

第3章 測地線

ユークリッド空間では、2点間を結ぶ最短経路は直線となるが、曲がった空間ではそのようにはならない。地球の表面を考えた場合、2点間結ぶ最短経路をとるような航空機の航路が、メルカトル図法による地図上で曲がった経路となる事実より、曲がった空間での最短経路は曲がった経路となることが知られている。本章では、曲がった空間での最短経路を定式化する。

3.1 球面上の最短経路

測地線の例として、地球上における最短コースがあげられる。地球が球面であるため、最短コースはメルカトル図法では奇妙に思えるような湾曲した経路を描く。例えば、東京からニューヨークへ向かう最短経路を考えよう。手元に地球儀とひもがあれば、最短コースを得ることができる。ひもの両端を東京とニューヨークにおいて、ひもをピンと張ると、そのひもが最短経路となる。得られる最短経路は図3.1のような経路になる。その経路は、東京から出発する際には北北東に向かい、カムチャッカ半島とアラスカ北部を通過した後、ハドソン湾西岸を南下してニューヨークに到着する。図3.1 (a) は正射図法で最短経路を描いた。この図法は無遠慮から地球を眺めた形状と思えばよい。一方、図3.1 (b) はメル

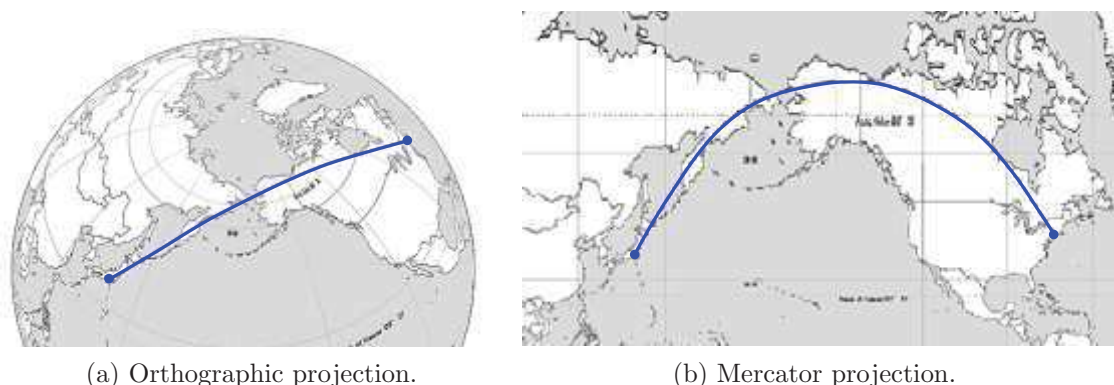


図 3.1: 東京からニューヨークへの大円コース

カトル図法である。メルカトル図法では、最短経路は大きく北に湾曲し、本当に最短経路

を描いているのか疑いたくなる。出発点の東京の緯度が北緯 $35^{\circ}41'$ 、終点のニューヨークが北緯 $40^{\circ}43'$ であるが、経路の途中で北極圏に位置する北緯 69° を通過するのである。とはいえ、この経路が最短経路であるので、東京からニューヨークへ向かう航空機は、この経路に近い経路を航行するのだ。

本章の最後でリーマン幾何学を用いて証明するが、球面における最短経路は大円コースと呼ばれる経路を描く。大円とは、球の中心を通る平面で切断したときの球の切断面の形状である。地球儀を見るとわかるように、赤道と任意の子午線が大円コースの例である。赤道を除く任意の緯線は大円コースではない。なぜなら、赤道以外の緯線が張る平面は地球の中心を通らないからである。赤道が北緯ゼロ度で東か西にまっすぐ進む経路であり、子午線は北か南にまっすぐ進む経路であることを考えると、大円コースは球面上をまっすぐ進む経路であると推測できる。任意の大円コースは、メルカトル図法で曲がった経路で描かれるが、それは地図の表現方法に起因し、正しくはまっすぐな経路と考えるべきである。

大円コースが球面上をまっすぐに進む経路であると考えるのは、上で述べた赤道と子午線の例から理にかなっているだろう。大円コースが球面における測地線であることから、強引に議論を拡張して、測地線がユークリッド空間における直線を湾曲した空間に拡張した図形であると考えてはどうだろうか？ 実は、測地線が直線コースの拡張であることが後の章で数学的に議論されるのである。

