

第7章 加速度場における不可思議な現象

前章までにも示したように、加速度場では位置によって光速や時間の尺度が異なるため、われわれの日常とは似つかない不可思議な現象が起きる。その代表的な現象が、双子のパラドックスで見たように、宇宙船から見た地球の時計が巡航時にほとんど動かず、Uターンをする一瞬で何年もの時間が経過するような例である。本章では、加速度場におけるそのような不可思議な現象をどのように理解するべきかを考察する。

7.1 時間の逆行

既に学んだように、加速度 a による加速度場では $x = -c^2/a$ に事象の地平面が現れ、事象の地平面からの距離に比例して光速 $c(x)$ が増加する。具体的に書くと、加速度場における光速は $c(x) = (1 + ax/c^2)c$ となる。さらに、固有時間の微分が、

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} c(x) dt,$$

と書けることから、時間の尺度も事象の地平面からの距離に比例していることがわかる。この数式から、事象の地平面では固有時間が動かないことがわかる。さらに、事象の地平面を超えた場所では、 $c(x)$ が負の値となるので $d\tau$ が負の値になる。つまり、事象の地平面を超えた場所では時間が逆行することになる。

前節までは、時間の逆行については特に触れなかった。事象の地平面を越えた場所では、情報の伝達が不可能だから特に気にしなかったのである。ところが、一定の加速度 a を永久に維持するのは不可能である。加速度が変化すれば事象の地平面の位置が変わることになる。すると、かつて観測不能だった領域が観測可能になり、時間の逆行を認めざるを得ない場合があるのではないか？

前章で扱った地球からオリオン星雲への航行を題材に、宇宙船が航路の途中で急停止した場合を考えてみよう。非現実的な過程だが、宇宙船が巡航区間の midpoint で一瞬にして (地球とオリオン星雲に対して相対的に) 静止したとする。これを地球やオリオン星雲から観測すると、宇宙船は、地球から 750 光年離れた場所で、突然、静止するように見えることだろう。このような急停止をすると、計算上、静止系の固有時間が逆行する現象が導かれる

のだ。

7.1.1 急停止による時間の逆行

宇宙船から地球やオリオン星雲を見た場合を考えよう。急停止する直前の状態として、前章の計算結果から、地球は $x = -4.72013202$ 光年に、オリオン星雲は $x = 4.72013202$ 光年に位置する。地球やオリオン星雲の相対速度は、光速に対する速度比として $\beta = -0.999980195$ である。その速度によるローレンツ収縮比は $\sqrt{1 - \beta^2} = 6.293509353 \times 10^{-3}$ である。速度比 β の状態から、加速度を a によって静止にいたるまでの時間を t とすると、 $\tanh(at/c) = \beta$ なる関係が成立する。それは、静止状態から速度比 β までを加速度 a で加速する時間と等しいと考えれば理解できるだろう。

それでは、急停止後の宇宙船から見て、地球とオリオン星雲がどこに存在するかを計算してみる。その計算には公式:

$$1 + \frac{a}{c^2}x = \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \operatorname{sech} \left(\frac{at}{c} - \operatorname{arctanh} \beta_0 \right),$$

を用いればよい。この公式に対して、 x_0 は宇宙船から見た地球やオリオン星雲の位置を、 β_0 にはその速度比を代入すればよい。上で述べたように $\tanh(at/c) = \beta$ であるので、双曲線正割関数 (sech) に与える変数はゼロなる。宇宙船が瞬時に停止することから $a \rightarrow -\infty$ の極限をとると $x = x_0/\sqrt{1 - \beta^2}$ となるので、停止後の状態として、地球が 750 光年後方に、オリオン星雲が 750 光年前方に位置することが導かれる。当然の結果であるが、その位置は地球やオリオン星雲から見た観測結果と合致する。

次に、急停止中における地球とオリオン星雲の固有時間の動きを計算してみよう。今回のように、急停止する間の固有時間の動きを計算するのに便利な公式が、前に導出されている。その公式は、

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{\beta_0 - \beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left(1 + \frac{a}{c^2}x_0 \right),$$

である。この数式の中で、 β_0 は急停止直前の速度比で、 β は最終状態の速度である。つまり、この例では $\beta = 0$ である。さらに、 $a \rightarrow -\infty$ の極限をとると、 $\tau = (x_0/c) \cdot \beta_0/\sqrt{1 - \beta_0^2}$ となる。急停止の直前では、地球とオリオン星雲は $-x$ の方向に運動するため $\beta_0 < 0$ である。つまり、 $x_0 > 0$ に位置する物体の固有時間は逆行することになる。時間の逆行は物理学として考え難い現象であるが、気にせず計算してみよう。地球の初期位置が $x_0 = -4.72013202$ 光年であるので、急停止の間に地球の固有時間は 749.98514912 年経過する計算になる。一方、オリオン星雲の初期位置が $x_0 = 4.72013202$ 光年であるので、オリオン星雲の固有時間は 749.98514912 年逆行する。したがって、急停止の直後、地球とオリオン星雲の固有時間はどちらも、宇宙船の出発時からの積算で 751.90294612 年を刻んでいることになる。

