第3章　加速度系から見た運動I

前章では慣性系から見た加速度運動する物体の位置や速度を議論したが, 本章では逆に, 加速度系から見た世界を記述してみよう。加速度系は慣性力が生じている系であるため, もはや慣性系ではなく, 特殊相対性理論が取り扱う範囲を超えている。そのため, 正確な現象理解のためには一般相対性理論を必要とする。しかし, 本章ではあえて, 特殊相対性理論のみをもちいて加速度運動系から見た運動の記述に試みる。

3.1　時間の変換

慣性系どうしならローレンツ変換で時空の座標を互いに変換できるのだが, 加速度系はローレンツ変換で取り扱うことができない。正確に議論を進めるのなら一般相対性理論を使うのがよいが, 特殊相対性理論だけで加速度系から見た世界を記述する方法を考えてみよう。まず, 静止系から見た等価速度運動する物体の変位と速度は,

$$x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right), \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2/c^2}},$$

のように表される。簡単のため, $t=0$ において $x=0$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=0$ となるように積分定数を選んでいる。ここで, 物体に固定した時計の読み (固有時間) が,

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

となることに注目しよう。その時計は加速度運動する物体に固定されていてもかまわない。微分形式で表されるこの関係式を積分すると,

$$\tau = \frac{c}{a}\operatorname{arcsinh}\frac{at}{c}, \tag{3.1}$$

を得る。この数式は, 静止系で時刻 t において, 加速度 a で加速する物体に固定した時計の読み τ を表している。ただし, $t=0$ のとき $\tau=0$ となるように積分定数が選ばれている。この数式を, 基準の静止系から加速度系への時間の変換としよう。

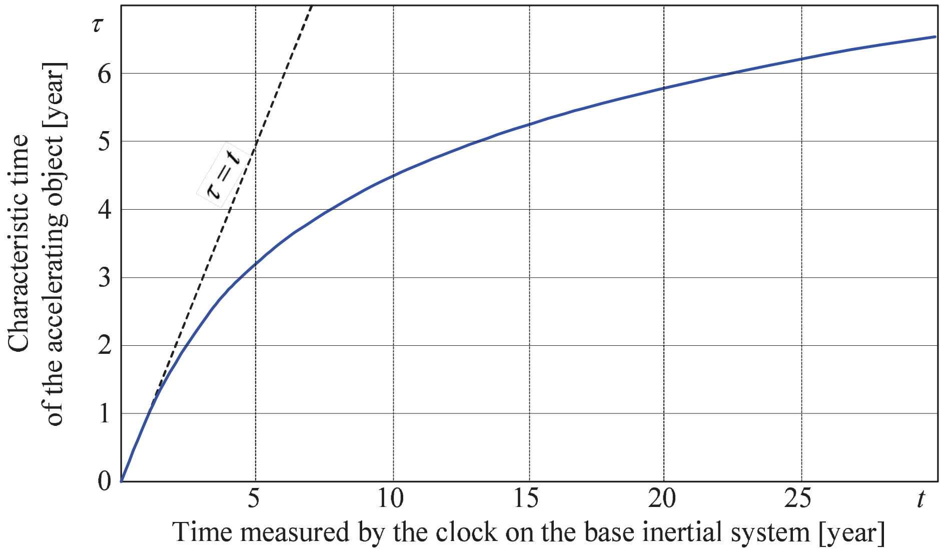

図 3.1: 等加速度運動する物体の固有時間 ($a = 5\ \mathrm{m/s^2}$)

上の計算の例として, $5\ \mathrm{m/s^2}$ で等価速度運動する物体の固有時間を基準となる静止系の時計の読みと比較したグラフを図 3.1 に示す。時刻 t が小さいうちは物体の速度が小さいため, 加速度運動する物体も静止系とほぼ同じ速さで固有時間が時を刻み, グラフが $\tau \simeq t$ となっている。しかし, t が大きくなると速度が大きくなり, 相対論的な時計の遅れが目立ち, グラフの傾きが徐々に小さくなる。開始から 30 年後, 加速度運動する物体の固有時間は 6 年半しか経過していない。

3.2 物体の変位

加速度系から見た物体の変位を考えてみよう。ここでも観測の対象を物体 A と呼ぼう。物体 A はは $t = \tau = 0$ において, K 系の座標で x_0 に存在するとする。物体 A は静止系に固定されているとする。時刻 t において, 加速する観測者が座標 $x(t)$ にいる場合, その観測者から見た位置 ξ は,

$$\xi = (x_0 - x(t)) \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2},$$

となる。ここで, 平方根はローレンツ収縮による長さの収縮率である。加速度運動をする観測者にとっては, 静止系が動いているように見えるため, その速度に応じて空間がローレンツ収縮するのである。実際にこの量を計算すると,

$$\xi = \left(x_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech} \frac{a\tau}{c} - \frac{c^2}{a}, \tag{3.2}$$

