第1章　はじめに

リーマン幾何学は, ユークリッド幾何学では取り扱えない曲がった空間を取り扱う幾何学である。曲がった空間を取り扱うため, リーマン幾何学では, いくつかの特別な表記法を用いる。 本章では, リーマン幾何学の表記法に慣れるため, 曲がった空間を取り扱うのは控え, ユークリッド空間におけるベクトルや行列をリーマン幾何学の記法で記述してみよう。

1.1　ベクトル

幾何学や解析学では, 3 次元空間の座標について考えた場合, しばしば, x, y, z という記号を用いる。これらの記号はカルテシアン座標を表記するための習慣となっているので, 非常になじみ深い表記である。しかし, 取り扱う空間が 3 次元ではなく, 一般化された n 次元空間であるなら, むしろ, x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1} という番号付け[1] をした記法を用いるほうが便利である。

もう一方で, x^0, x^1, $\ldots$, x^{n-1} のように右上に添え字をもつベクトルを定義することもできる。 ここで, 右肩の数字は, 0 乗, 1 乗, 2 乗のような指数ではなく, 座標に割り当てた番号である。後に, 曲がった空間を取り扱うようになると, 右下の添え字と右上の添え字が意味をもってくるのだが, まだここでは, そのような表記があるというだけにとどめておく。例として 3 次元のカルテシアン座標を図 1.1 に示す。右ねじの法則にしたがって設定される x 軸, y 軸, z 軸のに沿った成分をベクトルの第 0 成分, 第 1 成分, 第 2 成分と呼ぶことにしよう。

二つのベクトルが与えられたとき, 内積というスカラ量を定義することができる。カルテシアン座標系では, ベクトルの各成分の積和:

$$x_0y^0 + x_1y^1 + x_2y^2 + \cdots + x_{n-1}y^{n-1},$$

が内積として定義される。この数式に示すように, 内積は上付き添え字の成分と下付き添え字の成分の組み合わせで積をとる。上付き添え字の成分どうしでなく, 下付き添え字の成分どうしでもない。上付き添え字の成分と下付き添え字の成分の積をとることに意味が

[1]添え字が 1 からではなく, 0 から始まっているのは単に筆者に趣味である。

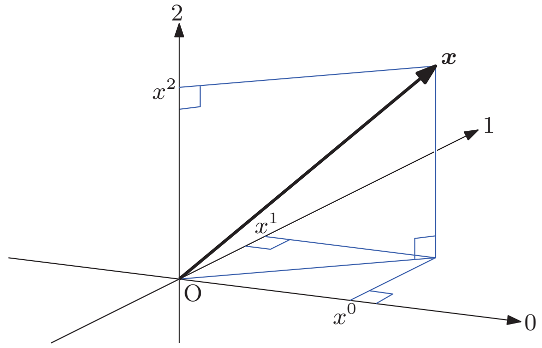

図 1.1: カルテシアン座標系のベクトル

あるのだが, それは後に説明する。今の段階では, 単なる約束事だと思ってほしい。ただし, カルテシアン座標系では, 偶然, $x^\mu = x_\mu$ が成立するので添え字の位置の違いを特に気にする必要はないだろう。

内積の定義式にみられる総和を記述するには, 延々と項を並べるよりも便利な表記法がある。その記法に従って数式を記述すると,

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} x_\mu y^\mu \equiv x_0 y^0 + x_1 y^1 + x_2 y^2 + \cdots + x_{n-1} y^{n-1},$$

となる。空間が 3 次元なら項を並べて記述してもよいが, 次数が高い場合や n 次元のように特定の数値でない場合, Σ を用いた記法が便利である。また, 自分自身の内積は,

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} x_\mu x^\mu \equiv x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + \cdots + x_{n-1} x^{n-1},$$

と書く。特に, カルテシアン座標の場合, 上で述べたように $x^\mu = x_\mu$ が成立するので, 上記の内積は,

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2,$$

と書くことができる。まぎらわしい記法ではあるが, 括弧の外の右肩の添え字は 2 乗を意味する。ここで, 三平方の定理を思い出すと, 自分自身の内積はベクトルの長さの自乗となることがわかる。さらに, 2 次元, または, 3 次元空間からの類推により, ベクトル x^μ と y^μ がなす角度 θ は,

$$\sqrt{\sum_{\mu=0}^{n-1} x_\mu x^\mu \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu y^\nu}\ \cos\theta = \sum_{\mu=0}^{n-1} x_\mu y^\mu,$$

によって定義される。ただし, このような θ の定義は, 2 つのベクトルの内積が, それらのベクトルの長さの積より小さいか等しいという性質が必要である。その性質が n 次元空間の斜交座標系に対して成立することは, 第 1.5 節で示す。

1.2 一次変換

ベクトルの一次変換とは, ベクトルの各成分に定数係数を乗じて積和をとることによって新たなベクトル成分を得る演算である。ベクトルの一次変換の例として, ベクトルの回転, 拡大・縮小が挙げられる。例えば, n 次元のベクトル x^μ から一次変換によってベクトル x'^μ を得る操作は,

$$
\begin{aligned}
x'^0 &= A^0{}_0 x^0 + A^0{}_1 x^1 + A^0{}_2 x^2 + \cdots + A^0{}_{n-1} x^{n-1},\\
x'^1 &= A^1{}_0 x^0 + A^1{}_1 x^1 + A^1{}_2 x^2 + \cdots + A^1{}_{n-1} x^{n-1},\\
x'^2 &= A^2{}_0 x^0 + A^2{}_1 x^1 + A^2{}_2 x^2 + \cdots + A^2{}_{n-1} x^{n-1},\\
&\vdots\\
x'^{n-1} &= A^{n-1}{}_0 x^0 + A^{n-1}{}_1 x^1 + A^{n-1}{}_2 x^2 + \cdots + A^{n-1}{}_{n-1} x^{n-1},
\end{aligned}
$$

なる数式で書くことができる。この数式に含まれる $A^\mu{}_\nu$ は定数係数である。定数係数 $A^\mu{}_\nu$ は $n \times n$ の行列であると考えると, 行列記法で一次変換を記述することができ,

$$
\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ \vdots \\ x'^{n-1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
A^0{}_0 & A^0{}_1 & \cdots & A^0{}_{n-1} \\
A^1{}_0 & A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A^{n-1}{}_0 & A^{n-1}{}_1 & \cdots & A^{n-1}{}_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix},
$$

のようになる。この中の成分 x'^μ を取り出すと,

$$
x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{n-1} A^\mu{}_\nu x^\nu \equiv A^\mu{}_0 x^0 + A^\mu{}_1 x^1 + A^\mu{}_2 x^2 + \cdots + A^\mu{}_{n-1} x^{n-1},
$$

と書くことができる。リーマン幾何学では, この数式中の ν のように, 総和をとる添え字は右上と右下でペアになるように組み合わて書く。添え字の位置には, 本当は意味があるのだが, 今の段階では, 約束事だと思って, あまり気にしないでもよい。さらに, この結果を $B^\lambda{}_\mu$ で一次変換して x''^μ を得た場合,

$$
\begin{aligned}
x''^\mu = \sum_{\lambda=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} & B^\mu{}_\lambda A^\lambda{}_\nu x^\nu \\
\equiv \quad & B^\mu{}_0 A^0{}_0 x^0 + B^\mu{}_0 A^0{}_1 x^1 + B^\mu{}_0 A^0{}_2 x^2 + \cdots + B^\mu{}_0 A^0{}_{n-1} x^{n-1} \\
& + B^\mu{}_1 A^1{}_0 x^0 + B^\mu{}_1 A^1{}_1 x^1 + B^\mu{}_1 A^1{}_2 x^2 + \cdots + B^\mu{}_1 A^1{}_{n-1} x^{n-1} \\
& + B^\mu{}_2 A^2{}_0 x^0 + B^\mu{}_2 A^2{}_1 x^1 + B^\mu{}_2 A^2{}_2 x^2 + \cdots + B^\mu{}_2 A^2{}_{n-1} x^{n-1} \\
& \quad \vdots \\
& + B^\mu{}_{n-1} A^{n-1}{}_0 x^0 + B^\mu{}_{n-1} A^{n-1}{}_1 x^1 + B^\mu{}_{n-1} A^{n-1}{}_2 x^2 + \cdots + B^\mu{}_{n-1} A^{n-1}{}_{n-1} x^{n-1},
\end{aligned}
$$

