第1章　特殊相対性理論

アインシュタインの相対性理論といえば, 光速に近い速度で運動する物体の時計が遅れるという, いわゆる, ウラシマ効果が有名である。光速に近い速度で恒星間を航行する場合の時間や空間について議論するための前置きとして, 本章では特殊相対性理論を紹介する。特殊相対性理論は, ガリレイの相対性原理に対して, 光速を取り扱えるように拡張した理論である。光速を取り扱える理論の産物として, ウラシマ効果など SF 小説で見られる物理効果が導出される。

1.1　ガリレイの相対性原理

運動における相対性という考え方は, 16 世紀にガリレイが提唱した相対性原理に端を発する。相対性原理とは, 等速運動をしている観測者には, その速度に関係なく物理現象が同じように見えるため自分が運動しているかどうか判定することができない, という物理学の基本原理である。

相対性原理は, 特別なものではなく, 我々が日常生活において体験できる現象に基づいている。例えば, 日常生活においてコップに水を注ぐことができれば, 特別な訓練をしなくても, 200 km/h 以上の速度で走る新幹線の中, または, 900 km/h 程度で運動する航空機の中でも同様にコップに水を注ぐ事ができる。逆に, 自分が新幹線で移動中であるという先入観がなければ, たとえ 200 km/h で運動していても, 自分が運動していることすら認識できないのではないだろうか。例えば, 駅に停車中の電車に乗っていて, 隣のトラックに停車中の電車を眺めていたとしよう。自分の電車がゆっくりと走り始めたとき, あたかも, 自分が停止していて相手の電車が動き始めたような錯覚を感じたことはないだろうか? それが相対性原理による錯覚である。

地球の自転による赤道での回転速度は 465 m/s 程度である。さらに, 地球は太陽の周りを 30 km/s の速度で公転し, 太陽系でさえ, 銀河の中心に対して 250 km/s の速度で公転している。しかし, 古代には地球 (大地) が絶対的に静止しているという, いわゆる天動説が信じられていたことから, 宇宙おける地球の運動速度はまったく認識されていなかったのだ。付け加えるなら, 銀河系さえも大きな速度で運動しているかもしれないというように,

誰が静止しているかなどという議論は不可能である。それを裏返せば, 自分が静止していると仮定しても物理現象を議論するうえでは問題はない。

ある観測者が, (地表面を基準に見たとき) 40 km/h で運動する自動車に乗っている。それを自動二輪車が 60 km/h で追い越したとしよう。自動車に乗っている観測者から見ると, 自動二輪車は 20 km/h で前方に走り去っていくはずである。このような現象は,

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \tag{1.1}$$

のようなガリレイ変換で説明できる。ここで, 座標 $[x, y, z]$ はカルテシアン座標[1]である。また, プライム ($'$) のついていない方が地表面における (静止系) 座標, プライムのついている方が自動車に乗っている観測者の座標である。観測者は, 自分の座標系の原点に存在すると考えればよい。ここで, 地表面に立っている観測者の座標系を K 系, 自動車に乗っている観測者の座標系を K$'$ 系と呼ぶことにしよう。上に示したガリレイ変換は, K$'$ 系が K 系に対して相対的に x 軸方向に速度 v で運動していることを表している。その数式を時間 t で微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v, \qquad \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

なる速度の変換則が得られる。この変換則において, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ が K 系から見た自動二輪車の速度, $\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t$ が K$'$ 系から見た自動二輪車の速度である。この変換式から, 先ほど述べように, 自動車 (K$'$ 系) から見た自動二輪車の相対速度が 20 km/h となることが説明できる。

ガリレイ変換を時間 t で 1 階微分すると速度の変換式が導出されたが, 2 階微分すると v の項が消失するため, ニュートンの運動方程式 $m\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2 = \boldsymbol{F}$ は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x'}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F},$$