地球とオリオン座の固有時間は、恒星間航行の途中では互いに異なる値であるのだが、宇宙船が相対的に停止すると、互いに同じ値を示す。固有時間の逆行は理解し難いが、宇宙船が停止状態になったときの地球とオリオン星雲の固有時間の比較では物理学的に妥当な結果になっている。時間の逆行が非現実的であるにも関わらず、時間の逆行を支持するかのような計算結果が得られたことになる。これでは、非現実的だからといって時間の逆行を捨て去ることも躊躇してしまう。もう少し、時間の逆行について考察してみよう。

7.1.2 時間の逆行は観測されるか？

急停止の間、前方 ($x > 0$) の物体の固有時間が逆行することが導かれた。時間の逆行は発生しないと考えられている物理現象である。そこで、この時間の逆行は計算上の導出されるが、決して観測されないと考えてみよう。これまでの説明で「観測者から見て」という表現を用いてきたが、実際に観測者が目で見た (観測した) 現象を計算したわけではない。観測をするには、何らかの手段で対象物の情報を伝達する必要がある。情報は有限の伝達速度 (光速を超えない速度) で伝達されることに注意すべきである。

座標の原点にいる観測者の時計で $t < 0$ のとき、測定対象の物体は観測者に対して x 軸方向に $-\beta$ の速度比で運動している。時刻 $t = 0$ のとき、観測者は急加速度をもってその物体に対して静止状態に遷移した (すなわち急停止した) とする。急停止の直前、物体は $x = \sqrt{1 - \beta^2} x_0$ (> 0) に位置していたとする。なお、 $t \neq 0$ のとき観測者は等速度運動をしている。また、物体は急停止の前後に関係なく、自らの固有時間で一定周期で光の信号を送信していたとする。観測者はその信号を受信し、回数を数えることで物体の時計を観測できたとしよう。

上記の舞台設定で、急停止の前に送信され、急停止の後に受信される光について考えてみよう。具体的に、その光の発信時刻を観測者の時計で $t = -t_A$ とする。光源となる物体は $t = 0$ のとき、 $x = \sqrt{1 - \beta^2} x_0$ に存在するのだから、光が発信される場所は、

$$x(-t_A) = \sqrt{1 - \beta^2} x_0 + \beta ct_A,$$

である。その光が時刻 $t = 0$ (急停止の直前) に到達する場所は、

$$x_A = x(-t_A) - ct_A = \sqrt{1 - \beta^2} x_0 - (1 - \beta) ct_A,$$

のように計算される。この光が急停止の直後にどこに位置するかを計算してみよう。急停止をする間、観測者は加速度場にいるので、光の速度は必ずしも c ではなく、

$$c(x) = \frac{dx}{dt} = -c \left(1 + \frac{a}{c^2} x \right),$$

のように x に依存する。光速 $c(x)$ の符号を負に選んでいるのは、 $x > 0$ から観測者に接近する光を想定しているからである。とはいえ、 $a < 0$ を仮定しているため、そのように選んだ光が観測者に接近する条件は $x < -c^2/a$ に限られる。例えば、 $a = 5 \text{ m/s}^2$ ならば観測者の前方 1.9 光年未満からの光は観測者に接近するが、距離 1.9 光年を越える前方の光は観測者から遠ざかっていく。その境界となる $x = -c^2/a$ は事象の地平面である。加速度場では、事象の値平面を挟んで光の伝搬方向が逆転する。

そのような条件の光について微分方程式を解くと、座標 x_A を出発して時間 t にわたって伝播した光の到達位置 x は、

$$1 + \frac{a}{c^2}x = \left(1 + \frac{a}{c^2}x_A\right) e^{-at/c},$$

によって計算できる。さらに、 $a \rightarrow -\infty$ の極限をとれば、

$$x = x_A e^{-at/c} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} x_A,$$

が得られる。このような極端な急停止を仮定すると、 $x > 0$ の領域はすべて事象の地平面を越えた領域となり、本来、観測者に接近するはずの光が観測者から遠ざかるという奇妙な現象が現れる。それによって、観測者の時計で時刻 $t = -t_A$ に送信された光が時刻 $t = 0$ に到達する位置は、

$$x = (1 + \beta)x_0 - \sqrt{1 - \beta^2} ct_A,$$

となる。急停止の後、観測者の加速度がゼロに戻るのだから、その光は再び速度 c で観測者に接近することになる。対象物体から光が一定の周期でパルス状に送信されたとする、光のパルス列が x 軸上に一定間隔で並んでいるはずである。急停止の後でも光のパルスの列は等間隔で並んでいる。しかも、早い時刻に送信された光のほうが、後に送信された光よりも観測者に近い位置に存在することは急停止後も変わらない。ただし、注意することがある。一瞬の急停止の間に、光源となる物体も、光の列も観測者から遠ざかっているのだが、光の列が光源を追い越してさらに遠くに移動している場合があるのである。急停止の直後、物体の位置は x_0 になっているのだから、

$$x_0 \geq (1 + \beta)x_0 - \sqrt{1 - \beta^2} ct_A,$$

を t_A について解けば、光源を追い越す光の条件が求められる。すなわち、

$$t_A \geq \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{x_0}{c},$$

が急停止の間に光が光源を追い越す条件である。言い換えると、過去の時刻:

$$t = -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{x_0}{c},$$

に送信された光が光源と同じ場所に存在していることになる。つまり、減速によって物体は、その過去の状態に戻った、すなわち、時間を逆行したと解釈することもできるのである。