3.2 経路の長さ

これまでに述べたように、曲がった空間における微小距離 ds は、計量テンソルを用いて $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ で定義される。例えば、半径 R の球面を考えた場合、緯度と経度を θ, φ とすると、 $ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ と書くことができる。ここで、緯度 θ は、北極点を 0 、南極点を π とするよう定義されているとする。さらに、 $x^1 \equiv \theta, x^2 \equiv \varphi$ となるように座標をとると、計量テンソルは、

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

となる。空間が滑らかに曲がっている限り、すなわち、2階微分可能であれば、空間の任意の点について、このような計量が定義できる。

図 3.2 のように湾曲した経路を考えてみよう。図に示す点 A から B への経路の長さは、経路に沿って微小距離を足し合わせていけば計算することができる。具体的に書くと、

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu},$$

が経路の長さである。曲線上の座標 x^μ は、 n 次元空間だとしても、 n 個の座標成分がすべて独立しているわけではない。例えば、3 次元空間の特定の点 $[a^1, a^2, a^3]$ を通る直線は、

$$\frac{x^1 - a^1}{m^1} = \frac{x^2 - a^2}{m^2} = \frac{x^3 - a^3}{m^3},$$

なる数式で表現できる。ここで、 m^1, m^2, m^3 は直線の意味する。この数式によると、一つの座標成分 (例えば x^1) を与えると、他の $n - 1$ 個の座標成分がすべて特定できる。つまり、自由度が 1 である。

座標の自由度が 1 であるということは、一つの媒介変数 t を与えると $x^\mu = x^\mu(t)$ のように、すべての座標成分が t の関数として表現できる。その性質は、一つの座標成分で他の $n - 1$ の座標成分を特定できること等価である。なぜならば、 $t = x^1$ となるように t を決めれば、 $x^\mu = x^\mu(t) = x^\mu(x^1)$ となるので特定の座標成分 x^1 で他の座標成分 x^i が与えられるからである。

数式の上では、 n 個の座標成分が $x^\mu = x^\mu(t)$ のように一つの媒介変数でされるのが扱いやすいだろう。例えば、

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

が半径 r の円周を与えることを考えればよい。ただし、媒介変数 t を用いる場合、 t は単調増加、または、単調減少であるべきである。そうでなければ、特定の t に対して複数の座標が対応付けられ、曲線が一意的に定まらないからだ。例えば、点 A から点 B を結ぶ曲線を考える場合、点 A から点 B に曲線に沿って移動すると媒介変数 t は単調増加でなければな

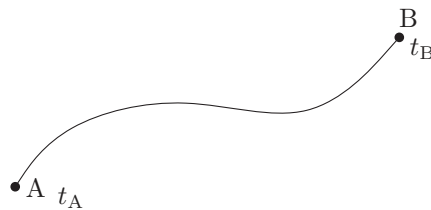


図 3.2: 曲がった空間における経路

らない。単調増加性さえ満たせば、媒介変数はどのように変化しても構わない。その媒介変数を用いたとき、点 A から B への経路長は、

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt, \quad (3.1)$$

と書くことができる。ここで、積分区間の両端として設定した t_A と t_B は座標 x^μ が点 A と B を通過するときの媒介変数 t の値である。

3.3 変分法による定式化

本章で取り扱う測地線とは、長さが最短になるような経路である。最短経路を求めることは、(3.1) を最小にするための x^μ を決定する問題である。そのような問題は、変分法によって解決できる。変分法の解法として、オイラーの微分方程式を解くことが定石である。まず、本節でオイラーの微分方程式を導出しておこう。

前節で、任意の二点 A と B の間の経路の長さを数式で記述した。その数式を見ると、平方根の中に $g_{\mu\nu}$ と \dot{x}^μ が含まれる。ただし、 $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/dt$ とする。さらに、計量が場所によって変化するのなら、 $g_{\mu\nu}$ は x^μ の関数であると考えられる。そのように考えると、経路長を計算する積分の被積分関数は x^μ と \dot{x}^μ の関数である。したがって、点 A から B への経路は、

$$I = \int_{t_A}^{t_B} F(x^1, x^2, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n) dt,$$