のようにガリレイ変換される。ここで, $\boldsymbol{x}$ は観測対象の位置のベクトル表記, $\boldsymbol{F}$ は観測対象に作用する力である。ニュートンの運動方程式は (相対性理論以前の) 力学の基本方程式であるので, その方程式が座標変換によって形を変えないということから, 等速度運動する観測者が観測する物理現象は, その速度とは無関係であると結論づけられる。言い換えると, 加速度をもたない観測者は, 自分が動いているか, 静止しているかということを区別できない。これがガリレイの相対性原理である。つまり, すなわち, ガリレイの相対性原理はニュートン力学において成立するということである。

[1] カルテシアン (Cartesian) 座標とは, デカルトの直交座標のことである。デカルト (Descartes) はフランス語の定冠詞 des と Cartes が短縮してできた姓であり, その定冠詞を取り除き, Cartesian(カルテシアン = Cartes の) 座標と呼ばれている。

1.2 ガリレイ変換の破綻

ニュートン力学がガリレイ変換に対して不変であり, ガリレイの相対性原理と矛盾がないことを前節に示した。しかし, 19 世紀の後半になってガリレイの相対性原理を受け入れない物理現象の存在が明らかになった。それは, 電磁気現象である。

電磁気現象は, マクスウェルの方程式で記述される。マクスウェルの方程式は, 電気と磁気の現象を統一し, 電磁誘導を説明し, 電磁波の存在を予言するといった大きな業績をあげた基本方程式である。その方程式は, ガリレイ変換を受けると, 数学的な形が変わってしまうのである。それは, ガリレイの相対性原理が成り立たないことを意味する。

マクスウェルの方程式は電場と磁場を記述する方程式であるが, その代わりに, 静電ポテンシャル ϕ やベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いても記述することができる。特に, 真空中において静電ポテンシャル ϕ のみを記述できるようにマクスウェルの方程式を書くと,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=0,$$

のような波動方程式となる。方程式に現れる c は光速である。この方程式はポテンシャル ϕ が真空中を速度 c で伝播することを意味している。マクスウェルが電磁波の存在を予言し, 光が電磁波のひとつの形態であることを主張したのはこの方程式を導出したことに起因する。ところが, この方程式をガリレイ変換すると,

$$\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\right]\phi=0,$$

となり, 方程式の形が変わってしまうのである。そうなると, マクスウェルの方程式に誤りがあると推測できるかもしれない。しかし, 実験結果と一致し, 電気と磁気の統一や, 電磁波の存在の予言をもたらしたマクスウェルの方程式が謝っているとは考えにくい。その一方, ガリレイ変換が誤っていると推測するのも非常に勇気が要ることである。なにしろ, ガリレイ変換の反例を日常の範囲で見出せないし, ガリレイ変換が誤っているのなら, ニュートン力学に修正が必要[2]になるからである。

一方, マクスウェルの方程式を不変にするための座標変換を探す研究も 19 世紀末には実施されていた。その結果, 1887 年にフォークト (Voigt), 1897 年にラーモア (Larmor), 1899 年と 1904 年にローレンツ (Lorentz), 1905 年にポアンカレ（Poincaré) がそのための座標変換を特定している。その座標変換はローレンツ変換と呼ばれ, 後に説明するようにアインシュタインが導出した変換式と同一の形をしている。

座標変換以外にも, マクスウェルの方程式には不可解な要素があった。それは光の伝播速度である。マクスウェル以前に既に認められていたが, マクスウェルの方程式によって

[2]物理学史の結果としては, ニュートン力学が修正を受けることになる。

光が波であることがしっかりと確認されたのである。波動方程式に現れる伝播速度は, 波を伝える媒質に対する相対速度である。例えば, 空気中を伝播する音波の媒質は空気であり, 地震波の媒質は地殻やマントルなどである。一方, ニュートンの時代から光が波であり, それが真空中を伝播することも知られていた。そのため, 宇宙空間 (真空中) には光の媒質であるエーテルという未知の物質で満たされていると信じられてきた。マクスウェルの方程式によって, 光が波であることが確実になったため, より一層, エーテルの存在が強調されることとなった。

マクスウェルの方程式はエーテルに対して相対的に静止している観測者にしか成り立たない方程式なのか? そう考えるのはおかしい。なぜなら, マクスウェルの方程式は多くの研究者の発見を積み重ねた結果の産物であり, その研究者たちがいる地球も, 自転や公転をしているのでエーテル内に静止しているとは考えにくいからである。