7.1.3 時間の逆行の例

急停止による時間の逆行の例を示そう。観測者は静止系に対して x 軸方向に速度 $0.6c$ で等速運動している。静止系に存在する点 A から、その固有時間にして 1 年周期で光が発信されている。観測者は時刻 $t = 0$ で急停止をする。観測者から見ると、急停止の直前に点 A は $x = 4$ 光年に存在していた。

急停止前、物体 A は観測者に速度 $0.6c$ で接近している。この時点で物体 A の固有時間は、観測者の時計と比較して 80% の速さで時を刻むので、1 年周期で送信される光のパルスは、 x 軸上に 0.5 光年間隔で配置されている。光は速度 c で観測者に到達するので、急停止前の観測者は 0.5 年周期で光を受信する。この受信間隔は、ドップラ効果でも計算できる。

急停止をすると、物体 A はローレンツ収縮率が回復するため、図 7.1 に示すように $x = 5$ 光年に位置に飛び移る。一方、観測者に接近していた光は、急停止の瞬間に、式 (5.28) によって、 x 座標が 2 倍になる。つまり、 $x = 2.5$ 光年に存在していた光が急停止の結果、物体 A と同一位置 $x = 5$ 光年に存在する。この光は、3 年前に発信された光であるのだが、急停止によって再び発信される位置に戻ったことになる。この現象を、時間が 3 年間逆行したと解釈するのである。また、図 7.1 に示すように、停止前に 0.5 光年間隔で並んでいた光は、停止後には 1 光年間隔で並んでいる。図中の光のそばに書いた数値は光が点 A から送

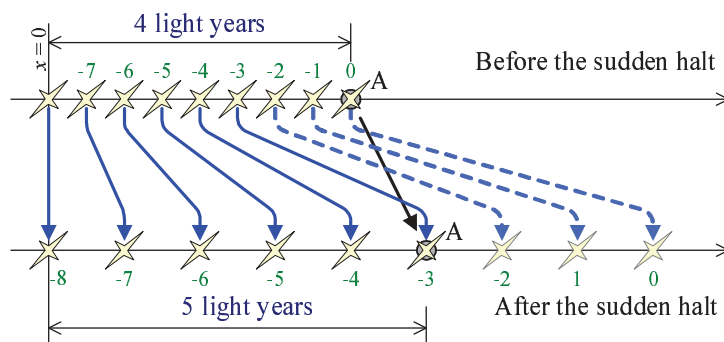


図 7.1: 急停止の前後での光源と光の位置

信された時刻を示す。例えば、数値 -2 を付した光は、点 A の固有時間で $\tau = -2$ 年に送信されたことを意味する。急停止後の光は、1 光年間隔で並び、速度 c で観測者に接近しているので、1 年周期で観測者に到達することになる。しかも、先に送信された光から順に観測者に到達するのである。つまり、急停止によって物体 A の固有時間が逆行することが計算されているのだが、その現象は決して観測されないのである。いかなる観測者にも観測されない事象は発生していないことと同じである。したがって、急停止による固有時間の逆行は、一般相対性理論による計算上の現象であって、現実には発生しないと考えるべき

である。よって、因果性が破綻する、もしくは、タイムマシンが実現できるなどの心配(期待)は無用である。

もう一つ補足しておく、この時間の逆行は、特殊相対性理論で示された同時性の不一致によるものである。静止系を K 系、停止前の観測者の座標系を K' 系とする。K 系は K' に対して $-\beta$ の速度比で x 軸方向に運動しているため、

$$t = \frac{t' + \beta x'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

で時間に変換される。この数式に $\beta = 0.6$, $t' = 0$, $x' = 4$ 光年を代入すると、 $t = 3$ 年が得られる。この結果は、急停止の直前、 $x' = 4$ 光年に位置する K 系の時計は、観測者の時計より 3 年早いことを意味する。急停止することによって、観測者は K 系に移ったため、それまで 3 年早かった物体 A の時計が逆行し、観測者と同じ時刻を指すようになったのである。

7.2 有限の加速度による時間の逆行

前節では非現実的な急停止において、ある観測対象の固有時間が計算上、逆行することを紹介した。しかし、その時間の逆行は観測されることがないとの結論を得た。前節で明確になったように、固有時間の逆行は、加速度場における事象の地平面を超えた領域で発生する。ということは、有限の加速度の場合も、事象の地平面を超えた領域で固有時間の逆行が発生するということだ。

加速度が有限の場合でも同様に、時間の逆行は計算として導かれた現象であり、観測が不可能であることを示そう。

7.2.1 加速前に発射された光

観測者が初期状態で、座標の原点 O で基準の慣性系に対して静止していたとする。その観測者が時刻 $t = 0$ で x 軸方向に加速度 a で加速度運動を開始した。一方、基準慣性系の x 軸上の x_0 に位置する点 A は、観測者が加速度運動を開始する前から、自分の固有時間 τ に対応して一定間隔で観測者に向かって光を発射しているとする。加速する観測者はその光をどのような間隔で受信するか考えてみよう。なお、観測者の時計で $t = 0$ のとき、点 A の固有時間は $\tau = 0$ のように時計合わせされているとする。