となる。具体的に書き下すと, この式の右辺のようになるのだが, 総和記号を用いると, 左辺のような簡単な記述で表現できる。

回転変換　一次変換の例として, ベクトルの回転変換を挙げよう。二次元のベクトル $[x^0, x^1]$ を角度 θ だけ反時計回りに回転して得られる新たなベクトル $[x'^0, x'^1]$ は,

$$
\begin{aligned}
x'^0 &= x^0 \cos\theta - x^1 \sin\theta, \\
x'^1 &= x^0 \sin\theta + x^1 \cos\theta,
\end{aligned}
$$

によって計算できる。この数式を $x'^\mu = A^\mu{}_\nu x^\nu$ のように表記すると, 変換行列 $A^\mu{}_\nu$ は,

$$
[A^\mu{}_\nu] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},
$$

のように書くことができる。この変換行列の逆行列を $\bar{A}^\mu{}_\nu$ としよう。逆行列を計算すると,

$$
[\bar{A}^\mu{}_\nu] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},
$$

が得られる。この逆行列は, 変換行列 $A^\mu{}_\nu$ において $\theta \mapsto -\theta$ の置き換えを適用した結果を一致する。この事実は, なぜなら, θ だけ回転させた後, $-\theta$ だけ回転させるともとの場所に戻ることを考えると納得できるだろう。

ローレンツ変換　相対性理論によると, 相対的に等速度運動している観測者との間の座標系は一次変換で与えられる。例えば, 基準とする座標系を K 系, それに対して等速度運動する慣性系を K$'$ とすると, K 系から K$'$ 系への変換行列は,

$$
[A^\mu{}_\nu] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

となる。ただし, β は速度を表すパラメータであり, $\beta = 1$ が光速に相当する。この変換行列による座標変換はローレンツ変換と呼ばれる。座標の対応として, 第 0 成分は時間に光速を乗じた値 ct を, 第 1 成分から第 3 成分はカルテシアン座標系の x, y, z に対応している。これを形式的に書くと, $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ なる対応関係があるのである。なお, K$'$ 系の運動方向は x^1 方向を想定している。これは特殊相対性理論における座標変換であり, この座標変換から時間や長さの収縮現象が導かれる。ローレンツ変換の変換行列

の逆行列を $\bar{A}^{\mu}{}_{\nu}$ とすると,

$$[\bar{A}^{\mu}{}_{\nu}] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

であることが実際の計算からわかる。この逆行列は, $\beta \mapsto -\beta$ に置き換えた変換行列と一致する。確かに, K 系に対して速度 β で運動する系 K$'$ があり, その系に対して速度 $-\beta$ で運動する系は K 系に戻るはずである。そのように考えると, 速度 $-\beta$ の系への座標変換が, 速度 β の系への座標変換の逆変換になることが理解できる。

1.3 総和の規約

既に内積や行列演算について, 総和記号を用いた表記をしてきた。前節の一次変換を連続で実行した結果を書き下そうとすると, 総和記号が非常に便利であることに気付く。 このような便利な記法は, まさに, 人間がもつ怠惰さの賜物である。

リーマン幾何学では, さらに怠惰な記法を用いる。そのさらに怠惰な記法を考案したのはアインシュタインであった。先ほどの一次変換:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} A^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \equiv A^{\mu}{}_{0} x^0 + A^{\mu}{}_{1} x^1 + A^{\mu}{}_{2} x^2 + \cdots + A^{\mu}{}_{n-1} x^{n-1},$$

を例に挙げよう。この式は, 添え字 ν を 0 から $n-1$ まで変化させながら総和をとることを意味する。座標変換において, このような総和をとる場合, 変化させる添え字は, 必ず, 同一項の中に上付き添え字と下付き添え字のペアになっていることをアインシュタインは気付いた。つまり, 上付き添え字と下付き添え字のペアがあれば, 総和記号がなくとも, その添え字を 0 から $n-1$ まで変化させて和をとるという取り決めをすれば総和記号 Σ を書く手間が省ける。その取り決めによって先ほどの一次変換を書くと,

$$x'^{\mu} = A^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \equiv A^{\mu}{}_{0} x^0 + A^{\mu}{}_{1} x^1 + A^{\mu}{}_{2} x^2 + \cdots + A^{\mu}{}_{n-1} x^{n-1},$$

となる。なんという怠惰さ, というか, 便利な記法であろうか。アインシュタインはリーマン幾何学を創り上げた人ではなく, 使った人である。にもかかわらず, この記法の便利さのため, リーマン幾何学では総和記号を省略した記法が用いられている。この約束事を**アインシュタインの総和の規約**という。リーマン幾何学だけでなく, 行列を取り扱う計算

でもアインシュタインの総和の規約は役に立つ。筆者はリーマン幾何学以外の計算でも, 手計算では総和の規約を利用して総和記号を省略して計算している。

アインシュタインの総和の規約は, 数式が複雑になるほど, そのありがたさがわかる。例として, 一次変換を 2 回適用してみると,

$$x''^{\mu} = B^{\mu}{}_{\lambda} A^{\lambda}{}_{\nu} x^{\nu},$$

のように書ける。前にあげた総和記号を用いた記法と比べても数式がかなりすっきりしたように見える。この数式には, λ と ν が上付きと下付きのペアになっているので, これらについての総和をとることを意味する。記述はかなりすっきりしているが, ペアになった添え字を見たときに総和を想像するには慣れが必要である。しかし, 慣れてしまえば, 総和記号を書くのが煩わしく思えてくる。

当然の事実であるが, 総和の規約に慣れないうちに見落としそうな性質を補足しておく。その性質は, $A^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda}$ と $A^{\mu}{}_{\varepsilon} x^{\varepsilon}$ の関係である。それらの関係は, 総和記号を用いて,

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} A^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda} = \sum_{\varepsilon=0}^{n-1} A^{\mu}{}_{\varepsilon} x^{\varepsilon},$$

のように書けることから明らかである。つまり, 両者は等しいのである。言い換えると, 総和の対象となる添え字を別の文字で置き換えても構わない。総和の対象となる添え字は, 0 から $n-1$ まで変化するのであるから, どの文字で表現されるかは本質ではないのである。この事実を利用した例として,

$$A^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda} - A^{\mu}{}_{\beta} x^{\beta} = A^{\mu}{}_{\kappa} x^{\kappa} - A^{\mu}{}_{\kappa} x^{\kappa} = 0,$$

は成立する。当たり前な性質であるが, リーマン幾何学の計算を都合よく進めていく上で, これは重要な性質である。

1.4 行列式

行列の表記が出てきたので, 行列式についても説明しておこう。行列式の性質などは, 線形代数の予備知識があれば知っているだろうが, アインシュタインの総和規約に慣れるためだと思って読むとよいだろう。さて, n 次の正方行列 $A^{\mu}{}_{\nu}$ に関して行列式は,

$$\det A = \epsilon^{\sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}} A^{0}{}_{\sigma_0} A^{1}{}_{\sigma_1} \cdots A^{n-1}{}_{\sigma_{n-1}},$$