なによりも, エーテルが存在するのであれば, 宇宙には特別な絶対静止系, すなわち, エーテルに対する相対速度がゼロとなる系が存在するはずである。そうなると, 光速を測定することによって絶対静止系に対する自分の相対速度が特定できるため, ガリレイの相対性原理との間に矛盾を生じてしまうのである。

1.3 マイケルソン・モーレーの実験

光の媒質として信じられてきたエーテルの存在を明らかにするため, 19 世紀末にマイケルソン (Michelson) とモーレー (Morley) がエーテルの速度を計測する実験を実施した。期待に反して, その実験は物理学を大問題に直面させることになる。

地球は太陽の周りを約 30 km/s で公転しているため, 万一, 1 年のうちのどこかでエーテルとの相対速度がゼロになる点があったとしても, 大半はエーテルに対してゼロではない相対速度をもっている。エーテルとの相対速度は図 1.1 のように, エーテル流れと同じ方向, および, 垂直な方向に対して光の往復時間を比較することによって計測できる。この図は, エーテルが右から左へ速度 v で流れている場合を想定している。まず, (a) では光源からエーテル流れに逆らって発射した光を距離 L だけ離れた鏡で反射し, その光が光源に戻るまでの時間を計測する。エーテルに対する光の伝播速度を c とすると, 行きはエーテル流れに逆らうため, 光は速度 $c-v$ で進行する。反射した後, その光は速度 $c+v$ で戻ってくる。つまり, この場合において, 光の往復に要する時間は,

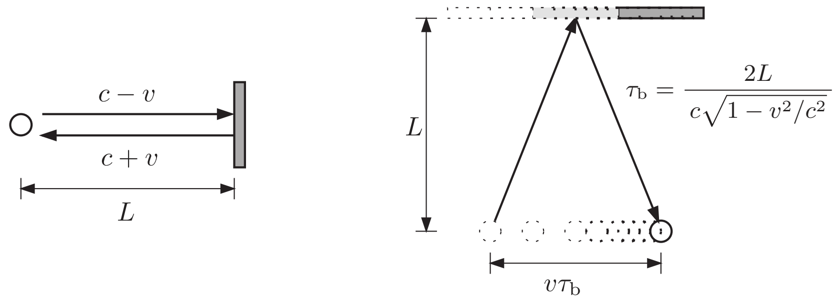
$$\tau_{\mathrm{a}} = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c\,(1-v^2/c^2)},$$

となる。一方, (b) はエーテル流れとは垂直な方向に光を発射した場合である。この図は, エーテルから見た様子を表している。エーテルから見ると, 測定装置が右に向かって速度

v で運動しているので, 発射した光は図 1.1 (b) のような軌跡を描く。この場合, 光はエーテル流れとは垂直な方向に, 速度 $\sqrt{c^2 - v^2}$ で伝播するので, 往復に要する時間は,

$$\tau_\mathrm{b} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

となる。確かに, (a) と (b) では光の往復時間が異なっている。この時間差を検出できればエーテルの存在が確かめられるわけである。



(a) Parallel to the ether flow. (b) Perpendicular to the ether flow.

図 1.1: エーテル中の光の往復

波源から鏡までの距離を $L = 10\,\mathrm{m}$ とし, エーテルに対する地球の相対速度を $v = 30\,\mathrm{km/s}$ とすれば, 図 1.1 の (a) と (b) における往復時間の差は,

$$\tau_\mathrm{a} - \tau_\mathrm{b} = \frac{2L}{c}\left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \approx \frac{Lv}{c^3} \approx 3.34 \times 10^{-16}\ \mathrm{s},$$