点 A から発射された光を観測者が受信する間隔は次のように評価しよう。まず、点 A では固有時間が τ_A のときに光を発射したとする。その光が、観測者の時計で t_0 のときに受信されたとする。そのとき、 $d\tau_A/dt_B$ によって受信間隔が評価できる。この値は、観測者の

時計で1秒あたりに観測する点Aの時計の進み具合を表している。例えば、 $d\tau_A/dt_B = 0.5$ であれば、点Aの時計は観測者の時計の0.5倍の速度で時を刻んでいるということである。

観測者が加速する前に受信する光については簡単である。なぜなら、観測者と点Aは同一の慣性系にいたので時間の尺度が同じである。つまり、 $d\tau_A/dt_B = 1$ となるはずである。これを確認するのも容易である。点Aの固有時間 τ_A に発射された光が観測者によって受信される時刻は $t_B = \tau_A + x_0/c$ となる。したがって、 $d\tau_A/dt_B = 1$ となるのである。なお、これは観測者が加速を開始する前なので、 $t_B < 0$ と $\tau_A < 0$ が成立することが条件である。

次に、観測者の加速前に発射され、加速中に受信する光について考えてみよう。この場合は、加速を開始する時点 $t = 0$ での光の到達位置 x_A を計算し、その位置を初期座標として等加速度場における光の伝播時間を計算すればよい。まず、等加速度場の座標 x_A から発射される光が原点にいる観測者によって受信される時間を計算しておこう。等加速度場では光速が場所によって異なることに注意して、

$$\begin{aligned} t_{AB} &= \int_{x=x_A}^{x=0} dt = \int_{x_A}^0 \frac{dt}{dx} dx \\ &= -\frac{1}{c} \int_{x_A}^0 \left(1 + \frac{a}{c^2} x_A\right)^{-1} dx = \frac{c}{a} \log \left(1 + \frac{a}{c^2} x_A\right), \end{aligned}$$

のように計算される。ところで、点Aの固有時間 τ_A に発射された光は、時刻 $t = 0$ には、 $x_A = x_0 + c\tau_A$ に到達しているはず(ただし、 $\tau_A < 0$)である。これを上の数式に代入し、観測者が受信する時刻を計算すると、

$$t_B = 0 + t_{AM} = \frac{c}{a} \log \left(1 + \frac{a}{c^2} x_A + \frac{a}{c} \tau_A\right),$$

となる。この結果を微分すると、

$$\frac{d\tau_A}{dt_B} = 1 + \frac{a}{c^2} x_A + \frac{a}{c} \tau_A = e^{at_B/c},$$

が得られる。第5章で示したように、等加速度場を自由落下する物体の速度を、

$$\frac{dx}{dt} = -c(x) \beta(t),$$

のように、座標で決まる光速と、光速に対する速度比の積で表現する場合、 $\beta(t_B) = \operatorname{arctanh}(at_B/c)$ となる。これを意識して $e^{at_B/c}$ を変形すると、

$$\begin{aligned} e^{at_B/c} &= \frac{\cosh(at_B/c) + \sinh(at_B/c)}{\sqrt{\cosh^2(at_B/c) - \sinh^2(at_B/c)}} \\ &= \frac{1 + \tanh(at_B/c)}{\sqrt{1 - \tanh^2(at_B/c)}} = \frac{1 + \beta(t_B)}{\sqrt{1 - \beta(t_B)^2}}, \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\frac{d\tau_A}{dt_B} = \frac{1 + \beta(t_B)}{\sqrt{1 - \beta(t_B)^2}},$$

となる。この時間の尺度の比率は、点 A の相対速度によるドップラ効果による周波数の比率と一致する。この結果から考えると、異なる尺度で時を刻む他の観測者の時計はドップラ効果で説明できると推測できる。その推測が正しいければ、重力理論で計算された数値は、計算結果にすぎず、観測されることはない。他の時計の読みはドップラ効果にしたがって観測される。その推測が正しいか、もう少し考察を続けて判断しよう。

7.2.2 加速中に発射された光

加速度 a で観測者が加速する間に、異なる場所から光が発射され、同一の加速度で加速している間に光を受信した場合を考えよう。観測者の時計で時刻 t_A に光が発射されたとする。その場合、観測者から見た光の発射位置は、

$$x_A = \left(x_0 + \frac{c^2}{a} \right) \operatorname{sech} \frac{at_A}{c} - \frac{c^2}{a},$$

となる。この光が観測者に到達する時刻は、

$$\begin{aligned} t_B &= t_A + \frac{c}{a} \log \left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right) \\ &= t_A + \frac{a}{c} \log \left[\left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \operatorname{sech} \frac{at_A}{c} \right], \end{aligned}$$

となる。この時刻を t_A で微分すると、

$$\frac{dt_B}{dt_A} = 1 + \tanh \frac{at_A}{c},$$

となる。

一方、点 A の固有時間 τ_A と観測者の時計で計測する時間 t_A の間の関係は、加速度場の線素から導くことができる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} d\tau_A &= \frac{1}{c} \sqrt{\left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right)^2 c^2 dt^2 - dx_A^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx_A}{dt_A} \right)^2} dt_A = \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \operatorname{sech}^2 \frac{at_A}{c} \cdot dt_A, \end{aligned}$$

