

目次

第1章 特殊相対性理論	1
1.1 ガリレイの相対性原理	1
1.2 ガリレイ変換の破綻	3
1.3 マイケルソン・モーレーの実験	4
1.4 光速不変の原理	7
1.5 ローレンツ変換	8
1.6 同時性の不一致	9
1.7 長さの収縮と時計の遅れ	10
1.8 ミンコフスキー時空	13
第2章 慣性系から見た運動	17
2.1 速度・加速度変換	17
2.2 光のドップラ効果	19
2.3 等加速度運動	21
2.4 事象の地平面	23
2.5 固有時間	24
2.6 ミンコフスキー時空	26
第3章 加速度系から見た運動 I	29
3.1 定式化の方針	29
3.2 時間の変換	30
3.3 物体の変位	32

3.4	速度についての考察	34
3.5	時間の変換についての注意	37
第4章	一般相対性理論	39
4.1	等価原理	39
4.2	リーマン幾何学	41
4.2.1	座標と座標変換	41
4.2.2	スカラとベクトル	42
4.2.3	2階テンソル	44
4.2.4	計量テンソル	44
4.3	測地線とクリストッフエル記号	47
4.4	弱い重力場の計量テンソル	48
4.5	アインシュタインの方程式	49
4.6	シュワルツシルトの解	51
4.6.1	近日点の移動	51
4.6.2	重力レンズ	52
4.6.3	ブラックホール	53
4.7	シュワルツシルトのブラックホール	56
4.7.1	事象の地平面	56
4.7.2	接近距離の限界	57
4.7.3	シュワルツシルト解の半径	59
4.7.4	座標系と特異点	60
4.8	重力赤方偏移	64
4.9	重力場の時計の遅れ	65
第5章	加速度系から見た運動 II	67
5.1	加速度場の4次元計量	67

	3
5.2 加速度場の自由粒子	71
5.2.1 加速度場の運動方程式	71
5.2.2 光の軌跡	72
5.2.3 質量のある粒子の軌跡	74
5.3 加速度場における1次元運動	76
5.4 初期条件の再考察	77
5.5 自由粒子の時間	78
5.6 双子のパラドックス	79
5.7 クルスカル図	82
5.8 リンドラー座標系	84
第6章 恒星間航行	87
6.1 定数の定義	87
6.2 問題設定	88
6.3 地球から見た世界	89
6.4 宇宙船から見た世界	92
6.4.1 加速行程	93
6.4.2 巡航行程	94
6.4.3 減速行程	95
6.5 二者の比較	98
6.6 推進システムの考察	99
6.6.1 巡航速度の見積もり	99
6.6.2 エネルギー効率	103
6.6.3 恒星間航行の実現性	104
第7章 観測に関する考察	107
7.1 時間の逆行	107

7.1.1	急停止による時間の逆行	108
7.1.2	時間の逆行は観測されるか?	109
7.1.3	時間の逆行の例	111
7.2	有限の加速度による時間の逆行	112
7.2.1	加速前に発射された光	112
7.2.2	加速中に発射された光	114
7.2.3	一般の場合	115
7.3	オリオン星雲への航路	118
7.4	光の伝播遅延の補正	119
7.5	慣性系からの観測	120

第1章 特殊相対性理論

アインシュタインの相対性理論といえば、光速に近い速度で運動する物体の時計が遅れるという、いわゆる、ウラシマ効果が有名である。光速に近い速度で恒星間を航行する場合の時間や空間について議論するための前置きとして、本章では特殊相対性理論を紹介する。特殊相対性理論は、ガリレイの相対性原理に対して、光速を取り扱えるように拡張した理論である。光速を取り扱える理論の産物として、ウラシマ効果などSF小説で見られる物理効果が導出される。

1.1 ガリレイの相対性原理

運動における相対性という考え方は、16世紀にガリレイが提唱した相対性原理に端を発する。相対性原理とは、等速運動をしている観測者には、その速度に関係なく物理現象が同じように見えるため自分が運動しているかどうか判定することができない、という物理学の基本原則である。

相対性原理は、特別なものではなく、我々が日常生活において体験できる現象に基づいている。例えば、日常生活においてコップに水を注ぐことができれば、特別な訓練をしなくても、200 km/h 以上の速度で走る新幹線の中、または、900 km/h 程度で運動する航空機の中でも同様にコップに水を注ぐ事ができる。逆に、自分が新幹線で移動中であるという先入観がなければ、たとえ 200 km/h で運動していても、自分が運動していることすら認識できないのではないだろうか。例えば、駅に停車中の電車に乗っていて、隣のトラックに停車中の電車を眺めていたとしよう。自分の電車がゆっくりと走り始めたとき、あたかも、自分が停止していて相手の電車が動き始めたような錯覚を感じたことはないだろうか？それが相対性原理による錯覚である。

地球の自転による赤道での回転速度は 465 m/s 程度である。さらに、地球は太陽の周りを 30 km/s の速度で公転し、太陽系でさえ、銀河の中心に対して 250 km/s の速度で公転している。しかし、古代には地球(大地)が絶対的に静止しているという、いわゆる天動説が信じられていたことから、宇宙における地球の運動速度はまったく認識されていなかったのだ。付け加えるなら、銀河系さえも大きな速度で運動しているかもしれないというように、

誰が静止しているかなどという議論は不可能である。それを裏返せば、自分が静止していると仮定しても物理現象を議論するうえでは問題はない。

ある観測者が、(地表面を基準に見たとき) 40 km/h で運動する自動車に乗っている。それを自動二輪車が 60 km/h で追い越したとしよう。自動車に乗っている観測者から見ると、自動二輪車は 20 km/h で前方に走り去っていくはずである。このような現象は、

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (1.1)$$

のようなガリレイ変換で説明できる。ここで、座標 $[x, y, z]$ はカルテシアン座標¹である。また、プライム (') のついていない方が地表面における(静止系)座標、プライムのついていない方が自動車に乗っている観測者の座標である。観測者は、自分の座標系の原点に存在すると考えればよい。ここで、地表面に立っている観測者の座標系を K 系、自動車に乗っている観測者の座標系を K' 系と呼ぶことにしよう。上に示したガリレイ変換は、K' 系が K 系に対して相対的に x 軸方向に速度 v で運動していることを表している。その数式を時間 t で微分すると、

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt},$$

なる速度の変換則が得られる。この変換則において、 dx/dt が K 系から見た自動二輪車の速度、 dx'/dt が K' 系から見た自動二輪車の速度である。この変換式から、先ほど述べように、自動車 (K' 系) から見た自動二輪車の相対速度が 20 km/h となることが説明できる。

ガリレイ変換を時間 t で 1 階微分すると速度の変換式が導出されたが、2 階微分すると v の項が消失するため、ニュートンの運動方程式 $m d^2\mathbf{x}/dt^2 = \mathbf{F}$ は、

$$m \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = \mathbf{F},$$

のようにガリレイ変換される。ここで、 \mathbf{x} は観測対象の位置のベクトル表記、 \mathbf{F} は観測対象に作用する力である。ニュートンの運動方程式は(相対性理論以前の)力学の基本方程式であるので、その方程式が座標変換によって形を変えないということから、等速度運動する観測者が観測する物理現象は、その速度とは無関係であると結論づけられる。言い換えると、加速度をもたない観測者は、自分が動いているか、静止しているかということを区別できない。これがガリレイの相対性原理である。つまり、すなわち、ガリレイの相対性原理はニュートン力学において成立するということである。

¹カルテシアン (Cartesian) 座標とは、デカルトの直交座標のことである。デカルト (Descartes) はフランス語の定冠詞 des と Cartes が短縮してできた姓であり、その定冠詞を取り除き、Cartesian(カルテシアン = Cartes の) 座標と呼ばれている。

1.2 ガリレイ変換の破綻

ニュートン力学がガリレイ変換に対して不変であり、ガリレイの相対性原理と矛盾がないことを前節に示した。しかし、19世紀の後半になってガリレイの相対性原理を受け入れない物理現象の存在が明らかになった。それは、電磁気現象である。

電磁気現象は、マクスウェルの方程式で記述される。マクスウェルの方程式は、電気と磁気の現象を統一し、電磁誘導を説明し、電磁波の存在を予言するといった大きな業績をあげた基本方程式である。その方程式は、ガリレイ変換を受けると、数学的な形が変わってしまうのである。それは、ガリレイの相対性原理が成り立たないことを意味する。

マクスウェルの方程式は電場と磁場を記述する方程式であるが、その代わりに、静電ポテンシャル ϕ やベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いても記述することができる。特に、真空中において静電ポテンシャル ϕ のみを記述できるようにマクスウェルの方程式を書くと、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0,$$

のような波動方程式となる。方程式に現れる c は光速である。この方程式はポテンシャル ϕ が真空中を速度 c で伝播することを意味している。マクスウェルが電磁波の存在を予言し、光が電磁波のひとつの形態であることを主張したのはこの方程式を導出したことに起因する。ところが、この方程式をガリレイ変換すると、

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \right] \phi = 0,$$

となり、方程式の形が変わってしまうのである。そうなると、マクスウェルの方程式に誤りがあると推測できるかもしれない。しかし、実験結果と一致し、電気と磁気の統一や、電磁波の存在の予言をもたらしたマクスウェルの方程式が謝っているとは考えにくい。その一方、ガリレイ変換が誤っていると推測するのも非常に勇気が要ることである。なにしろ、ガリレイ変換の反例を日常の範囲で見出せないし、ガリレイ変換が誤っているのなら、ニュートン力学に修正が必要²になるからである。

一方、マクスウェルの方程式を不変にするための座標変換を探す研究も19世紀末には実施されていた。その結果、1887年にフォクト (Voigt)、1897年にラーモア (Larmor)、1899年と1904年にローレンツ (Lorentz)、1905年にポアンカレ (Poincaré) がそのための座標変換を特定している。その座標変換はローレンツ変換と呼ばれ、後に説明するようにアインシュタインが導出した変換式と同一の形をしている。

座標変換以外にも、マクスウェルの方程式には不可解な要素があった。それは光の伝播速度である。マクスウェル以前に既に認められていたが、マクスウェルの方程式によって

²物理学史の結果としては、ニュートン力学が修正を受けることになる。

光が波であることがしっかりと確認されたのである。波動方程式に現れる伝播速度は、波を伝える媒質に対する相対速度である。例えば、空気中を伝播する音波の媒質は空気であり、地震波の媒質は地殻やマントルなどである。一方、ニュートンの時代から光が波であり、それが真空中を伝播することも知られていた。そのため、宇宙空間(真空中)には光の媒質であるエーテルという未知の物質で満たされていると信じられてきた。マクスウェルの方程式によって、光が波であることが確実に became ため、より一層、エーテルの存在が強調されることとなった。

マクスウェルの方程式はエーテルに対して相対的に静止している観測者にしか成り立たない方程式なのか? そう考えるのはおかしい。なぜなら、マクスウェルの方程式は多くの研究者の発見を積み重ねた結果の産物であり、その研究者たちがいる地球も、自転や公転をしているのでエーテル内に静止しているとは考えにくいからである。

なによりも、エーテルが存在するのであれば、宇宙には特別な絶対静止系、すなわち、エーテルに対する相対速度がゼロとなる系が存在するはずである。そうなると、光速を測定することによって絶対静止系に対する自分の相対速度が特定できるため、ガリレイの相対性原理との間に矛盾を生じてしまうのである。

1.3 マイケルソン・モーレーの実験

光の媒質として信じられてきたエーテルの存在を明らかにするため、19世紀末にマイケルソン(Michelson)とモーレー(Morley)がエーテルの速度を計測する実験を実施した。期待に反して、その実験は物理学を大問題に直面させることになる。

地球は太陽の周りを約30 km/sで公転しているため、万一、1年のうちのどこかでエーテルとの相対速度がゼロになる点があったとしても、大半はエーテルに対してゼロではない相対速度をもっている。エーテルとの相対速度は図1.1のように、エーテル流れと同じ方向、および、垂直な方向に対して光の往復時間を比較することによって計測できる。この図は、エーテルが右から左へ速度 v で流れている場合を想定している。まず、(a)では光源からエーテル流れに逆らって発射した光を距離 L だけ離れた鏡で反射し、その光が光源に戻るまでの時間を計測する。エーテルに対する光の伝播速度を c とすると、行きはエーテル流れに逆らうため、光は速度 $c-v$ で進行する。反射した後、その光は速度 $c+v$ で戻ってくる。つまり、この場合において、光の往復に要する時間は、

$$\tau_a = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c(1-v^2/c^2)},$$

となる。一方、(b)はエーテル流れとは垂直な方向に光を発射した場合である。この図は、エーテルから見た様子を表している。エーテルから見ると、測定装置が右に向かって速度

v で運動しているので、発射した光は図 1.1 (b) のような軌跡を描く。この場合、光はエーテル流れとは垂直な方向に、速度 $\sqrt{c^2 - v^2}$ で伝播するので、往復に要する時間は、

$$\tau_b = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

となる。確かに、(a) と (b) では光の往復時間が異なっている。この時間差を検出できればエーテルの存在が確かめられるわけである。

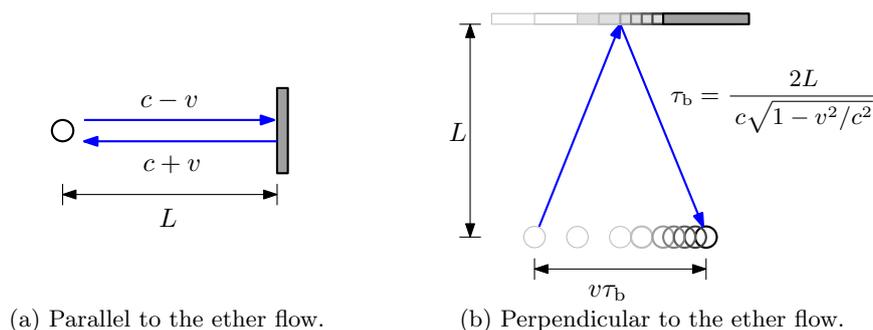


図 1.1: エーテル中の光の往復

波源から鏡までの距離を $L = 10 \text{ m}$ とし、エーテルに対する地球の相対速度を $v = 30 \text{ km/s}$ とすれば、図 1.1 の (a) と (b) における往復時間の差は、

$$\tau_a - \tau_b = \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \approx \frac{Lv}{c^3} \approx 3.34 \times 10^{-16} \text{ s},$$

となる。この時間差は光でさえも約 $0.1 \mu\text{m}$ しか移動できないくらいの短い時間である。しかし、この長さは光の波長と比較できるくらいの長さなので、1887年の時点で、マイケルソンが考案した干渉計 (マイケルソン干渉計) によって検出することが可能であった。マイケルソンとモーレーは1887年から、図 1.2 に示すマイケルソン干渉計を用いてエーテルの速度を検出しようとした。この実験はマイケルソン・モーレーの実験とよばれる。マイケルソン干渉計は、図 1.2 に示すように、光源とハーフミラー、2つの反射鏡と、検出器によって構成される。光源から発射された光は、半分がハーフミラー M_0 を透過して反射鏡 M_1 へ、もう半分が M_0 で反射して反射鏡 M_2 へ進行する。それらの反射鏡 M_1 と M_2 で反射した光は、再び、 M_0 で反射した後に検出器で映像として観測される。ハーフミラーから反射鏡までの距離 L_1 と L_2 を調整して、検出器で光が同位相で合成されるようになっていれば光は強め合い、その位相関係が変化すると、検出される光は弱くなる。

マイケルソンとモーレーは、長さ L_1 が地球の公転方向と一致するように干渉計を配置して、検出器の位置で光が強め合うように長さ L_1 と L_2 を調整して、続いて、長さ L_1 が子午線方向を向くように (すなわち、90度) 干渉計を回転させた。エーテル流れに平行な方向と垂直な方向では光の速度が異なるはずなので、回転させることによって光の位相関係

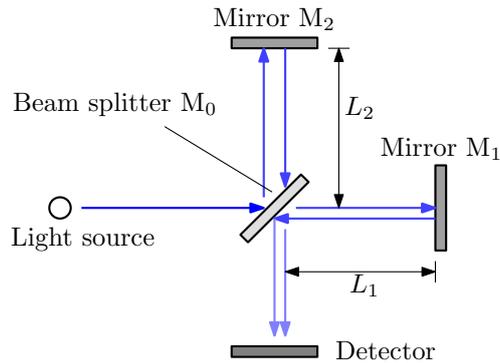


図 1.2: マイケルソン干渉計

が変化し、検出結果に変化が現れるはずである。しかも、この干渉計を水銀に浮かせた状態にしているため、干渉計を回転させる際に調整した距離を狂わせるような負荷が装置にかからないようになっている。しかしながら、この実験によって予想されていた時間差が検出できなかった。検出された時間差は、誤差の範囲ともいえるくらいの、予想値よりもはるかに小さな値だったのである。彼らは、1日のうちの観測時刻を変えてみたり、一年のうちの時期を変えてみたりしたが、結局エーテルの速度を検出することができなかったのである。

マクスウェルの方程式がガリレイ変換に対して不変でないことに加え、この実験の失敗によりエーテルの存在に対する解釈が混沌としてしまった。この実験を説明するため、様々な説が提唱された。ある者は、エーテルが粘性をもっているため、地球はエーテルを引きずりながら運動し、地表がエーテルに対して静止しているという説を唱えた。その説が正しいければ、地球周辺のエーテル流が宇宙からやってくる光を屈折させるはずであるが、そのような現象は観測されていない。甚だしい例としては、物理学を天動説に戻そうとする説まで現れた。

一方、ローレンツは、エーテルに対して運動するとその運動方向に $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ の割合で長さが縮むという説（いわゆるローレンツ収縮）を唱えた。そうすれば、図 1.1 の例において、エーテル流れと平行な場合と垂直な場合における光の往復時間が等しくなり、その結果、マイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったことを説明できる。しかも、ローレンツの説の検証を試みたとしても、計測に用いるものさし自体が同じ割合で収縮するため、検証すらできないのである。この説は直接ぼろが出ないような巧妙な説であった。とはいえ、ローレンツがこのような説を提唱するには、ある程度、理論的な裏づけがあった。実は、次節で導出するローレンツ変換によって、運動する慣性系では静止系と長さの尺度が異なることがわかったからである。

1.4 光速不変の原理

本節から特殊相対性理論を説明する。アインシュタインは、慣性系から観測される物理現象の記述には、ガリレイの相対性原理だけでなく、誰から見ても光速が不変であるという原理を追加した。その新しい原理によって、ニュートン力学では考えられなかった新たな時間の概念が生まれた。アインシュタインの相対性原理も、ガリレイの相対性と同様、等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できないこと(相対運動の原理)を基盤としている。つまり、ある慣性系 K で成り立つ物理法則は、それとは相対速度をもつ慣性系 K' でも形を変えずに成り立つのである。それに加えて、アインシュタインの相対性原理では光速不変の原理が追加される。その新たな原理は、等速運動をしている限り、いかなる観測者が見ても、その速度によらず光速はある一定の値であることを規定したのである。

慣性系 K から光を発射したとする。その光の速度を K 系から計測すると c であったとする。別の慣性系 K' が速度 v で遠ざかっているとする。 K' 系から見た光の速度は、ガリレイ変換によって $c-v$ となるはずである。ところが、アインシュタインの相対性原理によると K' 系から見た光速は c である。当然、 K' 系が速度 v で近づいていたとしても、観測される光の速度は c である。

この原理は我々の常識から逸脱するように思える。しかし、この原理はマイケルソン・モーレーの実験結果を素直に受け入れた原理である。地球が約 30 km/s で太陽の周りを公転しているにもかかわらず、計測した光の速度が方向によらずに一定値であったことを、そのまま原理としてしまったのである。しいて言うなら、我々が計測する速度や長さ、そして、時間は光の速度が基準となっているということである。言い換えると、等速運動する観測者から見たとき、光の速度が一定値 $c (= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s})$ となるように宇宙ができているということである。そうすることで、もはやエーテルの流れなどを考える必要がなくなる。つまり、エーテルが存在しなくても不都合はないのである。

光速不変の原理は、強引にとって付けられた原理に思えるかもしれないが、相対性原理を確かなものとするには必要な原理である。なぜなら、相対性原理によると、上で述べたように、等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できない。しかし、光速がある基準となる慣性系に対する相対速度に依存して変化するのであれば、光速を計測することによって、基準となる慣性系に対する相対速度が特定できるのである。つまり、光速不変の原理がなければ、宇宙には絶対静止系が存在することとなり、相対性原理が成り立たないことになる。

1.5 ローレンツ変換

前に述べたように、慣性系間の座標変換がガリレイ変換である限り、光速不変の原理が成立しない。光速不変の原理を成立させるには、ガリレイ変換に代わる座標変換が必要となる。その必要性を満たす座標変換はローレンツ変換と呼ばれる一次変換であり、形式的に、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.2)$$

と書かれる。ただし、 $\beta \equiv v/c$ である。この変換式は空間座標 $[x, y, z]$ だけでなく時間座標 t も変換するのが特徴である。ニュートン力学では時間は絶対的なものであり、いかなる観測者に対しても平等に進行すると信じられていたのだが、この新しい座標変換は時間も空間座標と同じように変換されるべきことを意味している。ただし、 $c \rightarrow \infty$ の極限をとれば、(1.2) はガリレイ変換と一致する。つまり、ガリレイ変換は光速に比べ非常に小さい速度範囲に限定した近似式だったと考えられるのである。

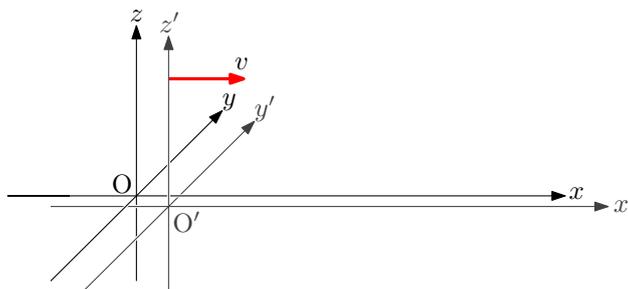


図 1.3: 運動する座標系

光速不変の原理から導かれた座標変換 (1.2) は、電磁気学のマクスウェルの方程式を不変にする性質をもっている。つまり、電磁気学に対して相対性原理との矛盾を解消するには光速不変の原理が必要だったのである。アインシュタインが光速不変の原理から (1.2) を導出したことに対して、ローレンツやラーモアはマクスウェルの方程式を不変にする座標変換として、アインシュタイン以前に (1.2) の導出に成功していたのである。しかも、アインシュタインの論文と同年の 1905 年に、ポアンカレが座標変換 (1.2) をローレンツ変換と呼んだことによって、その名前が定着したのである。とはいえ、アインシュタインはローレンツ変換に基づいて、ニュートン力学では考えられなかった時間や空間の概念を導き出した。以降の節では新たに導かれる時間や空間の性質を説明する。

1.6 同時性の不一致

ローレンツ変換によると、すべて観測者に対する同時性が成立しなくなる。言い換えると、K系の観測者が同時に観測した事象AとBは、別の慣性系K'系の観測者から見ると、その2つの事象は同時発生していないのである。例えば、事象Aが $x = x_A$ で、事象Bが $x = x_B$ で、K系の同一時刻 $t = 0$ のときに発生したとしよう。ローレンツ変換にこれらの座標を代入すると、K'系で観測した事象発生時刻が算出される。

$$t'_A = \frac{-vx_A/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_B = \frac{-vx_B/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

ただし、 $\beta = v/c$ である。つまり、 $x_A \neq x_B$ である限り、2つの事象は、K'系では異なる時刻に発生していることになる。この同時性の不一致は、図1.4に示すように、原点から $-x$ 方向と $+x$ 方向に照射された光線で説明できる。K系の $x = -a$ と $x = +a$ に、それぞれ、感光センサAとBがあった場合、K系から見ると2つセンサは同時に光線を検出するだろう。しかしながら、K'から見たとき、センサBのほうが先に感光するのである。



図 1.4: 同時性の不一致

そのような同時性の不一致は、物理学として危険な可能性をもっているように感じるかもしれない。その危険な可能性とは、因果性を狂わせる可能性である。上であげた2つの感光センサの例において、もし、K'系の運動方向が逆、すなわち、K系に対する速度が x 軸方向に $-v$ であったなら、上の例とは逆にセンサAが先に感光するのである。つまり、観測者によって事象の発生時刻が異なって見えるのである。その甚だしい例として、原因と結果の発生順序が入れ替わる現象が発生しないのだろうか？

K系とK'系で事象の発生順序が入れ替わる条件とは、事象AとBの発生時刻について、 $t_B - t_A$ の符号が $t'_B - t'_A$ と異符号であるということである。これを形式的に書くと、

$$(t_B - t_A)(t'_B - t'_A) < 0,$$

となる。これにローレンツ変換を適用すると、

$$(t_B - t_A) \frac{(t_B - t_A) - v(x_B - x_A)/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} < 0,$$

となるので、

$$|t_B - t_A| < \frac{v}{c^2} |x_B - x_A|,$$

が順序入れ替わりの条件である。さらに、 $v/c \leq 1$ という条件をつけると、

$$|t_B - t_A| < \frac{|x_B - x_A|}{c},$$

という条件が得られる。事象 A と B に因果性があるならば、座標 x_A で事象 A が発生した情報が座標 x_B に伝達した後に事象 B が発生するはずである。光より速い情報伝達手段が存在しないならば、因果性のある 2 つの事象は必ず $|t_B - t_A| \geq |x_B - x_A|/c$ を満たしている。その場合、因果性のある事象の順序は決して入れ替わることがない。順序が入れ替わる条件を満たす組み合わせは、因果性のない事象である。感光センサの例では、一方のセンサが感光したことと、もう一方のセンサが感光したことには因果性がない。どちらが先に感光しても物理的に不都合はないのである。一方、原点から光線が照射されたこととセンサが感光したことは因果関係がある。K 系の時計で $t = 0$ のときに照射された光線が $x = a$ のセンサで検出される時刻は $t = a/c$ である。この例では、 $|t_B - t_A| = |x_B - x_A|/c$ となり、順序が入れ替わることはない。

仮に光より速い伝達手段が存在するならば、因果性は破綻してしまうことになる。後に示すように、光速より遅い物体を超光速に加速することは不可能であるが、それに加えて、因果性が保持されるためにも光より速い情報伝達は不可能と考えるべきであろう。

1.7 長さの収縮と時計の遅れ

相対性理論の効果の一つとしてローレンツ収縮と呼ばれる長さの収縮と、時計の遅れがローレンツ変換から導かれる。ローレンツ変換を見れば、慣性系 K とそれに対して速度 v で運動する別の慣性系 K' には、長さや時間の尺度が違っていることがわかる。特に時計の遅れは、科学小説で頻繁に使われるのでなじみが深いだろう。本節ではローレンツ変換からそのような相対性理論の効果の導いてみる。

ローレンツ収縮 まずは、長さの測定方法について考えてみよう。長さは、対象となる 2 つの点 (例えば、点 A と点 B) を選び、この 2 点にもものさしを当てれば測定できる。しかし、運動している対象の長さを測る場合には注意が必要である。点 A の位置を記録してから、点 B の位置を記録するまでの間に点 A が移動するからである。よって、運動する物体の長さを測定するには、両端の位置を同時に記録しなければならない。

図 1.5 のように速度 v で運動する物体の長さを測定する場合を考えてみよう。その物体と併走する慣性系を K'、長さを測定する観測者が存在する慣性系を K とする。この運動する対象物体の midpoint には時限式のレーザー照射装置が設置され、あらかじめ設定した時刻になるとレーザー照射装置から左右にレーザー光を発射する。レーザー光は同時に両端 (点 A と

点 B) に到達し、その場所に設置されている反射鏡によって進路を直角に曲げられて、K 系に備え付けられているものさしに位置を焼き付ける。そうすることで物体の長さを正確に測定できるように思える。しかしそれは K' 系から見たときの話 (図 1.5 (a)) である。光速不変の原理によると、K 系から見たとき、物体の中心から発射されたレーザー光は先に点 A に到達 (図 1.5 (b)) する。点 B に光が到達する頃には、物体はさらに移動しているので、ものさしに焼き付けられた 2 点間の距離は物体の長さより長いはずである。したがって、K 系から見た物体の長さは K' 系が主張する長さより短い。

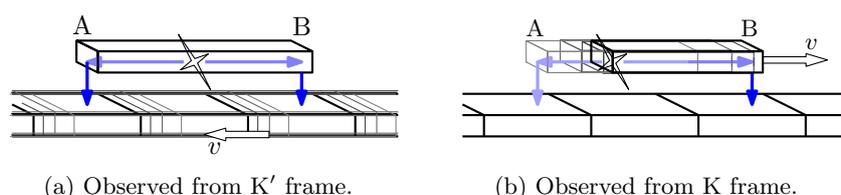


図 1.5: 運動する物体の長さ測定

長さの収縮を数式で表してみよう。K' 系における微小長さ dx' を K 系から測定した長さを dx とする。まず、ローレンツ変換を微分すると、

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

となる。上で述べたように、K 系から長さを測定するときは、K 系の時計において同時に両端の位置を記録する必要があるので観測に要する微小時間を $dt = 0$ とする。その結果、

$$dx = \sqrt{1 - \beta^2} dx', \quad (1.3)$$

となるので、K 系から測定される長さは K' 系が主張する長さより短くなっている。微小ではない長さを考えるのであれば、(1.3) を積分すればよいので、K' 系から見た運動物体の長さを L' とすると、K 系の観測者にとっては、 $L = \sqrt{1 - \beta^2} L'$ に収縮して見える。

逆に、K' 系から見ると、K 系が x' 軸方向に速度 $-v$ で運動しているので、K 系に固定されたものさしの長さが短くなっているように見える。これもローレンツ変換から導くことができる。ここでも、ローレンツ変換の微分を書いておくと、

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dt' = \frac{dt - (v/c^2) dx}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

である。今度は K' 系から長さを測定するので $dt' = 0$ が条件となる。その条件から容易にわかる関係 $dt = (v/c^2) dx$ を、 dx' の式に代入すると $dx' = \sqrt{1 - \beta^2} dx$ が得られ、結局、K' 系から見ると K 系の長さが収縮しているように見えるのである。

この収縮現象がローレンツ収縮と呼ばれるのは、アインシュタインが相対性理論を発表する前にローレンツがこの収縮に気づいたからである。ローレンツは、エーテル内を運動

する物体はその運動方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ の割合で長さが縮むことを主張し、それが理由でマイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったとした。ローレンツの主張による収縮の割合がローレンツの理論とは一致するが、物理的な解釈はまったく異なる。ローレンツの主張によるとエーテルに対して運動する物体は、物体を構成する原子が、運動する荷電粒子として振舞うため、分子間力となる電氣的な力が変化し、速度方向の長さが縮むのである。この主張によると、運動する物体の長さは本当に縮むのであるが、長さを測る物差しも同様に縮むので、この収縮を検証できない。これに対してアインシュタインの主張によると、ある慣性系 K から相対速度をもつ別の慣性系 K' を見たとき、K' 系の長さが速度方向に縮んで見えるのであって、K' 系の長さが本当に縮むわけではない。この収縮現象は、相対速度による座標変換によって生じる観測の不一致であるため、逆に、K' 系から見ると K 系の長さが速度方向に縮んで見えるのである。

もうひとつローレンツ収縮について補足しておこう。ローレンツ収縮は単に物体の長さが縮むだけではない。座標変換によってもたらされる収縮であるので、物体の長さというよりも宇宙全体が縮んでいると解釈したほうがよい。例えば、地球から月までの距離は約 38.4 万 km であるが、地球とは相対的に光速の 87% で運動する観測者から見ると、地球と月の距離は約 19.2 万 km となる。ローレンツ収縮があるため、本書で後に説明するように、光速に近い速度域まで加速すると、数百万光年の距離を (運動する観測者の時計で) 数十年で移動することが可能になる。

時計の遅れ 相対性理論において時間を議論するとき、必ず、座標系の定点に張り付いた時計を考えなければならない。既に見たように、運動が長さや時間の尺度を変化させる現象であるので、時計が座標系の中を動き回った場合、その運動のため時計の読みが狂ってしまうかもしれないからである。

K' 系の時計の読みを K 系の時計と比較してみよう。そのために、再び、ローレンツ変換の微分:

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dt' = \frac{dt - (v/c^2) dx}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

を用いる。K' 系の定点に張り付いた時計ならば、 $dx' = 0$ が条件となるはずである。この条件から容易に $dx = v dt$ が導かれるので、

$$dt' = \sqrt{1-\beta^2} dt,$$

なる関係が得られる。この式が主張するのは、K 系から見たとき K' 系の時計が $\sqrt{1-\beta^2}$ の割合で遅れて見えるということである。例えば、K' 系が K 系に対して光速の 50% で運動しているとする。K 系から見ると、1 時間たつ間に、K' 系ではその 86.7% にあたる 52 分しか経過したように見えないということである。当然、相対性原理のため、K' 系から見る

と K 系の時計が遅れて見える。上に書いたローレンツ変換の微分に対し、 $dt = 0$ という条件を適用すると、 $dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt'$ が得られるはずである。

時間収縮は、相対性理論から導かれる現象の中で最も理解しがたいことかもしれない。飛行機の速度をもってしても、その速度は光速の 100 万分の 1 であるので、1 時間の移動あたりで遅れる時間は 1.8×10^{-9} 秒に過ぎない。ところが、宇宙から降り注ぐ宇宙線によって相対性理論による時計の遅れが観測されている。宇宙線が大気原子核と衝突することによってミュー粒子が生成され、地表に到達する事実が観測されている。ミュー粒子の寿命は、わずか 2 マイクロ秒なので、仮に光速で飛来しても 600 m の距離で崩壊するはずである。それにも関わらず、ミュー粒子が地表に到達するのは、高速なミュー粒子の時計が遅れているからである。仮に、ミュー粒子の速度が光速の 99.99% であるならば、地表から見たミュー粒子の寿命は 70 倍長くなり、崩壊するまでにミュー粒子は 42 km 移動することができるので、地表に到達することも可能になる。

1.8 ミンコフスキー時空

慣性系から観測した時間 t と空間 $[x, y, z]$ は、ミンコフスキー時空と呼ばれ、面白い幾何学的な性質が成立する。時空とは時間と空間を個別ではなく、一つの座標として取り扱うための座標系である。

ニュートン力学では、いかなる観測者から見ても共通の物理量だったので、空間座標とは区別していた。それに対し、相対性理論では時間も空間座標と同様、値も尺度も異なる量に変換され得るため、時間を座標軸の一つとして取り扱うことが自然である。習慣として、時間はゼロ番目の座標成分とし、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とする³のである。ここで、あえて時間に対応する成分に光速 c を乗じ、すべての座標成分が長さの次元をもつように統一した。これらの座標成分に関するローレンツ変換を微分すると、

$$cdt' = \frac{cdt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - \beta \cdot c dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

が得られる。これらの微小量を用いて、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{1.4}$$

なる微小量 ds を定義しよう。この新たな微小量は時空の線素と呼ばれる。この線素に対してローレンツ変換を適応すると、

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

³他の章でも現れるが、座標成分を表す添え字は相対性理論では（正確に言うとリーマン幾何学では）、習慣的に右上に書く。ベキ乗を表す指数と紛らわしいので慣れないうちは注意が必要である。

が成り立つことから、 $ds^2 = ds'^2$ である。すなわち、 ds はローレンツ変換に対して不変である。数学的に言うと、 ds はスカラ⁴である。線素 ds を適切に定義すればどのような時空でも ds はスカラとなるのだが、特に、定義式 (1.4) で定義された線素がスカラとなる時空はミンコフスキー時空と呼ばれる。

線素 ds は、その座標系における長さを定義する量であり、一般相対性理論で用いるような曲がった空間を含め、一般の座標系 $[x^0, x^1, x^2, x^3]$ において形式的に、

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

なる数式で表現できる。特に、ミンコフスキー時空の場合、係数行列 $g_{\mu\nu}$ は、

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

なる対角行列となる。この係数行列は特別に $\eta_{\mu\nu}$ なる記号で記述することが多い。その係数行列 $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空の計量 (長さ) を定義する係数なのでミンコフスキー計量と呼ばれる。ミンコフスキー計量は、空間座標の係数が正で、時間座標の係数が負になっていることに注意しておこう。

特に、光の軌跡については、必ず、 $ds = 0$ が成立する。なぜならば、光速不変の原理のため、いかなる観測者が見ても、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2,$$

が成立し、両辺に dt^2 を乗じると、

$$-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = 0,$$

なる関係式が得られるからである。この数式は3次元空間の円錐表面からの類推によって、4次元時空における超円錐の表面を表すことがわかる。この超円錐は光円錐と呼ばれる。模式的に表すと図 1.6 のようになる。この図では時間の座標軸を上向きにとっている。つまり、下が過去で上が未来である。空間の座標は時間とは垂直な方向にとる。円錐の頂点が、観測者の現在位置である。光は光円錐の表面に沿って伝播する。

光円錐の内部は時間的領域と呼ばれる。質量をもつ一般の物体は時間的領域を移動することしかできない。一方、円錐の外は空間的領域と呼ばれる。空間的領域に情報を伝達するには光速より速い伝達手段が必要である。つまり、空間的領域への情報伝達は不可能で