が導かれる。加速度運動する観測者の観測によると，静止系に固定された物体 A は，時刻 τ に座標 ξ に存在している。この式を τ で微分すれば，加速度運動する観測者から見た物体 A の速度が計算できる。結果を示すと，

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = -c\left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right)\tanh\frac{a\tau}{c}\,\mathrm{sech}\,\frac{a\tau}{c}, \tag{3.3}$$

である。この速度には面白い性質があるのだが，その性質は次の節で考察することにする。

観測者の時計で計測した時刻 τ において，その加速度運動する観測者が到達できる距離を評価しよう。到達できる距離は次のように定義する。加速度運動する観測者の時計で $\tau = 0$ のとき $\xi = x_0$ の位置に存在していた物体が，時刻 τ において $\xi = 0$ に存在する場合，時刻 τ における到達距離は x_0 であるとする。その定義を用いると，到達距離 x_0 は，

$$x_0 = \frac{c^2}{a}\left(\cosh\frac{a\tau}{c} - 1\right), \tag{3.4}$$

となる。到達距離の一例として，加速度 $5\,\mathrm{m/s^2}$ の観測者の到達距離を図 3.2 に示す。グラフには，到達距離の想像を助けるため，その距離に対応する代表的な天体の名前を記載している。このグラフは縦軸が対数スケールとなっているので，加速する観測者の時計に対して到達距離は指数関数的に増加していくことがわかる。加速度 $5\,\mathrm{m/s^2}$ で加速を持続す

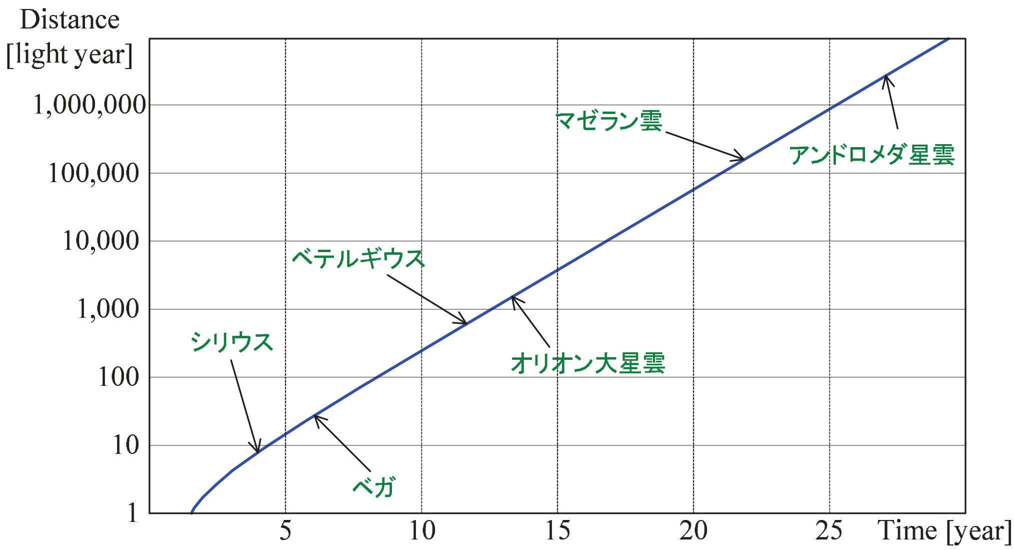

図 3.2: 等加速度運動する観測者の到達距離 ($a = 5\,\mathrm{m/s^2}$)

ると，距離 8.7 光年のシリウスには約 4 年で，距離 600 光年のベテルギウスには約 12 年で，さらに，距離 200 万光年のアンドロメダ星雲には 27 年で通過してしまう。距離 200 万光年は光でも 200 万年かかる距離であるが，それは，基準となる静止系の時計で計った時間である。加速度運動する観測者の時計は基準の静止系の時計よりゆっくり進む[1]ので加速を

[1]特殊相対性理論では，ともに相手の時計がゆっくり進むように見えるので，実のところ，この記述は正しくない。

重ねるほどに, 短時間でますます長い距離を移動することが可能になる。

3.3 速度についての考察

静止系に固定された物体 A を加速度運動する観測者が観測した速度に面白い性質があると前節で述べた。それでは, 加速度運動する観測者が見た物体 A の速度を調べてみよう。加速度運動する観測者が見た物体 A の速度は,