となる。この時間差は光でさえも約 $0.1\,\mu\mathrm{m}$ しか移動できないくらいの短い時間である。しかし, この長さは光の波長と比較できるくらいの長さなので, 1887 年の時点で, マイケルソンが考案した干渉計 (マイケルソン干渉計) によって検出することが可能であった。マイケルソンとモーレーは 1887 年から, 図 1.2 に示すマイケルソン干渉計を用いてエーテルの速度を検出しようとした。この実験はマイケルソン・モーレーの実験とよばれる。マイケルソン干渉計は, 図 1.2 に示すように, 光源とハーフミラー, 2 つの反射鏡と, 検出器によって構成される。光源から発射された光は, 半分がハーフミラー M_0 を透過して反射鏡 M_1 へ, もう半分が M_0 で反射して反射鏡 M_2 へ進行する。それらの反射鏡 M_1 と M_2 で反射した光は, 再び, M_0 で反射した後に検出器で映像として観測される。ハーフミラーから反射鏡までの距離 L_1 と L_2 を調整して, 検出器で光が同位相で合成されるようになっていれば光は強め合い, その位相関係が変化すると, 検出される光は弱くなる。

マイケルソンとモーレーは, 長さ L_1 が地球の公転方向と一致するように干渉計を配置して, 検出器の位置で光が強め合うように長さ L_1 と L_2 を調整して, 続いて, 長さ L_1 が子午線方向を向くように (すなわち, 90 度) 干渉計を回転させた。エーテル流れに平行な方

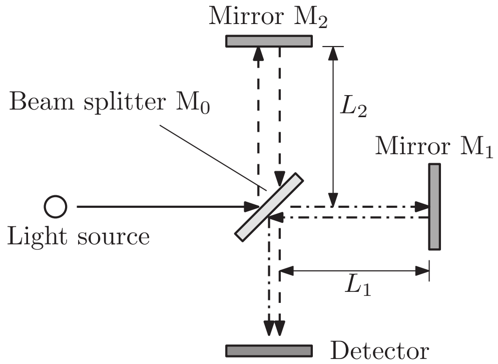


図 1.2: マイケルソン干渉計

向と垂直な方向では光の速度が異なるはずなので, 回転させることによって光の位相関係が変化し, 検出結果に変化が現れるはずである。しかも, この干渉計を水銀に浮かせた状態にしているため, 干渉計を回転させる際に調整した距離を狂わせるような負荷が装置にかからないようになっている。しかしながら, この実験によって予想されていた時間差が検出できなかった。検出された時間差は, 誤差の範囲ともいえるくらいの, 予想値よりもはるかに小さな値だったのである。彼らは, 1 日のうちの観測時刻を変えてみたり, 一年のうちの時期を変えてみたりしたが, 結局エーテルの速度を検出することができなかったのである。

マクスウェルの方程式がガリレイ変換に対して不変でないことに加え, この実験の失敗によりエーテルの存在に対する解釈が混沌としてしまった。この実験を説明するため, 様々な説が提唱された。ある者は, エーテルが粘性をもっているため, 地球はエーテルを引きずりながら運動し, 地表がエーテルに対して静止しているという説を唱えた。その説が正しければ, 地球周辺のエーテル流が宇宙からやってくる光を屈折させるはずであるが, そのような現象は観測されていない。甚だしい例としては, 物理学を天動説に戻そうとする説まで現れた。

一方, ローレンツは, エーテルに対して運動するとその運動方向に $\sqrt{1-v^2/c^2}$ の割合で長さが縮むという説 (いわゆるローレンツ収縮) を唱えた。そうすれば, 図 1.1 の例において, エーテル流れと平行な場合と垂直な場合における光の往復時間が等しくなり, その結果, マイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったことを説明できる。しかも, ローレンツの説の検証を試みたとしても, 計測に用いるものさし自体が同じ割合で収縮するため, 検証すらできないのである。この説は直接ぼろが出ないような巧妙な説であった。とはいえ, ローレンツがこのような説を提唱するには, ある程度, 理論的な裏づけがあった。実は, 次節で導出するローレンツ変換によって, 運動する慣性系では静止系と長さの尺度が異なることがわかったからである。

