\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu}\cdot \boldsymbol{e}^\lambda = \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\, v^\mu,$$

となり, 反変ベクトル v^μ の共変微分係数と一致する。この結果から,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu} = \left(\nabla_\nu v^\mu\right) \boldsymbol{e}_\mu,$$

であることがわかる。これでベクトルの共変微分の意味が見えた。共変微分 $\nabla_\mu v^\mu$ は, v^μ の偏導関数ではない。ベクトル $\boldsymbol{v}$ を x^ν について偏微分した結果のベクトルの第 μ 反変成分を与えるのだ。表記は $\nabla_\nu v^\mu$ だが, 意味としては $(\partial \boldsymbol{v}/\partial x^\nu)^\mu$ なのだ。

上の考察を参考にすると, 共変ベクトルの表偏微分の幾何学的意味も予想がつくだろう。ほぼ同一の手順を踏み, 幾何学的意味を確認してみよう。ベクトル $\boldsymbol{v}$ を逆ベクトル系での展開 $\boldsymbol{v} \equiv v_\mu \boldsymbol{e}^\mu$ で表現し, これを x^ν で偏微分してみると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{e}^\mu + v_\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}^\mu}{\partial x^\nu},$$

となる。この結果もベクトルであるので, 逆ベクトル系の第 λ 成分を取り出してみる。その場合, そのベクトルに基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\lambda$ を内積してやればよいことは (1.17) からわかる。計算をしていくと,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\nu}\cdot \boldsymbol{e}_\lambda = \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu}\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}_\lambda + v_\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}^\mu}{\partial x^\nu}\cdot \boldsymbol{e}_\lambda,$$

が導かれるが, ここで, 右辺第 2 項の計算をするにあたり, 一般のベクトルが $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}^{\alpha})\boldsymbol{e}_{\alpha}$ のように展開できることを考えると, 逆基本ベクトル $\boldsymbol{e}^{\mu}$ は $\boldsymbol{e}^{\mu} = (\boldsymbol{e}^{\mu}\cdot\boldsymbol{e}^{\alpha})\boldsymbol{e}_{\alpha} = g^{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}$ と展開されるはずである。よって, 上式は,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^{\nu}}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda} &= \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + v_{\mu}\frac{\partial g^{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda} \\
&= \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + v_{\mu}\left(g_{\alpha\lambda}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + g^{\mu\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda}\right),
\end{aligned}
$$

と変形される。さらに, 右辺第 2 項に対して (4.5) を, 第 3 項に対して,

$$
\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda} = \mathit{\Gamma}_{\lambda,\alpha\nu} = g_{\varepsilon\lambda}\mathit{\Gamma}^{\varepsilon}{}_{\alpha\nu},
$$

なる関係を適用すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^{\nu}}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda} &= \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - v^{\mu}\left(g_{\alpha\lambda}\mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\nu\varepsilon}\, g^{\mu\varepsilon} + g_{\alpha\lambda}\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\varepsilon}\, g^{\varepsilon\alpha} - g^{\mu\alpha}g_{\varepsilon\lambda}\mathit{\Gamma}^{\varepsilon}{}_{\alpha\nu}\right) \\
&= \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\lambda}\, v_{\mu},
\end{aligned}
$$

となり, やはりこの量も共変ベクトル v_{μ} の共変微分係数と一致した。この場合も,

$$
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^{\nu}} = (\nabla_{\nu}v_{\mu})\,\boldsymbol{e}^{\mu},
$$

が成立するということだ。つまり, 共変微分係数 $\nabla_{\nu}v_{\mu}$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ を x^{ν} について偏微分して得られるベクトルの第 μ 共変成分を与えるということだ。したがって, 共変微分係数 $\nabla_{\nu}v_{\mu}$ の幾何学的意味は記号で書くと $(\partial\boldsymbol{v}/\partial x^{\nu})_{\mu}$ ということだ。

共変微分係数は, ベクトルの真の変化量を各座標成分に対して投影した量である。座標についての単なる偏微分は座標軸の湾曲による見かけの変化量を含んでしまうことに対し, 共変微分係数は微小位置変化におけるベクトルの変化量を純粋に表している。

4.4　テンソルの共変微分

ベクトルを座標で偏微分した結果がテンソルでない同様に, 一般的なテンソルの偏微分もテンソルではない。よって, 一般のテンソルについても新たに共変微分を定義するべきである。本節では, 一般的な高階のテンソルの共変微分を導出し, その結果に基づいて, 物理学で頻繁に表れる 2 階のテンソルの公式を導出する。

4.4.1 高階のテンソル

共変ベクトルと反変ベクトルに関する共変微分は, (4.8) と (4.11) で定義されている。 これらの定義から, r 階反変, s 階共変の混合テンソル $T^{\kappa_0\cdots\kappa_{r-1}}_{\lambda_0\cdots\lambda_{s-1}}$ の共変微分係数が,

$$\nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \equiv \frac{\partial T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r} \mathit{\Gamma}^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=1}^{s} \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda_i}\, T^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s}, \tag{4.13}$$

のように拡張できることが類推できる。確かに, この量はテンソルの成分であり, 共変微分係数として定義してもよい。この量がテンソルとなることは, 以下のような数学的帰納法によって証明することができる。

まず, 1 階のテンソルに関しては, (4.8) と (4.11) で定義した量がテンソルであることは既に示したとおりである。次に, r 階反変で s 階共変の混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_{s-1}}$ については, (4.13) て定義された量がテンソルであると仮定しよう。さらに, 混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}$ に任意の反変ベクトル v^{κ_r} を乗じて得られる $r+1$ 階反変で s 階共変の混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \equiv T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} v^{\kappa_r}$ に関して同様の値を計算してみると,

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} &= \frac{\partial T^{\kappa_1\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r+1} \mathit{\Gamma}^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\alpha\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=1}^{s} \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda_i}\, T^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_r\kappa_{r+1}}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s} \\
&= \frac{\partial T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} v^{\kappa_{r+1}}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r} \mathit{\Gamma}^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s} v^{\kappa_{r+1}} \\
&\qquad + \mathit{\Gamma}^{\kappa_{r+1}}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} v^{\alpha} - \sum_{j=1}^{s} \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda_j}\, T^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s} v^{\kappa_{r+1}} \\
&= \left(\frac{\partial T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r} \mathit{\Gamma}^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}\, T^{\kappa_1\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=1}^{s} \mathit{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\lambda_j}\, T^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s} \right) v^{\kappa_{r+1}} \\
&\qquad + T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \left(\frac{\partial v^{\kappa_{r+1}}}{\partial x^\mu} + \mathit{\Gamma}^{\kappa_{r+1}}{}_{\mu\alpha}\, v^{\alpha} \right) \\
&= \nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \cdot v^{\kappa_{r+1}} + T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \cdot \nabla_\mu v^{\kappa_{r+1}},
\end{aligned}$$