と定義されている。ここで, 添え字 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ にはアインシュタインの総和の規約が適用されている。何度見てもわかりづらい定義式であるが, この数式に含まれる $\epsilon^{\sigma_0 \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}}$

はレビ・チビタの記号と呼ばれ, 添え字 $\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}$ の順序に依存する係数である。基準となる組み合わせ $(\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}) = (0, 1, \ldots, n-1)$ に対して, 任意の添え字を偶数回の交換で得られる並びを偶置換, 奇数回の交換で得られる並びを奇置換というが, レビ・チビタの記号は,

$$\epsilon^{\sigma_0\sigma_1\ldots\sigma_{n-1}} = \begin{cases} 1 & (\text{偶置換}), \\ -1 & (\text{奇置換}), \\ 0 & (\text{それ以外の場合}), \end{cases}$$

となる。 これだけではわかりにくいであろうから, 3 次の場合を例に挙げて説明しよう。あらゆる $(\sigma_0\sigma_1\sigma_2)$ の組み合わせについて組み合わせに対するレビ・チビタ記号を書くと表 1.1 のようになる。この表に示すように, $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ に 2 つ以上同じ添え字が存在する場合にはレビ・チビタ記号がゼロとなっている。つまり, 27 通りある $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ の組み合わせのうち, レビ・チビタ記号がゼロでないのはたったの 6 通りである。

表 1.1: 3 次元のレビ・チビタ記号

$\sigma_0\sigma_1\sigma_2$	ϵ	置換手順	$\sigma_0\sigma_1\sigma_2$	ϵ	置換手順	$\sigma_0\sigma_1\sigma_2$	ϵ	置換手順
000	0		100	0		200	0	
001	0		101	0		201	1	012→210→201
002	0		102	−1	012→102	202	0	
010	0		110	0		210	−1	012→210
011	0		111	0		211	0	
012	1	012	112	0		212	0	
020	0		120	1	012→102→120	220	0	
021	−1	012→021	121	0		221	0	
022	0		122	0		222	0	

この表を参照しながら 3 次正方行列 $A^\mu{}_\nu$ の行列式を展開すると,

$$\begin{aligned} \det A = \quad & A^0{}_0 A^1{}_1 A^2{}_2 - A^0{}_0 A^1{}_2 A^2{}_1 + A^0{}_1 A^1{}_2 A^2{}_0 \\ & - A^0{}_1 A^1{}_0 A^2{}_2 + A^0{}_2 A^1{}_0 A^2{}_1 - A^0{}_2 A^1{}_1 A^2{}_0, \end{aligned}$$

が得られる。この結果は, 3 次正方行列の行列式を計算するサラスの公式と一致する。このような例を挙げてみると, なんとなくわかったような気がするであろう。さて, 実際に行列式の定義式から計算をしようとすると, 表 1.1 を書いて, 明示的にゼロなる項を除外して残った項をすべて項を書き下し... ということは, 和をとる項の数は, 4 次正方行列では 24 項, 5 次では 120 項, n 次では $n!$ 項... とんでもない数である。行列式を計算するには, 次数が大きくなると定義にしたって計算するわけにいかないので, 行列式の性質を利用して簡単に計算する。

1.4.1　行列式の性質

上で述べたように, 定義にしたがって行列式を展開すると次数 n に対して, 項数が $n!$ となる。次数が大きくなると項数の増大が甚だしいのだ。数値計算においては, 定義式ではなく, もっと効率的な方法で行列式を計算できる。そのための性質をあげておこう。

性質 1　行列を転置しても行列式は変化しない。形式的に書くと,

$$\det {}^{\mathrm{t}}\!A = \det A, \tag{1.1}$$

なる数式が成立する。なお, 左肩の添え字 t は転置行列を与える。

証明　この性質の証明には行列式の定義式を用いればよい。行列式の定義式:

$$\det A = \epsilon^{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} A^0{}_{\sigma_0} A^1{}_{\sigma_1} \cdots A^{n-1}{}_{\sigma_{n-1}},$$

について, 右辺のゼロ以外の項は $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ がすべて異なる数字のときである。よって, 下付き添え字が連番になるように定義式を書き換えることが可能である。その場合, 上付き添え字がどのように並べ替えられるかを考えなければならない。上付き添え字 $(0, 1, \ldots, n-1)$ から下付き添え字 $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ を得る操作を σ と書くことにする。下付き添え字が $(0, 1, \ldots, n-1)$ の順になるためには, σ と逆の操作, すなわち, σ^{-1} を実行すればよい。すると, 上付き添え字は $(0, 1, \ldots, n-1)$ に σ^{-1} を適用した並びになっているはずである。その並びを $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ と書いたとすると, 行列式の定義式は,

$$\det A = \sum_{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}} \epsilon^{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} A^{\lambda_0}{}_0 A^{\lambda_1}{}_1 \cdots A^{\lambda_{n-1}}{}_{n-1},$$

と書き換えられる。ここで, 添え字が λ と σ のようにペアでなくなり, アインシュタインの総和の規約が使えなくなったため, あえて総和記号を記述した。ところで, σ が偶置換なら, その逆操作である σ^{-1} も偶置換, σ が奇置換なら σ^{-1} も奇置換であることを考えると, レビ・チビタ記号 $\epsilon^{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}}$ を $\epsilon_{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}$ で置き換えてもよいことに気づく。よって, 行列式は,

$$\det A = \epsilon_{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}} A^{\lambda_0}{}_0 A^{\lambda_1}{}_1 \cdots A^{\lambda_{n-1}}{}_{n-1}, \tag{1.2}$$

と書いてもよいことがわかる。ここでは再び, アインシュタインの総和の規約が適用されている。もともとの行列式の定義が列に沿った展開 (下付き添え字についての総和) になっているのに対し, 新しい定義式は行に沿った展開になっている。別の見方をすると, 転置行列を列に沿って展開する式になっている。よって, 行列を転置しても行列式の値は変化しない。¶

転置しても行列式が変化しないので, 行ベクトルに注目して書かれていた行列式の定義を, 列ベクトルに注目して読み替えることが可能になった。その性質から得られる恩恵がある。行列式の性質を記述していくうえで, 行列 ${A^\mu}_\nu$ を,

$$\begin{bmatrix} {A^0}_0 & {A^0}_1 & \cdots & {A^0}_{n-1} \\ {A^1}_0 & {A^1}_1 & \cdots & {A^1}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {A^{n-1}}_0 & {A^{n-1}}_1 & \ldots & {A^{n-1}}_{n-1} \end{bmatrix} \equiv [\ \boldsymbol{a}_0 \quad \boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\ ],$$

のように列ベクトル $\boldsymbol{a}_\nu$ を用いた議論ができるのだ。これにどのような効果があるかというと, 紙面の節約になるのだ。

性質 2　行列中の任意の列を k 倍した場合, 行列式は k 倍される。すなわち

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \cdots & k\boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-1} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_0 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-1} \end{vmatrix},$$

が成り立つということである。

> **証明**　この性質を示すのは簡単である。この性質についても行列式を用いるのだ。定義式から行列式を数式変形すると,
>
> $$\begin{aligned} &\epsilon_{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} {A^{\sigma_0}}_0 {A^{\sigma_1}}_1 \cdots k{A^{\sigma_i}}_i \cdots {A^{\sigma_{n-1}}}_{n-1} \\ &\qquad = k\,\epsilon_{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} {A^{\sigma_0}}_0 {A^{\sigma_1}}_1 \cdots {A^{\sigma_i}}_i \cdots {A^{\sigma_{n-1}}}_{n-1}, \end{aligned}$$
>
> が得られるので証明できる。¶