1.4　光速不変の原理

本節から特殊相対性理論を説明する。アインシュタインは, 慣性系から観測される物理現象の記述には, ガリレイの相対性原理だけでなく, 誰から見ても光速が不変であるという原理を追加した。その新しい原理によって, ニュートン力学では考えられなかった新たな時間の概念が生まれた。アインシュタインの相対性原理も, ガリレイの相対性と同様, 等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できないこと (相対運動の原理) を基盤としている。つまり, ある慣性系 K で成り立つ物理法則は, それとは相対速度をもつ慣性系 K′ でも形を変えずに成り立つのである。それに加えて, アインシュタインの相対性原理では光速不変の原理が追加される。その新たな原理は, 等速運動をしている限り, いかなる観測者が見ても, その速度によらず光速はある一定の値であることを規定したのである。

慣性系 K から光を発射したとする。その光の速度を K 系から計測すると c であったとする。別の慣性系 K′ が速度 v で遠ざかっているとする。K′ 系からみた光の速度は, ガリレイ変換によって $c - v$ となるはずである。ところが, アインシュタインの相対性原理によると K′ 系から見た光速は c である。当然, K′ 系が速度 v で近づいていたとしても, 観測される光の速度は c である。

この原理は我々の常識から逸脱するように思える。しかし, この原理はマイケルソン・モーレーの実験結果を素直に受け入れた原理である。地球が約 30 km/s で太陽の周りを公転しているにもかかわらず, 計測した光の速度が方向によらずに一定値であったことを, そのまま原理としてしまったのである。しいて言うなら, 我々が計測する速度や長さ, そして, 時間は光の速度が基準となっているということである。言い換えると, 等速運動する観測者から見たとき, 光の速度が一定値 c $(= 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m/s})$ となるように宇宙ができているということである。そうすることで, もはやエーテルの流れなどを考える必要がなくなる。つまり, エーテルが存在しなくても不都合はないのである。

光速不変の原理は, 強引にとって付けられた原理に思えるかもしれないが, 相対性原理を確かなものとするには必要な原理である。なぜなら, 相対性原理によると, 上で述べたように, 等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できない。しかし, 光速がある基準となる慣性系に対する相対速度に依存して変化するのであれば, 光速を計測することによって, 基準となる慣性系に対する相対速度が特定できるのである。つまり, 光速不変の原理がなければ, 宇宙には絶対静止系が存在することとなり, 相対性原理が成り立たないことになる。

1.5　ローレンツ変換

前に述べたように, 慣性系の間の座標変換がガリレイ変換である限り, 光速不変の原理が成立しない。光速不変の原理を成立させるには, ガリレイ変換に代わる座標変換が必要となる。その必要性を満たす座標変換はローレンツ変換と呼ばれる一次変換であり, 形式的に,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.2}$$

と書かれる。ただし, $\beta \equiv v/c$ である。この変換式は空間座標 $[x, y, z]$ だけでなく時間座標 t も変換するのが特徴である。ニュートン力学では時間は絶対的なものであり, いかなる観測者に対しても平等に進行すると信じられていたのだが, この新しい座標変換は時間も空間座標と同じように変換されるべきことを意味している。ただし, $c \to \infty$ の極限をとれば, (1.2) はガリレイ変換と一致する。つまり, ガリレイ変換は光速に比べ非常に小さい速度範囲に限定した近似式だったと考えられるのである。

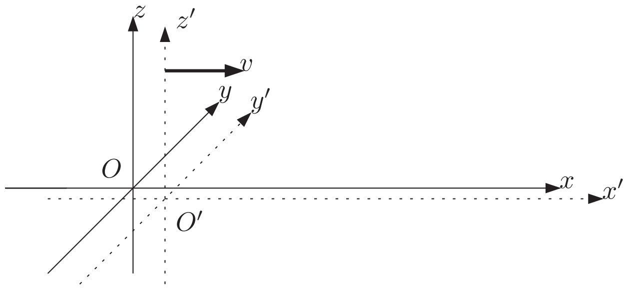


図 1.3: 運動する座標系

光速不変の原理から導かれた座標変換 (1.2) は, 電磁気学のマクスウェルの方程式を不変にする性質をもっている。つまり, 電磁気学に対して相対性原理との矛盾を解消するには光速不変の原理が必要だったのである。アインシュタインが光速不変の原理から (1.2) を導出したことに対して, ローレンツやラーモアはマクスウェルの方程式を不変にする座標変換として, アインシュタイン以前に (1.2) の導出に成功していたのである。しかも, アインシュタインの論文と同年の 1905 年に, ポアンカレが座標変換 (1.2) をローレンツ変換と呼んだことによって, その名前が定着したのである。とはいえ, アインシュタインはローレンツ変換に基づいて, ニュートン力学では考えられなかった時間や空間の概念を導き出した。以降の節では新たに導かれる時間や空間の性質を説明する。