という結果を得る。この量はテンソルどうしの積和になっている。よって, この結果自体もテンソルである。さらに, 混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s}$ に任意の共変ベクトル u_{λ_s} を乗じて得られる r 階反変で $s+1$ 階共変の混合テンソル $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s\lambda_2} \equiv T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} u_{\lambda_s}$ に関して同様の値を計算すると,

$$\nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s\lambda_{s+1}} = \nabla_\mu T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \cdot u_{\lambda_{s+1}} + T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s} \cdot \nabla_\mu u_{\lambda_{s+1}},$$

が得られ, この量もテンソルであることがわかる。以上をまとめてみると, 1 階の共変テンソル, および, 1 階の反変テンソルは, ベクトルの共変微分係数の公式と一致するので, (4.13) で定義された量がテンソルであること示されている。そこで, r 階反変, s 階共変のテンソルについても (4.13) がテンソルであることを仮定すると, 反変成分の階数を 1 つ増

加させた場合, 共変成分の階数を 1 つ増加させた場合の双方について, (4.13) がテンソルであることが示された。 よって, 任意の階数のテンソルに対し, (4.13) がテンソルとなることが証明された。したがって, (4.13) を r 階反変で s 階共変の混合テンソルの共変微分係数と定義する。¶

ところで, 先ほどの証明において, 通常の微分でみられる $\partial(fg)/\partial x = (\partial f/\partial x)g + f(\partial g/\partial x)$ なる関係式を連想しないだろうか。実は, テンソルの共変微分についても同様の関係が成り立つのである。ということで, 一般的な場合についてその性質が成り立つことを改めて検証してみよう。さて, r 階反変で s 階共変のテンソルは, $T^{\kappa_1\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\cdots\lambda_s\lambda_{s+1}} = R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}$ のようにテンソルの積で表すことができる。これを (4.13) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\mu(R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}) \\
&\quad= \left(\frac{\partial R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{p}\Gamma^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}R^{\kappa_0\cdots\alpha\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\cdots\lambda_q} - \sum_{j=1}^{q}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda_j}R^{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\alpha\cdots\lambda_s}\right)S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s} \\
&\qquad + R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}\left(\frac{\partial S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=p+1}^{r}\Gamma^{\kappa_i}{}_{\mu\alpha}S^{\kappa_{p+1}\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=q+1}^{s}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda_j}R^{\kappa_{p+1}\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\alpha\cdots\lambda_s}\right) \\
&\quad= \nabla_\mu R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}\cdot S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s} + R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}\cdot\nabla_\mu S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s},
\end{aligned}
$$

となり, テンソルの積における共変微分には, 通常の微分と同様の関係があることが導かれる。結果だけを書くと,

$$
\nabla_\mu(R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}) = \nabla_\mu R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}\cdot S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s} + R^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}\cdot\nabla_\mu S^{\kappa_{p+1}\cdots\kappa_r}_{\lambda_{q+1}\cdots\lambda_s}, \tag{4.14}
$$

となる。この関係式は, いかなる階数のテンソルでも成立する。次項で導出した公式を適用し, 2 階テンソルに関する共変微分の公式を導出する。

4.4.2 二階のテンソル

前項で一般的な高階のテンソルについて公式を導出したので, 2 階のテンソルの共変微分は容易に書き下すことができる。物理学では 2 階のテンソルが頻繁に現れるため, その公式を明らかにすることは重要である。

共変微分の公式 (4.13) を利用し, 2 階のテンソルの共変微分の公式を書いておこう。共変テンソル $T_{\mu\nu}$, 反変テンソル $T^{\mu\nu}$, 混合テンソル $T_\mu{}^\nu$, $T^\mu{}_\nu$ を共変微分すると,

$$
\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}T_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}T_{\mu\alpha}, \tag{4.15a}
$$

$$
\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha}T^{\mu\alpha}, \tag{4.15b}
$$

$$\nabla_\lambda T_\mu{}^\nu = \frac{\partial T_\mu{}^\nu}{\partial x^\mu} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\mu} T_\alpha{}^\nu + \mathit{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\alpha} T_\mu{}^\alpha, \tag{4.15c}$$

$$\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu = \frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\alpha} T^\alpha{}_\nu - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\nu} T^\mu{}_\alpha, \tag{4.15d}$$

が得られる。これらの数式を見ると, 公式 (4.13) が単純な規則性で書かれていることを再認識するだろう。右辺は, x^λ についての偏微分の後, テンソルの添え字を左から一つずつ媒介変数 α に書き換え, クリストッフェル記号を乗じて, 加算もしくは減算するのだ。対称とする (α で置き換えた) 添え字が反変成分なら加算, 共変なら減算である。乗じられるクリストッフェル記号については, 対称とする添え字が反変成分ならば, 第 1 添え字に α で置き換えた添え字を置き, 第 2 添え字は λ, 第 3 添え字を α とする。対称とする添え字が共変成分ならば, 第 1 添え字が α, 第 2 添え字に λ, 第 3 添え字に対称とする添え字を置く。

前項で 1 階のテンソルの共変微分が, $\partial \boldsymbol{u}/\partial x^\nu$ のようなベクトル微分と関係があることを示した。それを参考に, 2 階の混合テンソル $T_\nu{}^\mu$ の共変微分を確認してみよう。混合テンソル $T_\nu{}^\mu$ は, $T_\nu{}^\mu u^\nu$ のようにベクトルを変換する変換行列として使用されることが多い。そこで, $\boldsymbol{v} = T_\nu{}^\mu u^\nu \boldsymbol{e}_\mu$ とおいて, 偏導関数 $\partial \boldsymbol{v}/\partial x^\lambda$ を調べてみよう。機械的に計算を進めていくと,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\Big(T_\nu{}^\mu u^\nu \boldsymbol{e}_\mu\Big) \;=\; \frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} u^\nu \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda} \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\mu u^\nu \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\lambda} \\
&= \frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} u^\nu \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda} \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\eta u^\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_\eta}{\partial x^\lambda} \cdot \boldsymbol{e}^\mu \right) \boldsymbol{e}_\mu \\
&= \frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} u^\nu \boldsymbol{e}_\mu + T_\nu{}^\mu \left(\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\lambda} + \mathit{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\alpha} u^\alpha - \mathit{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\alpha} u^\alpha \right) \boldsymbol{e}_\mu + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} T_\nu{}^\eta u^\nu \boldsymbol{e}_\mu \\
&= \left[T_\nu{}^\mu \nabla_\lambda u^\nu + \left(\frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} - T_\alpha{}^\mu \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\nu} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\lambda} T_\nu{}^\alpha \right) u^\nu \right] \boldsymbol{e}_\mu,
\end{aligned}$$