⁴座標変換しても変化しない量。

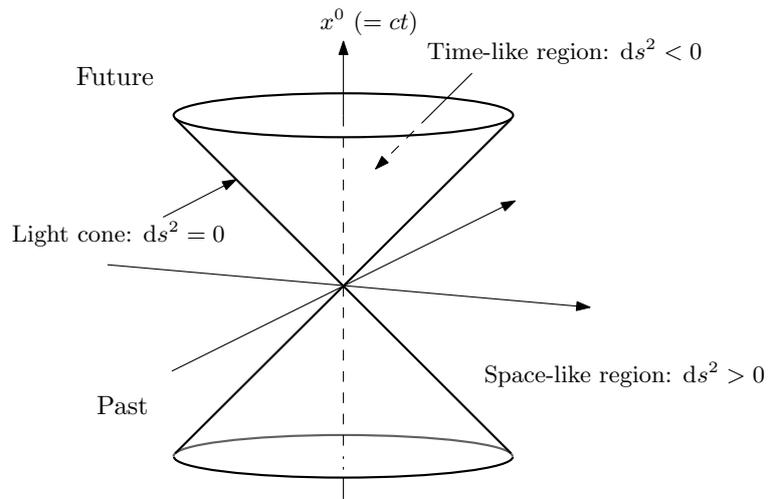


図 1.6: 光円錐と時空における領域

ある。言い換えると、空間敵領域は観測者とは因果律が成り立たない無関係な事象しか存在しない領域である。また、光円錐の表面は光速で運動する粒子などの軌跡が存在する領域であるので、光的領域と呼ばれる。

第2章 慣性系から見た運動

既に見てきたように、相対性理論によると運動する物体の長さが縮み、時計が遅れる現象が観測される。その現象は、相対速度をもつ他の慣性系では長さや時間の尺度が異なるからである。そのように考えると、速度や加速度も我々が日常的に体験しているものも速度が小さいときにしか成り立たない近似であると推測できる。

2.1 速度・加速度変換

日常生活でわれわれが目にする速度の範囲では、60 km/h で走行する自動車から 40 km/h で走行する対向車を見ると、その対向車が 100 km/h で走行しているように感じる。そのような光速に比べて非常に小さな速度範囲内では、速度の加法則は単純な加算である。しかし、前章で学んだように、互いに相対速度をもつ二つの慣性系では長さや時間の尺度が異なるため、速度の加法則は単純な加算にはならない。その極端な例が光の速度である。光は約 30 万 km/s で伝播する。光源に 10 万 km/s で接近する観測者がその光の速度を計測すると、40 万 km/s とはならず、光速不変の原理のため、やはり 30 万 km/s となる。

相対性理論における速度の合成則を求めるため、座標 x と t の微小変化 dx と dt のローレンツ変換を調べてみる。当然、それらの微小変化も、

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dt' = \frac{dt - v dx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

なる変換にしたがうはずである。この微小変化に対する変換よりただちに、

$$\frac{dx'}{dt'} = \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^{-1},$$

が得られる。言うまでもなく、 dx/dt が K 系から見た速度の x 成分、 dx'/dt' が K' 系から見た速度の x 成分である。速度の y 成分と z 成分についても、同様にローレンツ変換から導くことができる。もう少しわかりやすく、K 系から見た速度成分を $[u_x, u_y, u_z]$ 、K' 系から見た速度成分を $[u'_x, u'_y, u'_z]$ と書くと、速度の変換則は、

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2},$$

となる。つまり、この式が特殊相対性理論における速度の加法則である。この速度の加法則の計算例を表 2.1 に示す。この例では、静止状態 $v = 0$ から始めて、速度 $c/2$ を繰り返し合成した結果を示している。単なる加算では、 $c/2$ を 2 回だけ合成すると光速 c に到達するはずだが、相対論的效果のため 2 回の合成で得られる速度は $0.8c$ である。合成を繰り返しても c に近づきただけであり、 c に到達することがない。

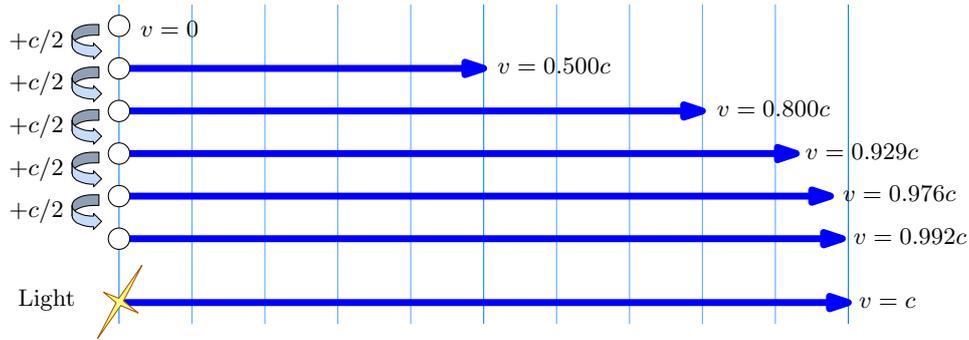


図 2.1: 速度合成則のイメージ

光速より小さい速度を合成しても、決して、光速を超えることができないことを示しておこう。速度合成則において、 $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, $u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$ とおいたとき、

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \frac{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}{(1 - u_x v/c^2)^2},$$

のように計算される。この数式は、 $|v| < c$ と $|u| < c$ がともに成り立てば、上式の右辺は正となる。その結果は $|u'| < c$ であること、すなわち、光速より小さい速度をどんなに合成しても光速より小さい速度しか作り出せないことを意味する。この性質は、加速という手段によって超光速を作り出せないことを意味する。一方、少なくとも $|u|$ あるいは $|v|$ が光速と等しい場合、上式の右辺はゼロとなる。その結果は、 $|u'| = c$ を意味する。これは光速不変の原理である。

速度の変換式を微分すれば加速度に関する変換式が得られるはずである。簡単のため、 x 軸に平行な運動 ($u_y = u_z = 0$) に限定して、速度変換則を微分すると、

$$a'_x = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - v u_x/c^2)^3} a_x,$$

が得られる。ここで、 $a_x \equiv du_x/dt$ は K 系から観測した x 軸方向の加速度、 $a'_x \equiv du'_x/dt'$ は K' 系から観測した x' 軸方向の加速度である。特殊なケースとして、対象となる物体が K' 系に対して静止している瞬間 (すなわち、 $u_x = v$ となる瞬間) の加速度は、 $a_x = (1 - \beta^2)^{3/2} a'_x$ のように変換される。つまり、運動する物体の加速度は、その物体自身が感じる加速度よりも小さくなる。しかも、その速度 v が光速 c に近づくと、加速度はゼロに近づく。言い換えると、大きな速度で運動する物体は加速しづらい、すなわち、質量が大きくなるのである。

2.2 光のドップラ効果

マクスウェルの方程式から導かれるように、光は電磁波である。光(電磁波)も音と同様に、観測者から見てゼロでない相対速度で運動する光源から発射されれば異なる周波数が観測される。このように、光源と観測者の相対速度によって周波数が異なる現象をドップラ効果と呼ぶ。非相対性理論では、光源の運動によって、伝播する波の波面間の距離(波長)が異なることがドップラ効果の要因であると説明されてきた。ところが、相対性理論はそれだけでなく、光源と観測者の時間の尺度が異なることもドップラ効果の要因である。

電磁波は局所的に見れば $\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ のような平面波と考えてよい。ここで、 \mathbf{E}_0 は電磁波の振幅と振動方向を表すベクトル、 ω は光の角周波数、 \mathbf{k} は波数ベクトルである。波数ベクトルは光波の伝播方向を向き、大きさ $k \equiv |\mathbf{k}|$ が $k = \omega/c$ の関係を満たす。ここで、波動関数 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ の位相 (ϕ とおく) はカルテシアン座標系で、

$$\phi = \omega t - (k_x x + k_y y + k_z z),$$

と書くことができる。この関係式より、

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad k_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad k_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad k_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z},$$

なる関係が導かれる。光波の位相は観測者(つまり座標系)によらず定数となると考えるのが自然である。波動関数の実部を観測する場合を考えると、その観測対象には最大値と最小値があり、ある観測者から見たときにその対象が最大値であれば、別の観測者から見てもその波動関数は最大値であるべきである。したがって、波動関数の位相は座標系に依存せず定数になる¹と考えられるのである。K系に対して x 軸方向に β の速度比で運動する K'系から観測した角周波数 $\omega' \equiv d\phi'/dt'$ は、

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{\partial \phi}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= \frac{-\beta c k_x + \omega}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega, \end{aligned} \quad (2.1)$$

のように計算される。ここで、光波の伝播方向(波数ベクトル)と x 軸のなす角を θ とした。この式は、K'系で観測した周波数を表しているが、光波の伝播方向がK系で観測した角度になっている。これを、K'で観測した到来方向 θ' を使って書くには、

$$\omega = \frac{1 + \beta \cos \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega',$$

なる関係を使えばよい。この関係式は、変換式(2.1)を ω について解くか、 β を $-\beta$ に置き換え、K系とK'系の物理量を入れ替えれば得られる。新たに導かれた変換式を ω' につい

¹実は、位相が座標系に依存しないことは、電磁場のローレンツ変換から必然的に導かれる。

て解くと,

$$\omega' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta'}\omega, \quad (2.2)$$

が得られる。この関係式も、 $c \rightarrow \infty$ の極限で非相対性理論のドップラ効果と一致する。特別な場合として、前方から到来する光を想定して、 $\theta' = \pi$ を (2.2) に代入すると,

$$\omega'|_{\theta'=\pi} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\omega,$$

が得られる。この結果は、非相対論的な極限 $c \rightarrow \infty$ において、 $\omega'|_{\theta'=\pi} \simeq (1+v/c)\omega$ となる。この近似式はニュートン力学における光のドップラ効果と一致する。この場合の ω から ω' への増分 $(v/c) \cdot \omega$ はドップラ周波数と呼ばれる。電磁波のドップラ効果はスピードガンに應用されているように、自動車の速度は光速の 1000 万分の 1 程度の速度であるが、10 GHz のマイクロ波を使えばドップラ周波数は 1 kHz 程度となり、十分に検出できる周波数である。対象物の速度が光速と比較できるくらい大きくなると、ドップラ周波数はもはや速度 v に比例しなくなる。

もう一つの特別な場合として、側方から到来する光を考えよう。ドップラ周波数の式 (2.2) に $\theta' = \pi/2$ を代入すると,

$$\omega'|_{\theta'=\pi/2} = \sqrt{1-\beta^2}\omega,$$

が得られる。非相対性理論では、側方から到来する光にはドップラ効果が発生しないのだが、相対性理論では側方から到来する光の周波数は $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍される (周波数が小さくなる)。これは横ドップラ効果と呼ばれる相対論的な現象である。横ドップラ効果は、相対速度によって光源の時計がゆっくり進むことに起因して現れる現象である。

周波数の変化だけでなく、光源の相対速度から、光の到来方向が異なって見える光行差という現象が現れる。波数ベクトルの x 成分も、先ほどと同様に計算でき、

$$k'_x = \frac{k_x - \beta\omega/c}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となる。この変換式について、 $k'_x = k' \cos\theta'$ とおいて (2.1) を利用すると,

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}, \quad (2.3)$$

なる関係が得られる。この光行差の関係式から、 $\beta > 0$ であれば $\cos\theta' \leq \cos\theta$ となることが容易に導かれる。等号が成り立つのは、 $\theta = 0, \pi$ のときである。なお、前方から到来する光ほど $\cos\theta'$ が -1 に近いため、 $\beta > 0$ の速度比で運動する観測者には、光の到来方向が前方に集中して見えることを意味している。ここで導出したドップラ効果を示す例として、周囲光の波長の変化を図 2.2 に示す。この図は、観測者の周囲から波長 500 nm の光を照射

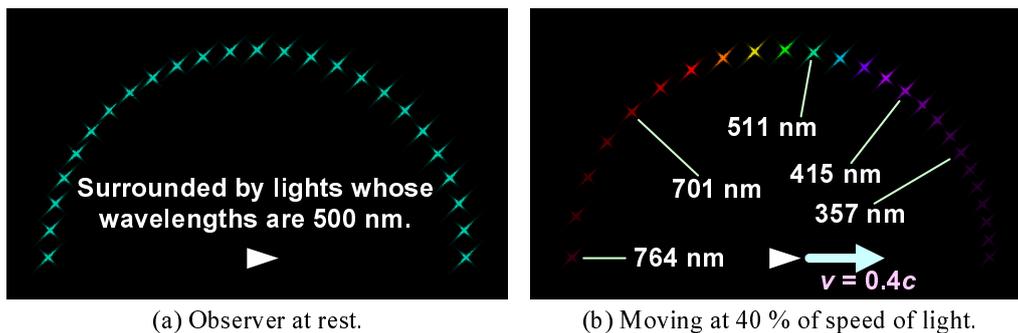


図 2.2: ドップラ効果による周囲光の波長の変化

した場合を想定している。図に示す三角形は、観測者がその場所に右を向いていることを表している。照射された周囲光は、エメラルドグリーンの可視光である。観測者が光源に対して静止している場合には、当然ながら、周囲から波長 500 nm の光が到来する。光速の 40% で運動する観測者によると、前方から後方へ向かって、紫色から赤色まで可視光全体が到来する。しかも、図 2.2 (b) に描かれた星の配置から、景色が前方に集まる光行差の傾向が見えていることも確認できる。当然ながら、観測者の速度が大きくなると、周波数の偏移も光行差も著しくなる。

2.3 等加速度運動

特殊相対性理論は、本来、2つの慣性系の間関係を記述するための理論であるが、慣性系から加速度運動をする物体を観測した場合に拡張してもよい。なぜなら、加速度運動する物体の速度も、ある微小時間内の速度はほぼ一定であると考えられるからである。その考えを発展させると、加速度運動する物体の速度は、近似的に、図 2.3 のような階段状の変化をすると考えてもよいのではないか。階段状関数のうち、速度が一定な微小時間内に対して特殊相対性理論を適用し、次の微小時間に対しても個別に特殊相対性理論を適用する。そのように特殊相対性理論を適用した微小時間をつなぎ合わせれば、特殊相対性理論で加速度運動をする物体を記述できると考えるのだ。

加速度運動を特殊相対性理論で記述できるのは、上で述べたように、慣性系から観測する場合に限られる。それとは逆に、観測者が加速度運動する場合には、特殊相対性理論で議論することができない。なぜなら、加速度運動をすると、急ブレーキをかけた自動車で体感するような慣性力が観測者に作用するからである。慣性力は、その座標系の加速度に起因するので、慣性力が作用する系ではもはや座標系間での相対性が成立せず、特殊相対性理論の取り扱い範囲を超えるのである。

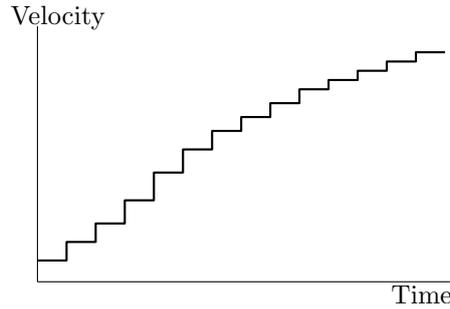


図 2.3: 階段状関数で近似した速度

それでは, K' 系が x' 軸方向に加速度 a をもっている場合を考えよう。この場合, 前節で導出した加速度の変換式に対して, $u_x = v$, $a'_x = a$ とすればよい。その場合の加速度変換について, $a_x = d^2x/dt^2$, $a'_x = d^2x'/dt'^2$ と置き換えれば,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^{3/2} a,$$

を得る。この微分方程式を解けば,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(t + t_0)}{\sqrt{1 + a^2(t + t_0)^2/c^2}}, \quad (2.4)$$

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2(t + t_0)^2}{c^2}} - \sqrt{1 + \frac{a^2 t_0^2}{c^2}} \right] + x_0, \quad (2.5)$$

が得られる。これが, 相対論的な等加速度運動の速度と変位の数式表現であり, ニュートン力学における $dx/dt = v_0 + at$, $x = at^2/2 + v_0 t + x_0$ に対応する式である。実際に, (??) と (??) について $c \rightarrow \infty$ の極限をとれば, ニュートン力学における速度と変位の式と一致するはずである。ここで, $t = 0$ のとき, $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ であるとする。このとき, 積分定数 t_0 は,

$$at_0 = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}},$$

を満たす。積分定数 t_0 の物理的な意味は, 対象とする物体の速度がゼロとなる時刻 ($= -t_0$) を与えていると解釈すればよい。ここで, $\beta_0 \equiv v_0/c$ とおいた。

面白いことに, 変位を表す数式 (??) から, 次のようにして, 有名な相対論的効果 $E = mc^2$ を確認することができる。静止質量 m の物体が, 加速度 a で等加速度運動するには, その物体に ma の力が作用し続けている。証明は省略するが, 運動方向に作用する力はどの慣性系から見ても一定であるので, K 系から見てもその物体には ma の力が作用し続けている。初期条件として, $t = 0$ のときに $x = 0$, $dx/dt = 0$ である条件を設けると, 運動エネルギーは $E_k = max$ となる。さて, 上の式を用いて運動エネルギーを計算してみると,

$$mc^2 + E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

を得る。ここで、 $v \equiv dx/dt$ とした。この結果は次のように解釈すればよい。左辺は、静止時に潜在的にもっているエネルギー mc^2 に運動エネルギー E_k が加算された量である。右辺は、加算された運動エネルギーが質量に変換され、その物体の質量が $m/\sqrt{1-\beta^2}$ に変化したことを意味している。

2.4 事象の地平面

事象の地平面という、ブラックホール理論で現れる情報伝達が不可能な領域への境界面を想像するだろう。本節で説明するように、加速度運動においても、情報伝達が不可能な領域が現れる。その領域への境界線が事象の地平面となるわけである。

等加速度運動をする物体の変位 (2.5) に関して、変位 x と時刻 t の幾何学的関係を調べてみよう。簡単のため、ここでも、 $t = 0$ において $x = 0$, $dx/dt = 0$ であるとする。すると、

$$\frac{a^2}{c^4} \left(x + \frac{c^2}{a} \right)^2 - \frac{a^2 t^2}{c^2} = 1, \quad (2.6)$$

なる関係を得る。等加速運動をする物体について変位 x と時刻 t の関係を描くとニュートン力学では放物線となるのだが、特殊相対性理論では双曲線となるのである。その双曲線は、図 2.4 に示すように、直線 $x = ct - c^2/a$ を漸近線とする。その双曲線が意味する一つは、永久に加速を続けたとしても、速度が限りなく光速 c に近づきただけであって、決して光速を超えないということである。もう一つは、加速度 a で等加速度運動する物体の背後 c^2/a から光で追かけても、決してその物体に追いつけないということである。言い換えると、 $x = -c^2/a$ という壁を境にして、等加速度運動する物体に情報伝達ができない領域があることを意味する。これは、ブラックホール理論における事象の地表面と類似している。

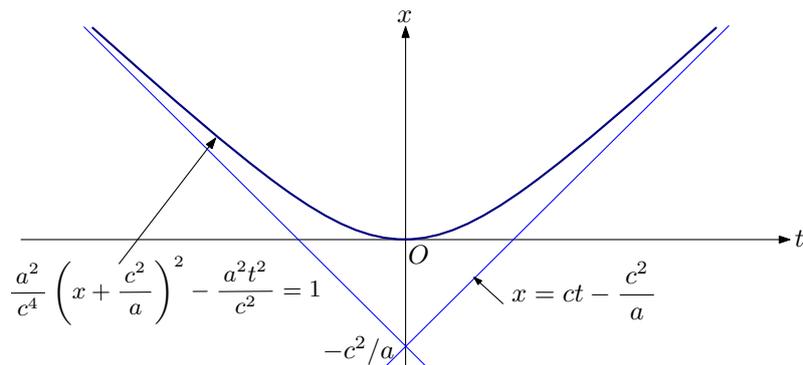


図 2.4: 等加速度運動をする物体の変位

等加速度運動における事象の地平面となる座標 $x = -c^2/a$ は、宇宙空間のスケールではそれほど大きな値ではない。例えば、加速度を $a = 9.5 \text{ m/s}^2$ とすれば、 $x = -c^2/a$ は 1 光

年後方の位置に相当する。すなわち、 9.5 m/s^2 で加速度運動する観測者に 1 光年以上の後方から情報を伝達することは不可能である。

後方から情報の伝達が不可能であると書くと大きな誤解を生む可能性があるので補足しておく。夜空に輝く恒星は最も近い星でも 4.3 光年もの距離があるので、加速する自動車に乗って背後の星空を見ると星がなくなっているのか？ それは大きな誤解²である。確かに、加速度運動をしていると上記のような事象の地平面が生じることは事実である。しかし、夜空に輝く星は、我々が加速度運動を開始しようとするより、ずいぶん前から輝いていて、すでに近くまで到達している光がある。図 2.5 のように、加速度運動を開始する時点で、図中の光線 A と B のように事象の地平面より近くに来ている光は観測者に追いつくことができる。しかし、光線 C と D のように事象の地平面のかなたにある光は観測者に追いつくことができない。

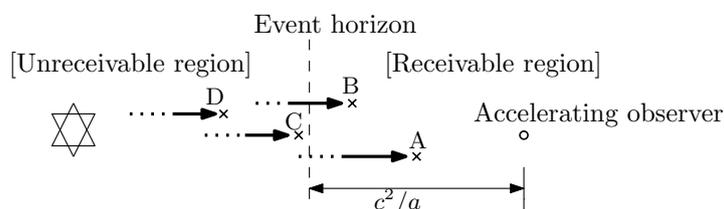


図 2.5: 加速度運動における事象の地平面

後方から加速度運動する観測者を追いかける光のうち、観測者に追いつくことができるのは限られた光ということになる。ブラックホール理論と同様であるが、事象の地平面の近傍にいた光は観測者に追いつくまで長い時間を要することになるので、観測者から見ると、後方から追いついてくる光は徐々に少なくなっていく。つまり、一定方向の加速を続ける限り、後方の視界は徐々に暗くなっていく。とはいえ、そのような状況を認識できるのは加速度運動を何年も持続していた場合の話である。

2.5 固有時間

相対性理論では時間があらゆる観測者にとっての共通の尺度ではなくなっている。そのため、時間を議論するには、どの観測者の時計で計測した時間かという情報が必要である。言い換えると、時間は空間座標と同様に、観測者ごとに固有の情報である。その意味で、観測者ごとに固有な時間は固有時間と呼ばれる。

ある慣性系から物体 A を観測したとしよう。観測者の時計で時刻 t のとき、物体 A が座

²筆者はかつて (2.6) を導出した際に、そのような誤解をもち、その不自然さに考え込んでしまった。

標 $[x, y, z]$ に存在していたとする。慣性系はミンコフスキー時空とも呼ばれ、前章で述べたように、物体 A の時空間の座標に関して、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (2.7)$$

なる微小量がローレンツ変換に対して不変となる。つまり、この微小量はいかなる慣性系と併走する観測者が見ても同一の物理量になるということである。

上に示した微小量で定義されるパラメータ s は長さの次元をもっている。その代わりに、 $ds^2 \equiv -c^2 d\tau^2$ によって定義される新たなパラメータは時間の次元をもっている。新たなパラメータ τ の物理的な意味を調べてみよう。上で述べたように、 τ は、

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

のように定義されている。観測者が見た物体 A の速度を v とするならば、 $dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2$ が成立するので、上の定義式は、

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

のように変形できる。ただし、 $\beta \equiv v/c$ である。この式は、座標系に対して速さ v で運動する物体 A に固定された時計の遅れを表している。また、この式を積分して、

$$\tau(B) - \tau(A) = \int_A^B \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

と書くと、 τ は物体 A に固定された時計の読みを表している。上で述べたように $d\tau$ はローレンツ変換に対して不変な値であるので、別の座標系 (例えば K' 系) から見ても τ の値は不変である。よって、 τ は観測対象の物体の固有時間を与えると解釈できるのである。

等加速度運動する時計 (固有時間) を静止系から見るとどうなるだろうか。運動方向を x 軸方向に制限すれば、 $v = dx/dt$ となる。この式に (??) を代入すると、

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[1 + \frac{a^2(t + t_0)^2}{c^2} \right]^{-1/2}, \quad (2.8)$$

なる微分方程式を得る。両辺を積分し、 $t = 0$ のときに $\tau = 0$ となるように積分定数を選ぶと、固有時間は、

$$\tau = \frac{c}{a} \left[\operatorname{arsinh} \frac{a(t + t_0)}{c} - \operatorname{arsinh} \frac{at_0}{c} \right], \quad (2.9)$$

で与えられることがわかる。例として、 $t = 0$ における速度を $dx/dt = 0$ とした場合の τ をグラフにしてみると、図 2.6 のようになる。グラフから読みとれるように、速度が小さいうちはグラフの傾きは 1 であるが、速度が大きくなるにつれて時計の遅れが顕著になり、グラフの傾きが小さくなる。

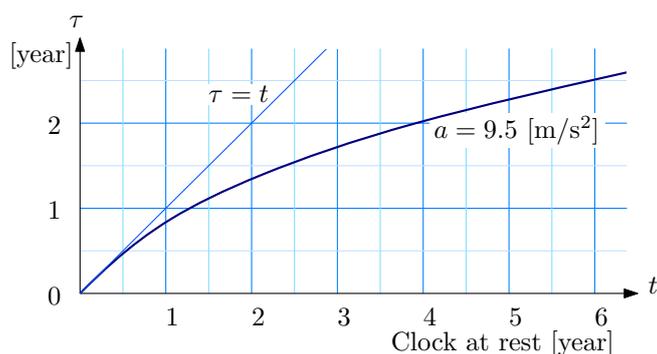


図 2.6: 静止系から見た加速する時計の読み

等加速度運動を何年間も持続できるのであれば、その速度を限りなく光速に近づけることができ、静止系から見た時計はほとんど止まっているように見えるだろう。

では、その逆はどうであろうか。加速する観測者から見た場合、外の世界は急速に時間が経過しているのであるだろうか？ それとも、逆に静止系が運動しているかのように見えるため、加速する観測者から見た静止系時計は、やはり遅く進むのであろうか？ この問題は、まさに双子のパラドックスである。この問題に対しては特殊相対性理論だけで説明するには少しばかり無理がある。次章では一般相対性理論を適用して加速する観測者から見た世界について議論する。

2.6 ミンコフスキー時空

慣性系から観測した時間 t と空間 $[x, y, z]$ は、ミンコフスキー時空と呼ばれ、面白い幾何学的な性質が成立する。時空とは時間と空間を個別ではなく、一つの座標として取り扱うための座標系である。

ニュートン力学では、いかなる観測者から見ても共通の物理量だったので、空間座標とは区別していた。それに対し、相対性理論では時間も空間座標と同様、値も尺度も異なる量に変換され得るため、時間を座標軸の一つとして取り扱うことが自然である。習慣として、時間はゼロ番目の座標成分とし、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とする³のである。ここで、あえて時間に対応する成分に光速 c を乗じ、すべての座標成分が長さのディメンジョンをもつようにした。これらの座標成分に関するローレンツ変換を微分すると、

$$cdt' = \frac{cdt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - \beta \cdot c dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

³他の章でも現れるが、座標成分を表す添え字は相対性理論では（正確に言うとリーマン幾何学では）、習慣的に右上に書く。べき乗を表す指数と紛らわしいので慣れないうちは注意が必要である。

が得られる。これらの微小量を用いて,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.10)$$

なる微小量 ds を定義しよう。この新たな微小量は時空の線素と呼ばれる。この線素に対してローレンツ変換を適応すると,

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

が成り立つことから, $ds^2 = ds'^2$ である。すなわち, ds はローレンツ変換に対して不変である。ローレンツ不変量 ds は, 前章で紹介したミンコフスキー計量である。ローレンツ変換からミンコフスキー計量にたどり着いたことから, 慣性系がミンコフスキー空間であることが検証できたのだ。とはいえ, 前章で述べたように, ミンコフスキー計量は光速不変を示すのだから, アインシュタインが提唱した光速不変の原理にしたがう慣性系がミンコフスキー空間であることは当然である。

第3章 加速度系から見た運動I

前章では慣性系から見た加速度運動する物体の位置や速度を議論したが、本章では逆に、加速度系から見た世界を記述してみよう。加速度系は慣性力が生じている系であるため、もはや慣性系ではなく、特殊相対性理論が取り扱う範囲を超えている。正確な現象理解のためには一般相対性理論が必要だが、本章ではあえて、特殊相対性理論のみを用いて加速度運動系から見た運動の記述に試みる。

3.1 定式化の方針

加速度系から見た世界は、静止系から見た世界を単純にローレンツ変換することでは解析できない。ローレンツ変換は慣性系の間での座標変換であり、加速度系は慣性系ではないからだ。ローレンツ変換で変換できる座標系は、相対性原理が成り立つ系に限られる。加速度系と静止系の間には相対性原理が成り立たないのでローレンツ変換が使えないわけだ。

相対性原理が成り立つとは、同一の運動方程式が成り立つということだ。慣性系どうしの場合、同一の物体を見た場合、速度は異なるが加速度が双方の観測において同一である。ニュートンの運動方程式は、加速度と質量の積が力であるので、力を印加しない物体に加速度が発生しない。力を印加しない物体は、いかなる慣性系から見ても加速度が生じていない。それが同一の運動方程式が成り立つということである。

静止系と加速度系の間関係は前段落とは異なる。静止系に固定された物体であっても、加速度系から見ると加速度を伴って運動しているように見える。静止系において力の印加がないにもかかわらず、加速度系から見ると加速度運動するのだ。その現象は相対性原理が成り立たない状況である。だから、加速度系と静止系の間関係はローレンツ変換で記述できないのだ。

本来ならば一般相対性理論を使うのが常套手段かもしれないが、本章では上記の制約を意識したうえで、静止系から見た等加速度運動に対する特殊相対性理論に基づく定式化の結果を利用する。具体的には、特殊相対性理論に基づく定式化の結果から等加速度運動する物体の固有時間を計算し、その固有時間を加速度系における時計の読みとみなす。習慣

に基づき、固有時間を τ として、加速度系から見た位置や速度を τ の関数として定式化するのだ。

前章で定式化した変位や速度は、静止系からみた状態を表すため、慣性系での時刻 t についての関数として記述されていた。そのような物理量を加速する物体の固有時間 τ で書き換えるのだ。そのため、第一に慣性系での時刻 t と加速度運動する物体の固有時間 τ の変換公式を特定する。その後、その関係性に基づいて物理量を τ の関数に書き換えていく。

3.2 時間の変換

慣性系どうしならローレンツ変換で時空の座標を互いに変換できるのだが、加速度系はローレンツ変換で取り扱うことができない。正確な議論のためには一般相対性理論を使うべきだが、本章では特殊相対性理論だけで加速度系から見た世界の記述を試みる。静止系から見た等価速度運動する物体の変位と速度は、

$$x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2 / c^2}},$$

のように表される。いうまでもなく、 t と x は静止系から見た座標である。ここで取り扱う運動は x 軸方向に限定しよう。つまり、 $dy = dz = 0$ とする。簡単のため、 $t = 0$ において $x = 0$, $dx/dt = 0$ となるように積分定数を選んだ。上の第1式を変形すると、

$$\left(1 + \frac{ax}{c^2} \right)^2 - \frac{a^2 t^2}{c^2} = 1,$$

なる関係が得られる。この数式が xt 平面において双曲線を描くので、相対性理論における等加速度運動は双曲線運動と呼ばれる。蛇足ながら、その双曲線の頂点付近では、 $x \simeq at^2/2 + c^2/a$ なる近似が成り立つ。これがニュートン力学での放物線運動に相当する。

上記の双曲線の方程式から、 $1 + ax/c^2 = \cosh \eta$, $at/c = \sinh \eta$ のような置き換えが可能だ。なお、 η は運動を記述するためのパラメータである。扱っている運動が x 軸方向に限定されるので、静止系から見た物体の線素は $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2$ であるため、物体に固定した時計の読み (固有時間) が、

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt,$$

となることに注目しよう。その時計は加速度運動する物体に固定されている。微分形式で表されるこの関係式を積分すると、

$$\tau = \frac{c}{a} \operatorname{arsinh} \frac{at}{c}, \quad (3.1)$$

が得られる。当然, この数式は $at/c = \sinh(a\tau/c)$ のように書き換えることができる。この考察によって, 先ほど用いたパラメータ η は, $\eta = a\tau/c$ のように固有時間の関数だったことがわかる。したがって, 双曲線運動における位置と時間は,

$$1 + \frac{ax}{c^2} = \cosh \frac{a\tau}{c}, \quad \frac{at}{c} = \sinh \frac{a\tau}{c}, \quad (3.2)$$

のように記述することができるのだ。ところで, 固有時間は静止系で時刻 t において, 加速度 a で加速する物体に固定した時計の読み τ を表している。ただし, $t = 0$ のとき $\tau = 0$ となるように積分定数が選ばれている。この数式を, 基準の静止系から加速度系への時間の変換と考えよう。

上の計算の例として, 5 m/s^2 で等加速度運動する物体の固有時間を基準となる静止系の時計の読みと比較したグラフを図 3.1 に示す。時刻 t が小さいうちは物体の速度が小さい

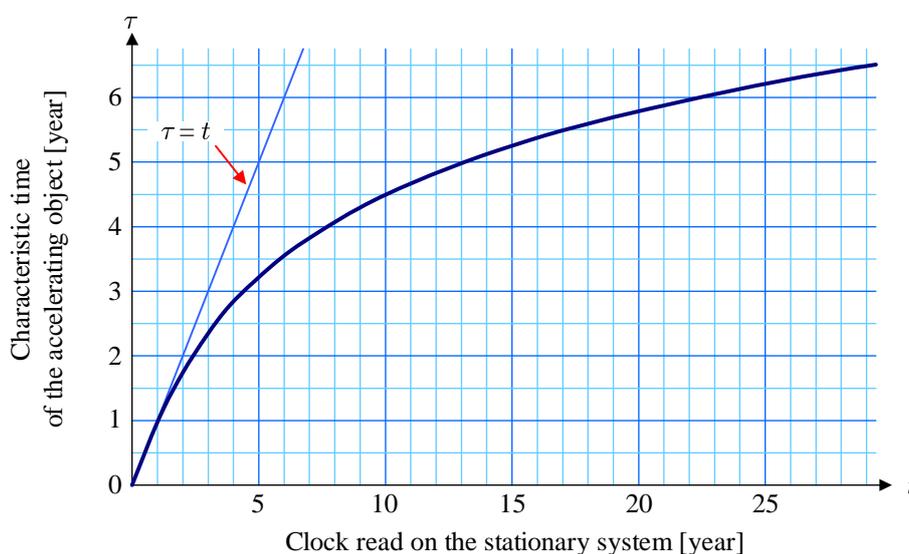


図 3.1: 等加速度運動する物体の固有時間 ($a = 5 \text{ m/s}^2$)

ため, 加速度運動する物体も静止系とほぼ同じ速さで固有時間が時を刻み, $\tau \simeq t$ が近似的に成立する。しかし, t が大きくなると速度が大きくなり, 相対論的な時計の遅れが目立ち, グラフの傾きが徐々に小さくなる。開始から 22 年後, 加速度運動する物体の固有時間は 6 年しか経過していない。これを逆の立場で見ると, 加速度計で 6 年しか経過していないのだが, 静止系では 22 年も経過していたということになる。正確に言うと, 加速度系から見た静止系の時計の読みはそれほど単純な対応関係にはならない。本書の後で明らかにするように, 加速系から見た静止系の時計は場所によって時を刻む速さが異なるのだ。

3.3 物体の変位

加速度系から見た物体の変位を考えてみよう。ここでも観測の対象を物体 A と呼ぼう。静止系に固定された物体 A が $t = \tau = 0$ において、K 系の座標で x_0 に存在すると仮定しよう。時刻 t において、加速する観測者が座標 $x(t)$ にいる場合、その観測者から見た位置 ξ は、

$$\xi = (x_0 - x(t)) \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2},$$

となる。ここで、平方根はローレンツ収縮による長さの収縮率である。加速度運動をする観測者にとっては、静止系が動いているように見えるため、その速度に応じて空間がローレンツ収縮するのだ。この量を計算するため、前節で導出した関係式 (3.2) を変形して、

$$x = \frac{c^2}{a} \left(\cosh \frac{a\tau}{c} - 1 \right),$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} = \operatorname{sech} \frac{a\tau}{c},$$

を準備しておく。これらの数式を上書いた ξ に代入すると、

$$\xi = \left(x_0 + \frac{c^2}{a} \right) \operatorname{sech} \frac{a\tau}{c} - \frac{c^2}{a}, \quad (3.3)$$

が得られる。加速度運動する観測者の観測によると、静止系に固定された物体 A は、時刻 τ に座標 ξ に存在している。例として、 $\tau = 0$ における初期位置 ξ が 5 光年, 4 光年, ..., -1 光年の静止系の固定点の位置が時間とともに推移する様子を計算すると図 3.2 のような曲線を描く。この図は、加速度運動しながら眺めたときの車窓の景色の移動を表しているのだが、我々の日常と様子が異なる。日常的な感覚では、それぞれの曲線が放物線であるとしても、曲線は互いに平行であるはずだ。しかし、(3.3) での計算はそうならず、あたかも $\xi = -2$ 光年を中心に、時間とともに収縮しているように振る舞っている。なお、収縮の中心となっている -2 光年とは $\xi = -c^2/a$ である。その座標は第 2.4 節で取り上げた事象の地平面の位置と一致する。加速度系から見ると、静止系の点は事象の地平面を超えて移動できないことを示唆している。

観測者の時計で計測した時刻 τ において、その加速度運動する観測者が到達できる距離を評価しよう。到達できる距離は次のように定義する。加速度運動する観測者の時計で $\tau = 0$ のとき $\xi = x_0$ の位置に存在していた物体が、時刻 τ において $\xi = 0$ に存在する場合、時刻 τ における到達距離は x_0 であるとする。その定義を用いると、到達距離 x_0 は、

$$x_0 = \frac{c^2}{a} \left(\cosh \frac{a\tau}{c} - 1 \right), \quad (3.4)$$

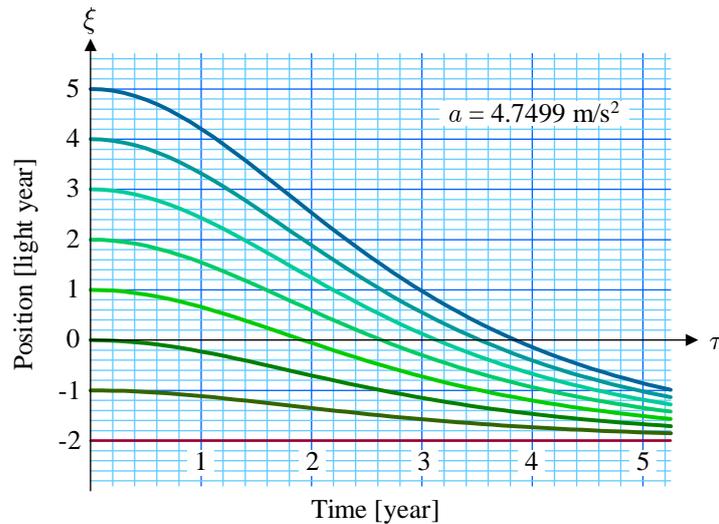


図 3.2: 加速度系から見た静止系の観測点の位置 ($a = 4.7499 \text{ m/s}^2$)