なる積分で記述できる。積分経路 $x^\mu(t)$ をわずかにずらした経路 $\bar{x}^\mu \equiv x^\mu(t) + \delta v^\mu(t)$ を考えてみる。この積分経路のずれ $\delta v^\mu(t)$ は非常に小さな値である。一方、経路の両端である点 A と B はずらしてはならないものとする。つまり、 $\delta v^\mu(t_A) = \delta v^\mu(t_B) = 0$ は守らなければならない条件である。経路をわずかにずらすことによって、経路長 \bar{I} は、

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \int_{t_A}^{t_B} F(x^1 + \delta v^1, x^2 + \delta v^2, \dots, x^n + \delta v^n, \\ &\quad \dot{x}^1 + \delta \dot{v}^1, \dot{x}^2 + \delta \dot{v}^2, \dots, \dot{x}^n + \delta \dot{v}^n) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left(F + \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \delta v^\mu + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{v}^\mu \right) dt \\ &= I + \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} \delta v^\mu + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{v}^\mu \right) dt \\ &= I + \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta v^\mu dt, \end{aligned}$$

となる。右辺を導出するにあたって、部分積分と $\delta v^\mu(t_A) = \delta v^\mu(t_B) = 0$ であることを利用した。経路がわずかにずれたときの積分量の変分を $\delta I \equiv \bar{I} - I$ とすると、

$$\delta I = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial F}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta v^\mu dt,$$

と書くことができる。変分法では、積分 I が最小(または最大)なる条件では、経路をわずかにずらしても積分が変化しない、すなわち、 $\delta I = 0$ と考える。その考えは、最小自乗法に類似している。経路の変化に対して経路長が滑らかに変化するのであれば、最小値(または最大値)の近傍では経路の変化に対して経路長がほとんど変化しないと考えて $\delta I = 0$ を経路特定の条件とするのだ。いかなる δv^μ に対しても、 $\delta I = 0$ が成立するためには、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = 0, \quad (3.2)$$

を満たさなくてはならない。この方程式が変分法における**オイラーの微分方程式**である。この方程式は、変分法の解を与える一般的な方程式であるにすぎず、測地線の問題に特化した方程式ではない。測地線を得るには、オイラーの微分方程式に含まれる関数 F に経路長を計算するための被積分関数を代入して議論を進めるとよい。次節で測地線を計算するための議論を進めることにしよう。

3.4 測地線の方程式

前節で変分法の解法となるオイラーの微分方程式を導出した。その方程式に含まれる関数 F に経路長を計算するための被積分関数を代入すれば、経路長を最小化するための関数を導出することができる。経路長を最小化するための関数とは、曲がった空間における測地線の方程式のことである。既に述べたように、経路の長さは、

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt,$$

によって計算することができる。最短経路とは、長さ s を最小にする経路である。そのような経路では、わずかに経路をずらしたときの変分は $\delta s = 0$ であると考えられる。つまり、 $F = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ とおいて、オイラーの微分方程式 (3.2) を適用すると最短経路が求められる。なお、 \dot{x}^μ は、 dx^μ/dt を意味するニュートンの記法である。本節では、数式を導出過程を簡潔に書くためにニュートンの記法を用いる。

具体的に被積分関数 F を設定してオイラーの微分方程式を計算するため、 F を \dot{x}^α と x^α について偏微分しておく、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{\kappa\lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda}} = \frac{g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu}{\dot{s}}, \\ \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{2\sqrt{g_{\kappa\lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \end{aligned}$$

が得られる。これらの偏導関数をオイラーの微分方程式に代入すると、

$$\frac{1}{\dot{s}} g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu + \frac{1}{\dot{s}} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu - \frac{1}{2\dot{s}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0,$$

が得られる。これをさらに整理すると、

$$g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = 0,$$

となる。さらに、両辺に $g^{\kappa\alpha}$ を掛けて α についての縮約をとれば、

$$\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \dot{x}^\kappa \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = 0,$$

が得られる。これまで媒介変数 t は s の増加とともに単調増加する任意の変数としていたが、 s が t の 1 次関数となるように媒介変数を限定すれば、 $\ddot{s} = 0$ であるので得られた数式の左辺の最終項がゼロになるので好都合である。媒介変数 t をそのように限定すると、

$$\frac{d^2 x^\kappa}{dt^2} + \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \quad (3.3)$$

