

第6章 恒星間航行

前章では、等加速度運動をする観測者から見た場を数学的に記述し、宇宙船が一瞬にしてUターンできる場合を想定して双子のパラドックスを解決した。本章では、1次元的な恒星間航行を数値計算によりシミュレーションし、加速度をもつ系から見た世界と、慣性系から見た世界の違いを検証してみよう。

本章での計算は、大きなオーダーでの時間と距離を取り扱うため、時間と距離の単位として、それぞれ、年と光年を用いることにする。加速度については m/s^2 を用いることにする。そのような単位を取り扱う場合、これまで導出してきた公式について、

$$c^2/a \rightarrow 9.5000527/a,$$

$$at/c \rightarrow at/9.5000527$$

の置き換えをすればよい。ここで、1年の定義としては、 $3.15569259747 \times 10^7$ 秒なる太陽年を採用し、1太陽年の間に光が進む距離 $9.460528348 \times 10^{15}$ m を1光年と定義した。

6.1 問題設定

宇宙船で地球を出発し、オリオン星雲までの旅をシミュレーションしてみよう。オリオン星雲は地球から1500光年の距離に位置し、オリオン座を構成する星が誕生した場所である。目的地が非常に遠いので、たとえ相対論的効果を期待しても、旅行というスケールにしては大きすぎ、むしろ、地球外の新天地への移住のための恒星間航行かもしれない。

オリオン星雲までの全行程において、最初の300光年の距離を加速行程に、次の900光年は等速度の巡航行程、そして、残りの300光年を減速行程に当て、オリオン星雲内で停止する。加速行程と減速行程では、 5.000 m/s^2 の加速度を保持するものとする。この加速度で加速すると、出発した12.68秒後に4分の1マイル(ゼロヨン距離)の地点を通過することから、この加速度がスポーツカー程度の加速度であることがわかる。

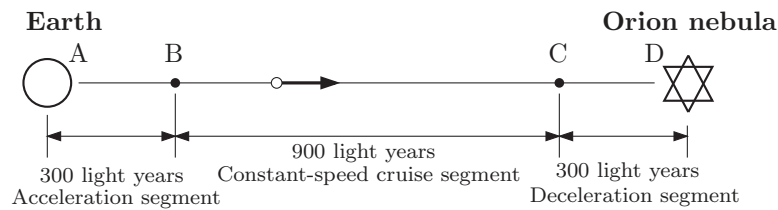


図 6.1: 恒星間航行の設定

6.2 地球から見た世界

地球から見た宇宙船の運動, 加速時間, 減速時間について考察しよう。地球の自転や公転について考えないものとし, 地球が慣性系に存在していると仮定すると, 地球から見た世界は特殊相対性理論にしたがう。

加速行程 加速行程の時間を地球の時計で表してみよう。そのためには, (2.5) を用いるとよい。初速度をゼロとし, $x = 300$ 光年となる t を求めればよい。その結果, $t = 301.8940317$ 年となる。この値が, 宇宙船が加速区間にいる時間を地球の時計で測った結果である。設定した加速度 5 m/s^2 はそれほど大きな加速度ではないが, 300 光年の距離を 302 年弱で到達してしまうことから, 何年も加速度運動を持続すれば極めて光速に近い速度域に達することがわかるだろう。

宇宙船に積んだ時計を地球から見た場合, その時計の読みは (2.9) にしたがう。その数式は, 宇宙船の固有時間 τ を地球の時間 t の関数で表している。具体的に, $t = 301.8940317$ 年を代入してみると, $\tau = 10.94667079$ 年という時間が得られる。したがって, 加速行程が終了するとき, 宇宙船の時計では 11 年程度の時間しか経過していないことになる。

加速行程を終了した時点の宇宙船の速度は, $t = 301.8940317$ 年を (2.4) に代入すると, $dx/dt = 0.999980195c$ である。いうまでもなく, c は光速である。また, $dx/dt \equiv c\beta$ としたとき, この速度に対応する Lorentz 収縮比は $\sqrt{1 - \beta^2} = 6.293509353 \times 10^{-3}$ となる。