この性質の系として, すべての成分がゼロとなる列が存在した場合, 行列式がゼロとなる。なぜなら, 行列の第 i 列がすべてゼロであるならば, 上の数式について $k = 0$ となる場合に相当するので, 行列式が必然的にゼロになるのだ。

性質 3　任意の列を入れ替えた場合, 行列式の符号が変化する。 すなわち,

$$|\ \boldsymbol{a}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\ | = -|\ \boldsymbol{a}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\ |,$$

なる数式が成立する。

> **証明**　この性質についても定義式に当てはめてみると, 行を入れ替えた場合の行列式:
>
> $$\begin{aligned} &\epsilon_{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} {A^{\sigma_0}}_0 {A^{\sigma_1}}_1 \cdots {A^{\sigma_i}}_j \cdots {A^{\sigma_j}}_i \cdots {A^{\sigma_{n-1}}}_{n-1} \\ &\qquad = \epsilon_{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} {A^{\sigma_0}}_0 {A^{\sigma_1}}_1 \cdots {A^{\sigma_j}}_i \cdots {A^{\sigma_i}}_j \cdots {A^{\sigma_{n-1}}}_{n-1}, \end{aligned}$$

は, 入れ替える前の行列式:

$$\epsilon_{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} A^{\sigma_0}{}_0 A^{\sigma_1}{}_1 \cdots A^{\sigma_i}{}_i \cdots A^{\sigma_j}{}_j \cdots A^{\sigma_{n-1}}{}_{n-1},$$

と比べたとき, すべての項について, 必ず, 添え字 σ_i と σ_j を入れ替える操作が 1 回増えていることがわかる。つまり, 入れ替え前に偶置換だった項が奇置換に, 奇置換だった項が偶置換になるため, すべての項においてレビ・チビタ記号の符号が反転し, 上記のような性質が導き出される。¶

この性質の系として, 同一の行が 2 つ以上存在したとき, 行列式はゼロとなる。なぜかと言うと, 一致する行同士を入れ替えても行列の内容が変わらないので, 行列式は一定である。しかし, 上記性質より, 行を入れ替えると行列式の符号が反転する。この 2 つの条件を満たすには, 行列式がゼロでなければならないからである。行の入れ替えに関する行列式の性質を,

$$\epsilon_{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{n-1}} A^{\mu_0}{}_{\sigma_0} A^{\mu_1}{}_{\sigma_1} \cdots A^{\mu_{n-1}}{}_{\sigma_{n-1}} = \epsilon_{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} \det A, \tag{1.3}$$

と書くことができる。 この式は, 転置行列の行列式も同じ値であることを利用して,

$$\epsilon^{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} A^{\mu_0}{}_{\sigma_0} A^{\mu_1}{}_{\sigma_1} \cdots A^{\mu_{n-1}}{}_{\sigma_{n-1}} = \epsilon^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{n-1}} \det A, \tag{1.4}$$

と書いてもよい。添え字が偶置換のときに 1, 奇置換では −1, 同一の添え字が 2 つ異常存在するときにゼロとなるレビ・チビタ記号を利用しているので, この関係式が成り立つことは明らかであろう。

性質 4　ある列が 2 つの列の和で表現されるとき, 行列式はそれぞれの列をもつ行列式の和に等しい。これを形式的に書くと,

$$\begin{aligned}&\left|\ \boldsymbol{a}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{i-1} \quad \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i \quad \boldsymbol{a}_{i+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\ \right| \\ &\qquad = \left|\ \boldsymbol{a}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{i-1} \quad \boldsymbol{a}_i \quad \boldsymbol{a}_{i+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\ \right| + \left|\ \boldsymbol{a}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{i-1} \quad \boldsymbol{b}_i \quad \boldsymbol{a}_{i+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\ \right|,\end{aligned}$$

なる数式が成立する。

証明　この性質は, 行列式の定義式を用いて,

$$\begin{aligned}&\epsilon_{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} A^{\sigma_0}{}_{\mu_0} A^{\sigma_1}{}_{\mu_1} \cdots (A^{\sigma_i}{}_i + B^{\sigma_i}{}_i) \cdots A^{\sigma_{n-1}}{}_{\mu_{n-1}} \\ &\qquad = \epsilon_{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} (A^{\sigma_0}{}_{\mu_0} A^{\sigma_1}_{\mu_1} \cdots A^{\sigma_i}{}_i \cdots A^{\sigma_{n-1}}{}_{\mu_{n-1}} + A^{\sigma_0}{}_{\mu_0} A^{\sigma_1}{}_{\mu_1} \cdots B^{\sigma_i}{}_i \cdots A^{\sigma_{n-1}}{}_{\mu_{n-1}}),\end{aligned}$$

のように数式変形することによって証明できる。¶

この性質に対して前項の性質を取り入れた系として, 行列のある行に, 別の行の定数倍を加算しても行列式は変化しないという性質が得られる。形式的に書くと,

$$\left|\,\boldsymbol{a}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i + k\boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\,\right| = \left|\,\boldsymbol{a}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_j \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1}\,\right|,$$

となる。詳しく説明すると, 左辺は第 i 列が $\boldsymbol{a}_i$ の行列と, 第 i 列が $k\boldsymbol{a}_j$ である行列の行列式の和である。そのうち, 第 i 列が $k\boldsymbol{a}_j$ である行列の行列式は, 第 i 列が $\boldsymbol{a}_j$ である行列の行列式の k 倍である。第 i 列が $\boldsymbol{a}_j$ である行列は, 第 i 列と第 j 列が等しいので, その行列式はゼロになる。したがって, 左辺は列を加算する前の行列の行列式と等しい。この性質は, 行列式を計算するときによく使われる性質である。

性質 5　行列が 2 つの行列の積であるとき, その行列式は, それを構成する 2 つの行列の行列式の積に等しい。これは形式的には,

$$\det AB = \det A \, \det B, \tag{1.5}$$

なる数式が成立する。

証明　この性質も行列式の定義を用いて,

$$\begin{aligned}
\det AB &= \epsilon^{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} A^0{}_{\kappa_0} B^{\kappa_0}{}_{\sigma_0}\; A^1{}_{\kappa_1} B^{\kappa_1}{}_{\sigma_1} \cdots A^{n-1}{}_{\kappa_{n-1}} B^{\kappa_{n-1}}{}_{\sigma_{n-1}} \\
&= A^0{}_{\kappa_0} A^1{}_{\kappa_1} \cdots A^{n-1}{}_{\kappa_{n-1}}\; \epsilon^{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}} B^{\kappa_0}{}_{\sigma_0} B^{\kappa_1}{}_{\sigma_1} \cdots B^{\kappa_{n-1}}{}_{\sigma_{n-1}} \\
&= A^0{}_{\kappa_0} A^1{}_{\kappa_1} \cdots A^{n-1}{}_{\kappa_{n-1}}\; \epsilon^{\kappa_0\kappa_1\cdots\kappa_{n-1}} \det B \\
&= \det A \, \det B,
\end{aligned}$$

のように計算できることから証明できる。¶

1.4.2　余因子と逆行列

ある n 次の正方行列の任意の行と列を一つずつ抜き取った行列は $n-1$ 次の正方行列となり, その行列の行列式によって定義される値は**余因子**と呼ばれる。余因子はもとの行列の行列式, および, 逆行列と有用な関係があるため, 本節で紹介しておこう。