が得られる。よって、点 A から光が発射される時刻 τ_A (点 A の固有時間) を光の到達時刻 t_B で微分した値は、

$$\frac{d\tau_A}{dt_B} = \frac{d\tau_A}{dt_A} \frac{dt_A}{dt_B} = \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \left(1 + \tanh^2 \frac{at_A}{c} \right),$$

となる。ところで, $e^{at_B/c}$ を計算してみると,

$$e^{at_B/c} = e^{at_A/c} \cdot \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0\right) \operatorname{sech} \frac{at_A}{c} = \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0\right) \left(1 + \tanh^2 \frac{at_A}{c}\right),$$

であり, 前節での計算過程から $e^{at_B/c} = (1 + \beta)/\sqrt{1 - \beta^2}$ なる関係が成立することがわかっている。点 A が光を発射する頻度と観測者が光を受信する頻度の関係は,

$$\frac{d\tau_A}{dt_B} = \frac{1 + \beta(t_B)}{\sqrt{1 - \beta(t_B)}},$$

のように計算される。つまり, 加速中に発射された光についても, 受信頻度がドップラ効果で説明できることが示された。

7.2.3 一般の場合

基準の慣性系に固定された点 A が, その固有時間に対して一定の周期で光を発射した場合, 加速度運動する観測者がその光を受信する周期が互いの相対速度によるドップラ効果で説明できることを二つの運動条件について証明した。その二つの運動条件とは, 観測者が等加速度運動を開始するより前に光が送信された場合と, 等加速度運動中に光が送信された場合である。

前節までに示した二つの運動条件には共通点があり, その共通点は加速度が一定でない一般の運動状況であっても成立するため, 観測者が光を受信する周期は観測者と点 A の相対速度によるドップラ効果で説明できるのである。その共通点とは, 受信前の光の信号が観測者から見ると x 軸上に等間隔で配置されていることである。

特殊な場合として, 点 A が $x = x_0$ に静止している (しかも, 観測者の加速度もゼロ) の場合を考えてみよう。光が点 A の固有時間で $d\tau$ の間隔で送信されているとする。互いに静止しているので, 観測者の時間の尺度も点 A の尺度と一致する。そのとき, 受信前の光は観測者から見ると, x 軸上に $c d\tau$ の間隔で均等に配置されている。その光の列が速度 c で観測者に到達するので, 観測者は $dt = d\tau$ の周期で光を受信することになる。つまり, この場合, 点 A が光を発射する周期と観測者が受信する周期が一致している。

意外に思えるかもしれないが, 観測者が加速度運動している場合も同様に, 受信前の光は観測者から見て x 軸上に均等配置されている。まず, 点 A が $x = x_A$ に位置するとき光を発射したとする。発射から t だけ時間経過したときの光の位置は,

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\left(1 + \frac{a}{c^2} x_A\right) e^{-at/c} - 1 \right],$$

によって計算できる。この関係式は,

$$\frac{dx}{dt} = -c \left(1 + \frac{a}{c^2} x\right),$$

を積分することによって得られる。観測者が加速度 a で運動し、観測者の時計で時刻 t_A に $x = x_A$ に位置する点 A が光を発射したとする。便宜上、その加速度から逆算して点 A が観測者に対して相対的に静止していた時刻が $t = 0$ となるように時間が定義されているとする。また、 $t = 0$ のときの点 A の位置を x_0 とする。このような状況設定において、時刻 t における光の位置は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{a} \left[\left(1 + \frac{a}{c^2} x_A \right) e^{-a(t-t_A)/c} - 1 \right] \\ &= \frac{c^2}{a} \left[\left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) e^{-a(t-t_A)/c} \operatorname{sech} \frac{at_A}{c} - 1 \right], \end{aligned}$$

となる。点 A の固有時間で一定周期で発射された光が観測者から見て等間隔に配置されるのであれば、 $dx/d\tau$ が定数になるはずである。まず、光の位置 x を観測者の時計で測った発射時刻 t_A で微分すると、

$$\frac{dx}{dt_A} = c \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) e^{-at/c} \operatorname{sech}^2 \frac{at_A}{c},$$

が得られる。一方、観測者の時計による時刻 t_A と点 A の固有時間 τ は加速度場の線素から、

$$\frac{d\tau}{dt_A} = \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right) \operatorname{sech}^2 \frac{at_A}{c},$$

なる関係で結ばれることがわかる。これらから、 x を τ に微分した場合の微分係数を計算すると、

$$\frac{dx}{d\tau} = c e^{-at/c} = c \frac{1 - \beta(t)}{\sqrt{1 - \beta(t)^2}},$$

となる。この結果は、発射時刻 t_A (または τ) を含まないので定数である。つまり、観測者が加速度運動していても、受信前の光は観測者から見て x 軸上に等間隔に配置されている。光の送信周期が点 A の固有時間で $d\tau$ であるならば、観測者から見て x 軸上に均等配置される光の間隔は、

$$dx = c d\tau \frac{1 - \beta(t)}{\sqrt{1 - \beta(t)^2}},$$

となるのである。また、加速度運動をしていても、観測者の近傍では光速はやはり c であるので、光を受信する周期が

$$dt = \frac{dx}{c} = \frac{\sqrt{1 - \beta(t)^2}}{1 - \beta(t)} d\tau = \frac{1 + \beta(t)}{\sqrt{1 - \beta(t)^2}} d\tau,$$