巡航行程 巡航行程における解析は非常にシンプルである。宇宙船が巡航行程に存在する時間を地球上の時計で計測すると, 速度 $dx/dt = 0.999980195c$ で 900 光年を移動する時間であるから, $t = 900.0178249$ 年となる。宇宙船に積んだ時計の読みは, 特殊相対性理論の効果で遅いペースで時を刻む。そのペースは Lorentz 収縮比と同一の比率で遅くなるので, $\tau = \sqrt{1 - \beta^2} t = 5.66427060$ 年となる。加速行程を 300 年以上持続した結果, 宇宙船の速度が極めて光速に近くなっているため, 地球で 900 年の時間が宇宙船の時計では 5 年半程度しか刻まないのである。

減速行程 宇宙船が減速区間にいる時間については、設定した問題の対称性より、地球上の時計と宇宙船の時計の双方とも、加速区間にいる時間と同じだけ時を刻む。真面目に (2.4) と (2.5) を用いて計算しても、当然、同じ数値を得るはずである。

以上をまとめ、地球の時計の読みと、宇宙船の時計の読みを比較すると表 6.1 のようになる。いかなる物体も光速を超えることは不可能であるので、1500 光年を移動するために要する時間は 1500 年を超える。しかしながら、地球から見た宇宙船の時計は Lorentz 収縮のため、27 年半の時間しか刻んでいない。

表 6.1: 地球から見た時計の読み

	地球の時計 [年]	宇宙船の時計 [年]
加速区間	301.8940315	10.94667079
巡航区間	900.0178242	5.66427060
減速区間	301.8940315	10.94667079
合計	1503.8058872	27.55761218

地球の時計で計測した時刻に対して宇宙船が到達する距離は図 6.2 のようになる。宇宙船の速度は加速期間のかなり早い時期に光速に十分近づくため、時間の経過に対してほぼ比例して距離が増加するように見えるが、加速期間と減速期間の両端を拡大すると、到達距離が双曲線を描いていることがわかる。

地球の時計で計測した時刻に対して宇宙船の固有時間の変化は図 6.3 のようになる。図の縦軸と横軸のスケールが大きく異なるので見誤りやすいが、このグラフの両端の傾きは 1 である。宇宙船の速度が小さいときは、地球の時計と宇宙船の固有時間が時を刻むペースがほぼ同じということである。それに対し、巡航速度は光速の 99.998 % であり、巡航区間での固有時間のペースは地球の時計の 0.63 % になる。

6.3 宇宙船から見た世界

宇宙船から見た世界は、地球から見た世界とは異なる。加速区間と減速区間では、宇宙船内に慣性力が発生するため、特殊相対性理論の範疇を超え、一般相対性理論を適用が必要となる。一方、等速区間では慣性力が発生しないため、特殊相対性理論を適用してもよい。

前節では、地球から 300 光年の距離で加速を終了し、1200 光年の距離で減速を開始する、というように地球からの距離を基準に加速・等速巡航・減速の区間を定義した。しかし、