が得られる。ベクトルの共変微分を参考にすると, 得られた右辺のブラケット ([]) で囲まれた数式が $\nabla_\lambda T_\nu{}^\mu u^\nu$ と考えるべきだろう。さらに, 解析学における微分の公式と同様に,

$$\nabla_\lambda T_\nu{}^\mu u^\nu = \left(\nabla_\lambda T_\nu{}^\mu\right) u^\nu + T_\nu{}^\mu \left(\nabla_\lambda u^\nu\right),$$

が成立するようにテンソル $T_\nu{}^\mu$ の共変微分を決めると,

$$\nabla_\lambda T_\nu{}^\mu = \frac{\partial T_\nu{}^\mu}{\partial x^\lambda} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\nu} T_\alpha{}^\mu + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\alpha} T_\nu{}^\alpha,$$

でなければならない。この数式は, (4.15c) と同一である。このように, ベクトル表記からテンソルの共変微分を定義することもできるのだ。他の混合テンソルも同様にベクトル表記から共変微分を導くことができるはずだ。

4.5 計量テンソルの共変微分

計量テンソルは 2 階のテンソルであるが, 曲がった空間の性質を決めてしまう特別なテンソルであるので, 共変微分に関して特殊な性質をもっている。具体的に言うと, 計量テンソルの共変微分はゼロなのだ。

計量テンソルがゼロであることを証明する材料は既にそろっている。むしろ, 証明が完了していると言っても過言ではない。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変微分がゼロになることを示そう。計量テンソルは 2 階の共変テンソルであるので, 先ほど導出した公式 (4.15a) を用いて共変微分係数を書くと,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha},$$

が得られる。ついでに, 逆行列 $g^{\mu\nu}$ の共変微分係数も書いておこう。その逆行列は 2 階の反変テンソルであるので, 公式 (4.15b) を用いると,

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\alpha} g^{\alpha\nu} + \mathit{\Gamma}^\nu{}_{\lambda\alpha} g^{\mu\alpha},$$

が得られる。これらの右辺に見覚えはないだろうか? 既に導出した関係式 (4.4) と (4.5) に注目すると,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{4.16a}$$

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0, \tag{4.16b}$$

という関係が得られる。つまり, 計量テンソルの共変微分は, 必ず, ゼロになる。計量テンソルの共変微分がゼロとなることは, 基本ベクトルを用いた表記:

$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu, \qquad \mathit{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu} \cdot \boldsymbol{e}^\kappa,$$

を利用しても証明することができる。実際に計算してみると,

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\mu} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha\right)(\boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\nu) - \frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\nu} \cdot \boldsymbol{e}^\alpha (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\alpha) \\
&= \boldsymbol{e}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\lambda} + \boldsymbol{e}_\mu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\mu} \cdot \boldsymbol{e}_\nu - \frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\nu} \cdot \boldsymbol{e}_\mu = 0,
\end{aligned}$$

が得られるため, 計量テンソルの共変微分がゼロであると結論できるのだ。第 2 行目から第 3 行目への数式変形では, $\boldsymbol{e}^\alpha$ と内積をとることによってベクトルの第 α 反変成分が, $\boldsymbol{e}_\alpha$ と内積をとることによってベクトルの第 α 共変成分が抽出できることを利用している。も

う少し説明すると, ベクトルの反変成分と別のベクトルの共変成分の積和によって, 二つのベクトルの内積が計算できる。そのような技巧によって第2行目から第3行目への数式変形を実行した。第3行目の数式変形では, ベクトルの2階微分可能性から導かれる性質:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\lambda}{\partial x^\mu},$$

を利用した。逆ベクトル系の計量テンソル $g^{\mu\nu}$ についても, 基本ベクトルを用いて同様に, 共変微分がゼロであることが証明できる。計算手順がまったく同様なので, その証明は省略する。

計量テンソルと逆ベクトル系の計量テンソルは互いに逆行列の関係があるので $g_{\mu\lambda}\, g^{\lambda\nu} = {\delta_\mu}^\nu$ なる関係が成立する。この関係式によると, クロネッカーのデルタ ${\delta_\mu}^\nu$ はテンソルの積であるので, これもテンソルであるといえる。ということは, クロネッカーのデルタについても共変微分を定義してもよいということである。さて, 共変微分を計算すると,

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu {\delta_\nu}^\lambda &= \frac{\partial {\delta_\nu}^\lambda}{\partial x^\mu} - {\mathit{\Gamma}^\alpha}_{\mu\nu} {\delta_\alpha}^\lambda + {\mathit{\Gamma}^\lambda}_{\mu\alpha} {\delta_\nu}^\alpha \\
&= -{\mathit{\Gamma}^\lambda}_{\mu\nu} + {\mathit{\Gamma}^\lambda}_{\mu\nu} = 0,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

となる。つまり, クロネッカーのデルタの共変微分はゼロである。クロネッカーのデルタは, もともと座標に関係しない量であるので, この共変微分がゼロになるというのは当然の結果である。もし, この値がゼロにならなければ, リーマン幾何学自体の正当性が怪しまれるだろう。そう考えると, この結果は, ひと安心といったところだろうか。

4.6　勾配・発散・回転

リーマン幾何学においても, ベクトル解析でみられる勾配・発散・回転を定義することができる。当然, リーマン幾何学では, それらの量がテンソルになるように定義されるべきであるので, 共変微分を用いて定義される。

スカラ f の勾配は, スカラを共変微分した値で定義される。すなわち,

$$f_\lambda \equiv \nabla_\lambda f = \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}, \tag{4.18}$$

がリーマン幾何学における勾配ベクトルである。数式に現れているように, この量は共変ベクトルである。しかし, ベクトルを基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の一次結合で表現することを考えると, 勾配ベクトルを反変ベクトルとして表現した方がよいだろう。反変ベクトルで表現するなら, 勾配ベクトルは,

$$f^\kappa = g^{\lambda\kappa} f_\lambda = g^{\lambda\kappa} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}, \tag{4.19}$$

のように記述することができる。

電荷から発生する電場のように, ベクトルの湧き出しは, ベクトルの発散と呼ばれる量によって評価される。反変ベクトル v^μ の発散は $\nabla_\mu v^\mu$ で定義される。これをもう少し計算すると,

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu v^\mu &= \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu{}_{\mu\alpha} v^\alpha \\
&= \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^\mu} v^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, v^\mu)}{\partial x^\mu},
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