となり、ドップラ効果で説明できる結果となる。ところで、均等配置される光の間隔が $c e^{-at/c}$ の形で書かれると、その値が加速度 a に依存するように見えるかもしれない。しかし、上に書いたように、時刻 t における速度比 $\beta(t)$ だけに依存する形となるため、均等配置された光の間隔、さらには、光を受信する周期は加速度には無関係となる。したがって、等

加速度運動以外の運動形態においても、光の受信周期はドップラ効果で予想される周期と一致するのである。

数式だけではイメージがつかみにくいかもかもしれないので、実際に計算した例を示そう。図 7.2 には加速度運動する観測者から見た点 A の位置 (O 印) と、点 A から発射された光の位置 (X 印) を示している。横軸は観測者から見た x 座標 (観測者の位置は $x = 0$) であり、縦軸は点 A の固有時間の単位で時間の経過を示している。光の位置 (X 印) に付した数字

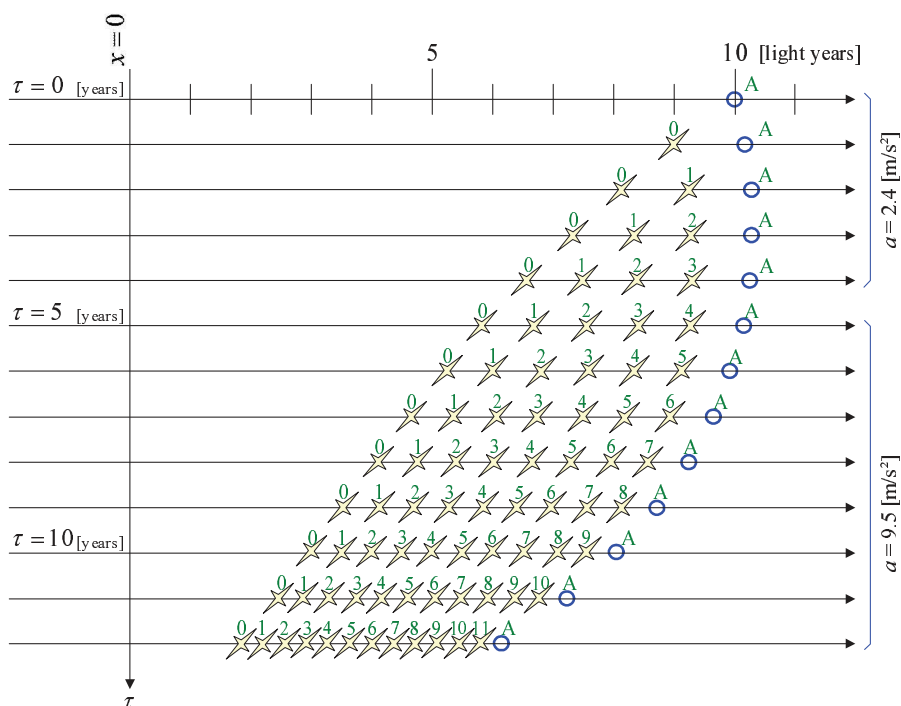


図 7.2: 加速度場内の光源の位置 (O) と送信されたパルスの位置 (X)

は、その光が発射された時刻を示している。例えば、5 と書かれた光の位置は $\tau = 5$ 年のときに発射された光を意味する。図に示す光の位置は、点 A の固有時間で 1 年間隔に発射された光を観測者から見た x 座標で表現している。確かに、点 A の固有時間で一定周期で発射された光は、観測者の x 軸上に等間隔に並んでいる。この計算例は、一般性を示すため、点 A の初期速度はゼロ以外の値とし、 $\tau = 5$ を境に観測者の加速度を異なる値に切り替えている。光が点 A の固有時間で 1 年周期で発射されているといっても、点 A が観測者から遠ざかる期間は、光の間隔が 1 光年より大きい。逆に、点 A が観測者に近づいてくると、光の間隔は 1 光年より小さくなる。観測者の近傍では、光速が c であるので、点 A が遠ざかると光の受信周期が 1 年より長くなり、近づいてくると受信周期は 1 年より短くなる。それは確かにドップラ効果に類似している。また、途中で加速度を切り替えても光が等間隔に並んでいる事実は、光が観測者から見て x 軸上に等間隔に並ぶのは等加速度運動に限ったことではないことを意味する。なお、 x 軸上で隣り合う光の間隔が、観測者に対する点

A の速度比 $\beta(\tau)$ のみの関数であることは既に数式で示したとおりである。

参考までに、図 7.2 を描くために使用した数式を紹介しておこう。初期条件として、観測者の時計で $t = 0$ のとき、 $x = x_0$, $dx/dt = c(x) \beta_0$ とする。このとき、速度比 β と位置 x は、

$$\beta(t) = -\tanh\left(\frac{at}{c} - \operatorname{atanh}\beta_0\right),$$

$$1 + \frac{a}{c^2}x = \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{at}{c} - \operatorname{atanh}\beta_0\right),$$