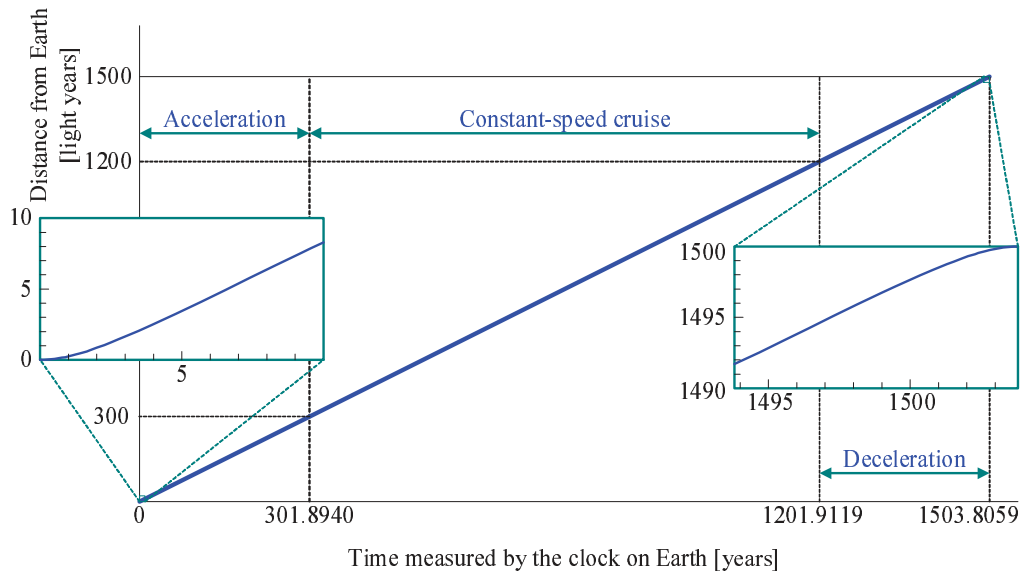


図 6.2: 地球の時計の読みに対する宇宙船の位置

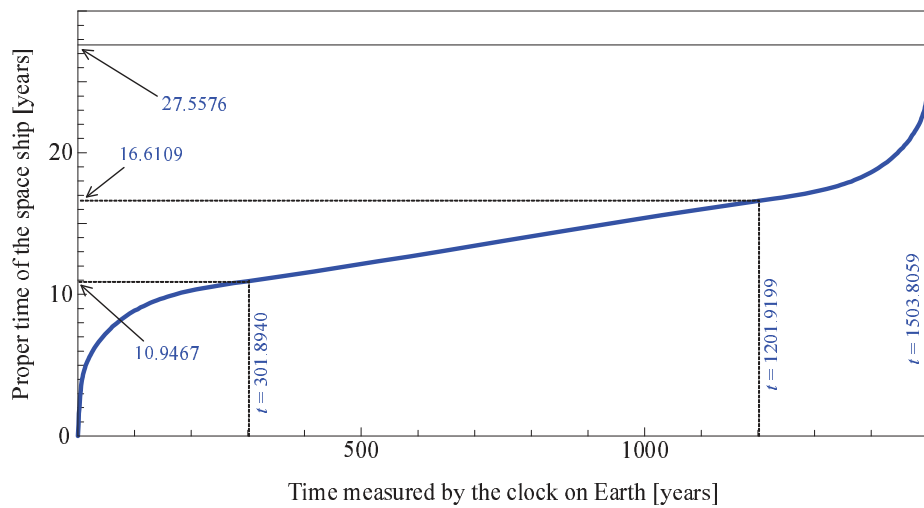


図 6.3: 地球の時計の読みに対する宇宙船の固有時間

運動形態が異なれば時空の尺度が異なるのだから、地球で見た距離の概念を宇宙船にもち込んでも意味がない。むしろ、加速終了と減速開始は、宇宙船内の時刻で定義した方が宇宙船の操縦には好都合である。その議論を進めるため、地球を点 A, 加速終了点を点 B, 減速開始点を点 C, オリオン星雲を点 D としよう。

6.3.1 加速区間

時刻 $t = 0$ で地球を出発し、加速度 $a = 5.0 \text{ m/s}^2$ で加速している宇宙船の加速を終了する時刻を算出しよう。加速区間が終了するのは、宇宙船が点 B を通過する瞬間である。言い換えると、時刻 $t = 0$ において $x = 300$ 光年であった点 B が $x = 0$ となる時刻を計算すればよい。そこで、(5.27) を用いて計算すると、加速区間にいる時間は宇宙船の時計で、 $t = 10.94667079$ 年である。

さらに、初期座標 $x_0 = 0$ を (5.30) に代入すると、加速区間のいる時間は地球の時計に換算すると $\tau = 1.89997291$ 年となることがわかる。また、初期座標 $x_0 = 1500$ 光年を (5.30) に代入すると、オリオン星雲の時計の読みに換算できる。その値は、 $\tau = 1501.870265$ 年となる。同じ慣性系に存在していても、それを加速度系から見ると、時計の進み方が場所に依存するのである。