なる結果が得られる。この変形に関して, (4.6) の関係を用いた。

電流と磁場のように, 右ねじの法則に従って発生するベクトルは, ベクトルの回転と呼ばれる量によって評価される。共変ベクトル v_λ の回転は $\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu$ で定義される。計算してみると,

$$
\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda}, \tag{4.21}
$$

のようにクリストッフェル記号が打ち消し合い, ベクトル成分の導関数のみが残っている。ベクトルの回転は, この数式が示すように 2 階の共変テンソルである。ベクトル解析では, 回転はベクトルであった。実は, 3 次元の場合に限り, この 2 階の共変テンソルから反変ベクトルをつくることができる。前章で既に紹介したように,

$$
\frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{\kappa\mu\lambda} \left(\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\kappa\mu\lambda} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}, \tag{4.22}
$$

がベクトル解析における回転ベクトルに相当する。この反変ベクトルは, 共変ベクトルの回転 (2 階の共変テンソル) に対応するデュアルテンソルである。

さらに, ベルトラミの微分係数も紹介しておこう。ベルトラミの微分係数は, 第 1 種と第 2 種の微分係数がある。ベルトラミの第 1 種微分係数は勾配ベクトルの長さの自乗, すなわち,

$$
\Delta_1 f \equiv g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}, \tag{4.23}
$$

で定義される。ベルトラミの第 2 種微分係数は, 勾配ベクトルの発散, すなわち, ラプラシアンとよばれる量であり,

$$
\Delta_2 f \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \right), \tag{4.24}
$$

で定義される。

4.7　3次元座標系におけるベクトル微分

円筒座標系と球座標系に対し, 前節で導出した勾配, 発散, 回転の公式を用いて具体的にベクトルの微分を計算しよう。本節での計算によって, ベクトル解析における微分公式が比較的簡単に得られる。ベクトル解析で勾配, 発散, 回転のベクトル公式を導出した経験がある読者なら, リーマン幾何学の公式を用いることによってベクトル微分を計算する労力が大幅に軽減されることに気づくだろう。

4.7.1　円筒座標系

円筒座標系 $[r, \varphi, z]$ についてベクトル微分を実行しよう。ここで, r は座標系における z 軸からの距離, φ は方位角, z は対称軸方向の位置を表す。それらの座標軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。さらに, リーマン幾何学で扱う座標成分として, $[x^1, x^2, x^3] \equiv [r, \varphi, z]$ とする。そのとき, $\boldsymbol{e}_\mu \equiv \partial \boldsymbol{x}/\partial x^\mu$ で定義される ($\boldsymbol{x}$ は位置ベクトル) 基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{e}_2 = r\,\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z,$$

のような関係がある。さらに, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

と書くことができる。これで計算のための準備が整った。

スカラの勾配とラプラシアン　スカラ f が与えられたとき, そのスカラの勾配ベクトルを (4.19) によって計算してみると,

$$\begin{aligned}
\nabla f &= g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda f \cdot \boldsymbol{e}_\mu = g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \boldsymbol{e}_\mu \\
&= \frac{\partial f}{\partial r} \boldsymbol{e}_0 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{e}_2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial r} \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}$$

となる。さらに, (4.24) で定義されるラプラシアンを計算してみると,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},
\end{aligned}
$$

となる。結果を改めて書くと,

$$
\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z, \tag{4.25}
$$

$$
\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \tag{4.26}
$$

が得られる。これらは, ベクトル解析の公式と一致する。

発散と回転　ベクトル $\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + v_z\boldsymbol{e}_z$ が与えられたとする。このベクトルの発散と回転を計算しよう。まず, 各座標に対する単位ベクトルと基本ベクトルの関係から, ベクトル $\boldsymbol{v}$ の反変成分は,

$$
v^1 = v_r, \qquad v^2 = \frac{1}{r}v_\varphi, \qquad v^3 = v_z,
$$

であることは明らかである。早速, (4.21) によって発散を計算してみると,

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \nabla_\mu v^\mu &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}v^\mu}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r\frac{v_\varphi}{r}) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,v_z)\right] \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},
\end{aligned}
$$

を得る。ベクトルの回転については, (4.22) にしたがって計算すると,

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{v} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\kappa\mu\lambda}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}\boldsymbol{e}_\kappa \\
&= \frac{1}{r}\left\{\left[\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(rv_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_1\right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_2 + \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_3\right\} \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}},
\end{aligned}
$$

が得られる。これらのついても, 改めて結果だけを書くと,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{v}=&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}z}\right)\boldsymbol{e}_r\\&+\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}},\end{aligned} \tag{4.28}$$

が得られる。これらの結果はすべて, ベクトル解析による球座標のベクトル微分公式と一致している。

4.7.2 球座標系

球座標系 $[r,\theta,\varphi]$ についてベクトル微分を実行しよう。それらの座標軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ とする。さらに, リーマン幾何学で扱う座標成分として, $[x^1,x^2,x^3]\equiv[r,\theta,\phi]$ とする。そのとき, $\boldsymbol{e}_\mu\equiv\partial\boldsymbol{x}/\partial x^\mu$ で定義される ($\boldsymbol{x}$ は位置ベクトル) 基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_r,\qquad \boldsymbol{e}_2=r\,\boldsymbol{e}_\theta,\qquad \boldsymbol{e}_3=r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi,$$

のような関係がある。さらに, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は,

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{bmatrix},$$

と書くことができる。これで計算のための準備が整った。

スカラの勾配とラプラシアン スカラ f が与えられたとき, そのスカラの勾配ベクトルを (4.19) によって計算してみると,

$$\begin{aligned}\nabla f&=g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda f\cdot\boldsymbol{e}_\mu=g^{\mu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\boldsymbol{e}_\mu\\&=\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_3\\&=\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,\end{aligned}$$

となる。さらに, (4.24) で定義されるラプラシアンを計算してみると,

$$\nabla^2 f=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g}\,g^{\mu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2},
\end{aligned}
$$

となる。結果を改めて書くと,

$$
\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{4.29}
$$

$$
\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}, \tag{4.30}
$$

が得られる。これらは, ベクトル解析の公式と一致する。

発散と回転　ベクトル $\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ が与えられたとする。このベクトルの発散と回転を計算しよう。まず, 各座標に対する単位ベクトルと基本ベクトルの関係から, ベクトル $\boldsymbol{v}$ の反変成分は,

$$
v^1 = v_r, \qquad v^2 = \frac{1}{r}v_\theta, \qquad v^3 = \frac{1}{r\sin\theta}v_\varphi,
$$

であることは明らかである。早速, (4.21) によって発散を計算してみると,

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \nabla_\mu v^\mu &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}v^\mu}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\, v_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, v_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\, v_\varphi)\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi},
\end{aligned}
$$