によって計算される。ただし、観測者の時計の読み t と点 A の固有時間 τ は、

$$t = \frac{c}{a} \left[\operatorname{atanh}\left(\frac{a\tau}{c} \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 + ax_0/c^2} - \beta_0\right) + \operatorname{atanh}\beta_0 \right],$$

の関係で結ばれている。具体的な初期条件として、 $x = 10$ 光年、 $\beta_0 = 0.2$ から初めて、 τ を 1 年ずつ増加させ、その計算結果を次の初期条件として繰り返し上の数式に代入すると図 7.2 が得られる。

7.3 オリオン星雲への航路

前章で扱ったオリオン星雲への航行において宇宙船に乗った観測者から見た各地点の固有時間について計算しよう。今回の計算は、各地点が自分の固有時間を宇宙船へ向けて送信し、宇宙船は受信した固有時間を観測時間として取り扱うとする。

宇宙船から比較する時間として、地球の時計とオリオン星雲の時計のほかに、行程の中天に位置する時計を比較しよう。それらの時計は、自分の固有時間で一定周期に光の信号を発射し、宇宙船は贈られてくる光の信号を数えることによってそれぞれの時刻を計測する。前節で示したように、光のパルスが到達する間隔はドップラ効果で計算できる。実際に計算してまとめたのが表 7.1 である。ここでは便宜上、巡航区間を前半と後半に分けた。宇宙船は巡航区間の前半から後半に移る瞬間に中点を通り過ぎる。宇宙船から観測した中点の時計の読みはそれを境に、急激に時を刻むペースが遅くなる。これはまさに、救急車のサイレンがそばを通り過ぎる瞬間に音が低くなる現象と同じである。

7.4 光の伝播遅延の補正

前節で導出した結果によると、加速する観測者が計測する固有時間は、その固有時間が属する地点の場所によって異なっていた。それは、観測者と対象地点の距離のため、観測

表 7.1: 宇宙船から観測した時計の読み

	宇宙船の時計 [年]	地球の時計 [年]	中点の時計 [年]	オリオンの時計 [年]
加速区間	10.94667	601.89403	601.89403	1.89403
巡航区間前半	2.83213	900.00891	900.00891	0.00891
巡航区間後半	2.83213	900.00891	0.00891	0.00891
減速区間	10.94667	601.89403	1.89403	1.89403
合計	27.55760	3003.80588	1503.80588	3.80588

する固有時間に光が伝播する遅延時間が含まれていたからである。純粹に時間経過のみを計測するためには、光の伝播による遅延時間を補正する必要がある。

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \tau + \frac{1}{c} \left(\frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right) \\ &= \frac{c}{a} \left[\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + \sinh \left(\frac{at}{c} - a \tanh \beta_0 \right) \right],\end{aligned}\quad (7.1)$$

この固有時間 $\tilde{\tau}$ が対象地点の位置に依存しないことは、

$$\tilde{\tau} = \frac{c}{a} \left(\frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{\beta(t)}{\sqrt{1-\beta(t)^2}} \right) \quad (7.2)$$

のように変形できることによって示すことができる。つまり、補正した固有時間 $\tilde{\tau}$ は、時刻 t における速度比 $\beta(t)$ にのみ依存するのである。なお、この関係式を導出するにあたり、

$$\tau = \frac{c}{a} \left[\exp \left(\frac{at}{c} - a \tanh \beta_0 \right) - \frac{1-\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \right],$$

の関係を用いた。加速度がゼロとなる巡航区間については、 $a \rightarrow 0$ の極限を計算すればよい。その結果、

$$\tilde{\tau} = \frac{t}{\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

となる。これで、宇宙船から観測する各点の固有時間について、光の伝播時間遅延を補正することができる。上で導いた式のように、遅延時間補正をした固有時間 $\tilde{\tau}$ は速度比 $\beta(t)$ にのみ依存し、対象となる物体の位置には依存しない。したがって、固有時間の動きは表 7.2 に示すように、地球の時計も、オリオン星雲の時計も同じ結果となる。

表 7.2: 遅延補正を含む宇宙船からの観測時間

	宇宙船の時計 [年]	地球の時計 [年]	オリオンの時計 [年]
加速区間	10.94667	301.89403	301.89403
巡航区間	2.83213	900.01782	900.01782
減速区間	10.94667	301.89403	301.89403
合計	27.55760	1503.80588	1503.80588

7.5 慣性系からの観測

慣性系から加速する宇宙船の固有時間を観測した場合を評価し、前節までに導出した結果と矛盾がないことを示そう。今度の場合、宇宙船が自らの固有時間において一定周期で光の信号を送信し、慣性系にいる観測者がその光の信号を数えることで固有時間を観測する。座標は、地球が $x = 0$ 、オリオン星雲が $x = x_0$ となるようにとられている。

まず、加速区間で送信された光について考察しよう。慣性系の時計で $t = 0$ のとき、宇宙船が地球を出発したとする。宇宙船の加速度を a とすると、時刻 t_A のとき宇宙船は、

$$x_A = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2}} - 1 \right),$$

の位置に達している。この光がオリオン星雲 $x = x_0$ に到達する時刻は、

$$t_B = t_A + \frac{x_0}{c} - \frac{c}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2}} - 1 \right),$$