それでは、加速終了時の速度を計算しておこう。これまでに示したように、加速度場では光速度が x に依存するため、 dx/dt の値は点 A ~ D において、それぞれ、異なった値となる。そこで、 $\beta \equiv (dx/dt)/c(x)$ のように正規化した速度を計算すると、加速終了時では $\beta = -0.999980195$ となることがわかる。この値は、点 A から点 D のすべての点において共通の値となる。

点 A ~ D と宇宙船のそれぞれについて、加速区間での経過時間をそれぞれの時計の読みで換算した値と、加速終了時の各点の位置を表 6.2 に示す。これによると、 $t = 0$ において 1500 光年先にあった目的地が、わずか 11 年弱の時間で 8 光年以内の距離にまで迫っているのだ。とはいえ、これを超光速運動だと思っはいけない。既に説明したように重力場では光速が場所によって異なる。特に、加速度ベクトルが向く前方では、その距離に対して線形的に光速が増大する。その光速の増大を考慮すると、やはり、超光速の運動は不可能である。

6.3.2 巡航区間

点 B から点 C は巡航区間である。この区間では宇宙船は等速度運動をしているので、宇宙船から見た世界は特殊相対性理論にしたがう。宇宙船から見ると、巡航区間の距離は

表 6.2: 加速行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	10.946671	—
点 A	0.000000	1.899973	-1.888052806
点 B	300.000000	301.894032	0.000000000
点 C	1200.000000	1201.876208	5.664158418
点 D	1500.000000	1501.870266	7.552211224

5.664158418 光年である。この距離を $\beta = 0.999980195$ の速度で運動するため、巡航区間にいる時間は、宇宙船の時計で 5.664270595 年である。宇宙船から見ると、その間に、点 A から点 D は、すべて、5.664158418 光年後ろに移動したように見える。また、点 A から点 D の時計は、Lorentz 収縮のため、宇宙船上の時計と比べ、 $\sqrt{1 - \beta^2} = 6.293509353 \times 10^{-3}$ 倍の時間しか刻まない。この区間における時計の読みと位置を表 6.3 に示しておく。

表 6.3: 等速行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	5.664270595	—
点 A	-1.888052806	0.035648139	-7.552211224
点 B	0.000000000	0.035648139	-5.664158418
点 C	5.664158418	0.035648139	0.000000000
点 D	7.552211224	0.035648139	1.888052806

6.3.3 減速区間

減速区間は、宇宙船の内部では慣性力による重力場が形成されているため、点 A から点 D の位置や時計の読みは、(5.27) と (5.30) で計算することができる。しかしながら、減速区間が加速区間と対象であることを利用すると、煩雑な計算をしなくても表 6.4 のような結果を得ることができる。

以上の計算結果をグラフに表示して、宇宙船から見た各地点の位置や固有時間の推移を確認しよう。まず、宇宙船から見た地球とオリオン星雲の位置は図 6.4 のようになる。加速区間の間、オリオン星雲は急激に宇宙船に近づいてくる。加速開始時に 1500 光年先に

表 6.4: 減速行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	10.946671	—
点 A	-7.552211224	1501.870266	-1500.000000
点 B	-5.664158418	1201.876208	-1200.000000
点 C	0.000000000	301.894032	-300.000000
点 D	1.888052806	1.899973	0.000000

あったオリオン星雲が 10.9467 年後には 7.5522 光年の距離に迫っている。この値だけ見るとオリオン星雲が超光速で接近したように見えるが、加速度場では加速度方向の遠方で光速が大きくなるため、その接近速度は光速を超えていない。一方、地球は 10.9467 年の加速期間中に 1.881 光年ほど後退しただけである。つまり、初期状態で 1500 年離れていた