正方行列 $A^\mu{}_\nu$ に対して, 余因子を $\tilde{A}_\mu{}^\nu$ なる記号で書くことにする。余因子 $\tilde{A}_\mu{}^\nu$ を具体的な行列の形態にて表現すると,

$$\tilde{A}_\mu{}^\nu = (-1)^{\mu+\nu} \begin{vmatrix}
A^0{}_0 & \cdots & A^0{}_{\nu-1} & A^0{}_{\nu+1} & \cdots & A^0{}_{n-1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
A^{\mu-1}{}_0 & \cdots & A^{\mu-1}{}_{\nu-1} & A^{\mu-1}{}_{\nu+1} & \cdots & A^{\mu-1}{}_{n-1} \\
A^{\mu+1}{}_0 & \cdots & A^{\mu+1}{}_{\nu-1} & A^{\mu+1}{}_{\nu+1} & \cdots & A^{\mu+1}{}_{n-1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
A^{n-1}{}_0 & \cdots & A^{n-1}{}_{\nu-1} & A^{n-1}{}_{\nu+1} & \cdots & A^{n-1}{}_{n-1}
\end{vmatrix},$$

のように定義される。これは行列から第 μ 行と第 ν 列を抜き取った行列の行列式に $(-1)^{\mu+\nu}$ を乗じた値となっている。この余因子が, もとの行列の行列式 $\det A$ との間に,

$$
\begin{aligned}
\det A &= A^0{}_0\tilde{A}_0{}^0 + A^0{}_1\tilde{A}_0{}^1 + \cdots + A^0{}_{n-1}\tilde{A}_0{}^{n-1} \\
&= A^1{}_0\tilde{A}_1{}^0 + A^1{}_1\tilde{A}_1{}^1 + \cdots + A^1{}_{n-1}\tilde{A}_1{}^{n-1} \\
&= A^2{}_0\tilde{A}_2{}^0 + A^2{}_1\tilde{A}_2{}^1 + \cdots + A^2{}_{n-1}\tilde{A}_2{}^{n-1} \\
&\vdots \\
&= A^{n-1}{}_0\tilde{A}_{n-1}{}^0 + A^{n-1}{}_1\tilde{A}_{n-1}{}^1 + \cdots + A^{n-1}{}_{n-1}\tilde{A}_{n-1}{}^{n-1},
\end{aligned}
$$

なる関係があることは, 行列式の定義から明らかである。これをさらに形式的に書くために $A^\mu{}_\nu\tilde{A}_\kappa{}^\nu$ なる値[2] を考えてみる。特に, $\mu = \kappa$ であれば, この値は行列式 $\det A$ と一致する。一方, $\mu \neq \kappa$ である場合, この値は κ 行 ν 列の余因子を μ 行に沿って展開した形になっている。 ところで, μ 行の成分は, 余因子 $\tilde{A}_\kappa{}^\nu$ をつくる小行列の中に存在するので, 展開結果は, μ 行と κ 行が等しい行列の行列式となり, 恒等的にゼロとなる。よって,

$$
A^\mu{}_\nu\tilde{A}_\kappa{}^\nu = \delta_\kappa{}^\mu \det A, \tag{1.6}
$$

となる。この $\delta_\kappa{}^\mu$ はクロネッカーのデルタとよばれ,

$$
\delta_\kappa{}^\mu = \begin{cases} 1 & \text{if } \kappa = \mu, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1.7}
$$

となる値である。ところで (1.6) は行に沿って展開した結果であるが, 行列式は列に沿って展開することもできるので,

$$
A^\nu{}_\kappa\tilde{A}_\nu{}^\mu = \delta_\mu{}^\kappa \det A, \tag{1.8}
$$

なる関係も成立する。さらに, $\bar{A}^\nu{}_\kappa \equiv \tilde{A}_\kappa{}^\nu / \det A$ なる量を定義すれば,

$$
A^\mu{}_\nu\bar{A}^\nu{}_\kappa = \bar{A}^\mu{}_\nu A^\nu{}_\kappa = \delta_\kappa{}^\nu, \tag{1.9}
$$

となる。この数式を直接的に解釈すると, $A^\mu{}_\nu$ は $\bar{A}^\nu{}_\kappa$ の**逆行列**である。逆行列とは本来, 数式においてある行列の左側から乗算した結果として単位行列 $\delta_\kappa{}^\nu$ を得るような行列である。しかし, 逆行列は右側から乗算しても単位行列を得ることができるため, 同時に $\bar{A}^\nu{}_\kappa$ は $A^\mu{}_\nu$ の逆行列であると言ってもよい。その事実を証明しておこう。

証明　行列 $B^\mu{}_\nu$ を $A^\mu{}_\nu$ の逆行列とする。そのとき, $A^\mu{}_\alpha\bar{A}^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ の両辺に左側から $B^\kappa{}_\mu$ を作用させると,

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= B^\kappa{}_\mu A^\mu{}_\alpha \bar{A}^\alpha{}_\nu = \delta^\kappa{}_\alpha \bar{A}^\alpha{}_\nu = \bar{A}^\kappa{}_\nu, \\
\text{RHS} &= B^\kappa{}_\mu \delta^\mu{}_\nu = B^\kappa{}_\nu,
\end{aligned}
$$

が得られる。左辺 (LHS) の計算には $B^\mu{}_\alpha A^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ を利用した。この結果, $B^\kappa{}_\nu = \bar{A}^\kappa{}_\nu$ であること, すなわち, $\bar{A}^\kappa{}_\nu$ が $A^\kappa{}_\nu$ の逆行列であることが示せた。¶

[2] アインシュタインの総和の規約が適用されていることに注意。

行列 $\bar{A}^{\mu}{}_{\nu}$ が $A^{\mu}{}_{\nu}$ の逆行列であることから, $\bar{A}^{\mu}{}_{\alpha}A^{\alpha}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ が成立する。クロネッカーのデルタ $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ は対格成分が 1 で他のすべての成分がゼロとなる行列であると考えてよい。そのような対角行列は単位行列と呼ばれる。行列式の定義式から, 単位行列の行列式は 1 である。さらに, (1.5) により, 逆行列の行列式は,

$$\det \bar{A} = \frac{1}{\det A}, \tag{1.10}$$

となる。逆行列の行列式は, もとの行列の行列式の逆数である。この関係式によると, $\det A = 0$ のとき, 逆行列の行列式が定義できない。つまり, $\det A = 0$ のとき逆行列が存在しないことを意味する。この性質から, 逆行列が存在しない条件を書くと,

- 行列にゼロベクトルとなる列ベクトルが少なくとも一つ含まれる。
- 行列に含まれる列ベクトルの一次結合で表される列ベクトルが行列の中に存在する。

となる。これは, 既にあげた行列式の性質から明らかである。また, 行列を転置しても行列式は不変であるので, 上の記述における列ベクトルを行ベクトルと書き換えても同様に逆行列が存在しない条件となる。