1.6　同時性の不一致

ローレンツ変換によると, すべて観測者に対する同時性が成立しなくなる。言い換えると, K 系の観測者が同時に観測した事象 A と B は, 別の慣性系 K′ 系の観測者から見ると, その 2 つの事象は同時発生していないのである。例えば, 事象 A が $x = x_{\mathrm{A}}$ で, 事象 B が $x = x_{\mathrm{B}}$ で, K 系の同一時刻 $t = 0$ のときに発生したとしよう。 ローレンツ変換にそれらの座標を代入すると, K′ 系で観測した事象発生時刻が算出される。

$$t'_{\mathrm{A}} = \frac{-\,vx_{\mathrm{A}}/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t'_{\mathrm{B}} = \frac{-\,vx_{\mathrm{B}}/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

ただし, $\beta = v/c$ である。つまり, $x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$ である限り、2 つの事象は, K′ 系では異なる時刻に発生していることになる。この同時性の不一致は, 図 1.4 に示すように, 原点から $-x$ 方向と $+x$ 方向に照射された光線で説明できる。K 系の $x = -a$ と $x = +a$ に, それぞれ, 感光センサ A と B があった場合, K 系から見ると 2 つセンサは同時に光線を検出するだろう。しかしながら, K′ から見たとき, センサ B のほうが先に感光するのである。

(a) Observed from the K frame　(b) Observed from the K′ frame

図 1.4: 同時性の不一致

そのような同時性の不一致は, 物理学として危険な可能性をもっているように感じるかもしれない。その危険な可能性とは, 因果性を狂わせる可能性である。上であげた 2 つの感光センサの例において, もし, K′ 系の運動方向が逆, すなわち、K 系に対する速度が x 軸方向に $-v$ であったなら, 上の例とは逆にセンサ A が先に感光するのである。 つまり, 観測者によって事象の発生時刻が異なって見えるのである。その甚だしい例として, 原因と結果の発生順序が入れ替わる現象が発生しないのだろうか?

K 系と K′ 系で事象の発生順序が入れ替わる条件とは, 事象 A と B の発生時刻について, $t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}$ の符号が $t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}$ と異符号であるということである。これを形式的に書くと,

$$(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})(t'_{\mathrm{B}} - t'_{\mathrm{A}}) < 0,$$

となる。これにローレンツ変換を適用すると,

$$(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})\frac{(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}) - v\,(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} < 0,$$

となるので,

$$|t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}| < \frac{v}{c^2}|x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}|,$$

が順序入れ替わりの条件である。 さらに, $v/c \leq 1$ という条件をつけると,

$$|t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}| < \frac{|x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}|}{c},$$

という条件が得られる。事象 A と B に因果性があるならば, 座標 x_{A} で事象 A が発生した情報が座標 x_{B} に伝達した後に事象 B が発生するはずである。光より速い情報伝達手段が存在しないならば, 因果性のある 2 つの事象は必ず $|t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}| \geq |x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}|/c$ を満たしている。その場合, 因果性のある事象の順序は決して入れ替わることがない。順序が入れ替わる条件を満たす組み合わせは, 因果性のない事象である。感光センサの例では, 一方のセンサが感光したことと, もう一方のセンサが感光したことには因果性がない。どちらが先に感光しても物理的に不都合はないのである。一方, 原点から光線が照射されたこととセンサが感光したことは因果関係がある。K 系の時計で $t = 0$ のときに照射された光線が $x = a$ のセンサで検出される時刻は $t = a/c$ である。この例では, $|t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}| = |x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}|/c$ となり, 順序が入れ替わることはない。