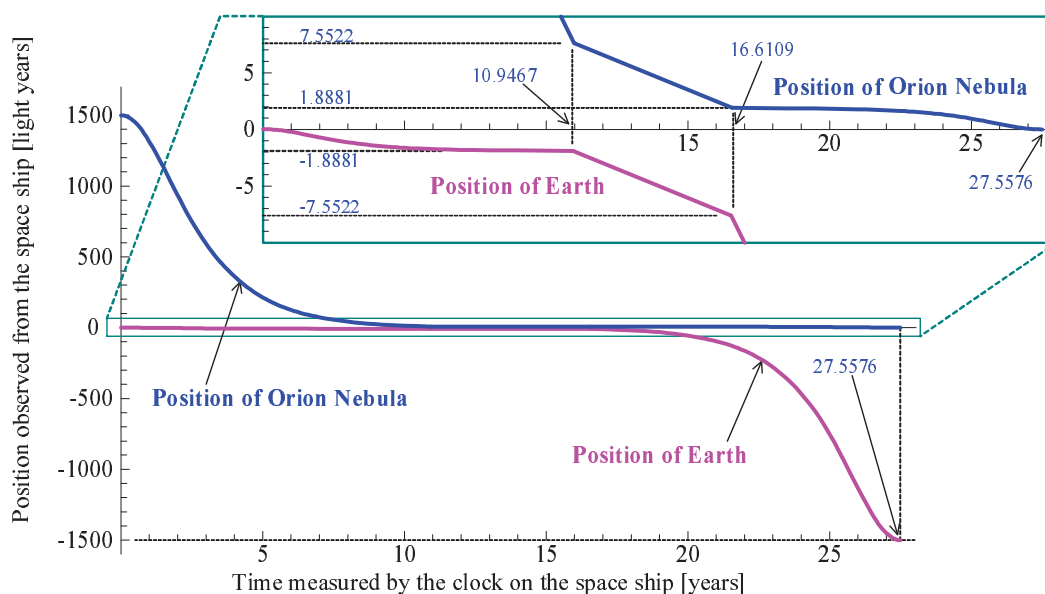


図 6.4: 宇宙船から見た地球とオリオン星雲の位置

た地球とオリオン星雲は、加速期間の終了時には 9.4403 光年しか離れていないことになる。地球とオリオン星雲の距離がこのように収縮するのは、紛れもなくローレンツ収縮である。観測者が加速度運動をすると、周囲の慣性系とのローレンツ収縮比が変化し、遠くの物体ほど大きな速度で収縮する。その速度が光速を超えないことは、重力場の光速が場所によって異なることで説明できているのである。ところで、目的地が近づき、減速区間に入ると、地球が急激に後退する。一方、オリオン星雲は減速開始時には 1.8881 光年の距

離まで接近しているの、減速期間中はゆっくりと宇宙船に接近する。減速区間が終了すると、オリオン星雲は宇宙船と同じ位置に、地球は 1500 光年後方に位置する。

宇宙船から見た地球とオリオン星雲の固有時間も、図 6.5 に示すように、不思議な推移をする。上で見た位置の変化のように、加速区間ではオリオン星雲の時計が急速に時を刻み、地球の時計はゆっくりと時を刻む。加速区間にいる約 11 年のうちのオリオン星雲の時計は 1502 年を刻み、地球の時計は 1.9 年程度しか時を刻まない。等速巡航区間では、特