を得る。ベクトルの回転については, (4.22) にしたがって計算すると,

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{v} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\kappa\mu\lambda}\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu}\boldsymbol{e}_\kappa \\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, v_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rv_\theta)\right]\boldsymbol{e}_1\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left[\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\, v_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_2 + \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_3\right\} \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r \\
&\qquad\qquad + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi,
\end{aligned}
$$

が得られる。これらのついても, 改めて結果だけを書くと,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{r\sin\theta}&\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r \\ &+ \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi,\end{aligned} \tag{4.32}$$

が得られる。これらの結果はすべて, ベクトル解析による球座標のベクトル微分公式と一致している。

実際に計算した人ならわかるだろうが, ベクトル解析でこの公式を導出するのは骨の折れる作業である。しかし, リーマン幾何学を用いると非常に簡単に, これらの公式を導出することができた。実は, ベクトル解析でこれらの公式を導出するのが煩雑になるのは, 単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ が場所によって異なるため, 単位ベクトルも座標で微分できてしまうことが理由である。リーマン幾何学では単位ベクトルの微分係数はクリストッフェル記号の中に収められ, 上の公式を導出するときには, 既にクリストッフェル記号が相殺された形になっているので計算が楽になっているのである。言い換えれば, ベクトル解析でこれらの計算をしていたときには, どうせ相殺されるはずのクリストッフェル記号を無駄に計算していたことになる。

4.8 ベクトルの平行移動

リーマン幾何学におけるベクトルの平行移動について考えてみよう。ベクトルを平行移動するということは, ベクトルを不変に保ったまま位置を変えるということである。例えば, ベクトル $\boldsymbol{v}$ を平行移動して微小変位 $\mathrm{d}x^\kappa$ させることは,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu = 0, \tag{4.33}$$

なる条件を満たすようにベクトルを移動させることである。ユークリッド空間では, この条件は単純に, $\mathrm{d}v^\kappa \equiv (\partial v^\kappa/\partial x^\mu)\mathrm{d}x^\mu = 0$ と書いた場合と一致する。しかし, 曲がった空間において, 平行移動の条件はそのような簡単な形にならないことは, 共変微分の幾何学的解釈として既に説明したとおりである。幾何学的解釈によると, 曲がった空間における平行移動の条件は,

$$\delta v^\kappa \equiv \mathrm{d}v^\kappa + \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} v^\nu \mathrm{d}x^\mu = 0, \tag{4.34}$$

のように共変微分がゼロとなる条件と一致するのである。ただし, $\delta v^\kappa = \mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}^\kappa$ である。つまり, 空間上のある点 P に存在するベクトル v^κ を微小変位 $\mathrm{d}x^\mu$ だけ離れた点 Q に平行

移動したとき, そのベクトルは

$$v^{\kappa}(\mathrm{Q}) = v^{\kappa}(\mathrm{P}) - \mathit{\Gamma}^{\kappa}{}_{\mu\nu} v^{\nu} \mathrm{d}x^{\mu}, \tag{4.35}$$

に変化しているということである。 平行移動してもベクトルが変化しないユークリッド空間との違いは, 右辺のクリストッフェル記号が含まれる第 2 項に現れている。つまり, クリストッフェル記号は, 曲がった空間を平行移動した際のベクトルの変化量に関係している。

平行移動の性質を調べてみよう。ユークリッド幾何学では平行移動によってベクトルの長さが不変あり, 二つのベクトルのなす角は, 平行移動に対して不変である。さて, リーマン幾何学でもその性質は成り立つのであろうか。まず, ベクトルの大きさの自乗 $(v)^2 \equiv g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}$ の微分を計算すると,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(v)^2 &\equiv \mathrm{d}(g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}) \\ &= \mathrm{d}g_{\mu\nu} \cdot v^{\mu} v^{\nu} + g_{\mu\nu} \mathrm{d}v^{\mu} \cdot v^{\nu} + g_{\mu\nu} v^{\mu} \cdot \mathrm{d}v^{\nu} \\ &= \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \mathit{\Gamma}^{\beta}{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \mathit{\Gamma}^{\beta}{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} \right) v^{\mu} v^{\nu} \mathrm{d}x^{\alpha} = v^{\mu} v^{\nu} \cdot \delta g_{\mu\nu} = 0, \end{aligned}$$

が得られる。この計算結果によると, ベクトルの長さは平行移動に対して不変である。さて, もう一つの反変ベクトル u^{μ} についても平行移動し, そのときの内積 $g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu}$ の変化を計算すると, 先ほどの計算過程を利用すると,

$$\mathrm{d}(g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu}) = u^{\mu} v^{\nu} \cdot \delta g_{\mu\nu} = 0,$$

であることが容易にわかる。平行移動によって, ベクトルの長さが不変であり, 二つのベクトルの内積が不変であることから, 二つのベクトルがなす角も不変であることが導かれる。なぜなら, ベクトル u^{μ} と v^{μ} がなす角度 θ は,

$$\cos\theta \equiv \frac{g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} \cdot g_{\varepsilon\eta} v^{\varepsilon} v^{\eta}}},$$

によって定義されるからである。この式の分母も分子も不変であるので, 二つのベクトルがなす角は平行移動によって不変であるというわけだ。曲がった空間を取り扱っていても, リーマン幾何学における平行移動は, ベクトルの長さと二つのベクトルの角度に注目すればユークリッド幾何学と同様の性質が成立するのだ。

ある経路に沿って点を移動させた場合を考えよう。この経路における座標を x^{μ}, 経路長を s とすると, この経路に沿った単位接線ベクトルは $\mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}s$ と表される。この単位接線ベクトルが平行移動となる経路を考えてみよう。平行移動とは, 既にみたようにベクトルの共変微分がゼロである移動である。幾何学的解釈で説明したように, ベクトルの共変微

分はベクトルの実質的な変化量を表すので, ここで考える移動とは, 物理学的には加速度を生じない経路である。単位接線ベクトル $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ が平行移動となる条件は,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}+\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}=0,$$

である。この式に $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ を掛けて μ について縮約をとれば,

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\nu}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}=0,$$

という関係が得られる。これは測地線を表す式である。よって, 経路に沿った単位接線ベクトルが平行移動となる経路は測地線である。物理的には, 測地線に沿って移動する物体には, 加速度が作用しないことを意味する。例えば, 東京からニューヨークへの航空機の航路はメルカトル図法で描くと曲がったコースとなるが, それは球面上の測地線であるため, 航空機には加速度は作用していない。言い換えると, 無風状態で地球の自転が無視できるとすれば[1], 操縦桿をまっすぐに保って飛行する航空機は測地線をたどるのだ。