1.4.3 連立 1 次方程式の解

逆行列は連立 1 次方程式の解法として利用することができる。例えば, 方程式の未知数をベクトルとして並べ x^{ν} とする。そのベクトルに定数の変換行列 $A^{\mu}{}_{\nu}$ を作用させた結果が定数ベクトル y^{μ} であるとする。このとき形式的に,

$$A^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = y^{\mu},$$

なる数式で記述できる。あっさりと一つの数式で記述しているが, この方程式は, ベクトルの次数が n であるなら, $\mu = 0, 1, \ldots, n-1$ に対応し, n 個の方程式が存在することを意味する。行列 $A^{\mu}{}_{\nu}$ の逆行列を $\bar{A}^{\mu}{}_{\nu}$ としよう。このとき, $\bar{A}^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\alpha}{}_{\nu}$ であることに注意すると,

$$x^{\alpha} = \bar{A}^{\alpha}{}_{\mu}y^{\mu},$$

が得られる。つまり, 方程式の右辺に記述されていた定数ベクトル y^{μ} に変換行列の逆行列 $\bar{A}^{\alpha}{}_{\nu}$ を作用させることによって連立方程式を解くことができるのである。

前項で余因子行列 $\tilde{A}_{\kappa}{}^{\nu}$ を用いて $\bar{A}^{\nu}{}_{\kappa} = \tilde{A}_{\kappa}{}^{\nu}/\det A$ のように逆行列を定義した。その定義を利用すれば, 連立 1 次方程式の解を別の形式で記述できそうだ。復習をしておくと, 余

因子行列の第 κ 行, 第 ν 列の成分 $\tilde{A}_\kappa{}^\nu$ は, 行列 A の第 ν 行と第 κ 列を取り除いた行列の行列式に $(-1)^{\kappa+\nu}$ を乗じた値である。余因子行列を用いると, 連立方程式の解は,

$$x^\alpha = \bar{A}^\alpha{}_\mu y^\mu = \frac{1}{\det A}\tilde{A}_\mu{}^\alpha y^\mu,$$

のように記述できる。行列式と余因子行列の関係式 (1.8) に注意すると, 連立方程式の解は,

$$x^\alpha = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A^0{}_0 & \cdots & A^0{}_{\alpha-1} & y^0 & A^0{}_{\alpha+1} & \cdots & A^0{}_{n-1} \\ A^1{}_0 & \cdots & A^1{}_{\alpha-1} & y^1 & A^1{}_{\alpha+1} & \cdots & A^1{}_{n-1} \\ A^2{}_0 & \cdots & A^2{}_{\alpha-1} & y^2 & A^2{}_{\alpha+1} & \cdots & A^2{}_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{n-1}{}_0 & \cdots & A^{n-1}{}_{\alpha-1} & y^{n-1} & A^{n-1}{}_{\alpha+1} & \cdots & A^{b-1}{}_{n-1} \end{vmatrix}, \tag{1.11}$$

なる形で書き換えられる。この数式は, 変換行列 A の第 α 列ベクトルを定数列ベクトル $\boldsymbol{y}$ で置き換えた行列の行列式に, $\det A$ の逆数を乗じた積が未知数 x^α に等しいことを意味している。導出された公式 (1.11) はクラメルの公式と呼ばれる。この公式は, 手計算では 3 元 1 次までの連立方程式の解法に用いられる。

クラメルの公式によると, 連立方程式の解 x^α の分母が $\det A$ であるので, $\det A = 0$ のとき解が定義できない。それは何を意味しているのか? 行列式 $\det A = 0$ の場合, 解が特定できない場合と, 解が存在しない場合とがある。解が特定できない場合とは,

$$x^0 + x^1 = 2,$$
$$2x^0 + 2x^1 = 4,$$

がその一例である。この例では, 連立方程式のように見えるが, 第 2 の方程式も $x^0 + x^1 = 2$ である。つまり, 未知数が二つあるのに方程式が一つしかない。このように方程式が解くべき道数より少ない状態を「ランクが足りない」という。ランクが足りない状態では, 未知数が一意的な数値として定まるのでなく, $x^0 = 2 - x^1$ のような関係で与えられる。つまり, ランクが足りない状態は解が存在しないという状態ではない。一方, 解が存在しない状態の一例は,

$$x^0 + x^1 = 2,$$
$$2x^0 + 2x^1 = 3,$$

である。これらの方程式は, 第 2 式の左辺が第 1 式の 2 倍であるのに, 右辺がその関係にないのだ。つまり, この方程式は矛盾するため, 解が存在しない。実は, 解が特定できないのか, 存在しないのか, を見分ける方法がある。先ほどの二つの例について, x^0 を与えるクラメルの公式における分子を計算すると,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

となる。解が特定できない時はクラメルの公式の分子もゼロとなる。分子がゼロでなければ解が存在しない。行列式は, このように連立方程式の解の存在を調べるために有用である。

1.5　斜交座標系の計量

それでは幾何学らしい話題に入っていこう。とは言っても, まだ, 曲がった空間を扱わず, 斜交座標系に関してベクトルの取り扱いを調べてみる。幾何学的直感を使う場合, 座標軸が直線である座標系のほうが理解しやすいはずである。これまで詮索しないという約束で使っていた上付き添え字と下付き添え字の意味が見え始めてくるであろう。

1.5.1　ベクトル表記

図 1.2 のような斜交座標系を考えてみよう。 この図は簡単のため, 2 次元の座標系をあらわしているが, ここでの議論は任意の次元について成り立つ。 この座標系の次元が n であれば, n 本の独立な座標軸を設定することができる。 座標軸の各方向について, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ を定めよう。これらのベクトルは, 座標系の位置に依存せず, 常に一定である。また, 大きさは 1 であるとは限らない。

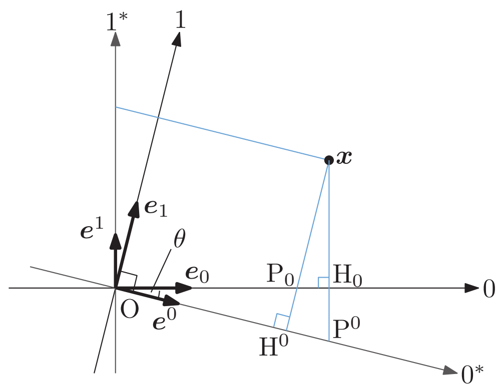

図 1.2: 斜交座標系におけるベクトル

任意のベクトルは, 座標系で設定された基本ベクトルの一次結合で表現できる。つまり, 基準ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ で張られる座標系において, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は,

$$\boldsymbol{x} = x^\mu \boldsymbol{e}_\mu, \tag{1.12}$$

のように表現できるのだ。右肩の μ は指数ではなく, ベクトルの添え字である。つまり, x^μ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の長さを単位とし, その方向に伸びる座標である。ベクトル $\boldsymbol{x}$ の自

分自身との内積を書いてみると,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=(x^\mu\boldsymbol{e}_\mu)\cdot(x^\nu\boldsymbol{e}_\nu)=x^\mu x^\nu(\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu),$$

となる。また, 異なるベクトル $\boldsymbol{y}=y^\mu\boldsymbol{e}_\mu$ との内積は,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(x^\mu\boldsymbol{e}_\mu)\cdot(y^\nu\boldsymbol{e}_\nu)=x^\mu y^\nu(\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu),$$

となる。ここで,

$$g_{\mu\nu}=\boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu, \tag{1.13}$$

なる $g_{\mu\nu}$ を定義すると, 斜交座標系のベクトル x^μ と y^ν の内積は $g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ と書くことができる。 この $g_{\mu\nu}$ は任意の尺度によって計測された座標 x^μ を長さに変換するはたらきがあるため, 計量と呼ばれる。また, ベクトルの内積は可換であるため, $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$ が成り立ち, 計量は対称行列であることがわかる。

ところで, n 次元空間における内積に関する性質として, 2 次元や 3 次元と同様に,

$$-1\leq\frac{g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu}{\sqrt{g_{\kappa\sigma}x^\kappa x^\sigma\cdot g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta}}\leq 1, \tag{1.14}$$