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} = -c\left(1+\frac{a}{c^2}x_0\right)\tanh\frac{a\tau}{c}\,\mathrm{sech}\,\frac{a\tau}{c},$$

である。ただし, $\tau=0$ のとき, 観測対象は $x=x_0$ に存在し, 速度がゼロであるとする。観測者が一定の加速度 a で加速を持続するので, 観測者の観測では, 静止系に固定された物体は速度を単調増加させながら x 軸の負の方向へ移動するように見えると推測されるかもしれない。しかし, そのようにならないのである。固有時間 τ の増加とともにこの速度の絶対値は増加を続けるのではなく, 図 3.3 に示すように,

$$\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\max} = \frac{c}{2}\left(1+\frac{a}{c}x_0\right), \qquad \text{when } \tau = \frac{c}{a}\log(1+\sqrt{2}),$$

なる最大値を迎えた後, 減少に転じるのである。観測者は一定の加速度で加速度運動を続

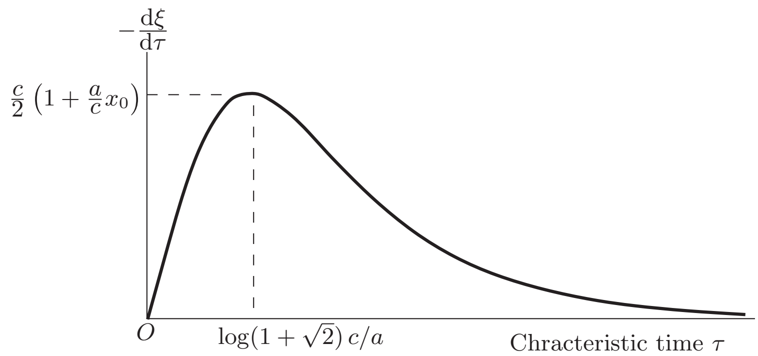

図 3.3: 加速する観測者から見た基準の静止系の物体の速度

けているのだから, 静止系に固定された物体の相対速度は増加し続けるのが自然である。その予想に反して, 減少傾向に転じるのは場所によって光速が変化しているからと考えてはどうであろうか。前に学んだように, 重力場では光速が場所によって異なる。加速度運動する観測者が見る世界は, それと類似した現象が起きていると推測するのである。例えば, その相対速度を,

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} \equiv -c(\xi)\,\beta(\tau),$$

とする。ここで, 位置 ξ における光速を $c(\xi)$ とし, 光速に対する速度比を $\beta(\tau)$ としたとき, その速度比 $\beta(\tau)$ は単調増加にならないだろうか。

それでは, ξ に依存する光速 $c(\xi)$ を推測してみよう。光速はいかなるものも超えられない究極の速度であるので, $\tau \to \infty$ としたときの速度が光速であると推測しよう。すると,

$$\begin{aligned} c(\xi) = \lim_{\tau\to\infty} \left| \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} \right| &= \lim_{\tau\to\infty} c \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0\right) \tanh \frac{a\tau}{c} \operatorname{sech} \frac{a\tau}{c} \\ &= c \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0\right) \operatorname{sech} \frac{a\tau}{c} = c \left(1 + \frac{a}{c^2} \xi\right), \end{aligned}$$

が得られる。この結果によると, 光速は位置によって異なり, しかも, 座標 ξ の 1 次関数になっている。観測者の位置 $(x = 0)$ での光速は慣性系の光速 c と等しい。しかし, $x = -c^2/a$ では $c(x) = 0$ となる。一方, 速度比 $\beta(\tau)$ は,

$$\beta(\tau) = \tanh \frac{a\tau}{c},$$

のように, τ に関して単調増加関数となる。読みどおりである。それでは, $c\,\beta(\tau)$ の値に対して, 固有時間 τ を基準の静止系の時間 t に変換して書き直してみよう。関係式 $at/c = \sinh(a\tau/c)$ に注目すると,

$$c\,\beta(\tau) = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2t^2/c^2}},$$

が得られる。この結果は静止系から見たときの観測者の速度と一致する。つまり, 加速度運動する観測者が, 観測者の時計で時刻 τ のとき, 静止系に固定された物体の速度を計測すると, 速度は物体の位置 ξ に依存する。それは, 加速度運動する観測者が見る光速が ξ に依存するからであり, 物体の速度は $c(\xi)\,\beta(\tau)$ と書くことができる。このとき, 静止系から見ると, 加速度運動する観測者は, 速度 $c\beta(\tau)$ で運動しているように見えるのである。