リーマン幾何学はアインシュタインの重力理論を記述する道具になっているが, アインシュタインの理論では, 重力はもはや力ではなく, 質量がつくり出す時空の歪みということになっている。つまり, 重力によって質量に引きつけられる運動は, 単に, 測地線に沿った運動ということになる。光でさえも, その近傍では, 時空のひずみによって曲がった測地線に沿って運動することとなる。重力と加速度が等価である前提に立つアインシュタインの重力理論では, 重力場を自由落下する観測者は, 加速度を一切感じず, 無重力状態との区別がつかない。その状況はまさに, 測地線に沿った運動が平行移動であるため, 加速度を感じないという性質で記述することができるのである。

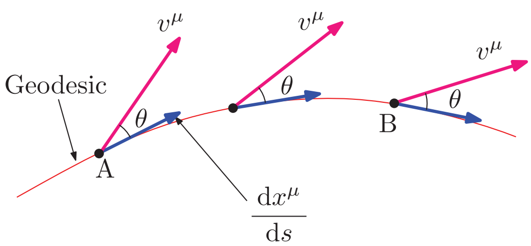

図 4.2: 測地線と平行移動

平行移動と測地線の関係がわかったところで, 平行移動の定義を改めて言い換えてみよう。上では, 平行移動された 2 つのベクトルのなす角が一定になることを述べた。それは任意のベクトルに対して成り立つのであるから, 一方を測地線に沿った単位接線ベクトルとしてもよい。それを踏まえて, 「ベクトルの平行移動は, ある点 A に存在するベクトルを別の点 B に平行移動するということは, 点 A と B を通る測地線を描き, ベクトルが測地

[1] 厳密には, 地球の自転によってコリオリの力が作用するため, 無風状態であっても航空機は飛行を継続するとともに航路が測地線から少しずつずれる。

線となす角度と長さを変えないようにして, ベクトルを移動することである」と定義することができる。(図 4.2 参照)

4.9　フレネ・セレの公式

空間中の曲線について, フレネ・セレの公式によって, 法線や曲率が定式化される。曲率は, ユークリッド空間では直線からのずれを表し, リーマン空間では測地線からのずれを表す。本節では, リーマン空間でのフレネ・セレの公式を導出した後, ユークリッド空間でフレネ・セレの公式を取り扱うことによって, その幾何学的な意味を調べる。

4.9.1　法線と曲率の定式化

リーマン空間中の座標 x^μ を通る曲線を考えよう。座標 x^μ は $x^\mu \equiv x^\mu(s)$ のように長さ s を媒介変数とする関数で表現できるものとする。この座標を媒介変数 s で微分して得られるベクトル:

$$\xi^\mu_{(1)} \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s},$$

は, 長さが 1 のベクトル, すなわち, 単位ベクトルである。なぜなら, リーマン空間中の線素 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ から,

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\xi^\nu_{(1)} = 1,$$

が得られるからである。ここから, 曲線に沿って共変微分することを考えよう。曲線に沿った共変微分を与える演算子を $\delta/\delta s$ と書くことにする。曲線に沿った共変微分とは, 共変微分の演算子 ∇_μ と曲線に沿った単位ベクトル $\xi^\mu_{(1)}$ との内積, すなわち,

$$\frac{\delta}{\delta s} \equiv \xi^\mu_{(1)}\nabla_\mu,$$

である。ベクトル $\xi^\mu_{(1)}$ が単位ベクトルであることを表現する関係式 $g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\xi^\nu_{(1)} = 1$ を曲線に沿って共変微分すると,

$$g_{\mu\nu}\frac{\delta\xi^\mu_{(1)}}{\delta s}\xi^\nu_{(1)} + g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\frac{\delta\xi^\nu_{(1)}}{\delta s} = 0,$$

である。この数式に $\delta g_{\mu\nu}/\delta s$ が含まれないのは, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変微分がゼロであることが理由である。さらに, 計量テンソルが対象テンソルであることから, 上に記述した関係式は,

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu_{(1)}\frac{\delta\xi^\nu_{(1)}}{\delta s} = 0, \tag{4.36}$$

のように書き換えられる。この数式は$\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s \neq 0$の条件で, 二つのベクトル$\xi^{\mu}_{(1)}$と$\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s$が直交することを意味する。二つのベクトルの直交性を保証しない$\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s = 0$とはどのような条件だろう? その条件を調べるため, 共変微分の演算子を展開すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\xi^{\mu}_{(1)}}{\delta s} &= \xi^{\alpha}_{(1)}\nabla_{\alpha}\xi^{\mu}_{(1)} = \xi^{\alpha}_{(1)}\left(\frac{\partial\xi^{\mu}_{(1)}}{\partial x^{\alpha}} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\xi^{\beta}_{(1)}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s},
\end{aligned}
$$

のように数式変形できる。この数式の右辺をゼロと等号で結ぶと前章で紹介した測地線の方程式になる。つまり, $\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s = 0$となる条件とは, 曲線$x^{\mu}$が測地線であることを意味する。そのため, 本節で取り扱う曲線は測地線を除外するものとする。

新たなベクトル$\kappa_{(1)}\xi^{\mu}_{(2)} \equiv \delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s$を定義しよう。ここで, $\kappa_{(1)}$はベクトル$\delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s$の長さであり, $\xi^{\mu}_{(2)}$は単位ベクトルである。つまり, $g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\nu}_{(2)} = 1$である。しかも, $\xi^{\mu}_{(2)}$は$\xi^{\mu}_{(1)}$と直交するので, $g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\nu}_{(2)} = 0$が成立する。二つのベクトル$\xi^{\mu}_{(1)}$と$\xi^{\mu}_{(2)}$の内積がゼロであることを示す数式を$s$について共変微分すると,

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\mu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(2)}}{\delta s} + g_{\mu\mu}\xi^{\nu}_{(2)}\frac{\delta\xi^{\mu}_{(1)}}{\delta s} &= g_{\mu\mu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(2)}}{\delta s} + g_{\mu\nu}\xi^{\nu}_{(2)}\kappa_{(1)}\xi^{\mu}_{(2)} \\
&= \kappa_{(1)} + g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(2)}}{\delta s} = 0,
\end{aligned}
$$

が得られる。一方, $\xi^{\mu}_{(2)}$が単位ベクトルであることを示す数式を共変微分すると,

$$
g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(2)}\frac{\partial\xi^{\nu}_{(2)}}{\partial s} = 0,
$$