となる。いうまでもなく、この公式は $\xi = 0$ として方程式 (3.3) を x_0 について解くと導出できる。到達距離の一例として、加速度 5 m/s^2 の条件で計算すると、観測者の到達距離は図 3.3 のような曲線を描く。グラフには、到達距離の想像を助けるため、その距離に対応する代表的な天体の名前を記載した。このグラフは縦軸が対数スケールとなっているので、加速する観測者の時計に対して到達距離は指数関数的に増加していくことがわかる。加速度 5 m/s^2 で加速を継続すると、距離 8.7 光年のシリウスには約 4 年で、距離 600 光年のベテルギウスには約 12 年で、さらに、距離 200 万光年のアンドロメダ星雲には 27 年で通過してしまう。あたかも超光速で航行しているような計算になったのだが、相対論効果としてのローレンツ収縮によってもたらされる現象である。

距離 200 万光年は光でも 200 万年かかる距離であるが、それは、基準となる静止系の時計で計った時間である。加速度運動する観測者の時計は基準の静止系の時計よりゆっくり進む¹ので加速を重ねるほどに、短時間でますます長い距離を移動することが可能になる。図 3.3 を見ると、 5 m/s^2 程度の加速度で人間の一生のうちに銀河系から飛び出すことができそうな可能性を感じさせる。とはいえ、このような恒星間航行を実現するには数十年にもわたる (静止系では数百年以上も) エネルギーを供給し続けるメカニズムが肝要である。全行程でのエネルギーに見合う燃料をあらかじめ積載しておくのか、航行しながらエネルギーを外部から取り込む仕組みを実装するのか、様々な方法があるかもしれない。現実的に、そのような恒星間航行の実現が困難であることは本書の後の章で説明することになる。

¹特殊相対性理論では、ともに相手の時計がゆっくり進むように見えるので、実のところ、この記述は正しくない。

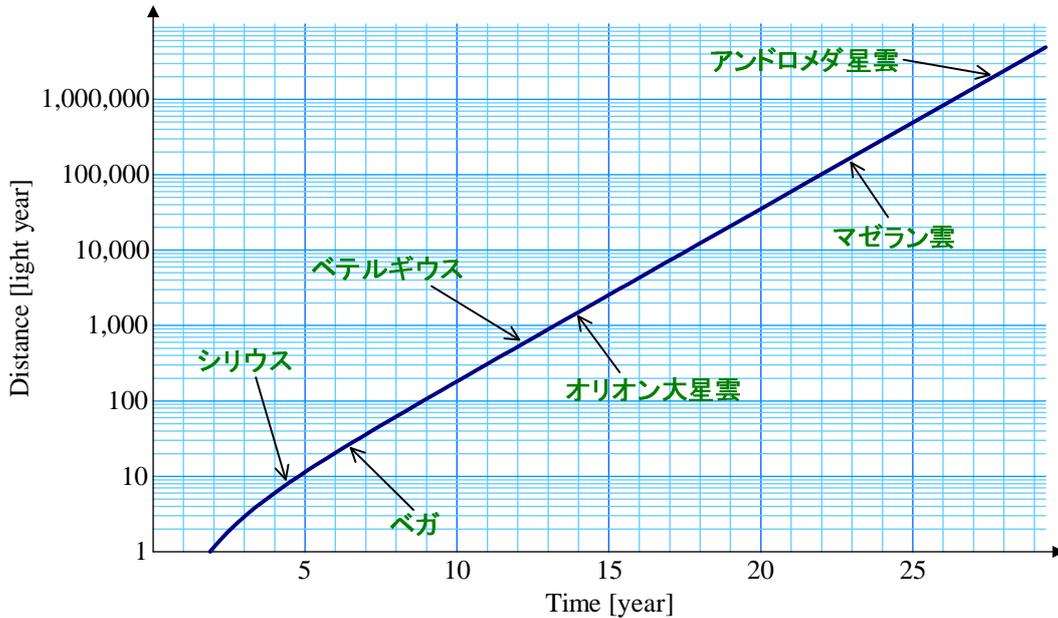


図 3.3: 等加速度運動する観測者の到達距離 ($a = 5 \text{ m/s}^2$)

3.4 速度についての考察

静止系に固定された物体 A を加速度運動する観測者が観測すると、その速度に面白い性質が見いだせる。加速度系から見た物体 A の速度を調べてみよう。加速度運動する観測者が見た物体 A の速度は、(3.3) で記述される位置 ξ を固有時間 τ で微分すれば、

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -c \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \tanh \frac{a\tau}{c} \operatorname{sech} \frac{a\tau}{c}, \quad (3.5)$$

であることがわかる。ただし、 $\tau = 0$ のとき、観測対象は $x = x_0$ に存在し、速度がゼロであるとする。観測者が一定の加速度 a で加速を持続するので、観測者の観測では、静止系に固定された物体は速度を単調増加させながら x 軸の負の方向へ移動するように見えると推測されるかもしれない。しかし、そのようにならないのである。固有時間 τ の増加とともにこの速度の絶対値は増加を続けるのではなく、図 3.4 に示すように、

$$\left| \frac{d\xi}{d\tau} \right|_{\max} = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right), \quad \text{when } \tau = \frac{c}{a} \log(1 + \sqrt{2}),$$

なる最大値を迎えた後、減少に転じるのである。例えば、 $a = 5 \text{ m/s}^2$ で加速度運動を持続している場合、加速を開始してから 1.675 年で物体の速度が最大値に達し、その後、減少に転じるということだ。しかも、 $ax_0 > c$ のとき、最高速度は c を超えるのだ。その計算結果だけ見ると、超光速が達成できているかのような奇妙な現象が起きていることになる。

観測者は一定の加速度を持続しているのだから、静止系に固定された物体の相対速度は増加し続けるのが自然である。その予想に反して、減少傾向に転じるのはなぜなのか？ 可

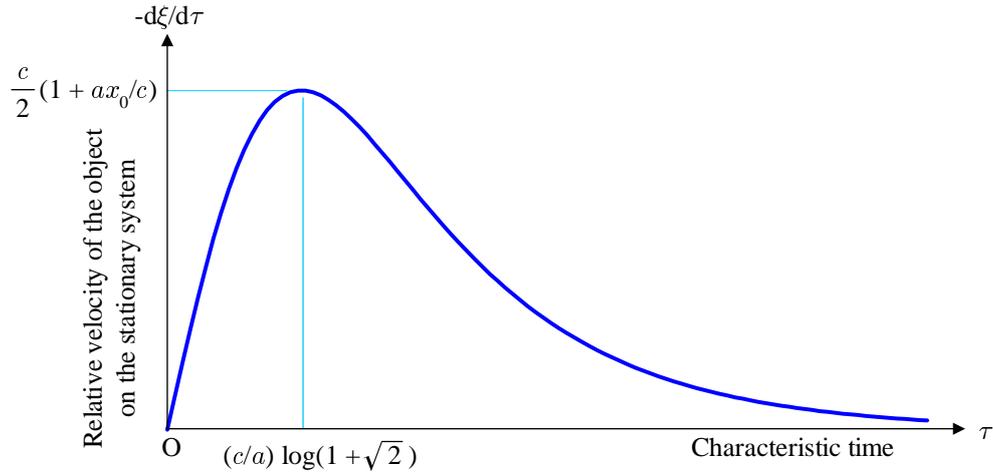


図 3.4: 加速系から見た静止系に固定される物体の速度

能性として、光速が場所に依存して変化すると考えてはどうであろうか。前に学んだように、重力場では光速が場所によって異なる。加速度運動する観測者が見る世界は、それと類似した現象が起きていると推測するのである。例えば、その相対速度を、

$$\frac{d\xi}{d\tau} \equiv -c(\xi)\beta(\tau),$$

とする。ここで、位置 ξ における光速を $c(\xi)$ とし、光速に対する速度比を $\beta(\tau)$ としたとき、その速度比 $\beta(\tau)$ は単調増加にならないだろうか。

位置 ξ に依存して変化するような光速 $c(\xi)$ を推測してみよう。推測するにあたり、光速はいかなる物体も超えられない究極の速度であるという姿勢で臨もう。考え方としては、初期状態で無限遠 ($x_0 \rightarrow \infty$) にいた物体が有限の距離まで移動したとき、その速度が光速に限りなく近い速度であると仮定する。すなわち、速度 (3.5) を $\tau \rightarrow \infty$ で極限をとると、得られる極限值が光速であると考え。その考えに基づいて極限をとると、

$$\begin{aligned} c(\xi) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left| \frac{d\xi}{d\tau} \right| = \lim_{\tau \rightarrow \infty} c \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \tanh \frac{a\tau}{c} \operatorname{sech} \frac{a\tau}{c} \\ &= c \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \operatorname{sech} \frac{a\tau}{c}, \end{aligned}$$

のように計算できる。この計算結果に (3.3) を代入すると、

$$c(\xi) = c \left(1 + \frac{a}{c^2} \xi \right), \quad (3.6)$$

が得られる。この計算結果が、加速度系で観測される光速だ。この結果によると、光速は位置によって異なり、しかも、座標 ξ の 1 次関数になっている。観測者の位置 ($x = 0$) での光速は慣性系の光速 c と等しい。加速方向 (前方) に行くほど光速が大きくなる。例えば、

$a = 4.7499 \text{ m/s}^2$ の加速度場合, $c^2/a = 2$ 光年となるので, 10 光年前方での光速が $c(\xi) = 6c$, さらに, 100 光年前方の光速は $c(\xi) = 51c$ というかなり大きな値になる。一方, $x = -c^2/a$ では $c(x) = 0$ となる。その位置は, 前節で計算されたように加速度系から観測した物体の位置が収縮する中心位置と一致する。収縮の中心位置は, 時間経過に対しても位置が不変であるわけであり, その位置で光速がゼロであるのであらゆる物体も速度ゼロになる, という解釈でメカニズムが理解できるだろう。

加速度系で, 光速 $c(\xi)$ が位置 ξ に依存することを考慮すると, 観測対象の物体の速度は $c(\xi)$ に対する比率で表すとすっきりする。実際に計算すると速度比 $\beta(\tau)$ は,

$$\beta(\tau) = \tanh \frac{a\tau}{c}, \quad (3.7)$$

のように, τ に関して単調増加関数となる。予想した通りの結果が得られた。本節の冒頭で計算した速度 (3.5) と局所的な光速で正規化した速度 (3.7) を図 3.5 で視覚的に比較しよう。この図は, $x_0 = 5$ 光年, $a = 4.7499 \text{ m/s}^2$ の条件で計算した。速度 (3.5) をそのまま表示する代わりに, 定数 $c(x_0)$ で正規化した。そのように表示した速度は, $\tau = 1.76$ 年で最大値 $c(x_0)/2$ をとる。これは既に図??に表示した結果と同じである。一方, 局所的な光速

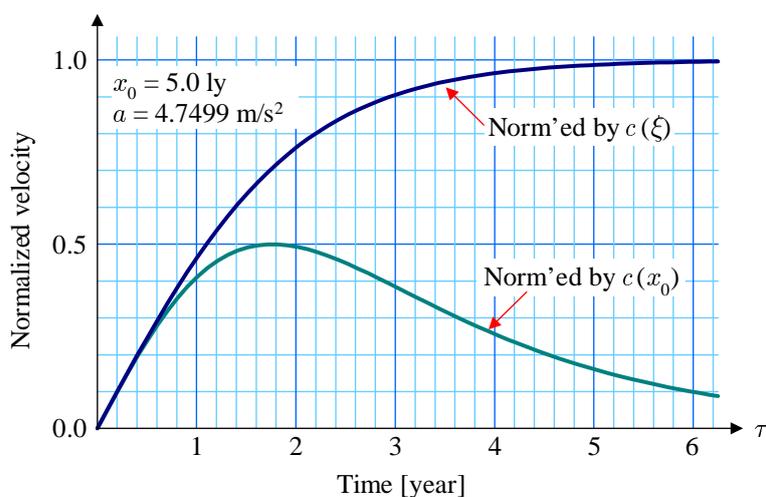


図 3.5: 加速系から見た物体の正規化速度

$c(\xi)$ によって正規化した速度は単調増加となる。例えば, 初期状態として 5 光年先で静止していた物体をこの加速度系で観測したとき, 脇 ($\xi = 0$) を通り過ぎていくのは $\tau = 3.9$ 年である。そのとき, 物体の速度は光速の約 96% に達していることが, この計算からわかる。

それでは, $c\beta(\tau)$ の値に対して, 固有時間 τ を基準の静止系の時間 t に変換して書き直してみよう。関係式 $at/c = \sinh(at/c)$ に注目すると,

$$c\beta(\tau) = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2t^2/c^2}},$$

が得られる。この結果は静止系から見たときの加速度系の速度と一致する。つまり、加速度系の観測者が、自分の時計で時刻 τ のとき、静止系に固定された物体の速度を計測すると、速度は物体の位置 ξ に依存する。それは、加速度系の観測者が計測する光速が ξ に依存するからであり、物体の速度は $c(\xi)\beta(\tau)$ と書くことができる。このとき、静止系から見ると、加速度系の観測者は、速度 $c\beta(\tau)$ で運動しているように見えるのである。

3.5 時間の変換についての注意

本章では静止系と加速度系の時間の変換を導出するために固有時間を用いた。固有時間は、加速度系に固定された時計の読みを表すとし、変数 τ を用いた。それに対し、静止系の位置座標を x, y, z , 時間を t とした。加速度系の固有時間を特定するには、ミンコフスキー空間を移動する物体の固有時間として、

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2,$$

を用いたわけだ。改めて注意しておくが、 $[x, y, z]$ は加速する物体を静止系で計測した位置である。加速する物体は、加速系の特定の位置に固定された物体である。すでに、前章で等加速度運動する物体の位置が、静止系の時刻 t の関数で表現する術を獲得しているので、上の数式の左辺は t の関数で記述できる。その結果として、静止系の時刻 t と加速系の固有時間 τ が満たす微分方程式が得られ、最終的に、 τ が t の関数として記述できたわけだ。

逆に、加速度系の位置座標 ξ と時間 τ から静止系の時間 t を特定するため、上記の手順を利用する場合には注意が必要だ。具体的には、上に書いたミンコフスキー時空の線素を使うことはできない。なぜなら、加速度系から静止系の変換をする場合、静止系に固定された物体の運動を加速度系から観測する想定のため、加速度系の線素を用いて固有時間を定義しなければならない。本章の時点では加速度系の線素が明らかでないので、加速度系から静止系の固有時間を評価することができない。加速度系の線素は第5章で明らかになるので、それ以降には、加速度系から見た静止系の時間を評価できるようになる。

第4章 一般相対性理論

特殊相対性理論は慣性系にいる観測者、すなわち、等速度運動をする観測者が見た世界しか記述できない。特殊相対性理論は、その意味で特殊なのだ。一般の観測者から見た世界を記述するには加速度を取り扱う必要がある。加速度を取り扱う理論を構築する過程で、アインシュタインは加速度運動によって発生する慣性力が重力と等価であると主張する等価原理にたどり着いた。それゆえ、特殊相対性理論の発表から11年後の1916年に発表された一般相対性理論は、加速度に対応した運動理論というよりも、むしろ、重力理論として世界中に知られることになった。

4.1 等価原理

特殊相対性理論は慣性系から見た世界、すなわち、等速度で運動する観測者が見た世界しか記述できない。なぜなら、加速度運動する観測者には慣性力が作用するからである。慣性力は、その観測者の加速度に比例した力として作用するため、他の観測者との間に相対的な関係が成り立たないのである。

一般の観測者に対する運動理論のためには加速度を取り扱う必要がある。等速度運動は特殊な運動形態にすぎず、そのような運動形態をとる観測者にしか適用できなかった特殊相対性理論が「特殊」と呼ばれるのはそれが理由である。

アインシュタインの理論によると、加速度によって作用する慣性力は重力と等価である。その主張は等価原理と呼ばれる。かつて、ガリレイが落下の法則として示したように、重力は質量に関係なく、あらゆる物体に一定の加速度を与える。慣性力による見かけの加速度(急ブレーキをかけたバスの中でよろめくときの加速度)も質量には依存しない。重力加速度を g 、物体に作用する重力を f_g としたとき、 $f_g = m_g g$ によって定義される質量 m_g は重力質量と呼ばれる。それに対して、加速度 a によって物体に作用する慣性力を f_i としたとき、 $f_i = m_i a$ によって定義される質量 m_i は慣性質量と呼ばれる。等価原理が成り立つならば $m_g = m_i$ となるはずである。これに関して、1922年にエトヴェシュらが実験によって 10^{-6} の精度で、1964年にロールらが実験によって 10^{-11} の精度で重力質量と慣性質量が等しいことを検証した。

アインシュタインはエレベータの思考実験によって等価原理の発想にたどり着いた。エレベータが上方に加速するとき、慣性力のため体重が重くなったように感じ、下方に加速するときには体重が軽くなったように感じるだろう。極端な例として、エレベータのワイヤが切れ、エレベータが自由落下を始めると、乗っている人はエレベータと共に自由落下するので、エレベータの床から自分の体重による反作用力を感じることがないので無重力と同じ状態を感じる。

逆に、地球の重力圏の外(自由空間)にエレベータがあり、中に人が乗っているとすると。エレベータのワイヤを引っ張り、上方に加速すれば、慣性力によって乗っている人は自分の体重に応じた反作用力を床から受ける。つまり、無重力空間に存在するエレベータが加速度をもてば、重力場と等価な状態になる。そのエレベータの側壁に穴を開け、側方からエレベータ内部に光を照射した場合を考えよう。自由空間から見ると、図 4.1 (a) のように光は直進するが、その間にエレベータは加速しながら上昇する。一方、加速するエレベータから見ると、光は図 4.1 (b) のように下方に湾曲した軌跡を描く。また、エレベータの外の景色も加速しながら下方に移動するように見える。言い換えると、加速するエレベータから見ると、外の景色も光も、重力場を落下しているかのように見えるのではないか。

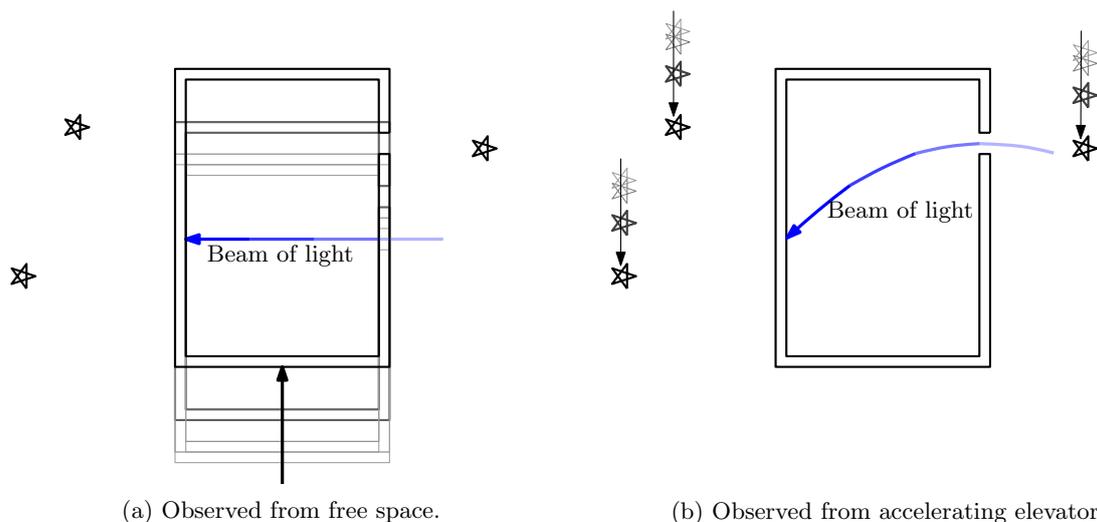


図 4.1: 加速するエレベータの思考実験

重力と慣性力が等価であり、それらの区別ができないのであれば、重力場に静止しているエレベータの側壁から入った光は、図 4.1 (b) のように下方に湾曲するように見えるはずである。つまり、重力が光を引きつけて湾曲させるように見えるのである。つまり、この思考実験の主張は、光も一般の物体と同様に、重力によって引きつけられるということである。

加速度を含む運動を記述する理論は、加速度が重力と等価であるという原理から、重力

場の理論を作ることによって説明可能になる。先ほどの思考実験の光と同様に、自由粒子は重力場を湾曲した軌跡を描きながら落下する。しかし、自由粒子から見ると、無重力状態であり、等速度運動をしていると主張するだろう。つまり、自由粒子は自分が慣性系に存在し、直線的な軌跡を描くと思っている。一方、重力場に存在する観測者は、その自由粒子が湾曲した軌跡を描くのを観測している。アインシュタインの理論によると、重力場が空間を曲げてしまうので、本来直線的な運動も、重力場から見ると湾曲して見えるのである。したがって、重力場を記述するには曲がった空間を記述する数学が必要だとアインシュタインは考えた。その数学手法として、重力場を取り扱う一般相対性理論ではリーマン幾何学が用いられる。

ここから先では、一般相対性理論を扱うため、少しばかりリーマン幾何学を導入する。次の節で、リーマン幾何学を紹介しながら一般相対性理論を記述していく。

4.2 リーマン幾何学

本節では、一般相対性理論の数学的記述のための道具としてリーマン幾何学を紹介する。リーマン幾何学は曲がった空間を取り扱うための数学である。曲がった空間を取り扱うには、座標変換に対する数学量の取り扱いを厳密に数学表現することが大切であり、その数学形態が相対性理論の理解を容易にしてくれる。

4.2.1 座標と座標変換

座標系 K における座標を x^μ と書き、それを K' 系に座標変換して得られる座標を x'^μ と書く。ここで、右肩に付した文字 μ はベクトルの添え字である。リーマン幾何学では、座標成分を示す添え字を右肩に書くことが習慣になっている。また、ここでは相対性理論における記述のために限定し、取り扱う座標は4次元座標(時間1次元+空間3次元)である。

座標系 K から別の座標系 K' への座標変換が $x'^\mu \equiv x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ のような関数で与えられているとする。このとき、解析学の公式から、

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (4.1)$$

となることは明らかである。ところで、リーマン幾何学ではこのような総和を用いた数式が頻繁に登場する。そのような数式では、(4.1)で使用される ν のようにペアになっている添え字について総和をとることが常である。つまり、ペアになっている添え字について

和をとるという約束をしていれば、総和記号 Σ を省略して書いたとしても不都合は生じない。よって、リーマン幾何学では (4.1) は、

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (4.2)$$

のように記述される。この省略記法はアインシュタインの総和の規約と呼ばれる。名前のとおり、この怠惰な記法はアインシュタインが一般相対性理論のために提案した方法で、便利さゆえに使われ続けている。正確に言うと、総和をとるための添え字はどのような組み合わせでもよいわけではない。一方の添え字が共変成分であれば、対となるもう一方は反変成分でなければならないという制限がある。共変成分、反変成分という言葉については後に説明するので今のところは特に気にしないでよいだろう。

K 系から K' 系への座標変換がローレンツ変換ならば、座標の完全微分 (4.2) に見られる係数 $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}$ をヤコビアン行列の第 μ 行目、第 ν 列目の成分とすると、そのヤコビアン行列は、

$$\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

のようにローレンツ変換の展開係数を表す行列となる。ここで、 $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ とする。これに対して、

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu},$$

であることから、逆変換を表す $\partial x^{\mu}/\partial x'^{\alpha}$ は、 $\partial x'^{\alpha}/\partial x^{\nu}$ の逆行列であることがわかる。このようなローレンツ変換の展開係数とヤコビアン行列の関係は、物理量の変換を考える際に役に立つ。

4.2.2 スカラとベクトル

スカラとベクトルはリーマン幾何学で導入された概念ではないが、リーマン幾何学は座標変換に対する性質として、スカラとベクトルを論理的に分類している。スカラは座標変換に対して不変な値であり、ベクトルは座標変換に伴って変換される量である。さらにその変換の性質により、ベクトルは共変ベクトルと反変ベクトルに分類される。

スカラ 既に述べたように、スカラとは座標変換に対して不変となる量である。数式で表現するならば、ある座標系で定義されたスカラを ϕ とし、別の座標系において ϕ に対応する量を ϕ' とすれば、

$$\phi' = \phi, \quad (4.3)$$

となる。本書で扱った例として、ローレンツ変換に対して不変であったミンコフスキー時空の微小距離 ds や光波の位相がスカラの例である。

共変ベクトル 任意のスカラ ϕ を座標 x^μ で偏微分することによって定義されるベクトル $\partial\phi/\partial x^\mu$ 、いわゆる勾配ベクトルは、

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu},$$

という性質がある。この性質は解析学における偏微分の変換公式である。これと同じ性質をもつベクトルを**共変ベクトル**という。共変ベクトルは、 u_μ のように添え字を右下に書く習慣になっている。座標変換に関する性質を改めて書くと、共変ベクトル u_μ は、

$$u'_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} u_\nu, \quad (4.4)$$

なる関係を満足する。例えば、光波の角周波数 ω と波数ベクトル $[k_x, k_y, k_z]$ を組み合わせてつくった4次元ベクトル $[k_\mu] \equiv [-\omega/c, k_x, k_y, k_z]$ は、ミンコフスキー空間において $k_\mu = \partial\theta/\partial x^\mu$ で与えられる (θ は光波の位相) ので、共変ベクトルである。共変ベクトルは、座標変換に対して、その逆変換によって新しい座標系での共変ベクトルに変換される。共変ベクトル k_μ に関するローレンツ変換を例にとると、特殊相対性理論におけるドップラ効果として導出した変換式から、

$$-\frac{\omega'}{c} = \frac{-\omega/c + \beta k_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k'_x = \frac{k_x + \beta(-\omega/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z,$$

となることから、確かにローレンツ変換の逆変換にしたがって変換されていることが分かる。また、容易に示せるが、勾配ベクトルのほかに、共変ベクトルをスカラで微分したベクトルも共変ベクトルである。

反変ベクトル 前項でも書いたように、微小な座標変化 dx^μ は、座標変換に対して、

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

のように変換される。これと同じ性質をもつベクトルを**反変ベクトル**という。共変ベクトルは、 v_μ のように添え字を右上に書く習慣になっている。座標変換に関する性質を改めて書くと、反変ベクトル v^μ は、

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu, \quad (4.5)$$

なる関係を満足する。つまり、ローレンツ変換に対して、反変ベクトルは座標変換と同一の変換にしたがう。また、容易に示せるが、反変ベクトルをスカラで微分したベクトルも反変ベクトルである。

4.2.3 2階テンソル

共変ベクトル, または, 反変ベクトルのダイアド積をとることによって添え字を2つもつ量 $T_{\mu\nu} \equiv u_\mu v_\nu$, $T^{\mu\nu} \equiv u^\mu v^\nu$, $T_\mu{}^\nu \equiv u_\mu v^\nu$ などを定義できる。添え字がともに下にある量を共変テンソル, 添え字がともに上にある量を反変テンソル, 添え字が上と下にある量を混合テンソルという。ベクトルと同様, 座標変換に対して, 共変な成分は逆変換にしたがい, 反変な成分は座標変換と同一変換にしたがう。その性質を数式で表現するならば,

$$\begin{aligned}T'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}, \\T'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}, \\T'^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^\alpha{}_\beta,\end{aligned}$$

となる。同様にダイアド積を重ねてさらに高階のテンソルを定義することもできるが, 特殊相対性理論で登場するのは2階のテンソルまでである。

逆に, 高階のテンソルの階数を下げる操作を縮約という。例えば, 2階の共変テンソル $T_{\mu\nu}$ に反変ベクトル u^μ を掛けて, 添え字 μ について縮約をとると,

$$T_{\mu\nu} u^\mu \equiv v_\nu,$$

のような共変ベクトルが得られる。容易に予想できるように, ベクトルに対して縮約をとった値 $u_\mu v^\mu$ はスカラー量になる。このスカラー量は, 次項で紹介するベクトルの内積である。

4.2.4 計量テンソル

計量テンソルは, 時空の微小距離を定義するテンソルであり, 湾曲した時空を解析する上で重要な情報である。後に示すように計量テンソルは2階の対称テンソルであるが, 物理的なイメージをつかむため, 微小距離を与える情報であることから始め, 順を追って説明する。

まず手始めに, 2次元のユークリッド空間 (平坦な空間) を考えよう。座標系には直交座標系 $[x, y]$ を想定しよう。空間の任意の位置に互いに接近した二つの点を配置する。その二点を結ぶベクトルは $[dx, dy]$ であるとする。このとき, 二点間の距離の自乗は,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

で表される。リーマン幾何学では, この微小距離 ds を線素と呼ぶ。実は, 線素の自乗がこのような量になることに関して, 条件を言い忘れていた。それは, x 座標と y 座標が長さ

に関して規格化されているという条件である。わかりやすくいうと、 x 軸上の二つの座標 x と $x+1$ の間の距離が1になるように x 座標の尺度が決められ、 y 座標も同様に尺度が決められているということである。

次に2次元の斜交座標系を考えよう。座標系の x 軸と y 軸のなす角を α とし、上のように座標の尺度は長さに関して規格化されているとする。その場合、線素の自乗は余弦定理より、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2 \cos \alpha dx dy,$$

となる。線素の表現に混合微分項が現れたが、斜交座標系はまだ平坦な空間である。

曲がった空間の例として、半径 R の球の表面を考えよう。座標軸としては、北極点から南極点に向かう角度 θ と赤道を1周する角度 ϕ で球面上の任意の点を特定できる。そのとき、線素の自乗は、

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

のように表される。上で述べたように球面上の任意の位置は $[\theta, \phi]$ なる2つの座標成分で特定できるので、球面は2次元空間である。さらに、この例では座標が長さに関して規格化されていないため、線素の自乗を表す数式には $R^2 \sin^2 \theta$ のような係数がついている。この係数はもはや定数ではなく、座標に依存する。よって、球面座標の線素の自乗は座標の微小変化に関して非線形となる。その非線形が空間の曲がりに関係している。

上に示した三つの例を包含するように、一般の2次元座標 $[x^0, x^1]$ について線素を定義するならば、

$$ds^2 \equiv g_{00}(dx^0)^2 + g_{01}dx^0 dx^1 + g_{10}dx^1 dx^0 + g_{11}(dx^1)^2,$$

なる2次形式で記述するのがよいだろう。紛らわしい記述であるが、 ds の右肩の数値と括弧外の右肩の数値は自乗を意味する。それ以外の右肩の数値は反変ベクトルの添え字である。直交座標系と斜交座標系について $[x^0, x^1] \equiv [x, y]$ 、球面座標系について $[x^0, x^1] \equiv [\theta, \phi]$ のように座標線分を対応づければ、線素を与える係数は、

$$\begin{aligned} \text{直交座標} : [g_{\mu\nu}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{斜交座標} : [g_{\mu\nu}] &= \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{球面座標} : [g_{\mu\nu}] &= \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

のように書くことができる。当然、座標変換によって座標軸が変わったとしても、2点間の長さが不変であるので、長さを規定する線素は座標変換に対して不変になる。つまり、線素はスカラーである。

上のような線素の定義はそのまま多次元の空間に拡張することができる。つまり、線素の一般的な定義を、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

なる2次形式で与えるのである。既に説明したように、この数式はアインシュタインの総和の規約を用いている。係数 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれる2階の共変テンソルである。しかも、線素を定義する2次形式において dx^μ と dx^ν を交換しても ds^2 が変化しないので、 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ である。つまり、計量テンソルは対称テンソルである。また、2階の共変テンソルであることから、 $g_{\mu\nu}$ は座標変換に対して、

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta},$$

のような変換にしたがう。この性質は ds^2 がスカラであることから容易に証明できる。さらに、計量テンソルの添え字を上にした記号 $g^{\mu\nu}$ は、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆行列を表す。

ミンコフスキー時空を例にとると、 $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ がスカラであり、長さの自乗の次元をもつので、これを線素の定義とする。座標成分を $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ のように対応させると、ミンコフスキー時空の線素を与える係数は、

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となる。重力場は曲がった時空であり、計量テンソルがミンコフスキー時空とは異なる。後に紹介する重力場の方程式や、物体の運動方程式には計量テンソル以外のテンソルやスカラを用いるが、後に説明するように、それらはすべて計量テンソルから導かれる量である。つまり、時空の幾何学的な性質は計量テンソルで与えられるのだ。

計量テンソルはその座標系における長さの尺度を定義する量であり、その尺度を用いてベクトルの内積を定義することができる。二つの反変ベクトル u^μ と v^μ の内積は $g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$ によって与えられる。つまり、線素の自乗 ds^2 は位置ベクトルの微小変化 dx^μ の自分自身との内積である。

計量テンソルには、ベクトルやテンソルの共変性と反変性を交換するはたらきがある。例えば、反変ベクトル u^μ に $g_{\mu\nu}$ を掛けて μ について縮約をとれば、 $u^\mu g_{\mu\nu} = u_\nu$ のように共変ベクトルに変換できる。逆に、共変ベクトル v_μ に $g^{\mu\nu}$ を掛けて μ について縮約をとると、 $v_\mu g^{\mu\nu} = v^\nu$ のように反変ベクトルに変換できる。このことから、 u^μ と v^μ の内積は $u^\mu v_\mu (= u_\mu v^\mu)$ と書くこともできる。

4.3 測地線とクリストッフェル記号

東京からニューヨークへの最短経路は、東京から千島半島に向かって北上し、アラスカ北部を經由してカナダのハドソン湾上空を通過する経路を描く。この経路をメルカトル図法で描くと、かなり湾曲した経路である。このように地球上での最短経路が地図上で湾曲した経路を描くのは、球面が湾曲しているからである。また、このように湾曲した空間を結ぶ最短経路を測地線と呼ぶ。ただし、測地線に沿って運動する観測者は測地線が曲がっていることを認識することはない。例えば、航空機の操縦桿をまっすぐにまっすぐに保って直進を続けると、航空機は測地線に沿った運動をするのである。

重力場についても同様である。一般相対性理論によると、質量は時空を湾曲させる。直感的には、図 4.2 のように、ゴムシート上の 1 点に質量が乗るとゴムシートに歪みができる。これが時空の湾曲と考えればよい。ゴムシート状を運動する光や物体はゴムシートの歪みに引きずられて、その軌跡が曲がるのである。図 4.2 では、左側から座標軸に平行に光が進行してきた場合を描いている。質量の近傍の時空の歪みで軌跡が曲がり、軌跡が座標軸の方向からそれていくのがわかる。右側から図の外へ抜けるときには、その光は入射方向とは大きく異なる方向へ伝播している。このような運動は測地線上の運動であるので、光や物体は軌跡が曲げられたとしても、自分が直線上を運動しているという意識しかもたないはずである。それが重力の解釈に関してニュートン力学と大きく異なる点であ

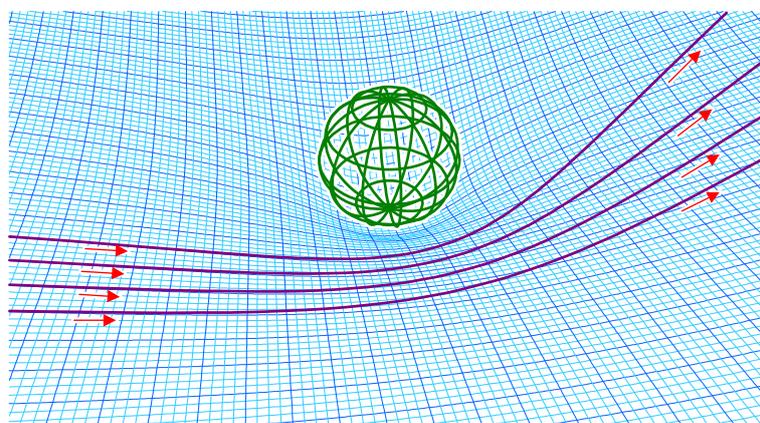


図 4.2: 質量による時空の歪みと光の軌跡

る。ニュートン力学では物体に重力が作用するから運動軌跡が曲がると解釈されていたが、一般相対性理論では湾曲した時空を運動をするから軌跡が曲がるのである。言い換えると、一般相対性理論の解釈では、重力という力は存在しないのである。一般相対性理論の重力場における物体の運動方程式は、

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.6)$$

なる測地線の方程式で記述される。ここで、 τ は固有時間と呼ばれ、運動する物体に固定された時計の読みと考えればよい。具体的には、 $-c^2 d\tau^2 = ds^2 (= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$ で定義されている。さらに、 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ はクリストッフエル記号と呼ばれ、

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right),$$

のように、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の1階微分によって計算される量である。幾何学的には、座標軸の方向と長さの尺度が時空の位置によって変化する割合を示している。特別な例として、ミンコフスキー時空中でクリストッフエル記号は必ずゼロとなる。したがって、ミンコフスキー時空中における測地線の方程式は $d^2 x^\kappa / d\tau^2 = 0$ となる。この方程式の解として、無重力空間では外力を受けなければ、物体は等速直線運動をするのである。

大きな質量が存在する場合、 $g_{\mu\nu}$ がミンコフスキー計量とは大きく異なり、その導関数から得られる $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ も大きくなり、光の軌跡でさえ湾曲させるのである。

4.4 弱い重力場の計量テンソル

近似的にニュートン力学が適用できる程度の弱い重力場における計量テンソルについて調べ、重力場における計量テンソルの物理的意味を考察してみよう。まず、重力場における測地線の方程式:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