なる方程式が得られる。これが曲がった空間での最短経路 (測地線) を定義する方程式である。多くのテキストでは、 $s = t$ となる t を選んで、

$$\frac{d^2 x^\kappa}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (3.4)$$

のように長さに関する微分方程式で表現している。媒介変数の選び方は本質ではないので、測地線の方程式は (3.3) でもよいし、(3.4) を選んでもよい。通常、経路長と媒介変数が一致する仮定での表示 (3.4) が好まれる。しかし、一般相対性理論において光の軌跡を求める場合、 $ds = 0$ となる測地線を計算することに相当するので (3.4) が使えず、代わりに (3.3) の表記を用いることになる。ところで、

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right), \quad (3.5)$$

のような記号を定義すると測地線の方程式は、

$$\frac{d^2 x^\kappa}{ds^2} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (3.6)$$

と書くことができる。ここで定義した $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ は第 2 種クリストッフェル記号と呼ばれる。この記号の性質は次章で詳しく調べる。これに対して、 $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ に $g_{\lambda\kappa}$ を掛けて κ について縮約をとった量:

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (3.7)$$

は第 1 種クリストッフェル記号と呼ばれる。第 1 種の記号 $\Gamma_{\lambda,\mu\nu}$ と第 2 種の記号 $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ を、それぞれ、 $[\lambda,\mu\nu]$ と $\{\mu\nu\}^\kappa$ となる記号で表記する文献¹もあるが、一般相対性理論ではクリストッフェル記号を大文字のガンマ (Γ) を用いるのが慣習となっている。本書では一般相対性理論の記法を用いることにする。二種類のクリストッフェル記号のうち、第 2 種の方が頻繁に用いられるため、単にクリストッフェル記号と書いた場合は第 2 種クリストッフェル記号を意味することが多い。

幾何学的意味 基本ベクトルを用いて記述すると、クリストッフェル記号の幾何学的意味が見えてくる。計量テンソルが $g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$ と $g^{\mu\nu} = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu$ であることに注意して第 1 種

¹ 矢野健太郎, “リーマン幾何学入門,” 森北出版, ISBN: 978-4627002098, 2006.

クリストッフエル記号の定義式を書き換えると,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda,\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\lambda) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\lambda) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_\lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} + \mathbf{e}_\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\nu} + \mathbf{e}_\lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} + \mathbf{e}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\mu} - \mathbf{e}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\lambda} - \mathbf{e}_\mu \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\lambda} \right), \quad (3.8)\end{aligned}$$

のように記述できる。数式が6個の項で構成され複雑に見えるかもしれないが、この数式は大幅に簡略化できる。簡略化には基本ベクトルに関する性質:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu},$$

を利用するのだ。この性質は、位置ベクトル \mathbf{x} が2階微分可能であることから得られる性質である。この関係式を利用するだけで(3.8)は,

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \mathbf{e}_\lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (3.9)$$

のように簡略化できるのだ。第2種クリストッフエル記号は第1種クリストッフエル記号 $\Gamma_{\lambda,\mu\nu}$ に $g^{\kappa\lambda}$ を乗じて λ について縮約をとればよいので,

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = (\mathbf{e}^\kappa \cdot \mathbf{e}^\lambda) \left(\mathbf{e}_\lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} \right),$$

のように書ける。この数式はさらに簡略化することができる。簡略化にあたり、任意のベクトル $\mathbf{a} \equiv a^\mu \mathbf{e}_\mu \equiv a_\mu \mathbf{e}^\mu$ を考えよう。このベクトルに \mathbf{e}^λ と \mathbf{e}_λ を、それぞれ内積すると,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\lambda = a^\mu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\lambda = a^\mu \delta_\mu^\lambda = a^\lambda,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\lambda = a_\mu \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}_\lambda = a_\mu \delta_\lambda^\mu = a_\lambda,$$

が得られる。つまり、ベクトルに \mathbf{e}^λ を内積すれば第 λ 反変成分が、 \mathbf{e}_λ を内積すれば第 λ 共変成分が得られるのだ。この事実を利用して、形式的に,

$$\mathbf{e}^\kappa \cdot \mathbf{e}^\lambda = (\mathbf{e}^\kappa)^\lambda, \quad \mathbf{e}_\lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} \right)_\lambda,$$