となる。光の到達時刻 t_B を送信時刻 t_A で微分すると、

$$\frac{dt_B}{dt_A} = 1 - \frac{at}{c} \left(1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2} \right)^{-1/2},$$

となり、さらに、

$$\frac{t_A}{\tau} = \sqrt{1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2}},$$

であることに注意すると、

$$\frac{dt_B}{d\tau} = \sqrt{1 + \frac{a^2 t_A^2}{c^2}} - \frac{at_A}{c}, \quad (7.3)$$

が得られる。この式は、オリオン星雲の観測者が宇宙船からの光の信号を受信するペースの逆数である。宇宙船の速度を $dx/dt = c\beta$ とおくと、この微係数は、

$$\frac{dt_B}{d\tau} = \frac{1 - \beta(t_A)}{\sqrt{1 - \beta(t_A)^2}},$$

と変形できることから、観測される光信号の受信間隔は宇宙船の速度によるドップラ効果で説明できる。さらに、この微係数を固有時間 τ を用いて書くと

$$\frac{dt_B}{d\tau} = e^{-a\tau/c},$$

のようになる。この数式を積分すると、

$$t_B = \frac{c}{a} \left(1 - e^{-a\tau/c}\right),$$

または、

$$\tau = -\frac{c}{a} \log\left(1 - \frac{at_B}{c}\right),$$

が得られる。前節までに示したように、宇宙船が加速区間にいる時間は宇宙船の固有時間で 10.94667 年である。導出した関係式に $\tau = 10.94667$ 年を代入して、加速区間の宇宙船から送信されるすべての光を受信する期間の長さを慣性系の時計の読みとして計算すると、 $t_B = 1.89403$ 年となる。

続いて、宇宙船が巡航区間にいる場合を考えてみよう。時刻 t_A のとき宇宙船の位置が $x_A = c\beta t_A$ であるとする。この位置から発信された光がオリオン星雲に到着する時刻は、

$$t_B = t_A + \frac{x_0}{c} - \beta t_A,$$

となる。この時刻を t_A で微分すると

$$\frac{dt_B}{dt_A} = 1 - \beta,$$

が得られる。しかも、特殊相対性理論における時計の遅れより、 $d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt_A$ が成立するので、

$$\frac{dt_B}{d\tau} = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

が得られる。この結果も、オリオン星雲の観測者が観測する宇宙船の固有時間の速さは相対速度 β によるドップラ効果で説明できることを示している。等速巡航区間で宇宙船の固有時間が 5.6642 年経過することは既に求めている。さらに、等速巡航区間での宇宙船の速度が $1 - \beta = 1.9804 \times 10^{-4}$ であることから計算すると、等速巡航区間にいる間の宇宙船の時刻信号は、オリオン星雲の時計でわずか 0.017824 年の間に受信されることがわかる。

地球の時計によって観測した結果も同様に計算することができる。宇宙船から送信される光の信号を地球とオリオン星雲で観測して計測した時間をまとめると表 7.3 のようになる。この表によると、全行程に要する時間は地球とオリオン星雲の観測では 3000 年の違いがある。地球の観測では、出発時の光の信号は遅延なく受信するが、オリオン星雲到着時の信号は 1500 年の遅延が生じている。言い換えると、宇宙船がオリオン星雲に到着し

表 7.3: 静止系から観測した各行程の時間

	宇宙船の時間 [年]	地球の時間 [年]	オリオンの時間 [年]
加速区間	10.94667	601.89403	1.89403
等速巡航区間	5.66427	1800.01782	0.01782
減速区間	10.94667	601.89403	1.89403
合計	27.55761	3003.80588	3.80588

た信号は、到着から 1500 年だけ経過した時点でやっと地球に届くので、地球からの観測では実際の移動時間より 1500 年だけ長く観測されるのだ。その余分な時間を補正すると、全行程の時間は 1503.80588 年となる。

一方、オリオン星雲からの観測では、出発時の信号が 1500 年遅れて受信される。到着時の信号は遅延がない。オリオン星雲の観測では、宇宙船の航行時間は真の時間より 1500 年だけ短く観測されるのだ。その短縮分を補正すると、オリオン星雲の観測において、全行程の時間は 1503.80588 年となる。

上で説明したような光の伝搬遅延を補正した結果は、表 7.4 のようになる。当然の結果であるが、地球の時間とオリオン星雲の時間は等しくなっている。光の伝搬遅延をした場合を比べてはみたもが、実際にこのような測定をするのは困難を極める。少なくとも、送

表 7.4: 静止系から観測した各行程の時間 (遅延補正)

	宇宙船の時間 [年]	地球の時間 [年]	オリオンの時間 [年]
加速区間	10.94667	301.89403	301.89403
等速巡航区間	5.66427	900.01782	900.01782
減速区間	10.94667	301.89403	301.89403
合計	27.55761	1503.80588	1503.80588

られてくる信号に宇宙船の位置情報がなければ実現できない。地球上ならば緯度と経度で位置が特定できるが、宇宙空間での位置情報は何を利用するかが課題である。その位置情報から、自分の場所までの距離がわかれば遅延時間が計算できるはずだ。しかし、現実的に最も困難なことは 1000 光年以上の長距離に信号を伝搬させることと、それを 1000 年以上にわたってモニタすることだろう。