から始めよう。対象とする時空は非常に弱い重力場であるので、ほぼミンコフスキー空間の現象と同一であるとみなしてよい。また、観測対象となる質点の速度が光速 c に比べて十分小さいとき、

$$\frac{dx^k}{d\tau} \simeq \frac{dx^k}{dt}, \quad \frac{dx^0}{d\tau} \simeq c, \quad \text{for } k = 1, 2, 3$$

と考えてもよい。非相対論的な極限として、 $|dx^k/dt| \ll c$ と考えると、測地線の方程式は近似的に

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + c^2 \Gamma^k_{00} = 0,$$

であると考えられる。さらに、計量テンソルが定常的であるならば、 x^0 についての導関数がゼロとなるので、クリストッフエルの記号 Γ^k_{00} は、

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} \right) \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k},$$

となるであろう。ここで、重力場が準静的であると考え、 x^0 についての微分が無視できると仮定した。このとき、測地線の方程式は、

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} = 0,$$

となる。ここで、ニュートン力学における重力場の方程式を比較してみよう。非相対論的な重力ポテンシャル ϕ が与えられたとき、ニュートン力学では、

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 0,$$

が成立する。この方程式を、上で導出した測地線の方程式と比較すると、

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right),$$

が得られる。この関係式を得るにあたり、 $\phi = 0$ のときに $g_{00} = -1$ となるように積分定数を選んでいる。この結果によって、計量テンソルはニュートン力学におけるポテンシャルとしての役割があることが推察できる。この近似式は、本書で構築する加速度場の記述において、計量テンソルを決定するために用いる重要な関係式である。

4.5 アインシュタインの方程式

重力場を求めることは計量テンソルを特定することだと前に述べた。それでは計量テンソルを求める方法を説明する。まず、ニュートン力学における重力場の導出を思い起こそう。単位体積あたりに質量 ρ が空間に分布しているとしよう。そのとき、重力のポテンシャル ϕ は、

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho,$$

なるポアソンの方程式の解となる。ここで、 G は万有引力定数 ($\simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$) である。この数式は、質量が存在する近辺には重力なる力の線が集まってくることを表現している。つまり、質量が重力の源である。

一般相対性理論では、このポアソンの方程式に相当する方程式が複雑になる。特殊相対性理論では $E = mc^2$ という関係式が導かれ、質量とエネルギーが等価であることがわかった。しかも、空間座標と時間座標がローレンツ変換で相互関係をもつことに類似し、運動量とエネルギーも相互関係をもつことがわかっている。そのため、一般相対性理論における重力の源はエネルギーと運動量である。それに対応する物理量として $T_{\mu\nu}$ というエネルギー運動量テンソルを右辺におけばよい。左辺は重力ポテンシャルのラプラシアンに相当する量となるべきである。弱い重力場の近似では、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ がポテンシャルに相

当することがわかっている。そのため、は計量テンソルの2階微分からつくられる量が方程式の左辺となる。導出には専門的な知識が必要なので省略するが、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

が重力場の基本方程式となる。この方程式はアインシュタインの方程式と呼ばれる。導出過程に興味のある読者は一般相対性理論の教科書、または、リーマン幾何学の教科書を参照するとよい。

アインシュタイン方程式の左辺にある $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソルと呼ばれ、時空の湾曲に起因する体積歪みを表す量である。体積歪みを説明するため、地球儀を例にとろう。地球儀に地図を貼り付けるには切れ目のない1枚の地図では貼り付けができない。市販されている地球儀は、世界地図を数十枚の紡錘形に分割し、それらを球の表面に貼り付けて製作されている。もし、切れ目のない1枚の地図を赤道付近に糊付けした後に北極と南極に向かって強引に糊付けをしていくと、地図が途中で折れ曲がり互いに重なり合ってしまう。この重なり具合が歪みというわけである。重力場についても同じことが言え、1辺が1mの立方体をつくってもその体積が 1m^3 にならないことになるのである。その体積のずれを $R_{\mu\nu}$ が表現していると考えればよい。また、 R はリッチテンソルのトレースと呼ばれる値であり $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ によって計算される。さらに、 $g^{\mu\nu}$ は計量テンソルの逆行列である。とにかく、左辺は時空が湾曲していることによる体積歪みを表す量である。

右辺の $T_{\mu\nu}$ は応力エネルギーテンソルと呼ばれるテンソルである。そのテンソルの中身は、エネルギー密度、運動量密度と応力である。応力が重力に関係するとはニュートン力学では想像もできないだろうが、応力がエネルギー・運動量の保存則に関係するため、重力の要因のひとつに加えられている。

ニュートン力学では質量が重力という力を生み出すことによって重力場が生成されているという解釈になるのだが、一般相対性理論では、エネルギー、運動量、応力が時空を歪ませ、その時空の歪みが重力場として認識されていると解釈されるのだ。

アインシュタインの方程式は見かけよりもはるかに複雑な式である。この方程式の右辺も左辺も4次元の2階の対称テンソルである。表示上、2階のテンソルは正方行列で書けるので、4次元の2階のテンソルは16個の成分をもつ。しかし、対称テンソルは $T_{20} = T_{02}$ のような添え字の入れ替えに対する対称性があるので、独立な成分の数はそれよりも少なくなる。とは言っても、独立な成分は10個もある。つまり、アインシュタインの方程式は、2階の微分方程式が10元の連立方程式になった形態をとっている。このように書くと、アインシュタインの方程式を解くことが恐ろしく難しいことが想像できるだろう。

4.6 シュワルツシルトの解

アインシュタイン方程式の解の例としてシュワルツシルトの解を紹介する。その解は、1916年にアインシュタインが一般相対性理論を発表した3か月後にシュワルツシルトが発表した解である。物理的には電荷をもたず、自転をしていない質点が生成する重力場を表している。一般相対性理論では、質点が自転している場合や、電荷をもつ場合には重力が変化する。自転をせず、球対象で、帯電していない条件は厳密には存在しないが、シュワルツシルトの解は基本的な解であり、多くの天体に対して近似的な解析をするのに十分であるので、相対性理論の記事で必ずと言っていいほど取り上げられる。

シュワルツシルトの解は球面座標で記述するのが便利である。空間座標として球面座標を用い、時空の座標を $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, r, \theta, \varphi]$ のようにとるとシュワルツシルトの解の線素は、

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4.7)$$

のように書かれる。ただし、 m は積分定数であり、質点の質量を M 、万有引力定数を G とすると、 $m \equiv MG/c^2$ である。この線素のミンコフスキー計量からのずれ:

$$-c^2 \frac{2m}{r} = -\frac{MG}{r},$$

は、十分遠方ではニュートン力学における重力のポテンシャルと一致する。この線素の奇妙な性質として、 $r = 2m$ を境に、計量テンソルの要素 g_{00} と g_{11} の符号が入れ替わる。しかも、その境界 $r = 2m$ では $g_{00} = 0$ 、 $g_{11} = \infty$ となる。その奇妙な境界面の半径 $2m$ はシュワルツシルトの半径と呼ばれる。

シュワルツシルト解は、ニュートン力学で説明できなかった面白い現象を教えてくれる。一つ目は周回する惑星の近日点の移動、二つ目は重力レンズ効果、三つ目はブラックホールの存在である。

4.6.1 近日点の移動

ニュートン力学では、質点を周回する惑星は楕円軌道を描く。しかし、シュワルツシルト解の線素を見ると、時間や動径方向の尺度が r の関数になっているため、質点との距離が変化すると時計が狂うことが予想される。楕円軌道を描く惑星にとって、遠日点と近日点では時間の尺度が異なるため、ニュートン力学では周回しても必ず同じ楕円軌道をたどる惑星が、一般相対性理論では近日点のタイミングが徐々にずれるわけである。

近日点が移動する効果は、重力場における測地線の方程式を評価すれば確認できる。結果だけを紹介するが、軌道の長半径がシュワルツシルト半径 $2m$ よりはるかに大きい場合の近似として、ある周回時の近日点の方向 $\varphi(1)$ と、次の周回時の近日点の方向 $\varphi(2)$ の差は、

$$\varphi(2) - \varphi(1) = 2\pi \left[1 + \frac{3m}{r_m(1 - e^2)} \right],$$

となる。ここで、 r_m が軌道長半径、 e が軌道の離心率である。この値の 2π からのずれ $6\pi m/r_m(1 - e^2)$ が周回ごとの近日点のずれである。近日点のずれは、水星の軌道で起きて

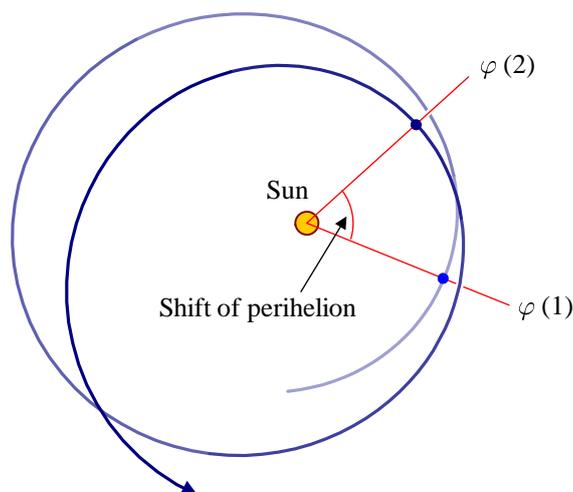


図 4.3: 近日点の移動

いることが相対性理論の発表前から知られていた。しかし、ニュートン力学では、摂動によるずれを補正しても、100年あたりに約43秒の角度のずれが残り、説明ができなかったのである。

水星の天文学的データとして、離心率 $e = 0.206$ 、軌道長半径 $r_m = 0.579 \times 10^8$ km、100年あたりに415周公転する情報を用いて計算してみよう。また、太陽の質量 $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg を代入すると、100年あたりの近日点のずれは42.9秒と計算される。一般相対性理論による計算は水星近日点の移動について観測とよく一致していることがわかる。つまり、ニュートン力学で説明できなかった近日点の移動は相対論的效果だったのである。

4.6.2 重力レンズ

一般相対性理論では、エレベータの思考実験でも述べたとおり、光の軌跡も重力によって曲げられる。重力が光の軌道を湾曲させる量も、測地線の方程式を評価することによって計算できる。

質点の赤道上空 ($\theta = \pi/2$) に限定した場合、測地線の方程式を変形すると、

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r^2},$$

が得られる。ニュートン力学ではこの方程式の右辺がゼロとなり、 $r = r_0 / \cos \varphi$ という解が得られる。定数 r_0 は質点に最も接近したときの質点までの距離である。この解によると、ニュートン力学では質点のそばを通過しても光は直進する。このニュートン力学における解を上微分方程式に代入すると、

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = 3m \left(\frac{\cos \varphi}{r_0} \right)^2,$$

を得る。新たに得られた微分方程式の解は、

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi}{r_0} + \frac{2m}{r_0^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right),$$

となる。この解は逐次近似における $2m/r_0^2$ の1次の項を含む解である。この解を最初の微分方程式に代入すればさらに高次の近似解を得ることができる。この解に対して、 $r_0 \gg m$ の条件で $r \rightarrow \infty$ の極限をとると、 $\varphi = 2m/r_0$ が得られる。これは、図 4.4 (a) に示すように、方向 $\varphi = \pi/2 + 2m/r_0$ の無限遠から到来した光は距離 r_0 で質点 M に接近した後、方向 $\varphi = -\pi/2 - 2m/r_0$ の無限遠に去っていくことを意味する。すなわち、その光は質点 M の重力場によって、

$$\Delta\varphi = \frac{4m}{r_0} = \frac{4GM}{c^2 r_0},$$

の角度だけ曲げられていること表す。このように大きな質量の近傍をかすめる光は、質点の重力によって引き寄せられる。この光線の湾曲が凸レンズのような働きをするので、重力によって光を曲げる効果を重力レンズ効果と呼ぶ。もし、観測者と質点と光の到来方向が一直線上にある場合、図 4.4 (b) のように、重力レンズ効果で曲げられた光は質点を取り囲む円環状に見える。その円環をアインシュタインリングと呼ぶ。しかし、一般には三者が一直線上からずれていたり、重力の源が広がりをもっていたりするので、アインシュタインリングは変形したり、途中で途切れたりしている。

4.6.3 ブラックホール

既に述べたように、シュワルツシルト解によると、質点からの距離が $2m$ (シュワルツシルト半径) で計量 g_{11} が発散する。シュワルツシルト半径は非常に小さく、地球の質量 (5.97×10^{24} kg) に対して 0.89 cm, 太陽の質量 (1.99×10^{30} kg) に対して 2.95 km となる。この半径は天体の内部なので、地球や太陽についてシュワルツシルト半径の歪んだ時空を観測することはない。しかし、質量が大きく自分自身の重力で1点につぶれた天体があれば

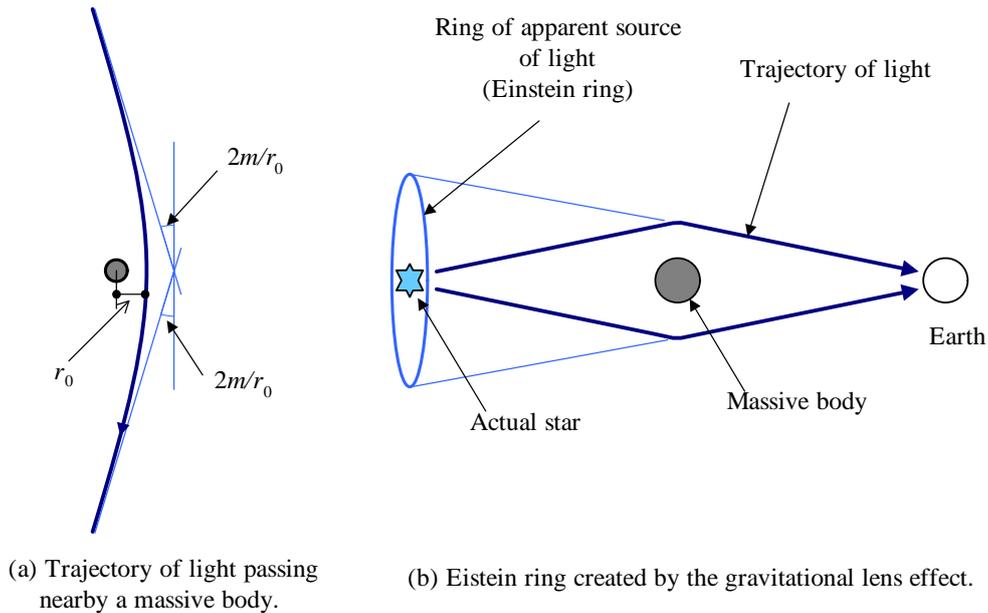


図 4.4: 重力レンズ効果

ば, 天体の外部にシュワルツシルトの半径が現れる。そのような特異な天体は光さえもその重力から脱出できないため, ブラックホールと呼ばれる。

光速不変の原理が成り立つのは慣性系に限られ, 重力場の中で光速は場所によって異なる。光速の場所への依存性を調べるには線素を調べるとよい。シュワルツシルト解の線素は,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

のように記述される。ただし, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ とおいた。シュワルツシルト解は, 質点からの距離 r によって時間と動径方向の尺度が変化する。例えば, 質点からの距離がシュワルツシルト半径の 2 倍 ($= 4m$) の場合, 動径方向の距離の尺度は無重力空間の 2 倍に引き伸ばされる。極端な場合として, シュワルツシルト半径 ($= 2m$) では動径方向の距離の尺度が無限大に引き伸ばされる。

シュワルツシルト解における動径方向の距離の引き延ばしを模式的に描くと図 4.6 に示すフラムの回転放物面 (Flamm's paraboloid) として表現される。シュワルツシルト解は, 半径 r が重力源から一定の距離となる経路を周回したときの総延長が $2\pi r$ となるように定義されているので, 接戦方向 (周回方向) には尺度が変化しないように座標系が定義されている。それに対し, 道警方向の尺度が半径 r に依存することは全段落で述べたとおりだ。その尺度の変化を確認するため, 同一時刻で動径方向のみを対象, すなわち, $dt = 0$, $d\phi = 0$, $d\theta = 0$ の条件でシュワルツシルト解の線素を書き出すと,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2,$$

が得られる。その線素を $ds^2 = dr^2 + dz^2$ と考えると、

$$dz = \sqrt{\frac{2m}{r-2m}} dr,$$

なる微分方程式が得られる。その解として得られるのが、

$$z = \sqrt{8m(r-2m)}, \tag{4.8}$$

である。数式 (4.8) で与えられる曲線は、 z を鉛直情報にとるならば、放物線を横倒しにした曲線だ。その曲線を z 軸周りに回転させてつくられる曲面 (図??) がシュワルツシルト解の動径方向の尺度と一致するわけだ。図に示すように、 $r = 2m$ で曲面は $z = 0$ となり、そ

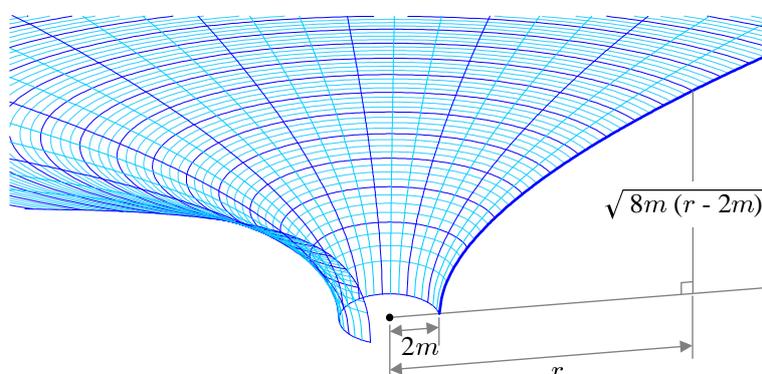


図 4.5: フラムの回転放物面

れより内側の尺度が定義できない。それがシュワルツシルトの半径だ。いうまでもなく、 z は時空の尺度を視覚的に表現するための導入した仮想的な座標軸であり、実際には存在しない。とはいえ、 $r = 2m$ に空いた穴がブラックホールという名称に合致しているように見える。

ブラックホールをフラムの回転棒物面で表現し、その上に光の軌跡を重ね描いてみよう。ブラックホールの近傍を狙った平行な光線を仮定しよう。もっとも内側は、 $r = 5.1m$ を狙い、その外側に $r = 6m, 8m, 10m$ を狙った場合を図 4.6 に描く。狙った位置が $r = 5.1m$ であっても、強力な重力場によって光は重力源に引き込まれ、半周以上もブラックホールを周回した後、ブラックホールに吸い込まれる。実は、狙った位置が $3\sqrt{3}m (\simeq 5.1962m)$ より小さければ、光はブラックホールに吸い込まれることが理論的にわかっている。光が螺旋を描きながら吸い込まれることはニュートン力学では考えられなかったことである。それに対し、他の光線はそれよりも外側を狙っているので、ブラックホールに吸い込まれないが、近くを狙っている光線は大きく軌跡が湾曲するので、ブラックホールの近傍を抜けた後は平行光でなくなっている。

光でさえ脱出不可能な重力場をつくり出すブラックホールは一般相対性理論から得られ

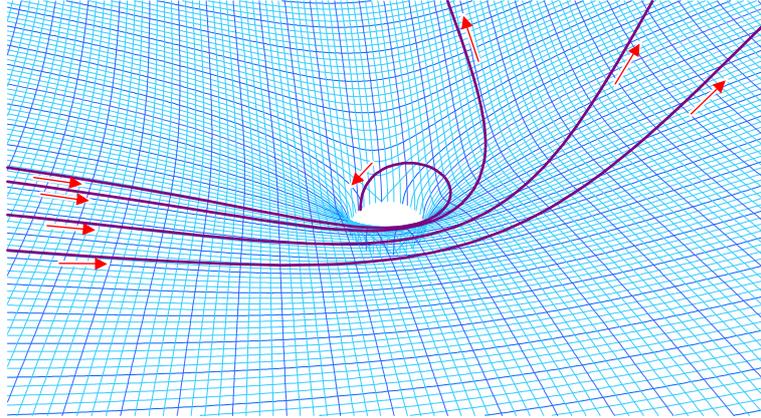


図 4.6: シュワルツシルトのブラックホールと湾曲する光の軌跡

る結果であるため、その性質を調べることは興味深い。次節でシュワルツシルト解におけるブラックホールについて性質を調べよう。

4.7 シュワルツシルトのブラックホール

シュワルツシルト解は、球対称の最も簡単なアインシュタイン方程式の解であるが、光さえも脱出できないブラックホールの存在を意図している。本節では、シュワルツシルトのブラックホールの性質を調べる。

4.7.1 事象の地平面

シュワルツシルト半径 $2m$ はブラックホールの性質を調べる上で、重要な物理量である。シュワルツシルト半径は、後に示すように、情報伝達の境界線となる位置を与える。

これまでに何度か示したが、再度、シュワルツシルト解の線素を書いておく。

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

この線素によると、シュワルツシルト解では光速が動径座標 r によって異なることがわかる。簡単のため、動径方向の光速のみを考えよう。光円錐の説明で述べたように、光の軌跡は必ず $ds = 0$ を満たすため、動径方向の光速は、

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c$$

で与えられる。無限遠 ($r \rightarrow \infty$) では光速が c となるが、シュワルツシルト半径 ($r = 2m$) では光速がゼロとなる。光速が定数でないことは、光速不変の原理に反することなので驚くかもしれない。しかし、光速不変の原理は特殊相対性理論が対象とする物理学の範囲、すなわち、無重力状態でしか成り立たないのである。質点に近づく (r が小さくなる) につれ、光速は小さくなり、 $r = 2m$ のとき光速はゼロになる。このことから、シュワルツシルト半径 $r = 2m$ から発射した光はシュワルツシルト半径の外側に到達することができない。当然、シュワルツシルト半径の内側から発射した光についても同様である。したがって、シュワルツシルト半径、および、その内側で発生した事象は外側に影響を与えることはない。そのため、シュワルツシルト解では、シュワルツシルト半径となる球面は事象の地平面と呼ばれる。

シュワルツシルトのブラックホールの中心から r_A の距離から r_B の距離へ光が伝播するのに要する時間を求めてみよう。ただし、伝播経路は動径方向のみであるとする。ニュートン力学ならば、 $(r_B - r_A)/c$ となるのだが、一般相対性理論では光速が場所によって異なるので結果が変わるはずである。光速の変化を考慮して光の伝播時間を求めると、

$$\begin{aligned} \int_{r=r_A}^{r_B} dt &= \int_{r_A}^{r_B} \frac{dt}{dr} dr = \frac{1}{c} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{1 - 2m/r} \\ &= \frac{r_B - r_A}{c} + \frac{2m}{c} \log \frac{r_B - 2m}{r_A - 2m}, \end{aligned}$$

のようになる。この結果の第2項が相対論的效果である。この計算について補足しておく、この伝播時間は無限遠にいる観測者の時計で計測した結果である。特に、 $r_A = 2m$ のとき、対数関数の被演算項の分母がゼロとなるので伝播時間は無限大となる。さらに、 $r < 2m$ の場合、対数関数の被演算項が負になるため伝播時間を定義できない。これは、上で述べたことと矛盾しない。ブラックホールの近辺なら相対論的效果が大きくなるが、太陽の重力場程度ではその効果はかなり小さい。太陽表面の光が地球に届くまで8分16秒を要するが、そのうち相対論的效果は52.8マイクロ秒に過ぎない。ところで、上の式を見ると $r_B \rightarrow \infty$ の極限で相対論的效果も発散するので、相対論的效果が一般的に小さくはないように見えるかもしれない。ところが、 r_B に宇宙の果てと想定される距離137億光年を仮定し、太陽表面から発射される光の伝播時間を計算すると、相対論的效果は392マイクロ秒にしかならないのである。

4.7.2 接近距離の限界

事象の地平面の内側に入ってしまうと光さえ脱出することができないので、事象の地平面が外側に存在する天体をブラックホールと呼ぶ。シュワルツシルトのブラックホールで

は、半径 $2m$ 以外に面白い半径が存在する。重力レンズの項で光の軌跡が、

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r^2},$$

なる微分方程式で与えられることを述べた。その方程式の左辺第1項をゼロとすると $r = 3m$ が得られる。この結果は、シュワルツシルト半径の1.5倍の半径で光は円運動をすることを意味する。言い換えると、 $r = 3m$ での第1宇宙速度は、その場所での光速¹に等しい。想像するにも奇妙な話であるが、シュワルツシルト半径の1.5倍の位置に立って水平方向に望遠鏡を向けると自分の後ろ頭が見える²ということである。また、容易に予想がつくように、 $r < 3m$ の領域に物体が円軌道を描くことは不可能である。

シュワルツシルトブラックホールは事象の地平面 ($r = 2m$) の内側に入ると光でさえ脱出できないことは前に述べた。ところが、事象の地平面の内側に入らなければ脱出できるという意味ではない。実は、その1.5倍の半径 ($r = 3m$) に入ってしまうと、少なくとも外力を与えなければ脱出できないのである。ある物体が質点の重力場に捕捉されたとしよう。捕捉された物体は質点との距離を縮める。重力場を振り切って質点との距離を離すためには、少なくとも第1宇宙速度を超える速度が必要である。しかし、 $r = 3m$ での第1宇宙速度が光速であるので、その内側に入ると第1宇宙速度が存在しないので質点との距離は縮まるだけになる。したがって、いったんシュワルツシルト半径の1.5倍以内の距離に入った光は無縁遠に逃れることはできないのである。このことをシミュレーションした結

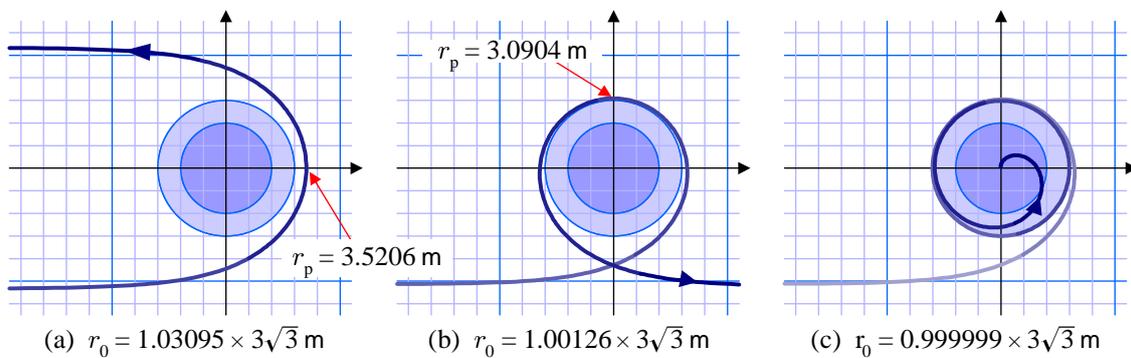


図 4.7: シュワルツシルトのブラックホールの付近を通る光の軌跡

果を図 4.7 に示す。図において、内側の濃い円は事象の地平面の内側を表し、その外側の円はシュワルツシルト半径の1.5倍の内側を表す。図 4.7 (a) は、最接近時の距離がシュワルツシルト半径の1.72倍を示し、その後、無限遠に逃げる光を表している。図 4.7 (b) に示す光は、最接近時の距離がシュワルツシルト半径の1.51倍で、ブラックホールを1周した後無限遠に逃げています。図 4.7 (c) は、再接近時の距離がもう少し小さくなるように設定

¹光速といっても c ではない。重力場では光速は場所によって異なり、 $r = 3m$ での光速は $c/\sqrt{3}$ である。その速度は、ニュートン力学で計算した第1宇宙速度と一致する。

²もっとも、光が円運動するような強い重力場に立ってられるわけがないが。

を変えたのだが、重力場から脱出できず、螺旋軌道を描きながらブラックホール中央に向かって落下する様子がわかる。このようなシミュレーションからも、シュワルツシルト半径の1.5倍に入ると、重力場を振り切ることが不可能であることがわかる。

4.7.3 シュワルツシルト解の半径

ブラックホールのような強い重力場では距離の尺度がミンコフスキー空間とは異なるので、ブラックホール周辺で動径方向に測った距離と半径座標が一致しない。半径座標とは、これまでに記号 r で表現してきた物理量である。我々の日常的な常識では、ブラックホールから測った距離と半径 r は一致するはずであるが、ブラックホール周辺の空間では異なるのである。

シュワルツシルト解における線素に基づき、ブラックホールの動径方向の距離を計算してみよう。その計算のためには、 dr 以外の微小変位をすべてゼロにしたシュワルツシルトの線素:

$$ds = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} dr,$$

を用いればよい。この数式を見てわかるように、半径 r の微小変化と距離が一致しないのである。例えば、シュワルツシルトの半径 $r = 2m$ では、微小距離 ds が無限大になるので、シュワルツシルトの半径では距離が定義できない。距離と半径の関係を調べるため、半径 r_0 から r_1 までの動径方向の距離を計算しよう。その計算は、上に記述した線素を積分すればよいので、

$$\begin{aligned} s_{01} &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - 2m/r}} = 4m \int_{u(r_0)}^{u(r_1)} \frac{du}{(1 - u^2)^2} \\ &= m \int_{u(r_0)}^{u(r_1)} \left[\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{(1 - u)^2} + \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{(1 + u)^2} \right] du \\ &= \left[\frac{2mu}{1 - u^2} + m \log \frac{1 + u}{1 - u} \right]_{u(r_0)}^{u(r_1)} \\ &= \left[r \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} + m \log \frac{1 + \sqrt{1 - 2m/r}}{1 - \sqrt{1 - 2m/r}} \right]_{r_0}^{r_1} \\ &= \left[r \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} + m \log \frac{1}{m} \left[r \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} + 1 \right) - m \right] \right]_{r_0}^{r_1} \\ &= r_1 \sqrt{1 - \frac{2m}{r_1}} - r_0 \sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}} + m \log \frac{r_1 (\sqrt{1 - 2m/r_1} + 1) - m}{r_0 (\sqrt{1 - 2m/r_0} + 1) - m}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

のように実行できる。この計算過程において、第1行目の数式変形は、 $u \equiv \sqrt{1 - 2m/r}$ なる置き換えを適用した。第2行目では、被積分関数を部分分数に展開した。第4行目への数式変形では、対数関数の変数の分母を有理化した。この計算結果によると、始点がシュワルツシルトの半径 ($r_0 = 2m$) であっても、距離 r_{01} は有限の値になる。

得られた距離 s_{01} 数式の性質を調べるため、シュワルツシルトの半径が無視できる程度の遠方 $2m \ll r_0 < r_1$ で (4.9) を近似すると、

$$\begin{aligned} s_{01} &\simeq r_1 - r_0 + m \log \frac{r_1 - m}{r_0 - m} \\ &\simeq r_1 - r_0 + m \log \frac{r_1}{r_0}, \end{aligned}$$

が得られる。第1行目に示した近似式は m/r についての1次近似であり、第2行目はゼロ次近似である。どちらの近似式にしても、第2項が我々の常識における予想値 $r_1 - r_0$ からの誤差を表す。また、測定される距離は、予想値 $r_1 - r_0$ より大きくなる。太陽を例にとると、 $m = 1.476 \text{ km}$ である。太陽の表面 $r_0 = 1.392 \times 10^6 \text{ km}$ から地球の公転軌道 $r_1 = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$ とすると、半径と距離の誤差は 6.90 km となる。さらに、海王星の公転軌道 $r_1 = 4.495 \times 10^9 \text{ km}$ とすれば誤差は 11.9 km 、宇宙の年齢 137 年 から予想される宇宙の果て $r_1 = 137 \text{ 億光年}$ を設定した場合の誤差は 53.0 km となる。始点がシュワルツシルトの半径と比較できる場合、誤差はさらに大きくなる。

上で説明したように、半径 r と動径方向に測定した距離が異なるので、ブラックホールにおける半径座標は動径方向の距離で定義できない。一方、シュワルツシルト解において、方位角 $d\varphi$ 以外をゼロとした場合の線素は $ds = r d\varphi$ となる。その線素を φ の定義域 $[0, 2\pi)$ にわたって積分すると、 $s = 2\pi r$ が得られる。この結果は、我々の日常的な常識と合致する。この結果を踏まえ、次のように半径座標 r を定義するのがよいだろう。

半径座標 r は、シュワルツシルト解で表現される時空において、ブラックホールの中心を含む平面上で、重力が等しい閉曲線を1周する行程の長さに $1/2\pi$ を乗じた値である。

4.7.4 座標系と特異点

前節で示したシュワルツシルト解の線素によると、シュワルツシルト半径 $r = 2m$ において計量テンソルの成分 g_{11} が発散することがわかった。しかし、その発散はシュワルツシルト解で必然的に発生するのではなく、座標軸の選び方に起因するのである。例を挙げながら、そのことを示してみよう。

まず、動径方向の座標 r の代わりに、 $r \equiv \rho(1 - m/2\rho)^2$ で定義される座標 ρ を使ってみる。ほかの座標、 ct, θ, φ はそのまま引き続き使用する。座標 x^μ と座標 x'^μ の間の変換に対し、計量テンソルが、

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta},$$

のように変換されるので、座標系 $[ct, \rho, \theta, \varphi]$ における線素は、

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - m/2\rho}{1 + m/2\rho} \right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (4.10)$$

のように書くことができる。この新しい座標系でのシュワルツシルト半径は $\rho = m/2$ である。つまり、この座標を用いると、シュワルツシルト半径で計量テンソルが発散しないのである。とはいえ、この座標系ではシュワルツシルト半径 $\rho = m/2$ より内側を表現できない。しかも、シュワルツシルト半径で光速の動径方向成分がゼロになることも、前に示した座標系と同様である。

シュワルツシルト半径で光速の動径方向成分がゼロになるということは、重力場を落下する物体は決してシュワルツシルト半径の内側に入れられないということである。しかし、その座標系は無限遠の観測者の座標に基づいている。測地線に沿って落下する別の観測者から見たときにシュワルツシルト半径を超えて内側に入れられないかを検証してみよう。測地線は、

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

なる方程式によって記述される。数式中の τ は測地線の長さ s の 1 次関数で定義される量なら何でもよい。通常は、 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ によって定義される固有時間を用いる。測地線の方程式のうち、第 0 成分に注目して測地線の方程式を書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + 2\Gamma^0_{01} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + g^{00} \frac{dg_{00}}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0, \end{aligned}$$

のようになる。この式の右辺に g_{00} を乗じると、

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \right) = 0,$$

が得られる。この結果から、 $g_{00} dx^0/d\tau = \text{const}$ であることが推測できる。そこで、 $g_{00} dx^0/d\tau = \alpha c$ とおき、動径方向の運動のみに限定する意味で $d\Omega = 0$ とすると、シュワルツシルト解の線素は、

$$-c^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) = -\alpha^2 c^2 + \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2,$$

のように変形できるので,

$$dr = -c \sqrt{\alpha^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} d\tau,$$

なる微分方程式が得られる。ここで, ブラックホールに落下する場合を考え, dr の符号は負とした。ところで, 定数 α は落下する物体の初期状態を示すパラメータである。例えば, 距離 R_0 に存在するときの速度がゼロであるという初期状態を仮定すれば, $\alpha^2 = 1 - 2m/R_0$ となる。その場合, 半径 r_0 からブラックホールの中心 ($r = 0$) に落下するまでの時間は,

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{r=r_0}^{r=0} d\tau = -\frac{1}{c} \int_{r_0}^0 \left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{R_0}\right)^{-1/2} dr \\ &< \frac{1}{c\sqrt{2m}} \int_0^{r_0} \sqrt{r} dr = \frac{2r_0^{3/2}}{3c\sqrt{2m}}, \end{aligned}$$

なる不等式が成立するため τ が有限の値となる。なお, ここでは $r_0 < R_0$ とした。よって, 落下する本人の時計では有限時間でシュワルツシルト半径を超え, ブラックホールの中心まで落下するのである。

ブラックホールに落下する観測者の時計では有限時間でブラックホールの中心に到達することから, 座標系を選べば $r = 2m$ での特異性を避け, シュワルツシルト半径を通過する軌跡を表現できる座標系があるはずである。導出過程を省略するが, その座標系の例としてクルスカール座標 $[T, R]$ がある。クルスカール座標の線素は,

$$ds^2 = -\frac{32m^2}{r} e^{-r/2m} (dT^2 - dR^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (4.11)$$

で与えられる。座標軸のうち, T 軸と R 軸のみについて座標系を描くと, 図 4.8 に示すクルスカール図が得られる。特に光の軌跡は $ds = 0$ となるので, クルスカール図では, 外向きの光が傾きが 1, 内向きの光は傾きが -1 の直線となる。図 4.8 には, ± 45 度の角度で開く光円錐を描いておいた。光は光円錐の表面を運動し, 質量をもつ一般の物体は光円錐の内部を運動する。

クルスカール座標系 $[T, R]$ では, 等半径 ($r = \text{定数}$) の条件は双曲線となり, 等時刻 ($ct = \text{定数}$) の条件は原点を通る直線となる。その事実は, クルスカール座標系を形成するための座標変換:

$$T^2 - R^2 = -\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{r/2m}, \quad \frac{2TR}{T^2 + R^2} = \tanh \frac{ct}{2m},$$

によって示されている。座標変換の第 1 式が $[T, R]$ における双曲線を表し, 第 2 式が原点を通る直線を表しているのだ。図 4.8 には, 等半径と等時間の曲線も図示しておいた。なお, ブラックホールの議論をする場合, 原点より上 ($T \geq 0$) に注目する。この図からブラックホールの面白い性質がわかる。まず, シュワルツシルト半径の外側 ($r > 2m$) では, 外向きの光は無遠くまで逃げるのが可能である。質量がある一般の物体は, 光円錐の内部を運