と書こう。右辺の括弧外の上付き添え字は反変成分, 下付き添え字は共変成分であることを表している。したがって、第2種クリストッフエル記号は,

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = (\mathbf{e}^\kappa)^\lambda \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu} \right)_\lambda = \mathbf{e}^\kappa \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\nu},$$

となるのだ。ベクトルの共変成分と反変成分の積を縮約した値であるため、二つのベクトルの内積に他ならない。二つのベクトルの内積が $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\lambda b_\lambda$ と書けることを思い出せば

よい。それが上のように計算できる理由である。これらの結果をまとめると、2種類のクリストッフェル記号を基本ベクトルを用いて表記すると、

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \mathbf{e}^{\kappa} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \quad \Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \mathbf{e}_{\lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}},$$

となるのだ。つまり、クリストッフェル記号は、位置の微小変化に対する基本ベクトルの変化量を表すということだ。別の表現では、

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \mathbf{e}_{\kappa},$$

という数式で記述できる。平坦な斜交座標系のように基本ベクトルが定ベクトルである座標系ならば、クリストッフェル記号はゼロとなる。

3.5 球面の測地線

リーマン幾何学の応用例として、球面上の測地線を求めてみよう。国際線の飛行機の航路が曲がっていることで知られるように、球面上の2点間を結ぶ最短距離は曲がったコースをとる。そのコースは大円コースとよばれ、球の中心を通る平面でその球を切断したときの切り口である。ここでは、リーマン幾何学を用いて、球面の測地線が大円となることを証明する。

原点 O を中心とする半径 R の球について考えてみる。この球面上の座標を極座標 (θ, φ) で表すことにする。この球の赤道は xy 平面状にあり、 θ は緯度を表す。ただし、地球の緯度とは異なり、北極点を $\theta = 0$ 、赤道を $\theta = \pi/2$ 、南極点を π とするように定義する。一方、 φ は経度を表し、 x 軸から左回りに計った角度である。この球面上の任意の点 (θ, φ) における微小変位によってつくられる微小長さは、

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi, \quad (3.10)$$

である。ここで、一般的なリーマン幾何学の記法にしたがって、 $x^1 \equiv \theta$ 、 $x^2 \equiv \varphi$ と書くことにする。そのとき、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて、微小長さは $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ と書くことができる。半径 R の球面の場合、(3.10) を見ると、計量テンソルは、

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

であることがわかる。計量テンソルに、球面の幾何学的な性質が記述されている。

測地線を得るには、前節で導出した測地線の方程式に、計量テンソルを代入して計算すればよい。前節で導出した測地線の方程式を再び書くと、

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0, \quad (3.6)$$

である。クリストッフェル記号 $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ も前節で定義されており,

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right), \quad (3.5)$$

のように記述される。球面の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ をこの定義式に代入して得られるクリストッフェル記号のうち, ゼロでないものだけを書くと,

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta,$$

となる。これらを測地線の方程式 (3.6) に代入すると, 微分方程式:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\cot\theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (3.12)$$

が得られる。これらが測地線を特定するための連立微分方程式である。得られた微分方程式のうち, (3.12) を変形すると,

$$\frac{d}{ds} \left(\sin^2\theta \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0,$$

となるので,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin\theta_0}{R \sin^2\theta}, \quad (3.13)$$

が得られる。右辺の中で $\sin\theta_0/R$ は積分定数である。このような積分定数を想定した理由は後に明らかになる。微小長さを与える数式 (3.10) の両辺を $d\varphi^2$ で割り, (3.13) を代入すると,

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 + \sin^2\theta = \frac{\sin^4\theta}{\sin^2\theta_0}, \quad (3.14)$$