が得られる。得られた二つの数式から, ベクトル$\kappa_{(1)}\xi^{\mu}_{(1)} + \delta\xi^{\mu}_{(2)}/\delta s$が, $\xi^{\mu}_{(1)}$と$\xi^{\mu}_{(2)}$の双方と直交することがわかる。続いて, 新たなベクトル:

$$
\kappa_{(2)}\xi^{\mu}_{(3)} \equiv \kappa_{(1)}\xi^{\mu}_{(1)} + \frac{\delta\xi^{\mu}_{(2)}}{\delta s},
$$

を定義しよう。ここでも, $\kappa_{(3)}$はベクトルの大きさであり, $\xi^{\mu}_{(3)}$は単位ベクトルである。 先ほど示した数式に注意すると, $\xi^{\mu}_{(3)}$が, $\xi^{\mu}_{(1)}$と$\xi^{\mu}_{(2)}$の双方に対して垂直であることが示せる。しかも, $\xi^{\mu}_{(3)}$が単位ベクトルであることを併せて数式で表現すると,

$$
g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\nu}_{(3)} = 0, \qquad g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\nu}_{(3)} = 0, \qquad g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(3)}\xi^{\nu}_{(3)} = 1,
$$

が得られる。これら三つの数式を曲線に沿って共変微分すると,

$$g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(3)}}{\delta s}=0,\quad \kappa_{(2)}+g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(2)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(3)}}{\delta s}=0,\quad g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(3)}\frac{\delta\xi^{\nu}_{(3)}}{\delta s}=0,$$

が得られる。次の段階として,

$$\kappa_{(3)}\xi^{\mu}_{(4)}\equiv\kappa_{(2)}\xi^{\mu}_{(2)}+\frac{\delta\xi^{\mu}_{(3)}}{\delta s},$$

なるベクトルを定義する。新たに定義されたベクトル $\xi^{\mu}_{(4)}$ が, $\xi^{\mu}_{(1)}$, $\xi^{\mu}_{(2)}$, $\xi^{\mu}_{(3)}$ のどれとも直交するすることが容易に証明できる。

同様の操作を続けて単位行列を逐次定義することができるはずだ。繰り返した結果, 第 n 番目のベクトル:

$$\kappa_{(n-1)}\xi^{\mu}_{(n)}\equiv\kappa_{(n-2)}\xi^{\mu}_{(n-2)}+\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n-1)}}{\delta s},$$

までが定義されたとしよう。ここでも, $\kappa_{(n-1)}$ はベクトルの大きさ, $\xi^{\mu}_{(n)}$ は単位ベクトルである。さらに, $\xi^{\mu}_{(n)}$ はベクトル $\xi^{\mu}_{(1)},\xi^{\mu}_{(2)},\dots,\xi^{\mu}_{(n-1)}$ のすべてと直交する。これらの情報から,

$$\begin{aligned}&g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\mu}_{(n)}=0,\quad g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\mu}_{(n)}=0,\quad \dots,\quad g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(n-1)}\xi^{\mu}_{(n)}=0,\\&g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(n)}\xi^{\mu}_{(n)}=1,\end{aligned}$$

なる関係式が成立する。 これらの関係式を曲線に沿って共変微分すると,

$$\begin{aligned}&g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(1)}\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s}=0,\qquad g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(2)}\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s}=0,\\&\qquad\qquad\vdots\\&g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(n-2)}\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s}=0,\\&\kappa_{(n-1)}+g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(n-1)}\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s}=0,\qquad g_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{(n)}\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s}=0,\end{aligned}$$

が得られる。これまでと同様に考えれば,

$$\kappa_{(n)}\xi_{(n+1)}\equiv\kappa_{(n-1)}\xi^{\mu}_{(n-1)}+\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s},$$

のように単位定義されたベクトル $\xi^{\mu}_{(n+1)}$ は, $\xi^{\mu}_{(1)},\xi^{\mu}_{(2)},\dots,\xi^{\mu}_{(n)}$ のすべてのベクトルと内積をとるとゼロになる。しかし, n 次元空間を考えているのであれば直交するベクトルは n 個までしかとることができない。つまり, 内積がゼロとなるためには,

$$\kappa_{(n)}\xi_{(n+1)}=\kappa_{(n-1)}\xi^{\mu}_{(n-1)}+\frac{\delta\xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s}=0,$$

でなければならない。したがって,

$$\frac{\delta \xi^{\mu}_{(n)}}{\delta s} = -\kappa_{(n-1)} \xi^{\mu}_{(n-1)},$$

なる関係式が得られるのである。ここまでに得られた関係式をまとめると,

$$\begin{bmatrix} \delta\xi^{\mu}_{(1)}/\delta s \\ \delta\xi^{\mu}_{(2)}/\delta s \\ \delta\xi^{\mu}_{(3)}/\delta s \\ \vdots \\ \delta\xi^{\mu}_{(n-1)}/\delta s \\ \delta\xi^{\mu}_{(n)}/\delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\kappa_{(1)} & 0 & \kappa_{(2)} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{(n-1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{\mu}_{(1)} \\ \xi^{\mu}_{(2)} \\ \xi^{\mu}_{(3)} \\ \vdots \\ \xi^{\mu}_{(n-1)} \\ \xi^{\mu}_{(n)} \end{bmatrix}, \qquad (4.37)$$

のように, 定義された単位ベクトルを曲線に沿って共変微分した結果が 1 次変換の形で記述できることがわかる。この関係式は**フレネ・セレの公式**と呼ばれる。ここで, $\xi_{(1)}$ は曲線の接線であり, $\xi_{(m)}$ は第 m 法線 $(m = 1, \ldots, n-1)$, $\kappa_{(m)}$ は第 m 曲率と呼ばれる。特に, n 次元空間では第 $n-1$ 曲率まで定義できることは, (4.37) から明らかである。既に述べたように, 接線 $\xi^{\mu}_{(1)}$ とすべての法線 $\xi^{\mu}_{(m)}$ は互いに直交する。

4.9.2 幾何学的な解釈

曲率 $\kappa_{(m)}$ は曲線のカーブの強さを表す指標である。その解釈を説明するため, 半径 R の円を考えよう。円が原点を中心とするなら, 曲線上の任意の位置は 2 次元のカルテシアン座標を用いて,

$$x^1 = R\cos\theta, \qquad x^2 = R\sin\theta,$$

なる数式で記述できる。その曲線上の長さの微分は $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$ であることに注意して, 座標を長さ s について微分すると,

$$\xi^1_{(1)} = -\sin\theta, \qquad \xi^2_{(1)} = \cos\theta,$$

が得られる。これは曲線の接線ベクトルである。この例ではカルテシアン座標を考えているので, 曲線に沿った共変微分が s について微分する演算と等しいのだ。接線ベクトルを曲線に沿って微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}\xi^1_{(1)}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\cos\theta}{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}\xi^2_{(1)}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\sin\theta}{R},$$