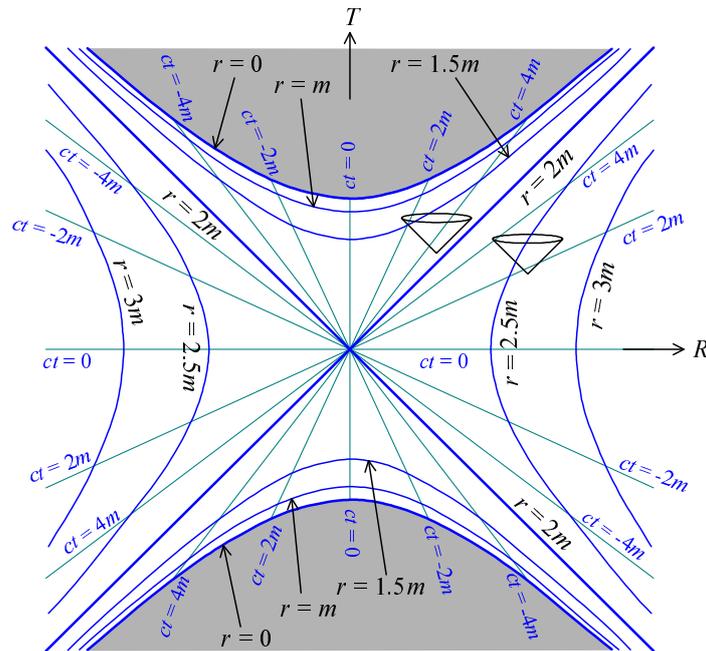


図 4.8: シュワルツシルト解のクルスカル図

動するため、速度によってブラックホールの重力場から脱出できるかの運命が分かれる。また、運動軌跡をたどっていくと、必ず、 ct が増加することがわかる。それは、時間が一方通行であることを意味している。

内向きの光や速度の遅い物体はブラックホールの重力場から脱出できず、シュワルツシルトの内側 ($r < 2m$) に入り込む。シュワルツシルトの内側では時空の性質が外側とはまったく異なる。いったん $r < 2m$ の領域に入ってしまうと、外向きの光でさえ、シュワルツシルトの半径の外側へ逃げることはできない。それどころか、 r を増加させることができず、強制的にブラックホールの中心 ($r = 0$) に到達してしまう。つまり、 $r < 2m$ の領域では動径座標が一方通行となる。逆に、奇妙なことであるが、 ct が一方通行ではなくなる。運動方向が光円錐の内部に制限されたとしても、 ct が減少する方向への運動が可能なのだ。シュワルツシルトの半径の内側では、座標 ct の方向を自由に選べ、 r が一方通行ということなのだ。言い換えると、シュワルツシルト半径の内側では、動径座標と時間の立場が入れ替わっている。ブラックホールの中心に到達するまでの間なら、ある程度、時間をさかのぼることも可能ということだ。とは言っても、シュワルツシルト半径の外側へ戻れないので、過去に遡ったところで、過去の自分や歴史上の人物に会えるわけではない。あくまでも、ブラックホールの内部という限られた世界における時間移動に過ぎないので、ブラックホールがタイムマシンになるわけではない。

一方、クルスカル図の下半分 ($T < 0$) は、シュワルツシルト半径の内側に物体や光がとどまることができず、必ず、外側に放出される世界を表している。これをホワイトホール

解と呼ぶ。ここでは、ホワイトホールは単なる数学上の解として存在するというだけでどめておき、物理的な意味については言及しないことにする。

4.8 重力赤方偏移

相対性理論によると、重力場は光の軌跡さえ曲げてしまう。シュワルツシルト半径の内側に入った光は、重力を振り切ることができずに重力場に飲み込まれてしまう。シュワルツシルト半径の内側に入らずとも、光は重力場を脱出する際に、エネルギーを失うことだろう。光量子仮説によって、角周波数 ω の光は $\hbar\omega$ のエネルギーをもつことが知られているので、エネルギーを失った光は周波数が低下する。このような現象は重力赤方偏移と呼ばれる。

シュワルツシルト解の動径座標 r_A の点 A から座標 r_B の点 B に、動径軸方向に放射した光の赤方偏移を計算してみよう。点 A の固有時間で τ_A に放射された光が、点 B の固有時間で τ_B に受信されたとしよう。赤方偏移による周波数変化は、 $\omega_B = (d\tau_A/d\tau_B)\omega_A$ で計算できる。この式の意味は、次のように考えると理解できる。点 A から固有時間に従って一定周期 (例えば 1 秒間隔で) 光が送信されている。点 B ではその光を受信した回数を数えているとする。点 B が単位時間で光を受信する回数は $d\tau_A/d\tau_B$ で表される。例えば、この微係数が 0.6 だとすると、点 A で 1 秒間隔で送信されている光が点 B では 1 秒間に 0.6 回しか受信されないことになる。言い換えると、1 Hz の周波数で送信された光が 0.6 Hz で受信されることを意味している。このように微係数 $d\tau_A/d\tau_B$ が 1 より小さければ赤方偏移していることになる。

まず、無限遠の観測者の時計で時刻 t_A に点 A から光が送信されたとする。この光を点 B で受信される時刻を t_B とすると、

$$t_B = t_A + \frac{r_B - r_A}{c} + \frac{2m}{c} \log \frac{r_B - 2m}{r_A - 2m},$$

となる。右辺の第 2 項と第 3 項は時刻 t_A と t_B に無関係な定数であるので、この数式を微分すると $dt_A = dt_B$ となる。時刻 t_A と t_B は無限遠の観測者の時計で計測した時刻であるので、固有時間 τ_A, τ_B との関係は、

$$d\tau_A = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_A}} dt_A, \quad d\tau_B = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_B}} dt_B,$$

となる。ただし、点 A と点 B は重力場中に静止しているものとした。この関係式より、

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - 2m/r_A}{1 - 2m/r_B}},$$

が得られる。したがって,

$$\omega_B = \sqrt{\frac{1 - 2m/r_A}{1 - 2m/r_B}} \omega_A,$$

が導かれるので, 遠方で受信される光の周波数は, 必ず, 送信時の周波数より低くなっている。つまり, 赤方偏移が起きているということである。

例えば, 太陽表面から発信される光は, 無限遠で受信した時点で, 2.12×10^{-6} 倍に相当する周波数だけ周波数低下 (赤方偏移) することになる。かなり微小であるが, 確かに赤方偏移することが示された。赤方偏移の周波数変化は白色矮星のような高密度の天体のほうが大きく, シリウス B 星では 1.41×10^{-4} 倍程度の周波数だけ赤方偏移する。太陽表面の光の赤方偏移は 0.635 km/s のドップラ効果に, シリウス B 星表面の光の赤方偏移は 42.3 km/s のドップラ効果と等しい周波数偏移を起こしている。

4.9 重力場の時計の遅れ

重力場で時計が遅れる現象は 1971 年に, ハイフリー (Hafele) とキーティング (Keating) によって検証された。ハイフリーとキーティングは, 原子時計を地上と航空機に設置し, 航空機で東回りに地球を一周した後, 西回りに地球を一周し, 地球と航空機の原子時計の読みを比較して, 重力場における時間の遅れを検証した。航空機の航路から計算では, 東回りの飛行機は地上より $40 \pm 23 \text{ ns}$ 遅れ, 西回りでは $275 \pm 21 \text{ ns}$ 進むことが予想された。実験の結果, 東回りは $59 \pm 10 \text{ ns}$ 遅れ, 西回りは $273 \pm 7 \text{ ns}$ 進んでいた。つまり, 誤差の範囲内で重力場の時計の遅れが実証されたのである。

シュワルツシルト解を用い, ハイフリーとキーティングの実験を検証してみよう。ただし, 実際の航路でなく, 単純なモデルを用いるので上で紹介した実際の実験結果とは一致しないことは最初に述べておく。航空機の巡航高度を 9000 m , 巡航速度を 250 m/s としよう。航空機は赤道上空を飛行するものとする。

検証するには, 航路上の航空機の線素を設定することから始める。赤道上空を飛行する航空機の線素は,

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{R+h}\right) c^2 dt^2 + (R+h)^2 d\varphi^2,$$

となる。ここで, R は地球の赤道半径 (6378.14 km), h は巡航高度である。また, 地球のシュワルツシルト半径は 8.86 mm である。さらに, 上空を飛行する速度を v とすれば, $(R+h) d\varphi = v dt$ なる関係があるので,

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2m}{R+h} - \frac{(v_e + v)^2}{c^2}} dt \approx \left(1 - \frac{m}{R+h} - \frac{(v_e + v)^2}{2c^2}\right) dt,$$

が得られる。ただし、 v_e は赤道上での自転速度 (465.1 m/s) である。赤道上に固定した固有時間を τ_R とおくと、その固定された固有時間と航空機の固有時間の差は、

$$d\tau - d\tau_R = \left(\frac{mh}{R^2} - \frac{(2v_e + v)v}{2c^2} \right) dt,$$

となる。このうち、右辺の第1項が重力場による変化、第2項が運動による変化を表す。この実験で検出される時間の差を説明すると次のようになる。まず、上空は地表より重力が弱いため、上空の時計は地表より早い。東向き航路の場合、地球の自転速度に航空機の色度が加算され、時計が遅れる。西向き航路の場合、地球の自転速度から航空機の色度が減算されるため時計の遅れが小さい。よって、ほぼ44時間にわたる航行の末、表4.1に示す時計のずれが観測される。この表に記載する数値は、正の数が地表の時計より進んでいることを意味する。

表 4.1: 地球から見た時計の読み

飛行方向	重力場の影響 [ns]	運動の影響 [ns]	合計 [ns]
東回り	174.9	-263.5	-88.6
西回り	174.9	151.9	326.8

この現象を不思議に感じないだろうか。東回りの航空機も西回りの航空機も、地上の観測者から見ると250 m/sで赤道上を運動している。それにも関わらず、東回りと西回りの時計の読みは異なっている。特殊相対性理論によれば、東回りと西回りとは時計の読みに差が現れないはずである。時計の読みに差が現れたのは、東回りと西回りの航空機では物理的に差異があるからである。その差異とは重力である。東回りの航空機は、地球の自転速度が加算され、実際には715 m/sで赤道上空を飛行し、西回りの航空機は時点速度から巡航速度を減じた215 m/sで赤道上を飛行していることになる。航空機と、地上に静止する者には、その周回運動のため、遠心力が作用しているのだが、周回速度が違っている所以他们に作用する遠心力が異なる。その結果、地球から作用する重力と遠心力の合力が異なるのである。合力による重力加速度は、地上では9.755 m/s²、東回りの航空機では9.678 m/s²、西回りの航空機では9.751 m/s²となる。この数値を見るとはっきりわかるが、東回りと西回りの航空機が同じ物理環境であったとは言えない。これが、東回りと西回りとで時計の読みが異なる理由である。

第5章 加速度系から見た運動II

第2章では、加速度運動をする系を静止系から観測した場合について議論した。その場合、観測者が慣性系に存在するため、特殊相対性理論で現象を説明することができた。それに対して、加速度運動する観測者から見た時空を記述するには特殊相対性理論だけではいささか困難である。なぜなら、加速する観測者は慣性力という見かけの力を感じるため、静止系と相対的だとは言えないからである。等価原理によると、加速時に感じる慣性力は重力と等価であるので、加速度運動する観測者から見た時空を記述するには一般相対性理論を導入する。また、第3章で特殊相対性理論によって加速度運動する観測者から見た時空の記述を試みていた。本章では、第3章で導出された現象が一般相対性理論から導かれる現象と比較する。

5.1 加速度場の4次元計量

一般相対性理論の処方にしたがい、加速度運動する観測者から見た時空を記述しよう。なお、簡単のため、加速度運動する観測者から見た時空を加速度場と呼ぶことにしよう。加速度場を含め、重力場は曲がった時空であるというのが一般相対性理論の主張である。曲がった時空を表現するには、時空の線素を定義すべきだ。時空の線素とは、微小な座標変化 $[c dt, dx, dy, dz]$ に対応する微小長さである。先に結果を示しておく、 x 軸方向の加速度 a による加速度場は、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2 dt^2, \quad (5.1)$$

なる線素で規定される。これは、加速度運動する観測者が座標原点にいる条件で導かれた線素である。これが本節で導出する結果であるので、この数式の導出過程に関心がない読者は、これ以降の本節の内容は読み飛ばしてもよい。

リーマン幾何学によると、曲がった時空の解析には、微小距離、すなわち、線素を定式化するのが定石である。第4章で説明したように、曲がった時空の線素は、一般形式として、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.2)$$

のように記述される。この数式において、右肩の添え字 μ や ν は指数ではなく、座標の成分を表すことは第4章で説明したとおりである。つまり、 dx^μ は x^μ 方向の微小変位という意味である。一方、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルである。また、この数式にはアインシュタインの総和の規約が適用されている。

重力場を記述するには、4次元の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を決定することが必要である。リーマン幾何学によれば、計量テンソルから空間を規定する様々な性質が導き出されることになる。つまり、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ には時空の性質を記述するための情報が含まれている。

加速度場を数学的に記述するにあたり、加速度場の観測者が慣性力を感じる方向（つまり、加速度の方向）を x 軸方向に制限しよう。座標系としては、カルテシアン座標系 $[x, y, z]$ を用いることとする。その座標系に時間座標を加え、4次元時空の座標として、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ なる対応付けをしよう。加速度が存在しなければ、時空は特殊相対性理論が適用できるミンコフスキー時空となり、線素が、

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

となるはずである。この時空では、計量テンソルのゼロでない成分は、 $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ のみである。すなわち、計量テンソルの対角成分以外はすべてゼロである。この系が x 軸方向に加速度をもったとしても、ミンコフスキー時空のように、計量テンソルの対角成分以外がゼロとなると考えるのが自然である。しかしながら、加速度によって生じる慣性力の影響で、計量テンソルの対角成分の値はミンコフスキー時空とは異なる値となっているはずである。したがって、加速度場の計量は、

$$ds^2 = -D(dx^0)^2 + A(dx^1)^2 + B(dx^2)^2 + B(dx^3)^2, \quad (5.3)$$

であると考えるのが妥当である。この計量に関して、 $g_{22} = g_{33} = B$ とした。それは、座標軸の中で、加速度方向である x 軸方向だけが特別な方向でなので、計量は x 軸に関して軸対称と考えるのが自然だからである。よって、 $g_{22} = g_{33} = B$ としたのである。さらに、 y 軸と z 軸は慣性力と直交するため、 B は定数である。一方、 A と D については、 x に依存すると考えられる。定常的な加速度場（等加速度場）を考えるのであれば、計量は t に依存しないはずである。また、 y や z に依存することも不自然である。

上で述べた仮定のもとで、まず、クリストッフェル記号 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ を計算する。クリストッフェル記号は、幾何学的には、微小変位に対する基本ベクトル¹の変化率であり、空間の湾曲を表現する量である。具体的に、クリストッフェル記号は、

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right),$$

¹各座標軸方向と尺度を規定するベクトル。

で定義される。そのうち、ゼロでない成分だけを記述すると以下ようになる。

$$\Gamma^1_{00} = \Gamma^0_{01} = \frac{D_{,1}}{2D}, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{11} = \frac{A_{,1}}{2A}, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{D_{,1}}{2A},$$

ここで、カンマ付きの下付き添え字は座標についての偏微分、すなわち、 $f_{,\mu} = \partial f / \partial x^\mu$ を意味する。さらに、クリストッフエル記号を用いてリッチテンソル：

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\sigma}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} \Gamma^\kappa_{\sigma\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\kappa} \Gamma^\kappa_{\nu\sigma},$$

を計算しておこう。リッチテンソルは、幾何学的には空間の湾曲による体積歪みを表す量である。ディングルの公式を参照して、ゼロでない成分だけを書くと、

$$R_{00} = \frac{D_{,11}}{2A} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{2A^2} - \frac{(D_{,1})^2}{4AD} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{4A^2},$$

$$R_{11} = -\frac{D_{,11}}{2D} + \frac{(D_{,1})^2}{2D^2} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{4AD} - \frac{(D_{,1})^2}{4D^2},$$

のみが挙げられる。ゼロでないリッチテンソルの成分が二つだけであり、しかも、これらの数式のように記述できるのは、計量テンソルが x にしか依存しない対角成分のみであると制限したからである。リッチテンソルの定義は、一般的には複雑であるので、本節のような制限がなければ非常に複雑な数式になるはずだ。

準備が整ったので、加速度場における計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を求めよう。計量テンソルを得るためには、重力場の基本方程式であるアインシュタインの方程式を解く。重力場の方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

である。ここで、 R はリッチテンソルのトレースで、 $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ なる数式²によって定義される。なお、 $g^{\mu\nu}$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。さらに、 G は万有引力定数 ($\approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$)、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。この方程式の左辺 $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ は、アインシュタインテンソルとよばれる。アインシュタインテンソルの要素のうち、ゼロではないものは、

$$G_{00} = \frac{D_{,11}}{A} - \frac{(D_{,1})^2}{2AD} - \frac{5A_{,1}D_{,1}}{4A^2},$$

$$G_{11} = -\frac{A_{,1}D_{,1}}{AD},$$

$$G_{22} = G_{33} = B \left(\frac{D_{,11}}{2AD} - \frac{(D_{,1})^2}{4AD^2} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{2A^2D} \right),$$

²正確には $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\nu_\nu$ と書けるので、スカラー R は行列 R^ν_ν の対角成分の総和である。だから、 R はリッチテンソルのトレースである。

である。ところで、真空ではエネルギー運動量テンソルがゼロとなるので、(5.4)の右辺はゼロになる。すなわち、 $G_{\mu\nu} = 0$ を解けばよい。アインシュタインテンソルのうち、独立な成分は、

$$\frac{D_{,11}}{A} - \frac{(D_{,1})^2}{2AD} - \frac{5A_{,1}D_{,1}}{4A^2} = 0, \quad (5.5a)$$

$$\frac{A_{,1}D_{,1}}{AD} = 0, \quad (5.5b)$$

の二つだけである。まず、(5.5b)を(5.5a)に代入すると、

$$D_{,11} - \frac{(D_{,1})^2}{2D} = 0,$$

が得られる。この微分方程式は簡単に解くことができ、

$$D = (C_0 + C_1x)^2,$$

であることがわかる。ここで、 C_0 と C_1 は積分定数である。積分定数を決定するため、よく知られた非相対論的近似の性質に着目する。第4章で示したように、非相対論的な重力場のポテンシャルを ϕ とすると、弱い重力場では計量テンソルに関して、

$$g_{00} \simeq - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right),$$

なる近似式が成立する。さて、 x 軸方向に加速度 a をもつ観測者は、 x 軸方向に $-a$ の慣性力を感じる。アインシュタインの等価原理によれば、その状態は重力加速度が a である一様な重力場と同一であるので、非相対論的なポテンシャルは $\phi = ax$ となるはずである。よって、 $c \rightarrow \infty$ としたときに、 $g_{00} = -D \simeq -(1 + 2ax/c^2)$ となるためには、

$$D = \left(1 + \frac{a}{c^2}x \right)^2, \quad (5.6)$$

でなければならない。さらに、(5.5b)より、 A は定数になることがわかる。加速度運動をする観測者がこの時空の原点にいるものと仮定し、原点付近ではミンコフスキー空間の計量に近似できることを期待すれば、 $A = B = 1$ となる。したがって、この時空の計量を改めて書くと

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x \right)^2 c^2 dt^2,$$

が導き出された。ただし、既に述べたように $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とした。線素 ds が加速度 a で運動する観測者から見た時空の計量を与えるのだ。加速を継続する限り、静止系からみた観測者の速度が時間の経過とともに大きくなるので、その観測者は前方にいた物体にいずれ追いつき、追い越すことになるだろう。その様子は、加速度運動する観測者の立場で、重力場を落下するように見えるのだ。

5.2 加速度場の自由粒子

等加速度運動している観測者が自由粒子を観測したとき、ニュートン力学によると、その自由粒子は放物線運動をしている。一般相対性理論では、加速度運動する観測者から見た自由粒子は、加速度による重力場を自由落下する運動、すなわち、重力場の時空における測地線上の運動として記述できる。その軌跡を求める数式を導出しよう。

5.2.1 加速度場の運動方程式

重力場を自由落下する物体の運動は、リーマン幾何学における測地線の方程式によって記述される。加速度場は、重力場の一例であるので、加速度場における物体の運動は測地線の方程式によって記述されなければならない。つまり、物体の座標を x^μ とするならば、測地線の方程式:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (5.7)$$

は、加速度場における自由粒子の運動を決める運動方程式である。この運動方程式は、湾曲した時空の2点を結ぶ最短経路を得るための条件を変分原理によって求められた方程式である。イメージとして、東京とニューヨークを結ぶ最短航路がメルカトル図法で描くと湾曲していることを想像すればよいだろう。また、測地線の方程式の第1項は、座標を固有時間 τ の2階微分となっている。この方程式は、ニュートン力学における $d^2\mathbf{x}/dt^2 = 0$ に相当する方程式である。

一般的な運動方程式 (5.7) は、複雑な形状をしているが、本章で取り扱う加速度場では、単純な形で運動方程式が記述できる。運動方程式を解くにあたり、クリストッフエル記号 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ を計算すると、

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2} x\right)^{-1}, \quad (5.8)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2} x\right), \quad (5.9)$$

のみがゼロでない成分であることがわかる。一般的なクリストッフエル記号が20個もの独立成分を含むことを考えると、等加速度運動における時空は、運動方程式が大きく簡略化できることを意味する。この計算結果を (5.7) に代入すると、加速度場での運動方程式:

$$\frac{d^2 ct}{d\tau^2} + \frac{2a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2} x\right)^{-1} \frac{dx}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} = 0, \quad (5.10a)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2} x\right) \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (5.10b)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \quad (5.10c)$$

を得る。ここで、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とした。得られた運動方程式は、それぞれ、時間、加速度の方向、それとは垂直な空間座標についての方程式である。

得られた三つの運動方程式を解けば自由粒子の運動が決定できる。特に、(5.10c)は加速度の方向とは無関係な方向における成分であり、せいぜい、 τ の1次関数であることが容易に予想できる。その1次関数は初期状態における自由粒子の相対速度を規定すれば一意的に決定できるはずだ。加速度に関係するのは、(5.10a)と(5.10b)である。そのうち、(5.10a)は τ について積分すると、

$$\frac{dct}{d\tau} = cA \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-2}, \quad (5.11)$$

なる形態に書き換えられる。得られた方程式(5.11)を(5.10b)に代入すれば x が決定できるはずだ。なお、(5.11)に記述した積分定数 A は、後に示すように運動解析における初期条件を表すことになる。

5.2.2 光の軌跡

前項で一様加速度場における自由粒子の軌跡を計算するための関係式を導出した。それでは一様加速度場では光はどのような軌跡を描くのだろうか。加速度場で光の軌跡が湾曲することは第4.1節で、エレベータの思考実験によって示した。本節では、湾曲する光の軌跡が具体的にどのような曲線を描くのかを調べてみよう。

光の世界線は、特殊相対性理論における光円錐の表面に位置するので、その計量は $ds^2 = 0$ となる。これを(5.1)に代入すると、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2, \quad (5.12)$$

を得る。この式によって加速度場では光速不変の原理が成立しない。等加速度運動をする観測者が測定する光速度は場所によって異なるのである。計測される光速度が x に依存することから、この光速度を $c(x)$ と記述すると、

$$c(x) = \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right) c, \quad (5.13)$$

となる。この結果は、第3.4節で特殊相対性理論から導いた結果と一致している。特に、 $x = -c^2/a$ で光速がゼロになっている。これはブラックホール理論における事象の地平面の性質に類似している。すなわち、この観測者は加速度 a で運動する限り、 $x \leq -c^2/a$ で発生する事象を観測できない。これは、 $x = -c^2/a$ を出発した光が加速度 a をもつ物体に追いつくことができないという第2.4節での特殊相対性理論による計算と合致する。

加速度運動する観測者から見た光の軌跡について考えてみよう。ただし、簡単のため、光の運動を xy 平面上に限るものとする。すなわち、 $dz/d\tau = 0$ と仮定するわけだが、当然、この制限は (5.10c) に反するものではない。加速度場の計量 (5.1) に (5.11) を代入すると、

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = c^2 A^2 \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-2}, \quad (5.14)$$

を得る。さらに、(5.10c) より $dy/d\tau = cB$ となる (B は定数)。これを利用すると上式は、

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left[\left(\frac{c^2 A}{a B}\right)^2 - \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2\right] \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^{-2}, \quad (5.15)$$

のように変形できる。この式を満たす x と y の間には、

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{c^2 A}{a B}\right)^2, \quad (5.16)$$

という関係が成立する。ここで、 y_0 は積分定数である。この結果より、等加速度運動をする観測者から見た光は円運動をする。第 4.1 節で紹介したエレベータの思考実験で、エレ

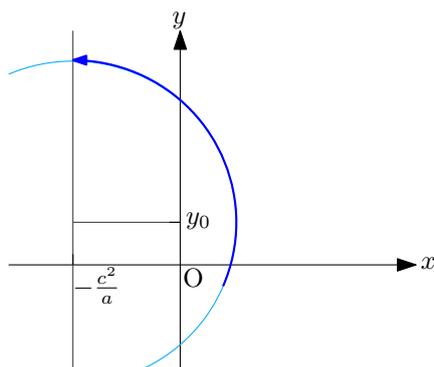


図 5.1: 加速度系から見た光の軌跡

ベータに入ってきた光は放物線を描くと予想するかもしれないが、それは、非相対論近似である。方程式 (5.16) について、 $c \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$1 + \frac{2ax}{c^2} = \frac{A^2}{B^2} - \frac{a^2}{c^4}(y - y_0)^2,$$

が得られる。初期状態として、光の速度ベクトルが y 成分しかもっていないと仮定すると $B = 1$ であり、また、観測者の位置 $x = 0$ において光速が c であることを要請すると $A = 1$ である。その条件を代入すると、非相対論近似で、

$$x = -\frac{a}{2c^2}(y - y_0)^2,$$

なる放物線に近似される。この放物線は、 $y = ct$ と $x = -at^2/2$ によって描かれると考えられると、等加速度による重力場で光が描く円軌道は、非相対論近似で予想される放物線と一致することがわかる。

5.2.3 質量のある粒子の軌跡

ニュートン力学では、等加速度運動をする観測者が自由粒子を見ると、その軌跡は放物線を描く。しかし、等加速度による重力場では光が円軌道を描くことがわかったので、質量のある自由粒子も放物線ではないと予想される。では、どのような軌跡を描くだろうか？円が楕円の特別な形態であることを考えると、一般的な自由粒子は楕円軌道を描くのではないかと推測できる。本節では、その推測どおりに自由粒子の軌跡が楕円を描くことを検証する。

質量のある粒子の場合、4次元計量 ds はゼロではない。それでは、質量のある粒子の軌跡はどのようになるのか求めてみよう。測地線の方程式 (5.7) に現れるアフィンパラメータ τ に関して、 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ なる関係が成立する場合を仮定する。そうすれば、4次元計量は、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2 dt^2, \quad (5.1)$$

と書くことができる。このような仮定のもとでは、パラメータ τ は粒子とともに運動する時計の尺度をあらわす性質があるので、 τ は固有時間とよばれる。

ここでも、 $dz/d\tau = 0$ の制限のもとで、光の軌跡と同様の式変形を適用してみる。導出過程はまったく同じなので、結果だけ示すと、

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1+B^2}{B^2} \left[\frac{c^4 A^2}{a^2(1+B^2)} - \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 \right] \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^{-2}, \quad (5.18)$$

なる微分方程式が導出される。この微分方程式を満たす x と y は、

$$\frac{a^2(1+B^2)}{c^4 A^2} \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \frac{a^2(1+B^2)^2}{c^4 A^2 B^2} (y - y_0)^2 = 1, \quad (5.19)$$

の関係がある。すなわち、等加速度運動をする観測者から見た質点の軌跡は楕円を描く。つまり、本節冒頭での推測が正しいことが確認できたわけだ。

導出した楕円軌道は、 $c \rightarrow \infty$ の極限ではニュートン力学における放物線に近似できるはずである。疑り深い読者のために検証してみよう。導出した楕円 (5.19) は $c \rightarrow \infty$ の極限で、

$$x - \frac{c^2}{2a}(A^2 - B^2 - 1) + \frac{a(1+B^2)^2}{2c^2 B^2} (y - y_0)^2 = 0, \quad (5.20)$$

なる式に近似できる。この時点で軌跡は放物線に近似できているが、定数 A と B を決定したときにニュートン力学で記述される放物線の方程式と一致することを検証すればよい。前節で定義した A と B は、

$$A = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 \frac{dct}{d\tau}, \quad B = \frac{1}{c} \frac{dy}{d\tau},$$

と表される。この定義より、定数 A と B の間には、

$$B = \frac{A}{c(1 - ax_0/c^2)^2} \frac{dy}{dt},$$

なる関係があることがわかる。ここで、初期条件として、観測対象の自由粒子は $x = x_0$ のとき y 方向にのみ速度をもち、その速度が、

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x_0} = \left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right) v_y,$$

であるとする。なんとなく奇妙な初期条件の設定のように見えるが、これはニュートン力学において自由粒子の速度の y 成分が v_y であることを仮定しているのと同じである。この条件のもと、 A と B の関係は、

$$B = \frac{v_y A}{c(1 - ax_0/c^2)},$$

と書き換えられる。さらに、定数 A を決定するには、 $dct/d\tau$ が必要となる。その導関数については、時空の計量:

$$-d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 dt^2,$$

に対して、自由粒子が $x = x_0$ において y 方向のみに v_y の速度をもつという初期条件を適用すると、

$$\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = c \left[\left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]^{-1} = \frac{1}{(1 - ax_0/c^2)^2 (1 - v_y^2/c^2)},$$

となるので、定数 A に関して、

$$A^2 = \frac{(1 - ax_0/c^2)^2}{1 - v_y^2/c^2},$$

が成り立つ。そこで、(5.20) を具体的に書き下すために必要なパラメータを $c \rightarrow \infty$ の極限のもとで計算すると、

$$A^2 - B^2 - 1 = \frac{2a}{c^2}x_0, \quad \frac{(1 + B^2)^2}{c^2 B^2} = \frac{1}{v_y^2},$$

が得られる。なお、この計算において $o(c^{-2})$ に該当する小さな項は無視している。この結果を (5.20) に代入すると、

$$x - x_0 + \frac{a}{2v_y^2}(y - y_0)^2 = 0,$$

が得られる。つまり、等加速度による重力場を落下する自由粒子の軌跡は (5.19) のような楕円軌道となるが、 $c \rightarrow \infty$ なる非相対論的な近似が成立する条件であれば、ニュートン力学によって計算される放物線と一致する。したがって、光速と比較できる程度までの加速を考慮し、等加速度で運動する観測者から見た自由粒子は、もはや非相対論近似の範囲なく、楕円を描く運動軌跡をたどるのだ。

5.3 加速度場における1次元運動

既に述べたように、慣性系から見て等速度で運動する質点は、加速度場では自由落下するように見える。本節では、加速度場を自由落下する運動を時間の関数で表してみる。ただし、簡単のため、質点の運動を x 軸方向のみに制限する。計量 (5.1) に (5.11) を代入すると、

$$\frac{dx}{dt} = c \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right) \sqrt{1 - \frac{1}{A^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2}, \quad (5.21)$$

を得る。この微分方程式を解くと、加速度場を自由落下する質点の変位:

$$x = \left(\tilde{x}_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech} \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0) - \frac{c^2}{a}, \quad (5.22)$$

を得る。ここで、 \tilde{t}_0 は初期条件を与える積分定数である。また、定数 A については、 $Ac^2/a = \tilde{x}_0 + c^2/a$ という置き換えをした。この式を t について微分すると、自由落下する質点の速度:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{c} \left(\tilde{x}_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech} \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0) \tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.23)$$

を得る。この時点で積分定数 \tilde{t}_0 と \tilde{x}_0 の物理的な意味が見えてくるだろう。時刻に関する定数 \tilde{t}_0 は $dx/dt = 0$ となる時刻であり、その時点での x 座標が \tilde{x}_0 である。これらの結果に対して、 $a/c \rightarrow 0$ なる非相対論近似を計算してみると、 $x \rightarrow x_0 - a(t - \tilde{t}_0)^2/2$, $dx/dt = -a(t - \tilde{t}_0)$ となり、ニュートン力学での等加速度運動をする観測者から見た現象と一致する。

加速度運動する観測者が見た自由粒子の速度 dx/dt は、 $-x$ 方向に加速度運動しているように見える。言い換えれば、加速度 a による一様な加速度場における自由落下である。しかしながら、図 5.2 に示すように、この落下速度は $|dx/dt| = (1 + a\tilde{x}_0/c^2)c/2$ なる最大値を迎えた後、減少傾向をたどり、 $x = -c^2/a$ に近づくほど速度はゼロに近づく。このことから、重力加速度 a の一様な重力場を自由落下する粒子は事象の地平面 $x = -c^2/a$ を横切ることができないこともわかる。これはブラックホールに落下する物体を観測しているのと類似する現象である。

質点の変位 (5.22) に注意して、速度 (5.23) をさらに書き換えると、

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{c} \left(x + \frac{c^2}{a}\right) \tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.24)$$

のように書けることに気づくだろう。さらに、(5.13) で定義される光速 $c(x)$ を用いて、

$$\frac{dx}{dt} = c(x) \tanh \frac{a(t - \tilde{t}_0)}{c},$$

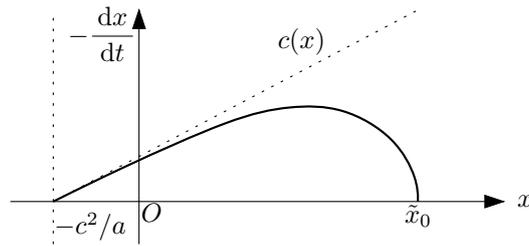


図 5.2: 加速度場の自由粒子の速度と位置

と表すことができることも注意すべきである。つまり、一様な加速度場を自由落下する物体の速度を光速 $c(x)$ との比で考えると、速度は単調増加であることがわかる。すなわち、速度が途中で減少傾向に転じているように見えるのは、あくまでも、計量の基準が変化していることによる見かけの現象である。

5.4 初期条件の再考察

前節で、加速度場の中の自由粒子の 1 次元運動について定式化したが、初期条件の与え方がまわりくどい。前節で導出した公式では、 $dx/dt = 0$ となる時刻 \tilde{t}_0 と、その時点の位置 \tilde{x}_0 が初期条件を与える量であった。このような dx/dt を主体とした初期条件ではなく、 $t = 0$ における速度と位置で初期条件を記述できないだろうか？

前節では、 $t = 0$ における物理量を用いた記述を敢えて避けていた。なぜなら、速度 dx/dt が \tilde{x}_0 に依存してしまうからである。ニュートン力学では、 $t = 0$ において $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ なる初期条件を設けると、 $dx/dt = v_0 - at$ となる。つまり、ニュートン力学では、 dx/dt は x_0 に依存しない。もう一步考えを進めるなら、加速度場では $t = 0$ の速度も x に依存した値になっているということである。つまり、 $t = 0$ のときの速度を初期条件として用いても、それはニュートン力学で用いた速度の初期条件 v_0 とは意味が異なるのである。

加速度場では光速が x の関数である。実際、これが理由で dx/dt が x に依存した量となるのである。つまり、速度 dx/dt を $c(x)$ で正規化すれば、 x の依存性が取り除けるのではないか。正規化された速度は、

$$\frac{1}{c(x)} \frac{dx}{dt} = -\tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.25)$$

となり、予想どおり、 x に依存しない量となる。それでは、速度を光速 $c(x)$ で正規化した量に対して初期条件を与えよう。言いかえると、 $t = 0$ において、 $x = x_0$, $dx/dt = \beta_0 c(x_0)$

を初期条件として、公式を書き直すのだ。すると、

$$\frac{1}{c(x)} \frac{dx}{dt} = -\tanh\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right), \quad (5.26)$$

$$x + \frac{c^2}{a} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left(x_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right), \quad (5.27)$$

が得られる。また、任意の時刻 t において $dx/dt = \beta c(x)$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left(x_0 + \frac{c^2}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(x + \frac{c^2}{a}\right), \quad (5.28)$$

が成り立つ。この結果は、一様な加速度場を自由落下する物体の位置が示す面白い規則性を表現している。その数式が表す意味を図で示すと図 5.3 のようになる。その物体の位置には基準の位置 A が存在し、現時点での速度 β が与えられたとき、その時点における物体の位置は、基準の位置を事象の地平面 ($x = -c^2/a$) を中心にしてローレンツ収縮して得られる位置と一致するということである。捕捉すると、初期状態 (initial state) で初速度がゼ

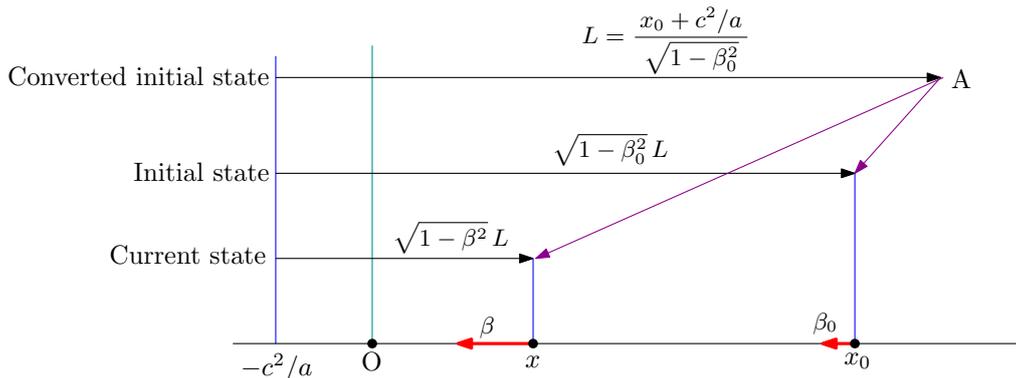


図 5.3: 加速度場を自由落下する物体の位置

ロ ($\beta_0 = 0$) である場合、物体の初期位置は基準の位置 A と一致する。ゼロでない初速度 ($\beta_0 \neq 0$) をもつ場合、物体の初期位置は、基準の位置が図 5.3 にしたがってローレンツ収縮を受けた状態と考えればよい。つまり、一様な加速度場は事象の地平面を中心にしたローレンツ収縮によってつくられる座標系であると考えられる。