仮に光より速い伝達手段が存在するならば, 因果性は破綻してしまうことになる。後に示すように, 光速度より遅い物体を超光速に加速することは不可能であるが, それに加えて, 因果性が保持されるためにも光より速い情報伝達は不可能と考えるべきであろう。

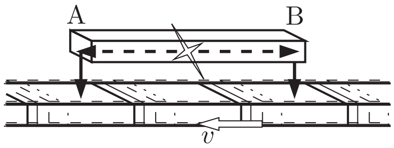
1.7 長さの収縮と時計の遅れ

相対性理論の効果の一つとしてローレンツ収縮と呼ばれる長さの収縮と, 時計の遅れがローレンツ変換から導かれる。ローレンツ変換を見れば, 慣性系 K とそれに対して速度 v で運動する別の慣性系 K$'$ には, 長さと時間の尺度が違っていることがわかる。特に時計の遅れは, 科学小説で頻繁に使われるのでなじみが深いだろう。本節ではローレンツ変換からそのような相対性理論の効果を導いてみる。

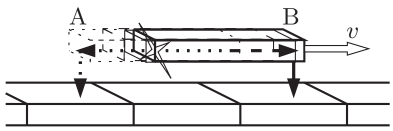
ローレンツ収縮　まずは, 長さの測定方法について考えてみよう。長さは, 対象となる 2 つの点 (例えば, 点 A と点 B) を選び, この 2 点にものさしを当てれば測定できる。しかし, 運動している対象の長さを測る場合には注意が必要である。点 A の位置を記録してから, 点 B の位置を記録するまでの間に点 A が移動するからである。よって, 運動する物体の長さを測定するには, 両端の位置を同時に記録しなければならない。

図 1.5 のように速度 v で運動する物体の長さを測定する場合を考えてみよう。その物体と併走する慣性系を K$'$, 長さを測定する観測者が存在する慣性系を K とする。この運動する対象物体の中点には時限式のレーザ照射装置が設置され, あらかじめ設定した時刻になるとレーザ照射装置から左右にレーザ光を発射する。 レーザ光は同時に両端 (点 A と

点 B) に到達し, その場所に設置されている反射鏡によって進路を直角に曲げられて, K 系に備え付けられているものさしに位置を焼き付ける。そうすることで物体の長さを正確に測定できるように思える。しかしそれは K′ 系から見たときの話 (図 1.5 (a)) である。光速不変の原理によると, K 系から見たとき, 物体の中点から発射されたレーザ光は先に点 A に到達 (図 1.5 (b)) する。点 B に光が到達する頃には, 物体はさらに移動しているので, ものさしに焼き付けられた 2 点間の距離は物体の長さより長いはずである。したがって, K 系から見た物体の長さは K′ 系が主張する長さより短い。



(a) Observed from K′ frame.



(b) Observed from K frame.

図 1.5: 運動する物体の長さ測定

長さの収縮を数式で表してみよう。K′ 系における微小長さ $\mathrm{d}x'$ を K 系から測定した長さを $\mathrm{d}x$ とする。まず, ローレンツ変換を微分すると,

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となる。上で述べたように, K 系から長さを測定するときは, K 系の時計において同時に両端の位置を記録する必要があるので観測に要する微小時間を $\mathrm{d}t = 0$ とする。その結果,

$$\mathrm{d}x = \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}x', \tag{1.3}$$

となるので, K 系から測定される長さは K′ 系が主張する長さより短くなっている。微小ではない長さを考えるのであれば, (1.3) を積分すればよいので, K′ 系から見た運動物体の長さを L' とすると, K 系の観測者にとっては, $L = \sqrt{1-\beta^2}\,L'$ に収縮して見える。

逆に, K′ 系から見ると, K 系が x' 軸方向に速度 $-v$ で運動しているので, K 系に固定されたものさしの長さが短くなっているように見える。これもローレンツ変換から導くことができる。ここでも, ローレンツ変換の微分を書いておくと,

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - (v/c^2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