が得られる。フレネ・セレの公式によると, このベクトルは $\kappa_{(1)}\xi^{\mu}_{(1)}$ に等しいはずなので,

$$\kappa_{(1)} = \frac{1}{R}, \qquad \xi^1_{(1)} = -\cos\theta, \qquad \xi^2_{(1)} = -\sin\theta,$$

である。この例は 2 次元で考えているので, フレネ・セレの公式で取り出せるベクトルは接線ベクトル $\xi^\mu_{(1)}$ と第 1 法線 $\xi^\mu_{(2)}$ までである。ここで取り出せた第 1 曲率 $\kappa_{(1)}$ は曲線の半径の逆数を与えている。この例は曲線が円である場合を取り扱ったが, 一般の曲線においても, 第 1 曲率が瞬時的な半径 (曲率半径) の逆数と考えればよい。

三次元のカルテシアン座標系の曲線を例に, フレネ・セレの公式を適用しよう。三次元におけるフレネセレの公式は,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\xi^\mu_{(1)}}{\mathrm{d}s} &= \kappa_{(1)}\xi^\mu_{(2)}, \\
\frac{\mathrm{d}\xi^\mu_{(2)}}{\mathrm{d}s} &= -\kappa_{(1)}\xi^\mu_{(1)} + \kappa_{(2)}\xi^\mu_{(3)}, \\
\frac{\mathrm{d}\xi^\mu_{(3)}}{\mathrm{d}s} &= -\kappa_{(2)}\xi^\mu_{(2)},
\end{aligned}
$$

なる数式で書ける。三次元の場合, 特に, $\boldsymbol{t} \equiv [\xi^\mu_{(1)}]$, $\boldsymbol{n} \equiv [\xi^\mu_{(2)}]$, $\boldsymbol{b} \equiv [\xi^\mu_{(3)}]$ なるベクトルを定義し, 第 1 曲率と第 2 曲率を, それぞれ, $\kappa \equiv \kappa_{(2)}$, $\tau \equiv \kappa_{(3)}$ なる記号で定義すると, フレネ・セレの公式は,

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa\boldsymbol{n}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau\boldsymbol{n},
$$

なる数式に書き換えられる。既に示したように, フレネ・セレの公式に現れる単位ベクトル $\xi^\mu_{(m)}$ は互いに直交しているので, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ も互いに直交する。特に, 3 次元空間であれば, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$ である。

幾何学的な意味をつかむための例として, 3 次元空間の螺旋を考えよう。図 4.3 のように一定の勾配で z 軸方向に上る螺旋を考えよう。螺旋は, xy 平面への投影で半径 R, 螺旋が z 軸を 1 周まわる間に z 座標が $2\pi H$ だけ増加するとしよう。そのような螺旋は, カルテシアン座標系において,

$$
x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta, \qquad z = H\theta,
$$

にて経路が与えられる。角度 θ は $[-\pi, \pi)$ の区間に制限されているのでなく, 実数全体で定義される。螺旋を正の方向にたどると, θ は無限に増加するのだ。この螺旋上の微小長さについて, $\mathrm{d}s^2 = (R^2 + H^2)\mathrm{d}\theta^2$ なる関係が成立する。曲線上の点 $[s, y, z]$ を長さ s について微分すると, 接線ベクトル:

$$
\boldsymbol{t} = \left[-\frac{R\sin\theta}{\sqrt{R^2+H^2}}, \quad \frac{R\cos\theta}{\sqrt{R^2+H^2}}, \quad \frac{H}{\sqrt{R^2+H^2}}\right],
$$

が得られる。接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を s について微分すると,

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \left[-\frac{R\cos\theta}{R^2+H^2}, \quad -\frac{R\sin\theta}{R^2+H^2}, \quad 0\right],
$$

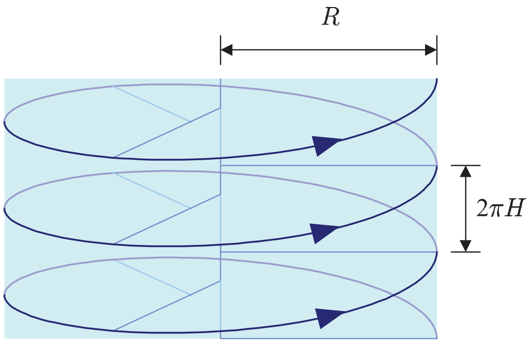

図 4.3: 3 次元中の螺旋

が得られるので, 第 1 法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と, 第 1 曲率 κ は,

$$\boldsymbol{n} = -\begin{bmatrix} \cos\theta, & \sin\theta, & 0 \end{bmatrix}, \qquad \kappa = \frac{R}{R^2 + H^2},$$

であることがわかる。螺旋は z 方向にも曲線が流れていくため, 第 1 法線ベクトルが 1 周期するには, $2\pi R$ でなく, $2\pi\sqrt{R^2 + H^2}$ の長さが必要となるため, 第 1 曲率は $1/R$ より小さくなる。三次元空間では, 第 2 法線ベクトルは $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}$ となるので,

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{H\sin\theta}{\sqrt{R^2 + H^2}}, & \frac{H\cos\theta}{\sqrt{R^2 + H^2}}, & -\frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}} \end{bmatrix},$$

が得られる。さらに, 関係式 $\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}s = -\tau\boldsymbol{n}$ を利用すると, 第 2 曲率:

$$\tau = \frac{H}{R^2 + H^2},$$

が得られる。ここで, 第 2 曲率 τ の幾何学的意味を考えてみよう。得られた数式を見ると, $H = 0$ のとき $\tau = 0$ であることがわかる。つまり, 平面上に描かれた円周上では第 2 曲率がゼロということだ。しかし, $H \neq 0$ となる一般の螺旋では第 2 曲率がゼロにならない。第 2 曲率がゼロでないことは, $\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}s \neq 0$ が成立すること, すなわち, 場所によってベクトル $\boldsymbol{b}$ が変化することを意味する。曲線に沿って運動する観測者を仮定し, 観測者の前方が $\boldsymbol{t}$ であり, 側方が $\boldsymbol{n}$ である。その場合, $\boldsymbol{b}$ は観測者の頭上に向かうベクトルである。曲線に沿って動いたときベクトル $\boldsymbol{b}$ が変化するのであれば, $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{n}$ によって張られる平面, すなわち, 観測者が乗った床面が傾いていくはずだ。つまり, 観測者の運動経路がねじれていることを意味する。その意味で解釈すると, 第 2 曲率 τ は, 経路に沿った単位長さあたりで床面が傾く角度である。したがって, τ は**ねじれ率**, または, **捩率** (れいりつ) と呼ばれる。