5.5 自由粒子の時間

加速度場中の自由粒子と一緒に運動する時計について考えてみよう。これまでに出てきた固有時間 τ が運動する時計の読みを表す。固有時間の尺度は 4 次元計量で定義されてい

る。時計の運動を x 軸方向のみに制限すると、

$$d\tau = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt, \quad (5.29)$$

によって固有時間の尺度は与えられる。この微分方程式を解くと τ と t の変換式:

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left[\tanh\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right) + \beta_0 \right], \quad (5.30)$$

得ることができる。なお、この変換式は、 $t = 0$ のときに $\tau = 0$ となるように積分定数を選んだ。さらに、任意の時刻において $dx/dt = \beta c(x)$ とするならば、

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{\beta_0 - \beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right), \quad (5.31)$$

を得ることができる。この式により、初期座標と初期速度が既知である自由粒子が加速度場の中で、任意速度になるまでに自由粒子の時計が刻んだ時間を簡単に計算できる。

5.6 双子のパラドックス

本節では、一様な加速度場の概念を用いて双子のパラドックスにおける矛盾点を解消しよう。双子のパラドックスは、アインシュタインが特殊相対性理論での議論の限界を示すために用いたらしいが、皮肉にも、相対性理論の反論者が相対性理論を否定するために用いられた題材である。

マークとマイクは双子である。ある日、マイクは宇宙船で地球を出発し、等速度 v で地球を離れた。そして、急速な U ターンをして、速度 v で地球に帰還した。一方、マークは地球に残ったままである。マークから見るとマイクの宇宙船は相対速度 v で運動しているので、マイクの時計が遅れて見えるはずである。ところが、マイクから見ると、地球の方が相対速度 v で運動しているように見えるので、マイクはマークの時計の方が遅れていると言うだろう。つまり、双方とも相手の時計が自分の時計より遅く進むことを主張する。自分より若い人より若いということはある得ない。すなわち、双方の主張は理にかなっていない。それでは、地球に戻ったマイクは、自分より若いマークに会ってしまうのか、それとも、老いたマークに会うのか？ これが双子のパラドックスである。

地球に残っているマークと違い、マイクは出発時と U ターン時と帰還時に加速度運動をするため、特殊相対性理論のみで議論することはできないのである。このパラドックスは、マークとマイクの固有時間を積分して比較することによって解決できるが、宇宙船に乗ったマイクから見た世界は、加速度による重力場なので固有時間の計算には一般相対性理論が必要となる。これまでに等加速度運動による重力場における固有時間計算の処方を与えておいたので、シンプルにパラドックスを解決できるであろう。

マークから見た世界 マークは地球に残っている (慣性系にいる) ので, 特殊相対性理論だけでマークが見る世界を説明できてしまう。マークの時計で $T_A/2$ が経過する間, マイクが地球から遠ざかっているとする。マイクは帰り道も速度 v で戻ってくるので, 帰りに要する時間は, マークの時計で $T_A/2$ である。つまり, 往復に要する時間は, マークの時計で T_A である。マークがマイクの時計を見た場合, 見事にローレンツ変換の影響を受けているはずである。マイクの時計が T_B の時を刻む間にマイクの宇宙船が往復したとすると, これらの間には

$$T_B = \sqrt{1 - \beta^2} T_A, \quad (5.32)$$

となる。これは, 単なる時間のローレンツ収縮の効果である。この結果より, 地球から見た宇宙船の世界線と時計の読みをグラフに描くと図 5.4 のようになる。

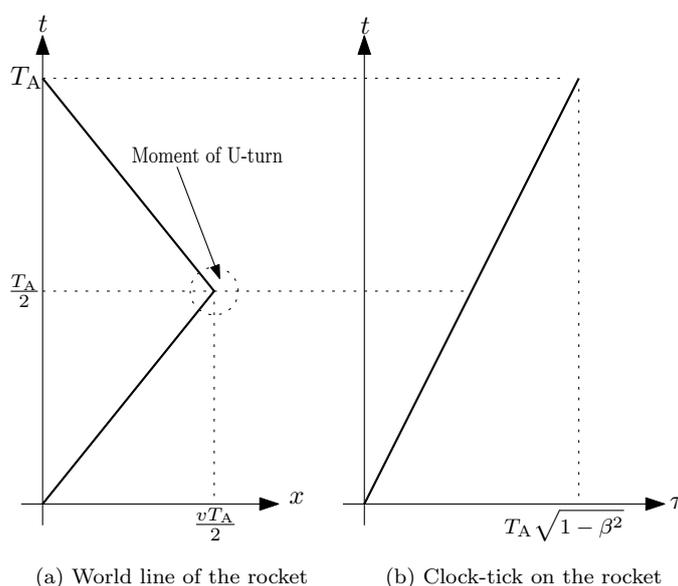


図 5.4: 地球から見た宇宙船の世界線と時計

マイクから見た世界 宇宙船に乗ったマイクには, マークと違い, 慣性系ではない時空にいる時間帯がある。地球からの出発時に加速をしなければならないし, Uターンをする時間もあり, 地球に到着するときには減速をする必要がある。その3箇所ではマイクは加速度運動しているため, 慣性力というみかけの力を感じている。等価原理によると, 慣性力と重力は区別がつかないため, マイクが慣性力を感じている区間では, 重力場にマイクがいたと解釈できるのだ。つまり, 加速度をもつ3箇所が特殊相対性理論では議論できない区間となる。上の計算の状況では, 加速度運動するマイクは一瞬で v まで加速し, 一瞬でUターンし, 一瞬で地球上に静止しなければならない。非現実的な舞台設定ではあるが, これまでに導出した加速度場の式を適用し, その結果に対して $a \rightarrow \infty$ の極限をとれば解決

できるであろう。

出発時の加速行程について考えよう。マイク自身が一瞬で加速を完了することを仮定すると、加速に要する時間は、マイクの時計で $T_B^{(1)} = 0$ である。マイクから見たマークの時計の読みはどうなっているであろうか？ 観測者マイクが加速しているため、特殊相対性理論は使えない。その代わりに、地球を自由粒子とみなし、(5.31) を使用することができる。初期条件を $x_0 = 0, \beta_0 = 0$ 、終了条件を $\beta = -v/c$ とし、公式を適用し、 $a \rightarrow \infty$ の極限值を計算すると、 $T_A^{(1)} = 0$ となる。

加速を完了したマイクは自分の時計で $T_B^{(2)} = T_B/2$ の間、等速度 v で運動したとする。この仮定は特殊相対性理論が適用できる。マイクから見たマークの時計は、その間に $T_A^{(2)} = \sqrt{1-\beta^2} T_B/2$ だけ時間を刻むはずだ。

では、Uターン行程での時計の読みについて考察しよう。現実的ではないが、マイク自身が一瞬にしてUターンしたと仮定すると、マイクの時計では $T_B^{(3)} = 0$ しか時間経過しないことになる。マイクが見たマークの時計は、加速度場の自由粒子の時計の問題なので、(5.31) を適用する。まず、既に速度 v での等速運動行程を $T_B/2$ の時間だけ持続しているため、Uターン行程を開始するときには、地球はマイクの後方 $vT_B/2$ の位置に移動している。つまり、 $x_0 = -vT_B/2$ である。また、初期速度は $\beta_0 = -v/c$ 、そして、Uターン後には逆向きの同じ速さになっているはずなので、終了速度は $\beta = v/c$ である。この条件を公式に代入し、 $a \rightarrow -\infty$ を適用すると、Uターン行程中にマークの時計が刻んだ時間は $T_A^{(3)} = (v^2/c^2) T_B/\sqrt{1-\beta^2}$ となる。

帰り道の行程は前半と対象であるので、既に用いた値をそのまま使えばよい。帰りの等速度行程においては、 $T_B^{(4)} = T_B^{(2)}$ 、 $T_A^{(4)} = T_A^{(2)}$ が成り立つ。そして、最後の減速行程についても $T_B^{(5)} = T_B^{(1)}$ 、 $T_A^{(5)} = T_A^{(1)}$ となる。

上で説明した時計の読みをつなぎ合わせ、全行程におけるマークとマイクの時計の読みを比較しよう。マイクの時計の読みは、

$$T_B^{(1)} + T_B^{(2)} + T_B^{(3)} + T_B^{(4)} + T_B^{(5)} = T_B,$$

となり、マークの時計の読みは、

$$T_A^{(1)} + T_A^{(2)} + T_A^{(3)} + T_A^{(4)} + T_A^{(5)} = \frac{T_B}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となる。全行程の間にマークの時計が刻んだこの時間を T_A とおくと

$$T_B = \sqrt{1-\beta^2} T_A, \tag{5.33}$$

が導き出せる。結果として、宇宙船で移動したマークの時計の読みが小さいことが検証されたことになる。

ここまでの計算結果より、宇宙船から見た地球の世界線と時計の読みをグラフに描くと図 5.5 のようになる。このグラフの形状は、明らかに図 5.4 とは異なる。つまり、宇宙船に乗ったマイクは、加速度運動のため慣性力を感じる区間があるので、地球上にいるマークが見る世界とは相対的でないことがこのグラフから読みとれる。特に印象的な区間は、地

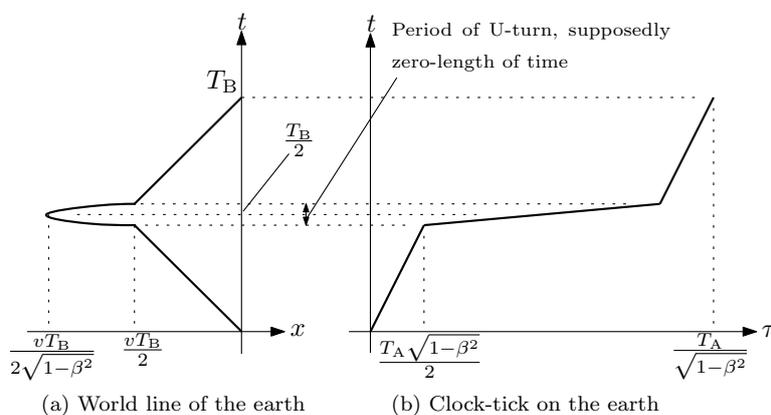


図 5.5: 宇宙船から見た地球の世界線と時計

球に向かって U ターンする区間である。ここでは、U ターンが一瞬にして完了するものとした。その一瞬で、マークが観測する地球の世界線は遠くに移動し、元の位置に戻る。また、マークが観測する地球の時計の読みは一瞬にして長い時間分の読みを刻むのである。

二者の観測の比較 マークから見た時計とマイクから見た時計の双方を計算した結果、全工程中での時計の刻みについて、双方ともまったく同じ関係式を得ることができた。したがって、双子のパラドックスにおける矛盾点は解消され、最終的にはマイクがマークより若くなっていることがわかった。

双子のパラドックスが浮上した原因は、U ターン行程での時計の読みについて考慮しなかったことである。仮に、U ターンが一瞬で完了したと仮定しても、それにより非常に大きな慣性力がかかるため、一般相対論的效果により、地球の時計が一瞬にして大きく進んでしまうのである。

5.7 クルスカル図

質点による重力場 (シュワルツシルト解) において光円錐が場所によらず、 $\pm 45^\circ$ の角度で開くような座標系としてクルスカル座標 $[T, R]$ を描き、事象の地表面を境に時空の性質が変わることを図示した。等加速度運動によって生じる重力場についても、同様に、クルスカル座標を計算することができる。

等加速度運動による重力場のクルスカル座標は,

$$ds^2 = -\frac{4c^4}{a^2}(dT^2 - dX^2) + dy^2 + dz^2, \quad (5.34)$$

なる線素で表される。光の軌跡は $ds = 0$ を満たすので、確かにこの座標 $[T, X]$ では、光の軌跡は常に $\pm 45^\circ$ の傾きをもっている。また、クルスカル座標は座標 $[ct, x]$ との間に,

$$T^2 - X^2 = -\left(1 + \frac{a}{c^2}x\right), \quad \frac{2TX}{T^2 + X^2} = \tanh \frac{at}{c},$$

なる関係で結ばれている。図 5.6 に示すように、 x が一定の線は双曲線に、 ct が一定の線は原点を通る直線になる。加速度場の事象の地平面 $x = -c^2/a$ は確かにシュワルツシルト解の事象の地平面と同様の形状になっている。

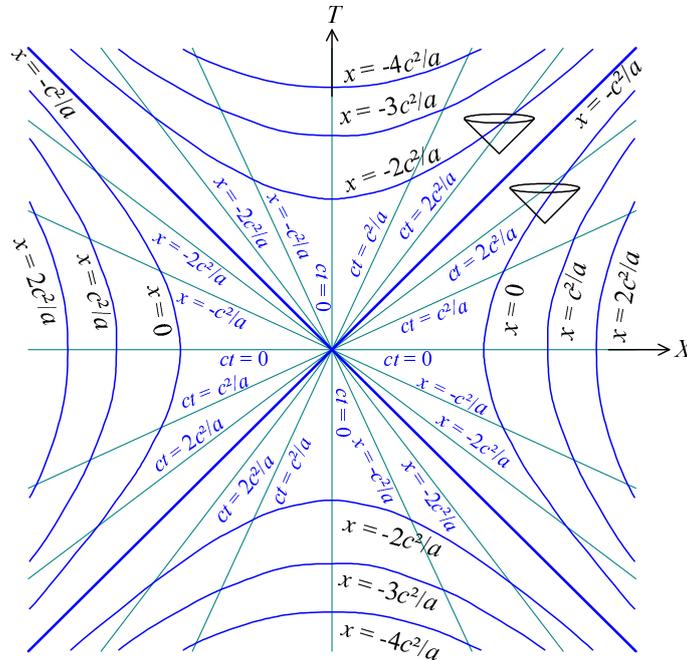


図 5.6: 加速度場のクルスカル図

あらゆる物質は超光速で運動できないので、クルスカル座標系における物質の世界線は光円錐の内部を走るはずだ。そのように考えて図 5.6 を見ると、現時点で $x > -c^2/a$ に存在する物質も、光速で運動できない限り、事象の地平面となる $x = -c^2/a$ をいづれ横切ることになる。いったん事象の地平面を横切ると、どんなに速度を変化しても (光速を超えられないが)、その物質は事象の地平面を超えてもとの領域に戻ることが不可能である。加速度運動する観測者から見る時空は、ブラックホールと同様の性質をもっているのだ。

加速度による重力場における運動方程式を解いた結果、その重力場を自由落下する質点は事象の地平面に対応する $x = -c^2/a$ に近づくとつれ、速度が低下し、地平面を横切るこ

とができない。その現象は座標系の取り方による見かけの現象であり、自由落下する質点から見れば、単に慣性系を問う速度運動しているだけなので、加速度運動する観測者の c^2/a より隔てた後方に移動することは可能である。それが、事象の地平面であらゆる質点が停止する現象が見かけの現象であるという理由である。重力にしたがい落下する一般の物体が衣装の地平面を横切ることが可能であることをクルスカル座標系は示しているのだ。しかし、重力に逆らって事象の地平面を横切ることが不可能である。

等加速度運動をする観測者から見た時空においても、クルスカル座標をつくとホワイトホールに相当する現象が現れている。その現象は、クルスカル図の中央下部である。その領域では、光速を超えない限り、どのような速度で運動しても、 x の負の方向から事象の地平面を超えて $x > 0$ の領域に到達することができるのである。現在の物理学では、そのような解は棄却することが常である。このようなホワイトホールとしての解釈は、物理的な意味を伴うのか、単なる数学の産物なのか意見が分かれるところかもしれない。本書では、ホワイトホールの議論はやめておこう。

5.8 リンドラー座標系

本章ではアインシュタインの方程式を解いて等加速度運動をする観測者から見た加速度場の時空を計算した。本章で取り上げた時空と同等の座標系が既に提唱されているので、その座標系について紹介する。その座標系は、リンドラー座標系と呼ばれ、本章と同様に、カルテシアン座標 $[\xi, \eta, \zeta]$ と時間座標 t を組み合わせた座標によって、

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - \alpha^2 \xi^2 c^2 dt^2, \quad (5.35)$$

なる線素で表現される。この中で α が加速度に関するパラメータである。しかも、 α は長さの逆数にあたるディメンジョンをもつ。容易に予想できるように、

$$\alpha\xi = 1 + \frac{ax}{c^2}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z,$$

の対応で本章で導出した加速度場の線素と一致する。この対応関係からわかるように、リンドラー座標系は、事象の地平面が $\xi = 0$ で形成されるようになっていて、 $\xi = 1/\alpha$ に観測者が存在するモデルである。その弱点をあえて指摘するなら、 $a \rightarrow 0$ の極限をとったとき、 $\alpha\xi \rightarrow 1$ となるので、変数として使いたい ξ が等速度運動への拡張で定数になってしまう。つまり、等加速度運動への拡張に対して難がある座標系である。

リンドラー座標系は、いくつかの相対性理論のテキスト³ に掲載されている。リンドラー座標系が等加速度運動する観測者が見た重力場であることは、脚注に挙げたテキストによ

³例えば、Derek Raine, Edwin Thomas, “Black Holes,” Imperial College Press, ISBN 1-86094-586-4, p.41, 2005.

ると,

$$\xi' \equiv \frac{\cosh \alpha ct}{\alpha}, \quad ct' \equiv \frac{\sinh \alpha ct}{\alpha},$$

なる変数変換によって説明されている。ここで、双曲線関数に与えられる変数が αct であることに注意しておこう。双曲線関数のように、ディメンジョンが定まらない関数に与える変数は無次元化でなければならないのだ。上記の変数変換によって、時空の線素は,

$$ds^2 = d\xi'^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - c^2 dt'^2,$$

のように書き換えられる。この数式は、時空 $[ct', \xi', \eta, \zeta]$ がミンコフスキー空間であることを意味する。座標 ξ' と ct' は時刻 t に対して双曲線関数で与えられている。つまり、 ξ' と ct' は双曲線運動における座標である。時空における双曲線運動とは、ニュートン力学における等加速度運動に相当するのでリンドラー座標系は等加速度運動する観測者から見た加速度場である。

リンドラー座標系は筆者にとってはショックであった。本書で示した導出は筆者が加速度場の時空を表現することを目的に独自に展開した過程であったのだが、すでにリンドラー座標系は加速度場を表現する座標系として知られていたからだ。結果的に筆者が見つけたと思っていた座標系は二番煎じだったことになる。

第6章 恒星間航行

前章では、等加速度運動をする観測者から見た場を数学的に記述し、宇宙船が一瞬にしてUターンできる場合を想定して双子のパラドックスを解決した。本章では、1次元的な恒星間航行を数値計算によりシミュレーションし、加速度をもつ系から見た世界と、慣性系から見た世界の違いを検証してみよう。

6.1 定数の定義

本章での計算は、大きなオーダでの時間と距離を取り扱うため、時間と距離の単位として年と光年を用いることにする。距離の単位である1光年(1ly)光年は国際天文連合で、

$$1 \text{ ly} = 9.460730472580800 \times 10^{15} \text{ m},$$

のように定義されている。この量は、 $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ で伝搬する光が365.25日に伝搬する距離である。概算では1光年 = 9兆4600億kmであり、地球から太陽までの距離の約63,200倍という距離である。

上記の光年の定義に合わせ、本書では1年を365.25日で計算する。地球の公転周期に基づく太陽年とはわずかに異なる値¹を用いるが、計算の便宜をはかっている選択である。

時間と距離(長さ)の単位を年と光年を用いることにすると、従来のようにMKSA単位系で計算をすると値が大きくなってしまふ。最初から年と光年を単位に計算できるように定数を与えておくと便利だろう。光速と重力加速度は、

$$\begin{aligned} c &= 1.000000000000000 \text{ ly/yr}, \\ g &= 1.031595264481270 \text{ ly/yr}^2, \end{aligned}$$

のように与えることができる。これまでに導出してきた公式に、これらの定数を与ええることで、時間は年で、距離(長さ)は光年で計算することが可能になる。何よりも、光速が厳密に1ly/yrとなっていることが計算の都合としてありがたい。

¹西暦2025年時点において、地球に対する太陽の相対位置に基づく太陽年は365.24219日である。それに対して、400年周期で設定されたうるう年の規則性に基づく1年の長さは365.2425日である。そのうるう年の規則では、約3200年でカレンダーに1日の誤差が生じることになる。

6.2 問題設定

現代と比べても科学が発展した 25 世紀, 人類の一部は太陽系外への移住を計画している。そのような未来を想定して恒星間航行をシミュレーションしよう。100 年以上にわたる調査の結果, オリオン星雲に生命が存在できる環境条件が満たされている領域があることがわかった。移住する準備を整え, 人類の一部はついに宇宙船でオリオン星雲を目指すことになったのだ。

オリオン星雲は地球から 1500 光年もの距離を隔て, オリオン座を構成する恒星のいくつかが誕生した場所だ。移住の準備が整ったとはいえ, 目的地は非常に遠く, いったん地球を出発すれば戻ることができない。1500 光年もの恒星間航行は, 見聞を深めるための旅行ではなく, 次の新天地で新たに文明社会を築くための人類史上なかったスケールの挑戦なのだ。かつて, 人類はヨーロッパからアメリカ大陸へ移住した。アメリカ大陸へ移住では, まだ戻ってこることができた。恒星間航行ではそれができない。それほどにもスケールが大きな挑戦なのだ。

目的地まで 1500 光年もあるため, 到着には, 地球の時計にして 1500 年以上の時間を要する。乗員が活着ている間に 1500 光年も隔てた場所に到着させるため, 宇宙船を極めて光速に近づけ, 相対論的効果を利用する。そのため, かなり多くの時間を使って宇宙船を加速する必要があり, 同様に, 目的地で停止するために長い時間をかけての減速が必要となるだろう。オリオン星雲までの全行程を図 6.1 に示すように, 加速行程, 巡航行程, 減速行程に分ける。加速行程は, 最初の 300 光年の行程で, 宇宙船は一定の加速度で加速する。

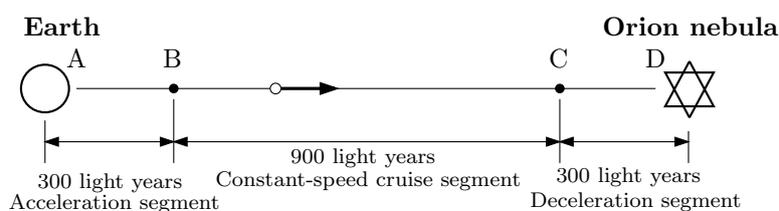


図 6.1: 恒星間航行の設定

巡航行程は, 加速をやめ, 宇宙船は 900 光年の行程を等速で航行を維持する。減速行程は最後の 300 光年を使って, 目的地で停止できるように減速する。加速行程と減速行程では, 5.000 m/s^2 の加速度を保持するものとする。この加速度で加速すると, 出発した 12.68 秒後に 4 分の 1 マイル (ゼロヨンの距離) の地点を通過することから, この加速度がスポーツカー程度の加速度であることがわかる。計算を実行するには, 時間と長さの単位が, それぞれ, 年と光年であるので, 加速度 $a = 5 \text{ m/s}^2$ も単位を合わせておこう。既定の単位で記述すると,

$$a = 0.526324114531260 \text{ ly/yr}^2,$$

である。この加速度は、1年間加速を持続すると光速のほぼ半分まで加速するくらいの加速度であることを示唆している。とはいえ、この加速度をもってしても、2年で光速を超えろという意味ではないことは、これまでに確認してきたとおりである。

加速度を $a = 0.526324114531260 \text{ ly/yr}^2$ のような単位で表現することの興味深さを補足しておこう。この加速度の逆数は1.900程度の値になるが、それは加速度の逆方向1.900光年の位置に事象の地平面が形成されていることを意味する。そのことを意識しておく、本章で検証する場所ごとの時計の読みを簡易的に検証する際に便利である。

6.3 地球から見た世界

地球から見た宇宙船の運動、加速時間、減速時間について考察しよう。地球の自転や公転について考えないものとし、地球が慣性系に存在していると仮定すると、地球から見た世界は特殊相対性理論にしたがう。

加速行程 加速行程の時間を地球の時計で表してみよう。そのためには、地球を基準にした座標系で宇宙船の位置を計算する公式(??)を用いるとよい。改めて書くとその公式は、

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2(t+t_0)^2}{c^2}} - \sqrt{1 + \frac{a^2t_0^2}{c^2}} \right] + x_0,$$

である。初期状態で宇宙船は地球に位置し、初速度がゼロであるので、 $x_0 = 0, t_0 = 0$ を公式に代入し、 $x = 300$ 光年となる t を求めればよい。その結果、 $t = 301.8939913$ 年となる。この値が、宇宙船が加速行程にいる時間を地球の時計で測った結果である。設定した加速度 5 m/s^2 はそれほど大きな加速度ではないが、300光年の距離を302年弱で到達してしまうことから、何年も加速度運動を持続すれば極めて光速に近い速度域に達することがわかるだろう。

宇宙船に積んだ時計を地球から見た場合、大きな速度で運動する宇宙船の時計は、相対論効果にしたがってゆっくりと時を刻むのが見えるだろう。その時計の読みは(2.9)にしたがう。その数式は、

$$\tau = \frac{c}{a} \left[\text{arsinh} \frac{a(t+t_0)}{c} - \text{arsinh} \frac{at_0}{c} \right],$$

のように、宇宙船の固有時間 τ を地球の時間 t の関数で表現している。ここでは、 $t_0 = 0$ とし、 $t = 301.8939913$ 年を代入すると、 $\tau = 10.9464772$ 年という時間が得られる。したがって、加速行程が終了するとき、宇宙船の時計では11年程度の時間しか経過していないことになる。

上で計算したように、300 光年の行程を設定した加速行程は、地球の時計で 302 年弱、宇宙船の時計で 11 年弱の時間で完了する。加速行程を完了したとき、宇宙船はどのくらいの速度まで加速してきているだろうか？ 加速行程を終了した時点の宇宙船の速度は、公式 (2.4) を計算すればよい。その公式を改めて書くと、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(t+t_0)}{\sqrt{1+a^2(t+t_0)^2/c^2}},$$

である。この公式に代入する t は地球の時計の読みだ。ここでも、 $t_0 = 0$ である。この公式に $t = t = 301.8939913$ 年を代入すると、 $dx/dt = 0.9999801965c$ である。いうまでもなく、 c は光速度である。また、 $dx/dt \equiv c\beta$ としたとき、この速度に対応するローレンツ収縮比は $\sqrt{1-\beta^2} = 6.293375741 \times 10^{-3}$ となる。

巡航行程 巡航行程は慣性系から等速運動する物体を観測している状況であるため、その解析は非常にシンプルである。宇宙船が巡航行程を過ごす時間を地球上の時計で計測すると $t = 900.0178235$ 年となる。その時間は、単に、速度 $dx/dt = 0.9999801965c$ で 900 光年を移動する時間である。宇宙船に積んだ時計の読みは、相対論的効果のため、ゆっくりと時を刻む。そのペースはローレンツ収縮比と同一の比率で遅くなるので、 $\tau = \sqrt{1-\beta^2}t = 5.6641503$ 年となる。加速行程を 300 年以上持続した結果、宇宙船の速度が極めて光速に近くなっているため、地球で 900 年の時間が宇宙船の時計では 5 年半程度しか刻まないのである。

地球を出発した時点で 900 光年を隔てていた区間をわずか 5 年半で走り抜けるのは超光速のように思えるかもしれない。しかし、巡航行程が開始する時点ではローレンツ収縮が効いていることから、900 光年を隔てていた区間はわずか 5.66 光年に縮んでいる。その区間を極めて光速に近い速度で走り抜けているだけなのだ。

減速行程 宇宙船が減速行程にいる時間については、設定した問題の対称性より、地球上の時計と宇宙船の時計の双方とも、加速行程にいる時間と同じだけ時を刻む。直接的に (2.4) と (??) を用いて計算しても、同じ数値が得られるはずだ。つまり、地球の時計によると宇宙船は 302 年弱をかけて減速するのだが、宇宙船の時計は 11 年弱しか時を刻まないのだ。

以上の考察をまとめ、地球の時計の読みと、宇宙船の時計の読みを比較すると表 6.1 のようになる。いかなる物体も光速を超えることは不可能であるので、1500 光年を移動するために要する時間は 1500 年を超える。しかしながら、地球から見た宇宙船の時計はローレンツ収縮のため、27 年半の時間しか刻んでいない。既に計算したように、300 光年の行程にわたって 5 m/s^2 で加速を持続すると、光速の 99.998% の速度に到達する。その速度で 6.293×10^{-3} というローレンツ収縮比となり、宇宙船の時計が大きく遅れるわけだ。

表 6.1: 地球から見た時計の読み

	地球の時計 [年]	宇宙船の時計 [年]
加速行程	301.8939913	10.94647725
巡航行程	900.0178235	5.66415034
減速行程	301.8939913	10.94647725
合計	1503.8058060	27.55710484

地球の時計で計測した時刻に対して宇宙船が到達する距離は図 6.2 のようになる。宇宙船の速度は加速期間のかなり早い時期に光速に十分近づくため、時間の経過に対してほぼ比例して距離が増加するようになるが見えるが、加速期間と減速期間の両端を拡大すると、到達距離が双曲線を描いていることがわかる。その現象は特殊相対性理論における等価速度運動であり、双曲線運動と呼ばれる。いうまでもなく、低速領域では放物運動に相当する。こ

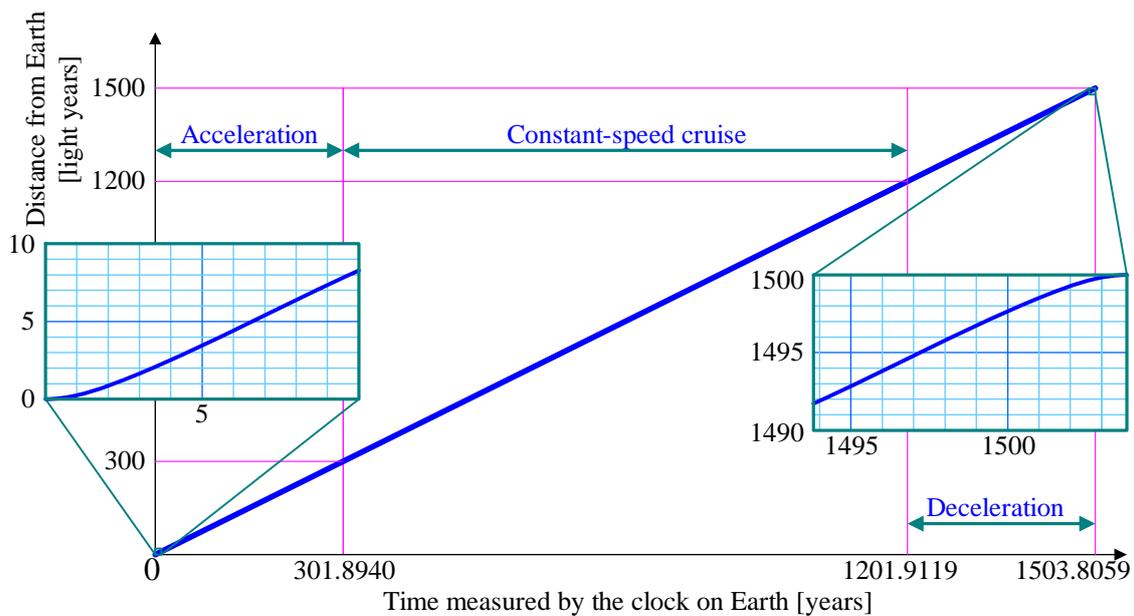


図 6.2: 地球の時計の読みに対する宇宙船の位置

ここで想定した 5 m/s^2 の加速度では、最初の 1 年で光速の 47% まで加速し、5 年後には 93%、10 年後には 98% まで加速する。地球から見た相対速度に関しては、加速行程 302 年のうちのほとんどが光速に近い一定の速度に見えるため、時間と移動距離を図示するとほぼ直線的な特性を示していたわけだ。

地球の時計で計測した時刻に対して宇宙船の固有時間の変化は図 6.3 のようになる。この図は地球の時計の読み (横軸) に対して、宇宙船の固有時間 (縦軸) を 30 倍に拡大して描

いているので見誤りやすいが、グラフの両端の傾きは1である。宇宙船の速度が小さいときは、地球の時計と宇宙船の固有時間が時を刻むペースがほぼ同じということである。そ

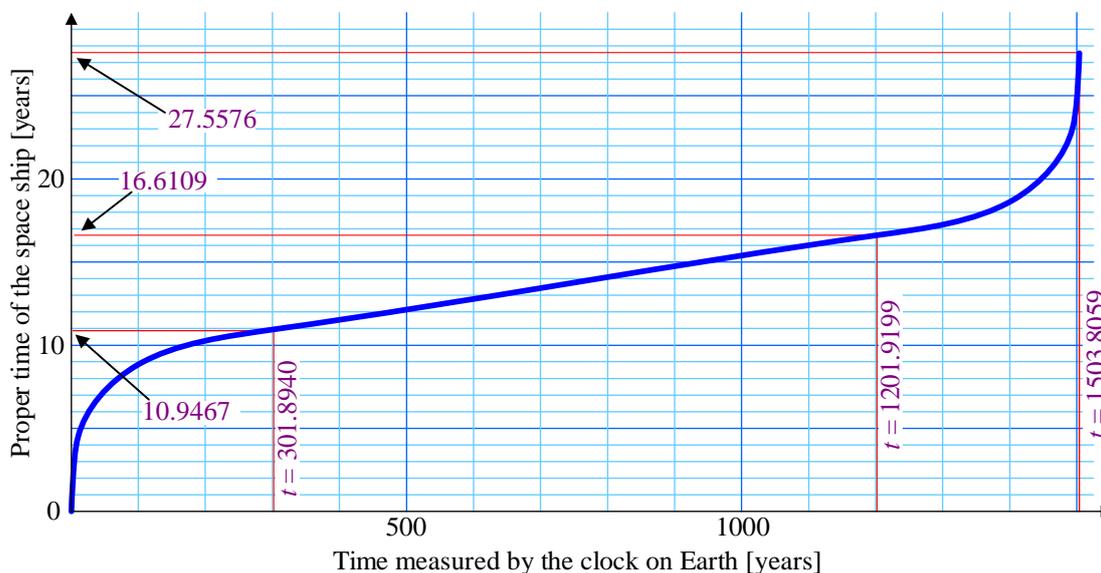


図 6.3: 地球の時計の読みに対する宇宙船の固有時間

れに対し、宇宙船の速度が大きくなると宇宙船の固有時間のペースが遅くなるため、グラフの傾きが緩やかになる。巡航速度は光速の 99.998% であり、巡航行程での固有時間のペースは地球の時計の 0.63% になる。巡航行程での宇宙船の固有時間が非常に遅いため、グラフは縦軸を 30 倍に拡大しているにもかかわらずグラフの傾きが緩やかである。具体的な数値としては、巡航行程は地球の時計では 900 年を経過しているが、宇宙船の固有時間は 5 年半しか経過していない。

6.4 宇宙船から見た世界

宇宙船から見た世界は、地球から見た世界とは異なる。加速行程と減速行程では、宇宙船内 (観測者) に慣性力が発生するため、特殊相対性理論の範疇を超え、一般相対性理論を適用が必要となる。一方、等速行程では観測者に慣性力が発生しないため、特殊相対性理論の範疇で解析が可能だ。

前節では、地球から 300 光年の距離で加速を終了し、1200 光年の距離で減速を開始する、というように地球からの距離を基準に加速・等速巡航・減速の区間を定義した。しかし、運動形態が異なれば時空の尺度が異なるのだから、地球で見た距離の概念を宇宙船にもち込んでも意味がない。むしろ、加速終了と減速開始は、宇宙船内の時刻で定義した方が宇

宙船の操縦には好都合である。その議論を進めるため、地球を点 A, 加速終了点を点 B, 減速開始点を点 C, オリオン星雲を点 D としよう。

6.4.1 加速行程

時刻 $t = 0$ で地球を出発し、加速度 $a = 5.0 \text{ m/s}^2$ で加速している宇宙船の加速を終了する時刻を算出しよう。加速行程が終了するのは、宇宙船が点 B を通過する瞬間である。言い換えると、時刻 $t = 0$ において $x = 300$ 光年であった点 B が $x = 0$ となる時刻を計算すればよい。その計算には、加速度による重力場を落下する物体の位置に関する公式 (5.27) を利用するのだ。改めて書くと、その公式は、

$$x + \frac{c^2}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left(x_0 + \frac{c^2}{a} \right) \text{sech} \left(\frac{at}{c} - \text{artanh} \beta_0 \right),$$

である。この公式において、 x が求めるべき物体の位置、 x_0 が初期状態での位置である。さらに、 a が重力源となる加速度、 β_0 が初速度 (その場における光速との比) である。この公式に、 $a = 0.526324114531260 \text{ ly/yr}^2$ (5 m/s^2 を光年、年の単位で換算)、 $\beta_0 = 0$ 、 $x_0 = 300$ 光年、 $x = 0$ 光年を代入して t を特定する。この手順によって、宇宙船が加速行程にいる時間が宇宙線の時計で $t = 10.9464773$ 年であることが計算される。

加速行程にいる間に地球の時計が刻む時間は、重力場を落下する地球の固有時間を計算すればよいので公式 (5.30) を利用すればよい。改めて書くと、その公式は、

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left[\tanh \left(\frac{at}{c} - \text{artanh} \beta_0 \right) + \beta_0 \right],$$

である。初期状態は宇宙船と地球が同じ位置に存在していたので $x_0 = 0$ である。この公式の t には宇宙船の時計が加速時間に刻む時間、すなわち、 $t = 10.9464773$ 年を代入する。その計算の結果として、 $\tau = 1.8999323$ 年が得られる。一方、オリオン星雲の時計による経過時間も公式 (5.30) を利用する。オリオン星雲の時計の場合、初期座標として初期座標 $x_0 = 1500$ 光年を代入する。その計算結果は、 $\tau = 1501.8702271$ 年である。加速度系から見ると、同じ慣性系に存在していても時計の進み方が場所に依存するのである。