なる性質がある。この性質に注目して,

$$\cos\theta\equiv\frac{g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu}{\sqrt{g_{\kappa\sigma}x^\kappa x^\sigma\cdot g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta}},$$

のように書き, その角度 θ をベクトル x^μ と y^μ のなす角と定義する。これは, 2 次元や 3 次元のベクトル解析における角度の定義とも合致する。ところで, 不等式 (1.14) は, ベクトル $x^\mu+t\,y^\mu$ の自分自身の内積を評価することによって導出できる。ここで, t を任意の実数とする。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いてその内積を計算すると,

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}(x^\mu+t\,y^\mu)(x^\nu+t\,y^\nu)&=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu+t(g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu+g_{\mu\nu}x^\nu y^\mu)+t^2g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu\\&=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu+t\,(g_{\mu\nu}+g_{\nu\mu})x^\mu y^\nu+t^2g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu\\&=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu+2t\,g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu+t^2g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu,\end{aligned}$$

となる。特に, 最後の行への数式変形は $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$ なる計量テンソルの対称性を利用した。また, 非常に紛らわしいが, t の右肩の数字は添え字ではなく 2 乗を意味する。ところで, ベクトルの自分自身との内積は, そのベクトルの長さの自乗となるので,

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu+2t\,g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu+g_{\mu\nu}y^\mu y^\nu\geq 0,$$

が成立するはずである。しかも, この不等式は実数 t の値にとは無関係に成立するはずなので, 2 次方程式の判別式からその条件を求めると,

$$(g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)^2-g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\cdot g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta<0,$$

が得られる。この不等式の平方根をとれば不等式 (1.14) が導出される。¶

次に, $\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ なる逆ベクトル系 $\boldsymbol{e}^\nu$ を定義しよう。この逆ベクトルは添え字が異なるすべての基本ベクトルと直交する。座標系が 2 次元であれば, 図 1.2 のようなベクトルを想像すればよい。ここで,

$$\boldsymbol{x} = x_\mu \boldsymbol{e}^\mu, \tag{1.15}$$

が成り立つ新たな座標 x_μ を定義してみる。逆ベクトル系についても

$$g^{\mu\nu} = \boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}^\nu, \tag{1.16}$$

なる量を定義すると, 逆ベクトル系のベクトル x_μ と y_ν の内積は $g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ と書くことができる。つまり, $g^{\mu\nu}$ は逆ベクトル系の計量である。さらに, (1.12) と (1.15) について, $\boldsymbol{e}_\nu$ との内積をとると

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_\nu = x_\nu = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu) x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu, \tag{1.17}$$

となるので, 任意のベクトル x^μ は, $x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu$ によって逆ベクトル系の座標に変換できる。逆に,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^\nu = x^\nu = (\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}^\nu) x^\mu = g^{\mu\nu} x_\mu, \tag{1.18}$$

となることから, 逆ベクトル系からの逆変換が $x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu$ によって与えられることもわかる。幾何学的に言うと, 座標 x^μ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の μ 軸に対する平行射影を単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の長さで規格化した値である。

例えば, 2 次元の場合なら図 1.2 を見ればわかりやすい。ベクトル $\boldsymbol{e}_0$ と $\boldsymbol{e}^0$ の長さを, それぞれ, e_0, e^0 とし, それらがなす角を θ とすると, $e_0 e^0 \cos\theta = 1$ が成り立つ。ここで, ベクトル $\boldsymbol{x}$ の 0^* 軸への垂直射影の長さは $\overline{\mathrm{OH}^0} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^0 / e^0$ である。ところで, 0 軸上の平行射影 P_0 は, $\boldsymbol{x}$ と H^0 を結ぶ直線上にあるので, $\overline{\mathrm{OP}_0} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^0 / e^0 \cos\theta$ となる。この長さを基本ベクトル $\boldsymbol{e}_0$ の長さで規格化すれば, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^0 / e_0 e^0 \cos\theta = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^0$ となるので, ベクトルの座標とは, ベクトルを座標軸に平行投影し, その長さを対応する基本ベクトルの長さで規格化した値であることがわかる。 同様の考察で逆ベクトル系の座標 x_μ も μ 軸への平行射影であることを示すことができる。

ところで, (1.18) と (1.12) を結びつけると,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_\lambda (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^\lambda),$$

が成り立つことがわかる。このベクトル $\boldsymbol{x}$ は任意であるので, $\boldsymbol{e}^\mu = \boldsymbol{e}_\lambda (\boldsymbol{e}^\lambda \cdot \boldsymbol{e}^\mu)$ も成り立つはずである。この両辺に $\boldsymbol{e}_\nu$ を内積すると $(\boldsymbol{e}_\nu \cdot \boldsymbol{e}_\lambda)(\boldsymbol{e}^\lambda \cdot \boldsymbol{e}^\mu) = \delta_\nu{}^\mu$, すなわち, $g_{\nu\lambda} g^{\lambda\mu} = \delta_\nu{}^\mu$ となるので, 通常のベクトル系と逆ベクトル系の計量は, 互いに逆行列の関係にある。そうすると, 計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて通常のベクトル系から逆ベクトル系に変換された成分に対して, $g^{\mu\nu}$ によって通常のベクトル系に変換すると, 必ず, もとの値に戻るということである。

1.5.2　線形変換

斜交座標系の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ を線形変換 $\boldsymbol{e}'_\mu = A_\mu{}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ によって変換した場合を考えよう。これは, $\boldsymbol{e}'$ を基本ベクトルとする新たな座標系を定義することを意味する。新たな座標系でベクトル $\boldsymbol{x}$ を表現すると, $\boldsymbol{x} = x'^\mu \boldsymbol{e}'_\mu$ と書くことができる。一方, 逆ベクトルが $\boldsymbol{e}'^\mu = B^\mu{}_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha$ によって変換されると仮定し, 変換の性質を調べてみよう。当然, 変換後の基本ベクトルについても $\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'^\nu = \delta_\mu{}^\nu$ が成り立つはずである。この量を計算してみると,

$$\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'^\nu = A_\mu{}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \cdot B^\nu{}_\beta \boldsymbol{e}^\beta = A_\mu{}^\alpha B^\nu{}_\beta\, \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}^\beta = A_\mu{}^\alpha B^\nu{}_\alpha,$$

となるので, $B^\mu{}_\alpha$ は $A_\alpha{}^\mu$ の逆行列[3]でなければならない。この事実に注意して, 変換後の座標 x'^μ を計算すると,

$$x'^\mu = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}'^\mu = \boldsymbol{x} \cdot B^\mu{}_\alpha \boldsymbol{e}^\alpha = B^\mu{}_\alpha x^\alpha,$$

なる関係式が得られるので, 座標 x'^μ は逆ベクトル系の基本ベクトルと同じ変換を受けることがわかる。簡単にいうと, 正ベクトル系の基本ベクトルと同一の変換を受ける成分が下付き添え字で表され, 逆ベクトル系の基本ベクトルと同一の変換を受ける成分が上付き添え字を表される。

座標回転　カルテシアン座標を回転させる変換を考えてみよう。図 1.3 は, 反時計回りに角度 θ だけ回転させた例を示している。図に示すベクトル $\boldsymbol{x}$ が座標回転によってどのように変換されるか調べてみよう。座標を θ だけ回転させるということは, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}^0$ と $\boldsymbol{e}^1$ を θ だけ回転させて新たな基本ベクトル $\boldsymbol{e}'^0$ と $\boldsymbol{e}'^1$ をつくるということである。図の