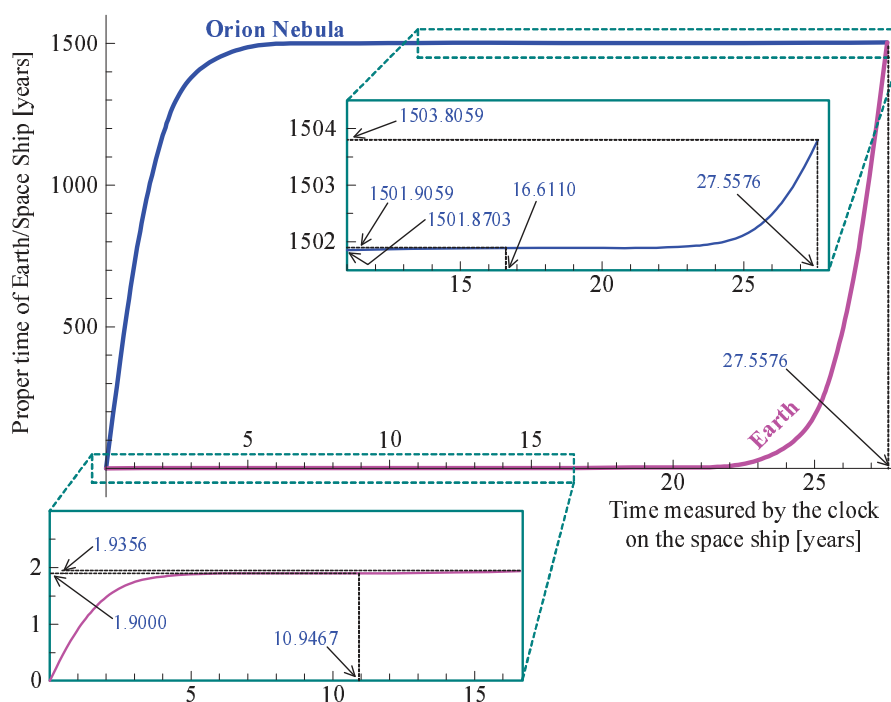


図 6.5: 宇宙船から見た地球とオリオン星雲の固有時間

殊相対性理論にしたがい、地球の時計もオリオン星雲の時計もゆっくりと時を刻む。減速区間では、加速区間と立場が逆転し、地球の時計が急速に時を刻む。その結果、全行程で宇宙船の時計が 27.8 年のときを刻む間、地球とオリオン座ではもに 1503.8 年が経過している。この計算を実行するに関して、加速区間、等速巡航区間、減速区間に属する時間には、前節で計算した地球から見た宇宙船の固有時間を用いた。その結果、全工程の時間は、地球とオリオン星雲の固有時間ともに、1503.8 年となり、前節で計算した地球の時間と一致している。

6.4 二者の比較

これまでの計算をまとめる意味で、地球から観測した時計の読みと宇宙船から観測した時計の読みを比較しよう。時計の読みは、表 6.5 に示すように面白い結果となる。時計の読みの合計を比較すると、静止系に存在する地球とオリオン星雲の時計は、地球と宇宙船のどちらから見ても 1503.805887 年となっている。一方、宇宙船の時計は、地球と宇宙船のどちらから見ても 27.55761218 年である。つまり、この結果から双子のパラドックスは

表 6.5: 全行程における時計の読み

	地球からの観測		宇宙船からの観測		
	地球の時計 [年]	宇宙船の時計 [年]	地球の時計 [年]	オリオンの時計 [年]	宇宙船の時計 [年]
加速区間	301.8940315	10.94667079	1.899973	1501.870266	10.94667079
巡航区間	900.0178242	5.66427060	0.035648	0.035648	5.66427060
減速区間	301.8940315	10.94667079	1501.870266	1.899973	10.94667079
合計	1503.805887	27.55761218	1503.805887	1503.805887	27.55761218

発生せず、必ず、宇宙船の時計が遅くなるというウラシマ効果が検証されているのだ。

双子のパラドックスは異なる速度で運動する慣性系どうしの観測で発生する。この例では、巡航区間でパラドックスが発生していることになる。その区間では、地球から観測すると宇宙船の時計が遅く、宇宙船から観測すると地球やオリオン星雲の時計が遅くなっている。遅いほうの時計は速い方に比べ、 6.2935×10^{-3} 倍であるのは、地球から見ても宇宙船から見ても同じである。それは、地球から見た宇宙船の相対速度と、宇宙船から見た地球の相対速度等しいので、当然の現象である。

地球と宇宙船の両者が観測する現象が異なるのは、加速区間と減速区間である。地球は静止系であるので、宇宙船の加減速に関わらず、特殊相対性理論にしたがって、宇宙船の時計の読みが遅れる。それに対し、加速度をもつ宇宙船では、一般相対性理論にしたがい、加速度ベクトルが向かう方向の時計が速く進む。つまり、加速区間ではオリオン星雲の時計が速く進み、地球の時計は遅い。減速区間ではその逆である。宇宙船から見た地球やオリオン星雲の時計は、加速区間、または、減速区間で急速に進み、特殊相対性理論で予想される時計の読みを大きく超え、双子のパラドックスを解消するのである。