加速終了時の速度 dx/dt は、これまでに示したように、加速度場で光速度が x に依存するため、点 A, 点 B, 点 C, 点 D において、それぞれ、異なった値となる。ところが、 $\beta \equiv (dx/dt)/c(x)$ のように各点での光速で正規化した速度で表現すると、それら 4 点の速度はすべて共通の値になる。その共通の値は、公式 (5.26) を用いれば計算できる。改めて書くと、その公式は、

$$\beta = \frac{1}{c(x)} \frac{dx}{dt} = -\tanh \left(\frac{at}{c} - \text{artanh} \beta_0 \right),$$

である。加速時間として $t = 10.9464773$ 年を代入すると、 $\beta = 0.9999801965$ が得られる。当然であるが、巡航行程における宇宙船の速度を地球から見た値と一致する。

宇宙線と点 A から点 D について、加速行程での経過時間と加速終了時の位置を計算すると表 6.2 に示す数値が得られる。経過時間は、宇宙船から見た各点に備え付けている時計の読みを想定した。上で説明したように、経過時間には公式 (5.30) を、終了時の位置には公式 (5.27) を用いて計算した。この計算によると、驚くことに、初期状態 ($t = 0$) で 1500 光年の距離にあった目的地がわずか 11 年弱の加速時間で 8 光年以内の距離にまで迫っているのだ。とはいえ、これを超光速運動だと思っははいけない。特殊相対性理論で考える

表 6.2: 加速行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	10.9464773	—
点 A	0.000000	1.8999323	-1.888012722
点 B	300.000000	301.8939913	0.000000000
点 C	1200.000000	1201.8761681	5.664038167
点 D	1500.000000	1501.8702270	7.552050889

と、加速によってローレンツ収縮比がさらに小さくなることによって、空間が縮み、前方の物体が急速に迫ってくる。この解釈だけでは超高速運動のように解釈してしまいがちだ。それに対し、一般相対性理論において、重力場では光速が場所によって異なることに注意すればよい。特に、加速度ベクトルが向く前方では、その距離に対して線形的に光速が増大する。光速が場所によって異なることに注意すれば、重力場を落下してくる物体の速度が、その場所における光速を超えないのだ。

6.4.2 巡航行程

点 B から点 C は巡航行程である。この行程では宇宙船は等速度運動の状態にあるので、宇宙船から見た世界は特殊相対性理論にしたがう。この行程における時計の読みと位置を表 6.3 に示しておく。宇宙船から見ると、巡航行程の距離は 5.664038167 光年である。地球やオリオン星雲のような静止した系から見たとき、巡航行程の距離は 900 光年で設定されたはずだ。巡航行程に入る宇宙船にとっては、巡航行程の両端を示す標識 (あるかもしれないし、ないかもしれない) は動いているので、その間の距離はローレンツ収縮によって 5.66 光年程度まで短縮しているのだ。その距離を $\beta = 0.9999801965$ の速度で走り抜けるため、宇宙船の時計の読みで 5.6641503 年が経過する間に巡航行程が完了するわけだ。宇宙船から見ると、その間に、点 A から点 D の間の空間のすべてが、速度 $0.9999801965c$ で

表 6.3: 巡航行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	5.664270595	—
点 A	-1.888012722	0.035648139	-7.552050889
点 B	0.000000000	0.035648139	-5.664038167
点 C	5.664038167	0.035648139	0.000000000
点 D	7.552050889	0.035648139	1.888012721

5.664158418 光年だけ後方に移動していく。文字通り、点 A から点 D が後方に平行移動するのだ。

点 A から点 D に固定されている時計は、宇宙船に対して速度 $0.9999801965c$ で運動しているため、特殊相対性理論の効果で遅れて見える。時計の遅れはローレンツ収縮比である $\sqrt{1-\beta^2} = 6.293375741 \times 10^{-3}$ 倍しか時を刻まないため、わずか 0.035648139 年しか経過しないことになるのだ。

6.4.3 減速行程

減速行程は、宇宙船の内部では慣性力による重力場が形成されているため、点 A から点 D の位置や時計の読みは、(5.27) と (5.30) で計算することができる。計算にあたり、初速度 $\beta = 0.9999801965$ を与えておくことに注意が必要だ。さらに、前項で計算した終了時の位置を初期座標 x_0 として代入すれば計算できる。とはいえ、ここで取り扱っている条件設定では減速行程が加速行程と対称なので、改めて計算する代わりに加速行程での計算結果を利用すれば必要な情報が得られる。その結果は表 6.4 に示すような数値となる。

表 6.4: 減速行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	10.9464773	—
点 A	-7.552050889	1501.8702271	-1500.000000
点 B	-5.664038167	1201.8761681	-1200.000000
点 C	0.000000000	301.8939913	-300.000000
点 D	1.888012721	1.8999323	0.000000

加速行程では前方の点での時計の進みが速かったが、減速行程では逆の現象が起きてい

る。宇宙船が点Dを目的地としているため、点D(オリオン星雲)のみが前方、他の点は後方に位置する。その中でも、もっとも後方に位置する点A(地球)の時計が最も速い。その現象は、加速度ベクトルの方向に沿った前方の時計の読みが速いと解釈すればよい。本質的には、重力場のポテンシャルが高いと時計の読みが速くなるのだ。

以上の計算結果をグラフに表示して、宇宙船から見た各地点の位置や固有時間の推移を確認しよう。まず、宇宙船から見た地球とオリオン星雲の位置は図6.4のようになる。加速区間の間、オリオン星雲は急激に宇宙船に近づいてくる。加速開始時に1500光年先にあったオリオン星雲が10.9467年後には7.5522光年の距離に迫っている。この値だけ見るとオリオン星雲が超光速で接近したように見えるが、加速度場では加速度方向の遠方で光速が大きくなるため、その接近速度は光速を超えていない。一方、地球は10.9467年の加速期間中に1.881光年ほど後退しただけである。つまり、初期状態で1500年離れてい

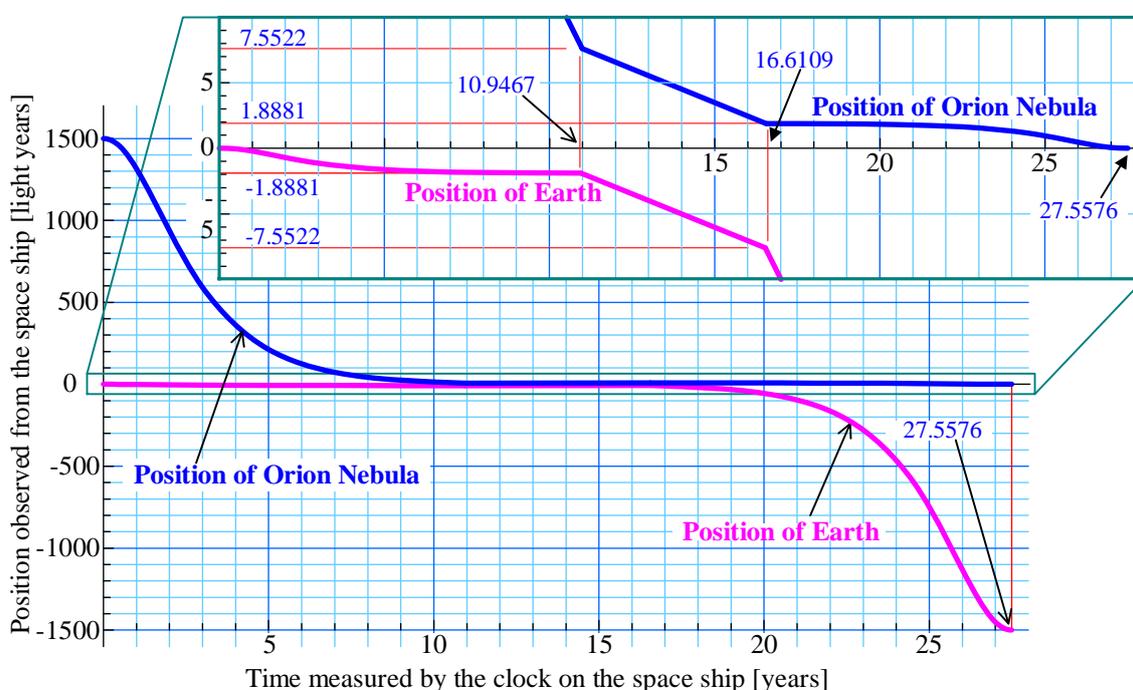


図 6.4: 宇宙船から見た地球とオリオン星雲の位置

た地球とオリオン星雲は、加速期間の終了時には9.4403光年しか離れていないことになる。地球とオリオン星雲の距離がこのように収縮するのは、紛れもなくローレンツ収縮である。観測者が加速度運動をすると、周囲の慣性系とのローレンツ収縮比が変化し、遠くの物体ほど大きな速度で収縮する。その速度が光速を超えないことは、重力場の光速が場所によって異なることで説明できているのである。ところで、目的地が近づき、減速行程に入ると、地球が急激に後退する。一方、オリオン星雲は減速開始時には1.8881光年の距離まで接近しているため、減速期間中はゆっくりと宇宙船に接近する。減速行程が終了す

ると、オリオン星雲は宇宙船と同じ位置に、地球は 1500 光年後方に位置する。

宇宙船から見た地球とオリオン星雲の固有時間も、図 6.5 に示すように、不思議な推移をする。上で見た位置の変化のように、加速区間ではオリオン星雲の時計が急速に時を刻み、地球の時計はゆっくりと時を刻む。加速区間にいる約 11 年のうちのオリオン星雲の時計は 1502 年を刻み、地球の時計は 1.9 年程度しか時を刻まない。巡航行程では、特殊相対性

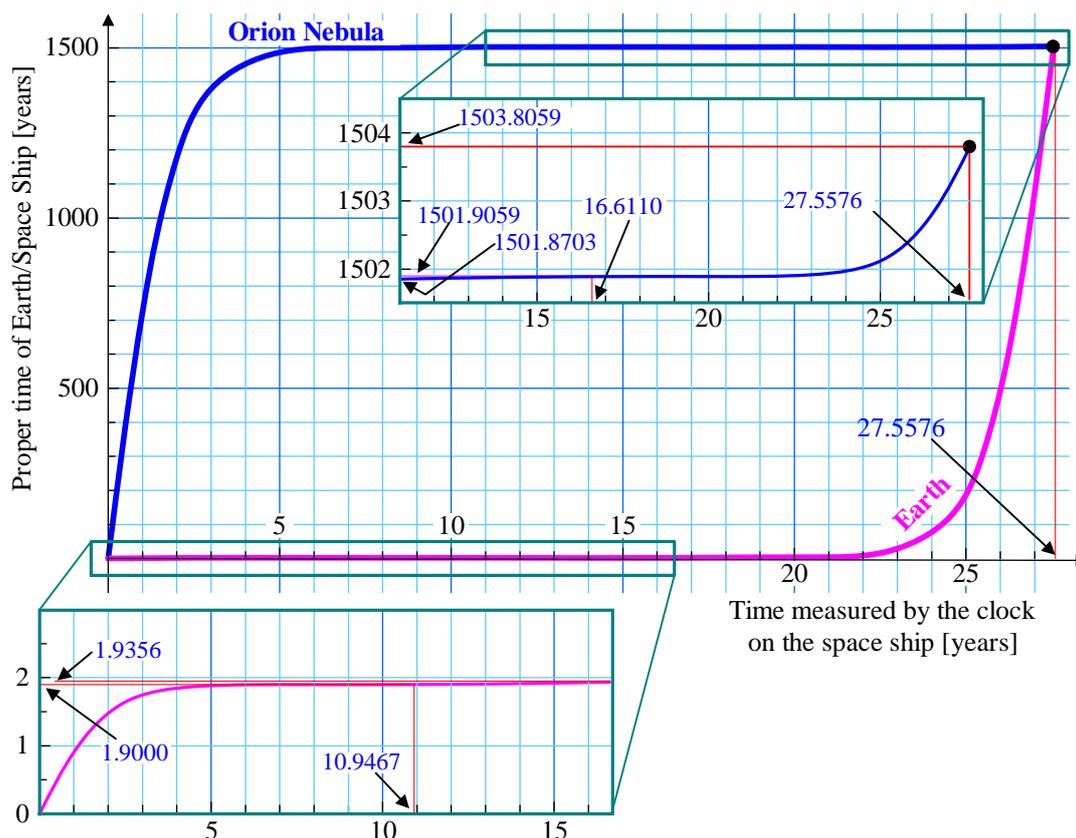


図 6.5: 宇宙船から見た地球とオリオン星雲の固有時間

理論にしたがい、地球の時計もオリオン星雲の時計もゆっくりと時を刻む。減速行程では、加速区間と立場が逆転し、地球の時計が急速に時を刻む。その結果、全行程で宇宙船の時計が 27.8 年のときを刻む間、地球とオリオン座ではもに 1503.8 年が経過している。この計算を実行するに関して、加速行程、巡航行程、減速行程に属する時間には、前節で計算した地球から見た宇宙船の固有時間を用いた。その結果、全行程の時間は、地球とオリオン星雲の固有時間ともに、1503.8 年となり、前節で計算した地球の時間と一致している。

6.5 二者の比較

これまでの計算をまとめる意味で、地球から観測した時計の読みと宇宙船から観測した時計の読みを比較しよう。時計の読みは、表 6.5 に示すように面白い結果となる。時計の読みの合計を比較すると、静止系に存在する地球とオリオン星雲の時計は、地球と宇宙船のどちらから見ても 1503.8058060 年となっている。一方、宇宙船の時計は、地球と宇宙船のどちらから見ても 27.5571048 年である。この結果から双子のパラドックスは発生せず、必ず、宇宙船の時計が遅くなるというウラシマ効果が検証されている。

地球から観測した時計の読みと、宇宙船から観測した時計の読みの解析について、その手法を整理してみよう。地球からの観測では、加速する宇宙船の位置を相対論的な等加速度運動(双曲線運動)にしたがって計算した。その解析結果を使って、宇宙船の固有時間を宇宙船内部の時計の読みとして算出した。その結果、宇宙船は 1504 年弱でオリオン星雲に到着し、その間に宇宙船の時計が 27 年半だけ時を刻むことがわかったわけだ。

宇宙船からの観測では、観測者が重力場の中にいることを想定して一般相対性理論を用いて時計の読みを計算した。既に説明したように、地球を点 A、加速行程の終了点を点 B、減速行程の開始点(巡航行程の終了点)を点 C、オリオン星雲を点 D として解析した。加速行程と減速行程中は、点 A、B、C、D が重力場を落下する様子を計算した。例えば、加速区間が終了する時刻は点 B が $x = 0$ まで落下する時刻として計算したわけだ。そのような計算によって、加速行程・巡航行程・減速行程が切り替わる時刻を特定した。一方、その間の地球やオリオン星雲の時計の読みは、重力場を落下する物体における固有時間として計算した。そのため、加速行程と減速行程では、地球とオリオン星雲の時計の読みが一致しない現象が確認できた。

表 6.5: 全行程における時計の読み

	地球からの観測		宇宙船からの観測		
	地球の時計 [年]	宇宙船の時計 [年]	地球の時計 [年]	オリオンの時計 [年]	宇宙船の時計 [年]
加速行程	301.8939913	10.9464773	1.8999323	1501.8702271	10.9464773
巡航行程	900.0178235	5.6641503	0.0356466	0.0356466	5.6641503
減速行程	301.8939913	10.9464773	1501.8702271	1.8999323	10.9464773
合計	1503.8058060	27.5571048	1503.8058060	1503.8058060	27.5571048

以上のように、地球からの観測と宇宙船からの観測では、それぞれ、異なる手法で時計の読みが計算されている。しかし、地球を出発した時点とオリオン星雲に到着した時点の時

計の読みは、双方の計算手法で同一の結果が算出された。そのような一致性を確認できたため、「ウラシマ効果を検証できた」と宣言したわけだ。

双子のパラドックスは異なる速度で運動する慣性系どうしの観測で発生する。この例では、巡航行程でパラドックスが発生していることになる。その区間では、地球から観測すると宇宙船の時計が遅く、宇宙船から観測すると地球やオリオン星雲の時計が遅くなっている。遅いほうの時計は速い方に比べ、 6.2934×10^{-3} 倍であるのは、地球から見ても宇宙船から見ても同じである。それは、地球から見た宇宙船の相対速度と、宇宙船から見た地球の相対速度等しいので、当然の現象である。

地球と宇宙船の両者が観測する現象が異なるのは、加速行程と減速行程である。地球は静止系であるので、宇宙船の加減速に関わらず、特殊相対性理論にしたがって、宇宙船の時計の読みが遅れる。それに対し、加速度をもつ宇宙船では、一般相対性理論にしたがい、加速度ベクトルが向かう方向の遠方になるほど時計が速く進む。すなわち、加速区間ではオリオン星雲の時計が速く進み、地球の時計は遅い。減速行程ではその逆であり、地球の時計が速く進み、オリオン星雲の時計は遅い。地球にしてもオリオン星雲にしても、それらの時計は宇宙船から見ると、加速行程、または、減速行程の間に急速に進み、特殊相対性理論の効果で起きる時計の遅れを大きく巻き返し、結局、トータルとして宇宙船の時計の読みを追い越すため、双子のパラドックスを解消するのである。

6.6 推進システムの考察

本節では恒星間航行を実現するため、どれくらいの燃料が必要なのかを考察しよう。結論としては、現代のような化学燃料では絶望的である。核融合を用いたとしても、かなり厳しく、前節までに挙げたような極めて光速に近い速度まで加速するには反物質による推進が必要だろう。

6.6.1 巡航速度の見積もり

宇宙船の推進機構として、燃料を燃焼することによって高エネルギーの推進剤を生み出し、推進剤を噴射することによって加速するものとする。噴射する推進剤の質量を dM とし、推進剤を宇宙船から速度 β_u で噴射したとする。この速度は、光速 c で正規化されているとする。そのとき、静止系から見た運動量保存則は、

$$d\left(\frac{M\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -\frac{\beta - \beta_u}{1 - \beta\beta_u} d\left(\frac{M}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),$$

となる。この数式の左辺が宇宙船の運動量の変化、右辺が噴射された推進剤の運動量である。推進剤の噴射速度は、宇宙船に対する相対速度が β_u だったので、静止系との相対速度は速度合成則によって $-(\beta - \beta_u)/(1 - \beta\beta_u)$ のように変換される。この数式が二つの変数 M と β を含むことに注意し、数式を整理すると、

$$\frac{dM}{M} = -\frac{d\beta}{\beta_u(1 - \beta^2)}, \quad (6.1)$$

が得られる。微分方程式 (6.1) を解くと、

$$\log \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \beta_u \log \frac{M_0}{M}, \quad (6.2)$$

なる解が得られる。なお、積分定数 M_0 は初期状態での燃料満載時の宇宙船の質量である。一方、 M は燃料を噴射した後の宇宙船の質量だ。燃料を使えば使うほど、宇宙船の質量 M が小さくなるので、 M_0/M が増加し、右辺が増加するという具合で数式を見ればよい。上記の解は、

$$\beta = \tanh\left(\beta_u \log \frac{M_0}{M}\right), \quad (6.3)$$

のように書き換えることができる。得られた速度は、 M_0/M について単調増加であるが、双曲線正接関数 (\tanh) で制限されているので 1 未満の値となる。当然であるが、その数式上の性質は、どんなに加速しても光速に到達できないことを示唆している。

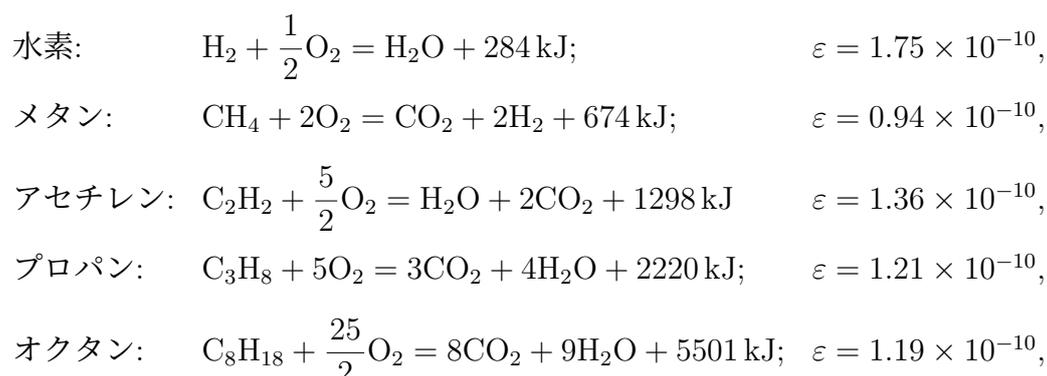
燃料の使用量に対する加速の効率性は、使用する燃料の物性によって異なる。燃料に依存する加速の効率性 (推進効率) が燃料固有のパラメータとなるわけだ。表 6.6 に示すように、燃料の推進効率は推進メカニズムとなる反応の際に生じる質量欠損に起因する。表

表 6.6: 燃料の種類と推進効率 β_u

燃料の種類	質量欠損	推進効率 β_u	噴射速度 [m/s]
化学燃料	1×10^{-10}	1.41×10^{-5}	4.24×10^3
ウラン核分裂	7×10^{-4}	0.0374	1.12×10^7
水素核融合	4×10^{-3}	0.0894	2.68×10^7
反物質	1×10^0	1.0000	3.00×10^8

の中で反物質の場合が最も想像しやすいだろう。陽子と反陽子のような反物質が融合すると、対消滅し、全質量が $E = mc^2$ に相当するエネルギーに変換され、そのエネルギーに相当する光子が放出される。そのため、反物質を燃料とする場合、質量欠損は厳密に 1 となり、噴出される推進剤が光子であり、その噴出速度は厳密に光速と一致するというわけだ。ウラン核分裂や水素核融合は表に記載した質量欠損が生じることがわかっている。その質量欠損分に相当するエネルギーは、原子核反応で生じた物質の運動エネルギーとなる。

化学燃料とは、水素、メタン、プロパンなどの燃焼(爆発)を利用した宇宙船の推進である。化学燃料が化学反応によって熱を発生ということは、エネルギー放出をしていることを意味するので、当然、 $E = mc^2$ に相当する質量欠損が発生している。いくつかの化学燃料の燃焼反応の例は下のように挙げられる。質量欠損が 10^{-10} 程度であることがわかる。化学反応で取り出せるエネルギーはこの程度なのだ。核分裂に比べると6桁、核融合に比べると7桁も小さいことがわかる。同時に、火薬を用いた兵器との比較で、核兵器がいかに危険であるかも想像できるだろう。



質量欠損は、相当するエネルギーを推進剤の運動エネルギーに変換する。燃料の質量を m とすると、燃焼反応によって変換されるエネルギーが εmc^2 となり、残された質量 $(1 - \varepsilon)m$ の運動エネルギーである。その状況を素直に方程式として書き下すと、

$$\varepsilon mc^2 = (1 - \varepsilon) mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} - 1 \right),$$

となる。なお、 β_u は結果的として得られる推進剤の速度 (光速で正規化) である。方程式を解くと、結果として、推進剤の速度:

$$\beta_u = \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}, \tag{6.4}$$

が導かれる。この推進剤の速度を (6.3) に代入すれば宇宙船が到達する速度を計算できる。その計算結果は図 6.6 のようになる。化学燃料 (chemical) が他の燃料に比べ到達速度が著しく低いのは質量欠損が際立って小さいからだ。

人類がすでに経験している事例で検証してみよう。スペースシャトルは衛星軌道上を質量 80 トンのオービタが周回する。オービタは巨大な燃料タンクとともに打ち上げられ、その時点での総質量は約 2000 トンである。つまり、軌道を周回するスペースシャトルは M_0/M が 20 を超える条件となっている。図 6.6 において、 $M_0/M = 20$ で chemical 曲線を読むと、到達速度は $\beta = 3 \times 10^{-5}$ となっている。これは、9 km/s の速度に相当する。軌道上での周回速度が 7.66 km/s であり、高さ 410 km に相当する位置エネルギーを余分に与える必要を考えると、図 6.6 は概ね事実と合致しているといえるだろう。

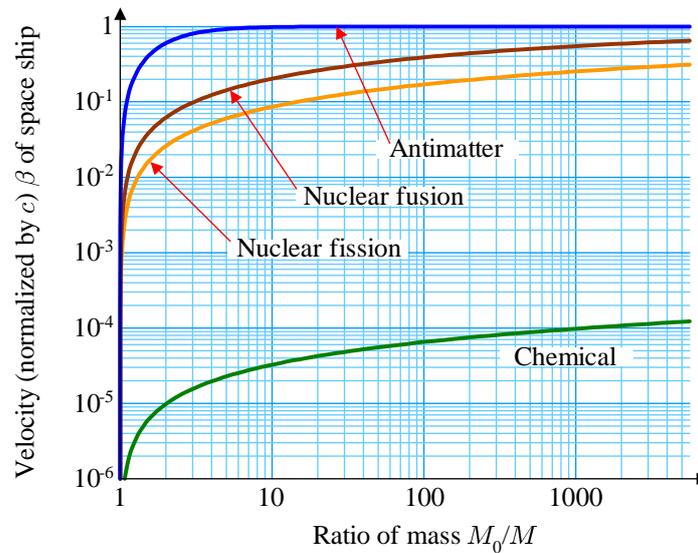


図 6.6: 推進剤と宇宙船の到達速度

核融合を宇宙船の推進に使う場合、 $M_0/M = 10$ を想定するなら、光速の 20%程度までは加速できそうである。とはいえ、停止(減速)するためにも燃料が必要なことを忘れてはいけない。スペースシャトルの場合、地球の近傍で周回しているだけだったので、帰還する際には地球の重力を利用して降下すればよかった。それに対し、亜光速まで加速した宇宙船は天体の重力を簡単に振り切ってしまうので、重力に捕捉してもらうことは期待できず、自ら減速して目的地で停止しなければならないのだ。その場合、減速前の質量 M_0 と停止時の質量 M としたとき、 $M_0/M = 10$ の条件をつくり出す必要がある。具体的には、燃料を除く宇宙船の質量が 10 トンであれば、990 トンの燃料を積み、合計 1000 トンの状態で地球を出発するのだ。燃料を 900 トン使って総質量が 100 トンになって時点で、光速の 20%で巡航行程に入る。減速行程に入ったら、残りの 90 トンの燃料で減速し、目的地で総質量 10 トンになった時点で停止する、といった具合だ。

反物質の対消滅が使えるようになれば、宇宙船の推進効率はさらに向上する。図 6.6 の Antimatter 曲線が $\beta = 1$ に近く、数値を読むのが難しいので数式 (6.3) によって計算すると、質量の条件 $M_0/M = 5.76$ で $\beta = 0.99998$ まで加速できるのだ。この速度は本章で解析したオリオン星雲までの航行における巡航速度である。先ほど述べたように、減速時も同様なので、地球を出発する際に宇宙船の質量の 32.18 倍の燃料を積み、総質量を 33.18 倍にした状態で加速を開始する。予定通りの燃料を使い、宇宙船の質量の 5.76 倍になった時点で巡航行程に移す。減速行程では予定通りにすべての燃料を使い果たした時点でオリオン星雲で停止できるのだ。

6.6.2 エネルギー効率

ロケットのように推進剤を後方に噴出し、運動量保存法則によって推進するシステムは低速でのエネルギー効率が悪い。この場合のエネルギー効率とは、燃料から引き出したエネルギーを宇宙船の運動エネルギーに変換できる割合を意味する。

低速での効率の悪さを実感するため、質量 1000 kg の自動車にロケット推進で $v = 40 \text{ km/h}$ まで加速することを考えよう。既に導出したように、質量 M_0 の状態から燃料の噴出によって質量が M に減少したとき、その燃料噴出によって速度が、

$$\beta = \tanh\left(\beta_u \log \frac{M_0}{M}\right),$$

となる。速度 40 km/h は $\beta = 3.71 \times 10^{-8}$ に対応することに注意して上記の方程式を解くと、 $\log(M_0/M) = 2.62 \times 10^{-3}$ であることが特定できる。ここでは、ガソリンエンジンを想定して $\varepsilon = 10^{-10}$ とした。得られた解は、 $M_0 = (1 + 2.62 \times 10^{-3})M$ であることを意味する。つまり、1000 kg の車体に対して 2.62 kg のガソリン²を燃焼させて排気ガスを噴出すると 40 km/h まで加速するという計算だ。その量のガソリンを燃焼して取り出せるエネルギーは $2.36 \times 10^7 \text{ J}$ である。それに対して、1000 kg の自動車が 40 km/h で走行するときの運動エネルギーが $6.17 \times 10^4 \text{ J}$ なので、エネルギー効率はわずか 2.61×10^{-3} となる。つまり、生み出されたエネルギーの 1% さえも運動エネルギーには変換されていないのだ。

エネルギー効率を定式化するため、燃料から生み出されるエネルギーと、実際に変換される運動エネルギーとの関係を調べてみよう。燃料はから生み出されるエネルギーは、初期状態 M_0 から対象とする M までの質量変化が効率 ε で生み出すエネルギーなので、

$$E = \varepsilon M c^2 \left(\frac{M_0}{M} - 1\right),$$

である。それに対し、質量 M が速度 β (光速で正規化) で運動するときの運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} E_k &= M c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = M c^2 \left[\sinh\left(\beta_u \log \frac{M_0}{M}\right) - 1\right] \\ &= 2 M c^2 \sinh^2\left(\frac{\beta_u}{2} \log \frac{M_0}{M}\right), \end{aligned}$$

となる。これらを比較すると、エネルギー効率 $\eta = E_k/E$ が、

$$\eta = \frac{2 \sinh^2[(\beta_u/2) \log(M_0/M)]}{\varepsilon (M_0/M - 1)}, \quad (6.5)$$

であることがわかる。低速域での振る舞いを見るため、質量変化が小さいときに着目し、 $M_0/M \equiv 1 + \delta$ とおいて、 δ の 1 次近似をとると、

$$\eta \simeq \frac{\beta_u^2 \delta}{2\varepsilon} \simeq \delta,$$

²実は、この計算では、ガソリンの質量だけでなく、燃焼に必要な酸素の質量も含まれている。

が得られる。つまり、低速域でのエネルギー効率は推進剤の噴出量に比例するのだ。自動車程度の速度でロケットのような推進システムを使うのは非常に効率が悪いということだ。

エネルギー効率 (6.5) は推進剤の噴出量によって図 6.7 のように変化する。化学燃料 (chemical), 核分裂 (nuclear fission), 核融合 (nuclear fusion) は、同一ではないがほぼ同じ曲線を描き、最大効率が 0.65 程度である。反物質 (antimatter) は、 M_0/M に対して単調増加となり、推進剤の噴出量が大きくなると 0.5 に近づく。これらの結果を見ると、反物質以

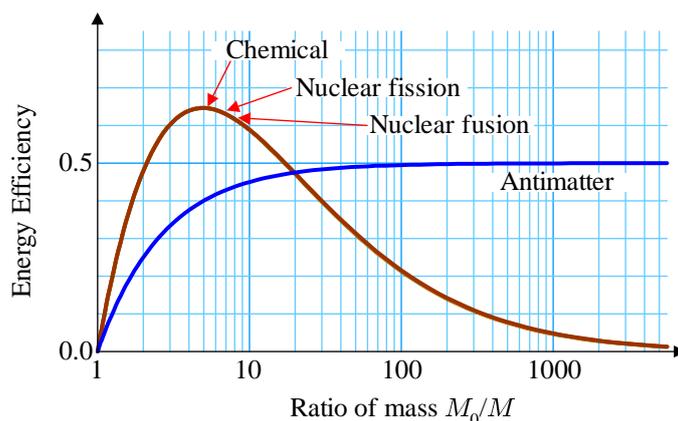


図 6.7: 推進剤の噴出によるエネルギー効率

外は燃料を多く積みすぎると、エネルギー効率が悪化していく。特に、スペースシャトルではすでに最大効率となる条件を超えているのだが、化学燃料で地球の重力を振り切ることがそれほどのインパクトがあるということなのだ。エネルギー効率が最大となる $M_0/M \simeq 5$ で図 6.6 を改めて読むと、核分裂で光速の約 6%, 核融合で光速の約 14% が推進剤を噴射することによる到達速度の限界と考えればよいだろう。

6.6.3 恒星間航行の実現性

反物質の対消滅を使えば、 $M_0/M = 5.76$ の条件で本章の恒星間航行を実現できるとはいえ、実用性を考えると疑問が大きい。当然、減速するためのエネルギーも感がなければならぬため、上に書いたように宇宙船本体の 32 倍以上の燃料を積んでの出発となることが問題なのだ。減速の後期に至るまで、宇宙船本体よりも燃料の質量が大きいため、実質的に燃料を加速するためにエネルギーを消費しているわけだ。加速や減速のために事前に持ち込んだ燃料を使っているからそうなるわけである。

燃料を積載せず、航行しながらエネルギーを取り込むことはできないだろうか？ 宇宙空間には 1 cm^3 に 1 個程度の核子、あるいは、水素原子が漂っているといわれる。そのよう

な物質は星間物質と呼ばれることがある。宇宙船の前方に星間物質を取り込む機構を装備すれば、航行しながらエネルギーを収集できるという考え方だ。宇宙船の前方に半径 50 m の円形で星間物質を取り込む機構を設ける。かなり大きな仕掛けだが、光速の 10% の速度で航行したときに取り込める星間物質の個数を計算すると、毎秒 2.36×10^{17} 個の核子を取り込めるという計算になる。核子 1 個当たりの質量が 1.67×10^{-27} kg なので、この時点で有望な気がしないのだが、計算を進めてみる。単位時間あたりに集められる核子の質量は、 3.94×10^{-10} kg となる。それらを核融合してエネルギーを取り出すならば、約 0.4% の質量欠損が生じ、その欠損に相当するエネルギーを取り出せるわけだ。単位時間に取り出せるエネルギー (仕事率) は 142 kW のように計算できた。この仕事率は約 200 馬力に相当し、長期間にわたり人の居住を支える建造物を加速する量としてはあまりにも小さい値である。

宇宙船の質量を 1000 トンとした場合、光速の 10% の速度で、 5 m/s^2 の加速度で推進するには、 1.5×10^{14} W の仕事率でエネルギーを供給しなければならない。これを星間物質で供給するには、全段落の計算からの類推で半径 160 km で星間物質を取り込まなければならない。そのような巨大な建造物の実現性だけでなく、その巨大な建造物を含んだ宇宙船を 1000 トンで構成できなくなるので、宇宙船はさらに巨大質量の建造物となる。そうなると、さらに巨大なエネルギーの取り込み口が必要になるというありさまだ。仮に反物質をエネルギー源とした場合、本節の計算より 250 倍の効率が実現できるが、それでも実現性は厳しいだろう。

第7章 観測に関する考察

加速度場では位置によって光速や時間の尺度が異なるため、われわれの日常とは似つかない不可思議な現象が起きる。その代表的な現象が、双子のパラドックスで見たように、宇宙船から見た地球の時計が巡航時にほとんど動かず、Uターンをする一瞬で何年もの時間が経過するような例である。本章では解析をするにあたり、地球から見た宇宙船の時計のような表現を用いてきた。しかし、何光年もの先の現在状況が見えることは、光速が有限であることを考えるとあり得ない現象である。本章では、加速度場において見かけの時間の逆行が生じる例を挙げ、観測について改めて考察する。

7.1 時間の逆行

既に学んだように、加速度 a による加速度場では $x = -c^2/a$ に事象の地平面が現れ、事象の地平面からの距離に比例して光速 $c(x)$ が増加する。具体的に書くと、加速度場における光速は $c(x) = (1 + ax/c^2)c$ となる。さらに、固有時間の微分が、

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} c(x) dt,$$

と書けることから、時間の尺度も事象の地平面からの距離に比例していることがわかる。この数式から、事象の地平面では固有時間が動かないことがわかる。さらに、事象の地平面を超えた場所では、 $c(x)$ が負の値となるので $d\tau$ が負の値になる。つまり、事象の地平面を超えた場所では時間が逆行することになる。

前章までは、時間の逆行については特に触れなかった。事象の地平面を越えた場所では、情報の伝達が不可能だから特に気にしなかったのである。ところが、一定の加速度 a を永久に維持するのは不可能である。加速度が変化すれば事象の地平面の位置が変わることになる。すると、かつて観測不能だった領域が観測可能になり、時間の逆行を認めざるを得ない場合があるのではないか？

前章で扱った地球からオリオン星雲への航行を題材に、宇宙船が航路の途中で急停止した場合を考えてみよう。非現実的な過程だが、宇宙船が巡航区間の midpoint で一瞬にして（地球とオリオン星雲に対して相対的に）静止したとする。これを地球やオリオン星雲から観

測すると、宇宙船は、地球から 750 光年離れた場所で、突然、静止するように見えることだろう。このような急停止をすると、計算上、静止系の固有時間が逆行する現象が導かれるのだ。

7.1.1 急停止による時間の逆行

宇宙船から地球やオリオン星雲を見た場合を考えよう。急停止する直前の状態として、前章の計算結果から、地球は $x = -4.7200318$ 光年に、オリオン星雲は $x = 4.7200318$ 光年に位置する。地球やオリオン星雲の相対速度は、光速に対する速度比として $\beta = -0.9999801965$ である。その速度によるローレンツ収縮比は $\sqrt{1-\beta^2} = 6.293375741 \times 10^{-3}$ である。速度比 β の状態から、加速度を a によって静止にいたるまでの時間を t とすると、 $\tanh(at/c) = \beta$ なる関係が成立する。それは、静止状態から速度比 β までを加速度 a で加速する時間と等しいと考えれば理解できるだろう。