を得る。この微分方程式が球面の測地線を決定する式である。測地線の特徴をつかむため, $u = \cot\theta$ とおいて, (3.14) を書き換えると,

$$\frac{du}{d\varphi} = -\sqrt{\cot^2\theta_0 - u^2}, \quad (3.15)$$

なる微分方程式が得られる。この微分方程式を解き, 変数 u を元に戻すと,

$$\cot\theta + \cot\theta_0 \sin(\varphi - \varphi_0) = 0,$$

なる解が得られる。ここで, φ_0 は積分定数である。この式が球面の測地線を極座標表示した式である。この式の両辺に $R \sin\theta \sin\theta_0$ を乗じ, 三角関数の加法定理を適用すると,

$$R \sin\theta_0 \cos\theta + R \cos\theta_0 (\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi) \sin\theta = 0, \quad (3.16)$$

となる。これが球面における測地線の方程式である。球面における座標 θ と φ 以外の記号はすべて定数である。得られた測地線がどのような図形を描くのか、現時点でわからないので別の表現方法を適用しよう。別の表現方法として、3次元の極座標 $[R, \theta, \varphi]$ を直角座標 $[x, y, z]$ に変換してみよう。座標変換が、

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta,$$

であることに注意して (3.16) を書き換えると、

$$-x \cos \theta_0 \sin \varphi_0 + y \cos \theta_0 \cos \varphi_0 + z \sin \theta_0 = 0,$$

が得られる。この θ_0 と φ_0 は定数であるので、得られた数式は原点 O を通る平面を表す。この結果は、原点を通る平面で球を切断したときの切り口が球面上の測地線であることを意味している。つまり、球面上の測地線が大円であることが導かれたわけだ。さらに、積分定数 θ_0 と φ_0 は測地線の方角を表している。具体的には、図 3.3 に示すように、 φ_0 は測地線が赤道と交わる方向、 θ_0 は測地線が z 軸となす角である。

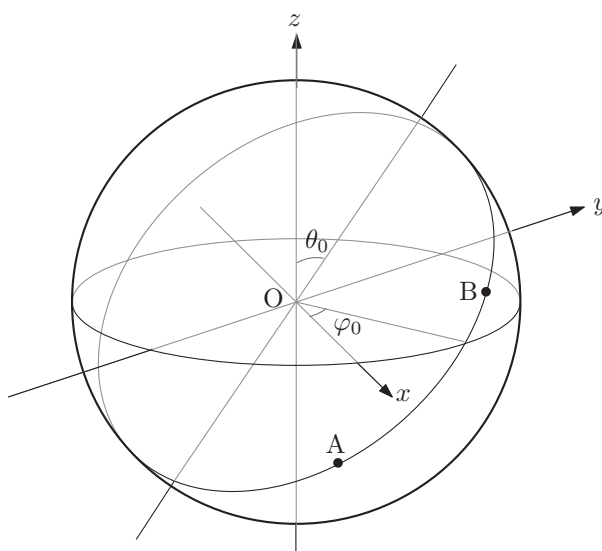


図 3.3: 球面上の 2 点を結ぶ測地線

球面における測地線が大円になる事実を利用すると、地球上の 2 点間を結ぶ最短コースを得ることができる。例えば、世界地図の作成に用いられる正距方位図法は、基準点からの方位と距離が正確に表現できる図法である。その図法で世界地図を描くには、北極点から伸ばした 2 本の経線と、任意の大円によってつくられる球面上の三角形に、球面三角法と呼ばれる公式を適用して求められる。球面三角法によって、地球上の基準点から対称点に向かう方位と距離が計算できるのである。その計算は、航空機の航路計算にも用いられる。東京からニューヨークに向かう航空機がアラスカ上空を通過するのは、最短経路にしたがってのことであるが、メルカトル図法からはわかりにくいだろう。

誤解を招かないように注釈しておく、球面三角法はリーマン幾何学の産物ではない。リーマン幾何学が形成されたのは19世紀中頃であるが、球面三角法は10世紀あたりにイスラム数学者によって発達した²。発達の背景には、球体の地球上においてメッカまでの距離と方位を計算することだった。ということは、イスラム社会では10世紀には地球が丸いことを知っていたということだ。イスラム社会では、ギリシャ天文学を引き継いで地球が丸いことが知られていたようである³。リーマン幾何学の1000年近くも前に球面三角法が発展していたことは驚くことである。

²J. L. Berggren, "Episodes in the Mathematics of Medieval Islam," Springer, ISBN 0-387-40605-0, pp. 173–176, 2003.

³Catherine Hess, "Arts of Fire," J. Paul Getty Museum, p. 29, 2004.