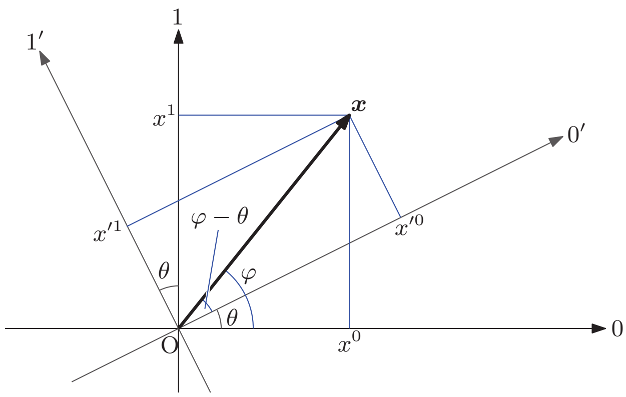

図 1.3: カルテシアン座標系の回転

ような座標回転によって基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}'_0 = \boldsymbol{e}_0 \cos\theta + \boldsymbol{e}_1 \sin\theta, \qquad \boldsymbol{e}'_1 = -\boldsymbol{e}_0 \sin\theta + \boldsymbol{e}_1 \cos\theta,$$

[3]添え字の順序を気にするならば, 逆行列の転置行列である。

のように変換されるはずだ。これらの変換式から, 変換行列が,

$$A_0{}^0 = A_1{}^1 = \cos\theta, \qquad A_0{}^1 = -A_1{}^0 = \sin\theta,$$

であることが確認できる。座標成分 x^μ の変換行列 $B^\mu{}_\nu$ は, $A_\mu{}^\nu$ の逆行列であるから,

$$B^0{}_0 = B^1{}_1 = \cos\theta, \qquad B^1{}_0 = -B^0{}_1 = \sin\theta,$$

である。したがって, 座標回転による座標変換は,

$$x'^{\,0} = x^0\cos\theta - x^1\sin\theta, \qquad x'^{\,1} = x^0\sin\theta + x^1\cos\theta,$$

となるはずだ。この座標変換は, 図 1.3 と比較すると, その正当性がわかるはずだ。一例であるが, 基本ベクトルの変換と座標成分の変換が, 前に述べたとおり逆変換の関係であることが示された。つまり, 座標成分は反変ベクトルの性質を示す。その反変性は図 1.3 を用いて説明すると, 次のようになる。ベクトル $\boldsymbol{x}$ が x^0 軸に対して反時計回りに角度 φ の方向を向いているとする。座標軸を θ だけ回転させたとき, ベクトル $\boldsymbol{x}$ は, 新たな $x'^{\,0}$ 軸と角度 $\varphi-\theta$ をなす方向を向いている。座標軸を θ だけ反時計回りに回転させたことによって, ベクトルと座標軸がなす角度は θ だけ減少したのだ。これが反変性の正体である。

ローレンツ変換　特殊相対性理論における座標変換を調べてみよう。対象となる座標系は, x^0 が時間座標, x^1 が運動方向となる空間座標である。ローレンツ変換は, ある慣性系と相対速度 β で運動する慣性系との間での座標変換を表す。なお, $\beta=1$ は光速に対応し, 一般の運動物体において $-1<\beta<1$ となる。物理学の公式によると, ローレンツ変換は,

$$x'^{\,0} = \frac{x^0-\beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x'^{\,1} = \frac{x^1-\beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

で与えられる。つまり, 座標変換を与える変換行列は,

$$B^0{}_0 = B^1{}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad B^0{}_1 = B^1{}_0 = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となるわけだ。一方, 基本ベクトルの変換行列 A_μ^ν は B_ν^μ の逆行列だから,

$$A_0{}^0 = A_1{}^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad A_0{}^1 = A_1{}^0 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となる。つまり, 基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}'_0 = \frac{\boldsymbol{e}_0+\beta\boldsymbol{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \boldsymbol{e}'_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1+\beta\boldsymbol{e}_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

なる変換則にしたがうのだ。得られた基本ベクトルの変換則に基づき変換前と変換後の座標軸を描くと図 1.4 のようになる。横軸を x^0 に描くべきと思うかもしれないが, 特殊相対

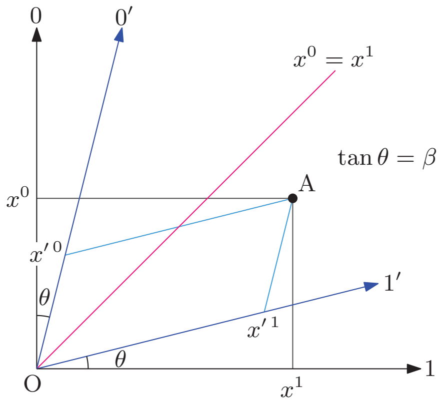

図 1.4: ローレンツ変換

性理論における世界線の描き方にしたがい時間軸 x^0 を縦軸に設定した。変換後の座標系 $[x'^0, x'^1]$ は斜交座標系となるので, 逆ベクトル系は正ベクトル系とは異なる。また, 得られた変換則から明らかなように, ローレンツ変換を受けると基本ベクトルの長さが変化する。ローレンツ変換とは, 相対的に等速運動する慣性系への座標変換であり, パラメータ β が相対速度 ($\beta = 1$ が光速) に相当する。詳しくは説明しないが, 座標変換した後の基本ベクトルの長さが異なることから, 異なる速度で運動する慣性系とは, 区間と時間の長さの尺度が異なる。これは, 相対性理論の効果である長さと時間の収縮現象を表す。

ベクトルの成分が基本ベクトルと逆の変換を受けることは他の例を考えても示すことができる。日常で簡単に体験できることとして, 自分が乗った列車が前に進めば, 車窓から見える景色が後ろに運動するように見える現象がその例である。列車が前に進むことが, 基本ベクトルを前に平行移動させる事である。それに対し, 車窓から見える景色, 例えば, ある木立の位置がベクトルである。後ろに移動して見えるのは, 基本ベクトルの平行移動によって, ベクトル成分がその逆変換として後ろに平行移動されたからである。このように基本ベクトルと逆の変換を受ける成分は**反変成分**と呼ばれる。一方, 逆ベクトル系の座標成分については, $x'_\mu = A_\mu{}^\alpha x_\alpha$ のように, 基本ベクトルと同じ変換を受けるので**共変成分**という。これまでに, 右上に添え字をもつ量と, 右下に添え字をもつ量が出てきていたが, 実は, 前者が反変成分, 後者が共変成分という区別になっていたのである。

1.5.3　カルテシアン座標

しばしば x, y, z の座標で表現されるカルテシアン座標は斜交座標の一種である。ここでも一般的な議論として, n 次元のカルテシアン座標を考えた場合, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ 自身の内積は, 三平方の定理によって,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = (x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2,$$

と書くことができる。この内積が計量を用いて $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ と書けることを思い出すと, カルテシアン座標における計量が $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ となることに気づくであろう。この計量を用いると, カルテシアン座標系の座標 x^μ を逆ベクトル系の座標 x_μ で表現すると,

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \delta_{\mu\nu}x^\nu = x^\mu,$$

となる。つまり, カルテシアン座標系の逆ベクトル系の座標は, 通常の座標と同一である。言い換えると, カルテシアン座標においては, ベクトルの反変成分と共変成分の区別ができないということだ。前節までは, ベクトルの添え字の位置, すなわち, 共変/反変の区別を気にすることなく, 数式を書いていた。それはカルテシアン座標であるから成立していたのだ。一般の計量 $g_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$ をもつその他の座標系においては, ベクトルの反変成分と共変成分は異なる値となるので, 添え字の位置を区別することが必要となってくる。