急停止後の宇宙船から見て、地球とオリオン星雲がどこに存在するかを計算しよう。その計算には公式:

$$1 + \frac{a}{c^2}x = \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh}\beta_0\right),$$

を用いればよい。この公式に対して、 x_0 は宇宙船から見た地球やオリオン星雲の位置を、 β_0 にはその速度比を代入すればよい。上で述べたように $\tanh(at/c) = \beta$ であるので、双曲線正割関数 (sech) に与える変数はゼロなる。宇宙船が瞬時に停止することから $a \rightarrow -\infty$ の極限をとると $x = x_0/\sqrt{1-\beta^2}$ となるので、停止後の状態として、地球が 750 光年後方に、オリオン星雲が 750 光年前方に位置することが導かれる。当然の結果であるが、その位置は地球やオリオン星雲から見た観測結果と合致する。

次に、急停止中における地球とオリオン星雲の固有時間の動きを計算してみよう。今回のように、急停止する間の固有時間の動きを計算するのに便利な公式が、前に導出されている。その公式は、

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{\beta_0 - \beta}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right),$$

である。この数式の中で、 β_0 は急停止直前の速度比で、 β は最終状態の速度である。つまり、この例では $\beta = 0$ である。さらに、 $a \rightarrow -\infty$ の極限をとると、 $\tau = (x_0/c) \cdot \beta_0 / \sqrt{1-\beta_0^2}$ となる。急停止の直前では、地球とオリオン星雲は $-x$ の方向に運動するため $\beta_0 < 0$ である。つまり、 $x_0 > 0$ に位置する物体の固有時間は逆行することになる。時間の逆行は物理学として考え難い現象であるが、気にせず計算してみよう。地球の初期位置が $x_0 = -4.7200318$ 光年であるので、急停止の間に地球の固有時間は 749.9851474 年経過する計算になる。一方、オリオン星雲の初期位置が $x_0 = 4.7200318$ 光年であるので、オリオン星雲の固有時間は 749.9851474 年逆行する。したがって、急停止の直後、地球とオリオン星雲の固有時間

はどちらとも、宇宙船の出発時からの積算で 751.9029030 年を刻んでいることになる。地球とオリオン座の固有時間は、恒星間航行の途中では互いに異なる値であるのだが、宇宙船が相対的に停止すると、互いに同じ値を示す。固有時間の逆行は理解し難いが、宇宙船が停止状態になったときの地球とオリオン星雲の固有時間の比較では物理学的に妥当な結果になっている。時間の逆行が非現実的であるにも関わらず、時間の逆行を支持するかのよう計算結果が得られたことになる。これでは、非現実的だからといって時間の逆行を捨て去ることも躊躇してしまう。続いて、時間の逆行について考察してみよう。

7.1.2 時間の逆行は観測されるか？

急停止の間、前方 ($x > 0$) の物体の固有時間が逆行することが導かれた。時間の逆行は発生しないと考えられている物理現象である。そこで、この時間の逆行は計算上の導出されるが、決して観測されないと考えてみよう。これまでの説明で「観測者から見て」という表現を用いてきたが、実際に観測者が目で見た (観測した) 現象を計算したわけではない。観測をするには、何らかの手段で対象物の情報を伝達する必要がある。情報は有限の伝達速度 (光速を超えない速度) で伝達されることに注意すべきである。

座標の原点にいる観測者の時計で $t < 0$ のとき、測定対象の物体は観測者に対して x 軸方向に $-\beta$ の速度比で運動している。時刻 $t = 0$ のとき、観測者は急加速度をもってその物体に対して静止状態に遷移した (すなわち急停止した) とする。急停止の直前、物体は $x = \sqrt{1 - \beta^2} x_0 (> 0)$ に位置していたとする。なお、 $t \neq 0$ のとき観測者は等速度運動をしている。また、物体は急停止の前後に関係なく、自らの固有時間で一定周期で光の信号を送信していたとする。観測者はその信号を受信し、回数を数えることで物体の時計を観測できたとしよう。

上記の舞台設定で、急停止の前に送信され、急停止の後に受信される光について考えてみよう。具体的に、その光の発信時刻を観測者の時計で $t = -t_A$ とする。光源となる物体は $t = 0$ のとき、 $x = \sqrt{1 - \beta^2} x_0$ に存在するのだから、光が発射される場所は、

$$x(-t_A) = \sqrt{1 - \beta^2} x_0 + \beta ct_A,$$

である。その光が時刻 $t = 0$ (急停止の直前) に到達する場所は、

$$x_A = x(-t_A) - ct_A = \sqrt{1 - \beta^2} x_0 - (1 - \beta) ct_A,$$

のように計算される。この光が急停止の直後にどこに位置するかを計算してみよう。急停止をする間、観測者は加速度場にいるので、光の速度は必ずしも c ではなく、

$$c(x) = \frac{dx}{dt} = -c \left(1 + \frac{a}{c^2} x \right),$$

のように x に依存する。光速 $c(x)$ の符号を負に選んでいるのは、 $x > 0$ から観測者に接近する光を想定しているからである。とはいえ、 $a < 0$ を仮定しているため、そのように選んだ光が観測者に接近する条件は $x < -c^2/a$ に限られる。例えば、 $a = 5 \text{ m/s}^2$ ならば観測者の前方 1.9 光年未満からの光は観測者に接近するが、距離 1.9 光年を越える前方の光は観測者から遠ざかっていく。その境界となる $x = -c^2/a$ は事象の地平面である。加速度場では、事象の値平面を挟んで光の伝搬方向が逆転する。

そのような条件の光について微分方程式を解くと、座標 x_A を出発して時間 t にわたって伝播した光の到達位置 x は、

$$1 + \frac{a}{c^2}x = \left(1 + \frac{a}{c^2}x_A\right) e^{-at/c},$$

によって計算できる。さらに、 $a \rightarrow -\infty$ の極限をとれば、

$$x = x_A e^{-at/c} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} x_A,$$

が得られる。このような極端な急停止を仮定すると、 $x > 0$ の領域はすべて事象の地平面を越えた領域となり、本来、観測者に接近するはずの光が観測者から遠ざかるという奇妙な現象が現れる。それによって、観測者の時計で時刻 $t = -t_A$ に送信された光が時刻 $t = 0$ に到達する位置は、

$$x = (1 + \beta)x_0 - \sqrt{1 - \beta^2} ct_A,$$

となる。急停止の後、観測者の加速度がゼロに戻るのだから、その光は再び速度 c で観測者に接近することになる。対象物体から光が一定の周期でパルス状に送信されたとする、光のパルス列が x 軸上に一定間隔で並んでいるはずである。急停止の後でも光のパルスの列は等間隔で並んでいる。しかも、早い時刻に送信された光のほうが、後に送信された光よりも観測者に近い位置に存在することは急停止後も変わらない。ただし、注意することがある。一瞬の急停止の間に、光源となる物体も、光の列も観測者から遠ざかっているのだが、光の列が光源を追い越してさらに遠くに移動している場合があるのである。急停止の直後、物体の位置は x_0 になっているのだから、

$$x_0 \geq (1 + \beta)x_0 - \sqrt{1 - \beta^2} ct_A,$$

を t_A について解けば、光源を追い越す光の条件が求められる。すなわち、

$$t_A \geq \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{x_0}{c},$$

が急停止の間に光が光源を追い越す条件である。言い換えると、過去の時刻:

$$t = -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{x_0}{c},$$

に送信された光が光源と同じ場所に存在していることになる。つまり、減速によって物体は、その過去の状態に戻った、すなわち、時間を逆行したと解釈することもできるのである。

7.1.3 時間の逆行の例

急停止による時間の逆行の例を示そう。観測者は静止系に対して x 軸方向に速度 $0.6c$ で等速運動している。静止系に存在する点 A から、その固有時間にして 1 年周期で光が発信されている。観測者は時刻 $t = 0$ で急停止をする。観測者から見ると、急停止の直前に点 A は $x = 4$ 光年に存在していた。

急停止前、物体 A は観測者に速度 $0.6c$ で接近している。この時点で物体 A の固有時間は、観測者の時計と比較して 80% の速さで時を刻むので、1 年周期で送信される光のパルスは、 x 軸上に 0.5 光年間隔で配置されている。光は速度 c で観測者に到達するので、急停止前の観測者は 0.5 年周期で光を受信する。この受信間隔は、ドップラ効果でも計算できる。

急停止をすると、物体 A はローレンツ収縮率が回復するため、図 7.1 に示すように $x = 5$ 光年に飛び移る。一方、観測者に接近していた光は、急停止の瞬間に、式 (5.28) によって、 x 座標が 2 倍になる。つまり、 $x = 2.5$ 光年に存在していた光が急停止の結果、物体 A と同一の位置 $x = 5$ 光年に存在する。この光は、3 年前に発信された光であるのだが、急停止によって再び発信される位置に戻ったことになる。この現象を、時間が 3 年間逆行したと解釈するのである。また、図 7.1 に示すように、停止前に 0.5 光年間隔で並んでいた光は、停止後には 1 光年間隔で並んでいる。図中の光のそばに書いた数値は光が点 A から送信さ

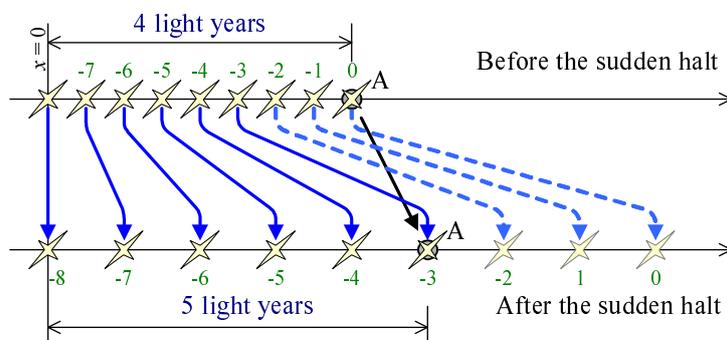


図 7.1: 急停止の前後での光源と光の位置

れた時刻を示す。例えば、数値 -2 を付した光は、点 A の固有時間で $\tau = -2$ 年に送信されたことを意味する。急停止後の光は、1 光年間隔で並び、速度 c で観測者に接近しているので、1 年周期で観測者に到達することになる。しかも、先に送信された光から順に観測者に到達するのである。つまり、急停止によって物体 A の固有時間が逆行することが計算されているのだが、その現象は決して観測されないのである。いかなる観測者にも観測されない事象は発生していないことと同じである。したがって、急停止による固有時間の逆行は、一般相対性理論による計算上の現象であって、現実には発生しないと考えるべきで

ある。よって、因果性が破綻する、もしくは、タイムマシンが実現できるなどの心配(期待)は無用である。

もう一つ補足しておく。この時間の逆行は、特殊相対性理論で示された同時性の不一致によるものである。静止系を K 系、停止前の観測者の座標系を K' 系とする。K 系は K' に対して $-\beta$ の速度比で x 軸方向に運動しているため、

$$t = \frac{t' + \beta x'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

で時間に変換される。この数式に $\beta = 0.6$, $t' = 0$, $x' = 4$ 光年を代入すると、 $t = 3$ 年が得られる。この結果は、急停止の直前、 $x' = 4$ 光年に位置する K 系の時計は、観測者の時計より 3 年早いことを意味する。急停止することによって、観測者は K 系に移ったため、それまで 3 年早かった物体 A の時計が逆行し、観測者と同じ時刻を指すようになったのである。

7.2 有限の加速度による時間の逆行

前節では非現実的な急停止において、ある観測対象の固有時間が計算上、逆行することを紹介した。しかし、その時間の逆行は観測されることがないとの結論を得た。前節で明確になったように、固有時間の逆行は、加速度場における事象の地平面を超えた領域で発生する。ということは、有限の加速度の場合も、事象の地平面を超えた領域で固有時間の逆行が発生するということだ。

加速度が有限の場合でも同様に、時間の逆行は計算として導かれた現象であり、観測が不可能であることを示そう。

7.2.1 加速前に発射された光

観測者が初期状態で、座標の原点 O で基準の慣性系に対して静止していたとする。その観測者が時刻 $t = 0$ で x 軸方向に加速度 a で加速度運動を開始した。一方、基準慣性系の x 軸上の x_0 に位置する点 A は、観測者が加速度運動を開始する前から、自分の固有時間 τ に対応して一定間隔で観測者に向かって光を発射しているとする。加速する観測者はその光をどのような間隔で受信するか考えてみよう。なお、観測者の時計で $t = 0$ のとき、点 A の固有時間は $\tau = 0$ のように時計合わせされているとする。

点 A から発射された光を観測者が受信する間隔は次のように評価しよう。まず、点 A では固有時間が τ_A のときに光を発射したとする。その光が、観測者の時計で t_0 のときに受信されたとする。そのとき、 $d\tau_A/dt_B$ によって受信間隔が評価できる。この値は、観測者の

時計で1秒あたりに観測する点Aの時計の進み具合を表している。例えば、 $d\tau_A/dt_B = 0.5$ であれば、点Aの時計は観測者の時計の0.5倍の速度で時を刻んでいるということである。

観測者が加速する前に受信する光については簡単である。なぜなら、観測者と点Aは同一の慣性系にいたので時間の尺度が同じである。つまり、 $d\tau_A/dt_B = 1$ となるはずである。これを確認するのも容易である。点Aの固有時間 τ_A に発射された光が観測者によって受信される時刻は $t_B = \tau_A + x_0/c$ となる。したがって、 $d\tau_A/dt_B = 1$ となるのである。なお、これは観測者が加速を開始する前なので、 $t_B < 0$ と $\tau_A < 0$ が成立することが条件である。

次に、観測者の加速前に発射され、加速中に受信する光について考えてみよう。この場合は、加速を開始する時点 $t = 0$ での光の到達位置 x_A を計算し、その位置を初期座標として等加速度場における光の伝播時間を計算すればよい。まず、等加速度場の座標 x_A から発射される光が原点にいる観測者によって受信される時間を計算しておこう。等加速度場では光速が場所によって異なることに注意して、

$$\begin{aligned} t_{AB} &= \int_{x=x_A}^{x=0} dt = \int_{x_A}^0 \frac{dt}{dx} dx \\ &= -\frac{1}{c} \int_{x_A}^0 \left(1 + \frac{a}{c^2} x_A\right)^{-1} dx = \frac{c}{a} \log \left(1 + \frac{a}{c^2} x_A\right), \end{aligned}$$

のように計算される。ところで、点Aの固有時間 τ_A に発射された光は、時刻 $t = 0$ には、 $x_A = x_0 + c\tau_A$ に到達しているはず(ただし、 $\tau_A < 0$)である。これを上の数式に代入し、観測者が受信する時刻を計算すると、

$$t_B = 0 + t_{AM} = \frac{c}{a} \log \left(1 + \frac{a}{c^2} x_A + \frac{a}{c} \tau_A\right),$$

となる。この結果を微分すると、

$$\frac{d\tau_A}{dt_B} = 1 + \frac{a}{c^2} x_A + \frac{a}{c} \tau_A = e^{at_B/c},$$

が得られる。第5章で示したように、等加速度場を自由落下する物体の速度を、

$$\frac{dx}{dt} = -c(x) \beta(t),$$

のように、座標で決まる光速と、光速に対する速度比の積で表現する場合、 $\beta(t_B) = \text{artanh}(at_B/c)$ となる。これを意識して $e^{at_B/c}$ を変形すると、

$$\begin{aligned} e^{at_B/c} &= \frac{\cosh(at_B/c) + \sinh(at_B/c)}{\sqrt{\cosh^2(at_B/c) - \sinh^2(at_B/c)}} \\ &= \frac{1 + \tanh(at_B/c)}{\sqrt{1 - \tanh^2(at_B/c)}} = \frac{1 + \beta(t_B)}{\sqrt{1 - [\beta(t_B)]^2}}, \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\frac{d\tau_A}{dt_B} = \frac{1 + \beta(t_B)}{\sqrt{1 - [\beta(t_B)]^2}},$$

となる。この時間の尺度の比率は、点 A の相対速度によるドップラ効果による周波数の比率と一致する。この結果から考えると、異なる尺度で時を刻む他の観測者の時計はドップラ効果で説明できると推測できる。その推測が正しいければ、重力理論で計算された数値は、計算結果にすぎず、観測されることはない。他の時計の読みはドップラ効果にしたがって観測される。その推測が正しいか、もう少し考察を続けて判断しよう。

7.2.2 加速中に発射された光

加速度 a で観測者が加速する間に、異なる場所から光が発射され、同一の加速度で加速している間に光を受信した場合を考えよう。観測者の時計で時刻 t_A に光が発射されたとする。その場合、観測者から見た光の発射位置は、

$$x_A = \left(x_0 + \frac{c^2}{a} \right) \operatorname{sech} \frac{at_A}{c} - \frac{c^2}{a},$$

となる。この光が観測者に到達する時刻は、

$$\begin{aligned} t_B &= t_A + \frac{c}{a} \log \left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right) \\ &= t_A + \frac{a}{c} \log \left[\left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \operatorname{sech} \frac{at_A}{c} \right], \end{aligned}$$

となる。この時刻を t_A で微分すると、

$$\frac{dt_B}{dt_A} = 1 + \tanh \frac{at_A}{c},$$

となる。

一方、点 A の固有時間 τ_A と観測者の時計で計測する時間 t_A の間の関係は、加速度場の線素から導くことができる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} d\tau_A &= \frac{1}{c} \sqrt{\left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right)^2 c^2 dt^2 - dx_A^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx_A}{dt_A} \right)^2} dt_A \\ &= \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \operatorname{sech}^2 \frac{at_A}{c} \cdot dt_A, \end{aligned}$$

が得られる。よって、点 A から光が発射される時刻 τ_A (点 A の固有時間) を光の到達時刻 t_B で微分した値は、

$$\frac{d\tau_A}{dt_B} = \frac{d\tau_A}{dt_A} \frac{dt_A}{dt_B} = \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \left(1 + \tanh^2 \frac{at_A}{c} \right),$$

となる。一方, $e^{at_B/c}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} e^{at_B/c} &= e^{at_A/c} \cdot \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0\right) \operatorname{sech} \frac{at_A}{c} \\ &= \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0\right) \left(1 + \tanh^2 \frac{at_A}{c}\right), \end{aligned}$$

であり, 前節での計算過程から $e^{at_B/c} = (1 + \beta)/\sqrt{1 - \beta^2}$ なる関係が成立することがわかっている。点 A が光を発射する頻度と観測者が光を受信する頻度の関係は,

$$\frac{d\tau_A}{dt_B} = \frac{1 + \beta(t_B)}{\sqrt{1 - [\beta(t_B)]^2}},$$

のように計算される。この結果は, 特殊相対性理論において速度 $\beta(t_B)$ で接近する光源によるドップラ効果を表している。この計算結果から, 加速度による重力場の中で観測される信号の受信頻度は, 光源の落下速度に起因するドップラ効果が現れ, 加速度に依存しないことがわかる。

7.2.3 一般の場合

基準の慣性系に固定された点 A が, その固有時間に対して一定の周期で光を発射した場合, 加速度運動する観測者がその光を受信する周期が互いの相対速度によるドップラ効果で説明できることを二つの運動条件について証明した。その二つの運動条件とは, 観測者が等加速度運動を開始するより前に光が送信された場合と, 等加速度運動中に光が送信された場合である。

前節までに示した二つの運動条件には共通点があり, その共通点は加速度が一定でない一般の運動状況であっても成立するため, 観測者が光を受信する周期は観測者と点 A の相対速度によるドップラ効果で説明できるのである。その共通点とは, 受信前の光の信号が観測者から見ると x 軸上に等間隔で配置されていることである。

特殊な場合として, 点 A が $x = x_0$ に静止している (しかも, 観測者の加速度もゼロ) の場合を考えてみよう。光が点 A の固有時間で $d\tau$ の間隔で送信されているとする。互いに静止しているので, 観測者の時間の尺度も点 A の尺度と一致する。そのとき, 受信前の光は観測者から見ると, x 軸上に $c d\tau$ の間隔で均等に配置されている。その光の列が速度 c で観測者に到達するので, 観測者は $dt = d\tau$ の周期で光を受信することになる。つまり, この場合, 点 A が光を発射する周期と観測者が受信する周期が一致している。

意外に思えるかもしれないが, 観測者が加速度運動している場合も同様に, 受信前の光は観測者から見て x 軸上に均等配置されている。まず, 点 A が $x = x_A$ に位置するとき

光を発射したとする。発射から t だけ時間経過したときの光の位置は、

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right) e^{-at/c} - 1 \right],$$

によって計算できる。この関係式は、

$$\frac{dx}{dt} = -c \left(1 + \frac{a}{c^2} x \right),$$

を積分することによって得られる。観測者が加速度 a で運動し、観測者の時計で時刻 t_A に $x = x_A$ に位置する点 A が光を発射したとする。便宜上、その加速度から逆算して点 A が観測者に対して相対的に静止していた時刻が $t = 0$ となるように時間が定義されているとする。また、 $t = 0$ のときの点 A の位置を x_0 とする。このような状況設定において、時刻 t における光の位置は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{a} \left[\left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right) e^{-a(t-t_A)/c} - 1 \right] \\ &= \frac{c^2}{a} \left[\left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) e^{-a(t-t_A)/c} \operatorname{sech} \frac{at_A}{c} - 1 \right], \end{aligned}$$

となる。点 A の固有時間で一定周期で発射された光が観測者から見て等間隔に配置されるのであれば、 $dx/d\tau$ が定数になるはずである。まず、光の位置 x を観測者の時計で測った発射時刻 t_A で微分すると、

$$\frac{dx}{dt_A} = c \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) e^{-at/c} \operatorname{sech}^2 \frac{at_A}{c},$$

が得られる。一方、観測者の時計による時刻 t_A と点 A の固有時間 τ は加速度場の線素から、

$$\frac{d\tau}{dt_A} = \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \operatorname{sech}^2 \frac{at_A}{c},$$

なる関係で結ばれることがわかる。これらから、 x を τ に微分した場合の微分係数を計算すると、

$$\frac{dx}{d\tau} = c e^{-at/c} = c \frac{1 - \beta(t)}{\sqrt{1 - [\beta(t)]^2}},$$

となる。この結果は、発射時刻 t_A (または τ) を含まないので定数である。つまり、観測者が加速度運動していても、受信前の光は観測者から見て x 軸上に等間隔に配置されている。光の送信周期が点 A の固有時間で $d\tau$ であるならば、観測者から見て x 軸上に均等配置される光の間隔は、

$$dx = c d\tau \frac{1 - \beta(t)}{\sqrt{1 - [\beta(t)]^2}},$$

となるのである。また、加速度運動をしていても、観測者の近傍では光速はやはり c であるので、光を受信する周期が

$$dt = \frac{dx}{c} = \frac{\sqrt{1 - [\beta(t)]^2}}{1 - \beta(t)} d\tau = \frac{1 + \beta(t)}{\sqrt{1 - [\beta(t)]^2}} d\tau,$$

となり、ドップラ効果で説明できる結果となる。ところで、均等配置される光の間隔が $ce^{-at/c}$ の形で書かれると、その値が加速度 a に依存するよう見えるかもしれない。しかし、上に書いたように、時刻 t における速度比 $\beta(t)$ だけに依存する形となるため、均等配置された光の間隔、さらには、光を受信する周期は加速度には無関係となる。したがって、等加速度運動以外の運動形態においても、光の受信周期はドップラ効果で予想される周期と一致するのである。

数式だけではイメージがつかみにくいかもしれないので、実際に計算した例を示そう。図 7.2 には加速度運動する観測者から見た点 A の位置 (O 印) と、点 A から発射された光の位置 (X 印) を示している。横軸は観測者から見た x 座標 (観測者の位置は $x = 0$) であり、縦軸は点 A の固有時間の単位で時間の経過を示している。光の位置 (X 印) に付した数字

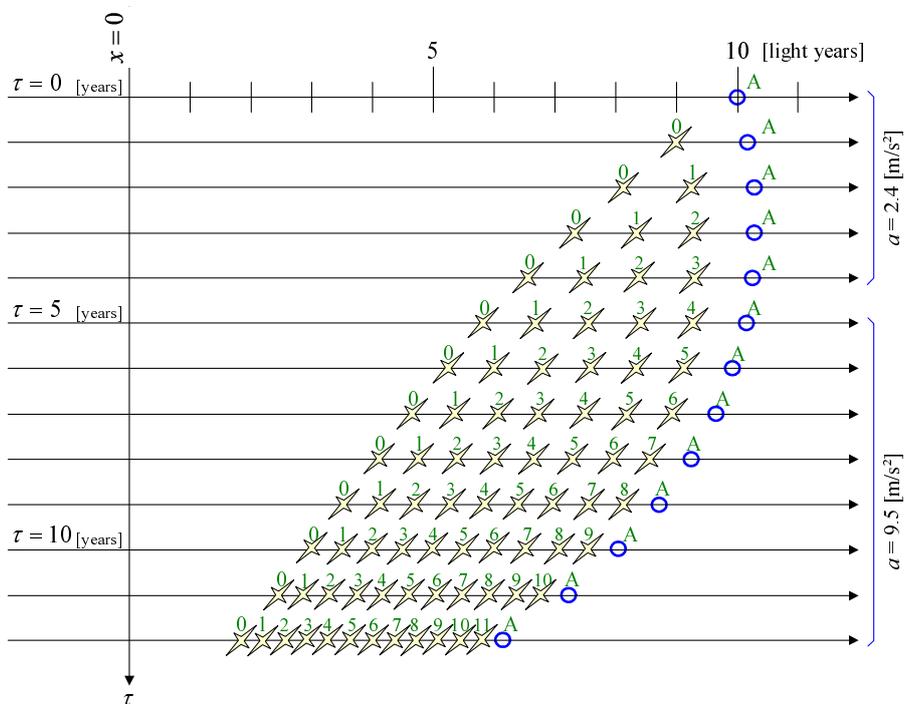


図 7.2: 加速度場内の光源の位置 (O) と送信されたパルスの位置 (X)

は、その光が発射された時刻を示している。例えば、5 と書かれた光の位置は $\tau = 5$ 年のときに発射された光を意味する。図に示す光の位置は、点 A の固有時間で 1 年間隔に発射された光を観測者から見た x 座標で表現している。確かに、点 A の固有時間で一定周期で発射された光は、観測者の x 軸上に等間隔に並んでいる。この計算例は、一般性を示すため、点 A の初期速度はゼロ以外の値とし、 $\tau = 5$ を境に観測者の加速度を異なる値に切り替えている。光が点 A の固有時間で 1 年周期で発射されているといっても、点 A が観測者から遠ざかる期間は、光の間隔が 1 光年より大きい。逆に、点 A が観測者に近づいてくると、光の間隔は 1 光年より小さくなる。観測者の近傍では、光速が c であるので、点 A が遠ざか

ると光の受信周期が1年より長くなり、近づいてくると受信周期は1年より短くなる。それは確かにドップラ効果に類似している。また、途中で加速度を切り替えても光が等間隔に並んでいる事実は、光が観測者から見て x 軸上に等間隔に並ぶのは等加速度運動に限ったことではないことを意味する。なお、 x 軸上で隣り合う光の間隔が、観測者に対する点 A の速度比 $\beta(\tau)$ のみの関数であることは既に数式で示したとおりである。

参考までに、図 7.2 を描くために使用した数式を紹介しておこう。初期条件として、観測者の時計で $t = 0$ のとき、 $x = x_0$, $dx/dt = c(x) \beta_0$ とする。このとき、速度比 β と位置 x は、

$$\beta(t) = -\tanh\left(\frac{at}{c} - \operatorname{atanh}\beta_0\right),$$

$$1 + \frac{a}{c^2}x = \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{at}{c} - \operatorname{atanh}\beta_0\right),$$

によって計算される。ただし、観測者の時計の読み t と点 A の固有時間 τ は、

$$t = \frac{c}{a} \left[\operatorname{atanh}\left(\frac{a\tau}{c} \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 + ax_0/c^2} - \beta_0\right) + \operatorname{atanh}\beta_0 \right],$$

の関係で結ばれている。具体的な初期条件として、 $x = 10$ 光年、 $\beta_0 = 0.2$ から初めて、 τ を1年ずつ増加させ、その計算結果を次の初期条件として繰り返し上の数式に代入すると図 7.2 が得られる。

7.3 オリオン星雲への航路

前章で扱ったオリオン星雲への航行において宇宙船に乗った観測者から見た各地点の固有時間について計算しよう。今回の計算は、各地点が自分の固有時間を宇宙船へ向けて送信し、宇宙船は受信した固有時間を観測時間として取り扱うとする。

宇宙船から比較する時間として、地球の時計とオリオン星雲の時計のほかに、行程の中天に位置する時計を比較しよう。それらの時計は、自分の固有時間で一定周期に光の信号を発射し、宇宙船は贈られてくる光の信号を数えることによってそれぞれの時刻を計測する。前節で示したように、光のパルスが到達する間隔はドップラ効果で計算できる。実際に計算してまとめたのが表 7.1 である。ここでは便宜上、巡航区間を前半と後半に分けた。宇宙船は巡航区間の前半から後半に移る瞬間に中点を通り過ぎる。宇宙船から観測した中点の時計の読みはそれを境に、急激に時を刻むペースが遅くなる。これはまさに、救急車のサイレンがそばを通り過ぎる瞬間に音が低くなる現象と同じである。なお、表 7.1 の合計で最下桁がずれているのは、表を作成するにあたり有効数字 15 桁で計算し、結果を四捨五入で小数第 7 位で丸めたからである。

表 7.1: 宇宙船から観測した時計の読み

	宇宙船の時計 [年]	地球の時計 [年]	中点の時計 [年]	オリオンの時計 [年]
加速区間	10.9464773	601.8939913	601.8939913	1.8939913
巡航区間前半	2.8320752	900.0089117	900.0089117	0.0089117
巡航区間後半	2.8320752	900.0089117	0.0089117	0.0089117
減速区間	10.9464773	601.8939913	1.8939913	1.8939913
合計	27.5571048	3003.8058060	1503.8058060	3.8058060

7.4 光の伝播遅延の補正

前節で導出した結果によると、加速する観測者が計測する固有時間は、その固有時間が属する地点の場所によって異なっていた。それは、観測者と対象地点の距離のため、観測する固有時間に光が伝播する遅延時間が含まれていたからである。純粋に時間経過のみを計測するためには、光の伝播による遅延時間を補正する必要がある。

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \tau + \frac{1}{c} \left(\frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right) \\ &= \frac{c}{a} \left[\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \sinh \left(\frac{at}{c} - a \tanh \beta_0 \right) \right],\end{aligned}\quad (7.1)$$

この固有時間 $\tilde{\tau}$ が対象地点の位置に依存しないことは、

$$\tilde{\tau} = \frac{c}{a} \left(\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{\beta(t)}{\sqrt{1-\beta(t)^2}} \right) \quad (7.2)$$

のように変形できることによって示すことができる。つまり、補正した固有時間 $\tilde{\tau}$ は、時刻 t における速度比 $\beta(t)$ にのみ依存するのである。なお、この関係式を導出するにあたり、

$$\tau = \frac{c}{a} \left[\exp \left(\frac{at}{c} - a \tanh \beta_0 \right) - \frac{1-\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right],$$

の関係を用いた。加速度がゼロとなる巡航区間については、 $a \rightarrow 0$ の極限を計算すればよい。その結果、

$$\tilde{\tau} = \frac{t}{\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

となる。これで、宇宙船から観測する各点の固有時間について、光の伝播時間遅延を補正することができる。上で導いた式のように、遅延時間補正をした固有時間 $\tilde{\tau}$ は速度比 $\beta(t)$ にのみ依存し、対象となる物体の位置には依存しない。したがって、固有時間の動きは表 7.2 に示すように、地球の時計も、オリオン星雲の時計も同じ結果となる。

表 7.2: 遅延補正を含む宇宙船からの観測時間

	宇宙船の時計 [年]	地球の時計 [年]	オリオンの時計 [年]
加速区間	10.9464772	301.8939913	301.8939913
巡航区間	5.6641503	900.0178235	900.0178235
減速区間	10.9464772	301.8939913	301.8939913
合計	27.5571048	1503.8058060	1503.8058060

7.5 慣性系からの観測

慣性系から加速する宇宙船の固有時間を観測した場合を評価し、前節までに導出した結果と矛盾がないことを示そう。今度の場合、宇宙船が自らの固有時間において一定周期で光の信号を送信し、慣性系にいる観測者がその光の信号を数えることで固有時間を観測する。座標は、地球が $x = 0$ 、オリオン星雲が $x = x_0$ となるようにとられている。

まず、加速区間で送信された光について考察しよう。慣性系の時計で $t = 0$ のとき、宇宙船が地球を出発したとする。宇宙船の加速度を a とすると、時刻 t_A のとき宇宙船は、

$$x_A = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2}} - 1 \right),$$

の位置に達している。この光がオリオン星雲 $x = x_0$ に到達する時刻は、

$$t_B = t_A + \frac{x_0}{c} - \frac{c}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2}} - 1 \right),$$

となる。光の到達時刻 t_B を送信時刻 t_A で微分すると、

$$\frac{dt_B}{dt_A} = 1 - \frac{at}{c} \left(1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2} \right)^{-1/2},$$

となり、さらに、

$$\frac{t_A}{\tau} = \sqrt{1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2}},$$

であることに注意すると、

$$\frac{dt_B}{d\tau} = \sqrt{1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2}} - \frac{at_A}{c}, \quad (7.3)$$

が得られる。この式は、オリオン星雲の観測者が宇宙船からの光の信号を受信するペースの逆数である。宇宙船の速度を $dx/dt = c\beta$ とおくと、この微係数は、

$$\frac{dt_B}{d\tau} = \frac{1 - \beta(t_A)}{\sqrt{1 - \beta(t_A)^2}},$$

と変形できることから、観測される光信号の受信間隔は宇宙船の速度によるドップラ効果で説明できる。さらに、この微係数を固有時間 τ を用いて書くと

$$\frac{dt_B}{d\tau} = e^{-a\tau/c},$$

のようになる。この数式を積分すると、

$$t_B = \frac{c}{a} \left(1 - e^{-a\tau/c}\right),$$

または、

$$\tau = -\frac{c}{a} \log\left(1 - \frac{at_B}{c}\right),$$

が得られる。前節までに示したように、宇宙船が加速区間にいる時間は宇宙船の固有時間で 10.94667 年である。導出した関係式に $\tau = 10.94667$ 年を代入して、加速区間の宇宙船から送信されるすべての光を受信する期間の長さを慣性系の時計の読みとして計算すると、 $t_B = 1.89403$ 年となる。

続いて、宇宙船が巡航区間にいる場合を考えてみよう。時刻 t_A のとき宇宙船の位置が $x_A = c\beta t_A$ であるとする。この位置から発信された光がオリオン星雲に到着する時刻は、

$$t_B = t_A + \frac{x_0}{c} - \beta t_A,$$

となる。この時刻を t_A で微分すると

$$\frac{dt_B}{dt_A} = 1 - \beta,$$

が得られる。しかも、特殊相対性理論における時計の遅れより、 $d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt_A$ が成立するので、

$$\frac{dt_B}{d\tau} = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

が得られる。この結果も、オリオン星雲の観測者が観測する宇宙船の固有時間の速さは相対速度 β によるドップラ効果で説明できることを示している。等速巡航区間で宇宙船の固有時間が 5.6642 年経過することは既に求めている。さらに、等速巡航区間での宇宙船の速度が $1 - \beta = 1.9804 \times 10^{-4}$ であることから計算すると、等速巡航区間にいる間の宇宙船の時刻信号は、オリオン星雲の時計でわずか 0.017824 年の間に受信されることがわかる。

地球の時計によって観測した結果も同様に計算することができる。宇宙船から送信される光の信号を地球とオリオン星雲で観測して計測した時間をまとめると表 7.3 のようになる。この表によると、全行程に要する時間は地球とオリオン星雲の観測では 3000 年の違いがある。地球の観測では、出発時の光の信号は遅延なく受信するが、オリオン星雲到着時の信号は 1500 年の遅延が生じている。言い換えると、宇宙船がオリオン星雲に到着し

表 7.3: 静止系から観測した各行程の時間

	宇宙船の時間 [年]	地球の時間 [年]	オリオンの時間 [年]
加速区間	10.9464772	601.8939913	1.8939913
等速巡航区間	5.6641503	1800.0178235	0.0178235
減速区間	10.9464772	601.8939913	1.8939913
合計	27.5571048	3003.8058060	3.8058060

た信号は、到着から 1500 年だけ経過した時点でやっと地球に届くので、地球からの観測では実際の移動時間より 1500 年だけ長く観測されるのだ。その余分な時間を補正すると、全行程の時間は 1503.80588 年となる。

一方、オリオン星雲からの観測では、出発時の信号が 1500 年遅れて受信される。到着時の信号は遅延がない。オリオン星雲の観測では、宇宙船の航行時間は真の時間より 1500 年だけ短く観測されるのだ。その短縮分を補正すると、オリオン星雲の観測において、全行程の時間は 1503.80588 年となる。

上で説明したような光の伝搬遅延を補正した結果は、表 7.4 のようになる。当然の結果であるが、地球の時間とオリオン星雲の時間は等しくなっている。光の伝搬遅延をした場合を比べてはみたものが、実際にこのような測定をするのは困難を極める。少なくとも、送

表 7.4: 静止系から観測した各行程の時間 (遅延補正)

	宇宙船の時間 [年]	地球の時間 [年]	オリオンの時間 [年]
加速区間	10.9464772	601.8939913	601.8939913
等速巡航区間	5.6641503	900.0178235	900.0178235
減速区間	10.9464772	601.8939913	601.8939913
合計	27.5571048	1503.8058060	1503.8058060

られてくる信号に宇宙船の位置情報がなければ実現できない。地球上ならば緯度と経度で位置が特定できるが、宇宙空間での位置情報は何を利用するかが課題である。その位置情報から、自分の場所までの距離がわかれば遅延時間が計算できるはずだ。しかし、現実的に最も困難なことは 1000 光年以上の長距離に信号を伝搬させることと、それを 1000 年以上にわたってモニタすることだろう。