である。今度は K′ 系から長さを測定するので $\mathrm{d}t' = 0$ が条件となる。その条件から容易にわかる関係 $\mathrm{d}t = (v/c^2)\,\mathrm{d}x$ を, $\mathrm{d}x'$ の式に代入すると $\mathrm{d}x' = \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}x$ が得られ, 結局, K′ 系から見ると K 系の長さが収縮しているように見えるのである。

この収縮現象がローレンツ収縮と呼ばれるのは, アインシュタインが相対性理論を発表する前にローレンツがこの収縮に気づいたからである。ローレンツは, エーテル内を運動

する物体はその運動方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ の割合で長さが縮むことを主張し, それが理由でマイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったとした。ローレンツの主張による収縮の割合がローレンツの理論とは一致するが, 物理的な解釈はまったく異なる。ローレンツの主張によるとエーテルに対して運動する物体は, 物体を構成する原子が, 運動する荷電粒子として振舞うため, 分子間力となる電気的な力が変化し, 速度方向の長さが縮むのである。この主張によると, 運動する物体の長さは本当に縮むのであるが, 長さを測る物差しも同様に縮むので, この収縮を検証できない。これに対してアインシュタインの主張によると, ある慣性系 K から相対速度をもつ別の慣性系 K′ を見たとき, K′ 系の長さが速度方向に縮んで見えるのであって, K′ 系の長さが本当に縮むわけではない。この収縮現象は, 相対速度による座標変換によって生じる観測の不一致であるため, 逆に, K′ 系から見ると K 系の長さが速度方向に縮んで見えるのである。

もうひとつローレンツ収縮について補足しておこう。ローレンツ収縮は単に物体の長さが縮むだけではない。座標変換によってもたらされる収縮であるので, 物体の長さというよりも宇宙全体が縮んでいると解釈したほうがよい。例えば, 地球から月までの距離は約 38.4 万 km であるが, 地球とは相対的に光速の 87 % で運動する観測者から見ると, 地球と月の距離は約 19.2 万 km となる。ローレンツ収縮があるため, 本書で後に説明するように, 光速に近い速度域まで加速すると, 数百万光年の距離を (運動する観測者の時計で) 数十年で移動することが可能になる。

時計の遅れ　相対性理論において時間を議論するとき, 必ず, 座標系の定点に張り付いた時計を考えなければならない。既に見たように, 運動が長さや時間の尺度を変化させる現象であるので, 時計が座標系の中を動き回った場合, その運動のため時計の読みが狂ってしまうかもしれないからである。

K′ 系の時計の読みを K 系の時計と比較してみよう。そのために, 再び, ローレンツ変換の微分:

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - (v/c^2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

を用いる。K′ 系の定点に張り付いた時計ならば, $\mathrm{d}x' = 0$ が条件となるはずである。この条件から容易に $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$ が導かれるので,

$$\mathrm{d}t' = \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t,$$

なる関係が得られる。この式が主張するのは, K 系から見たとき K′ 系の時計が $\sqrt{1-\beta^2}$ の割合で遅れて見えるということである。例えば, K′ 系が K 系に対して光速の 50 % で運動しているとする。K 系から見ると, 1 時間たつ間に, K′ 系ではその 86.7 % にあたる 52 分しか経過したように見えないということである。当然, 相対性原理のため, K′ 系から見る

とK系の時計が遅れて見える。上に書いたローレンツ変換の微分に対し, $\mathrm{d}t = 0$ という条件を適用すると, $\mathrm{d}t = \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t'$ が得られるはずである。

時間収縮は, 相対性理論から導かれる現象の中で最も理解しがたいことかもしれない。飛行機の速度をもってしても, その速度は光速の100万分の1であるので, 1時間の移動あたりで遅れる時間は 1.8×10^{-9} 秒に過ぎない。ところが, 宇宙から降り注ぐ宇宙線によって相対性理論による時計の遅れが観測されている。宇宙線が大気の原子核と衝突することによってミュー粒子が生成され, 地表に到達する事実が観測されている。ミュー粒子の寿命は, わずか2マイクロ秒なので, 仮に光速で飛来しても600 m の距離で崩壊するはずである。それにも関わらず, ミュー粒子が地表に到達するのは, 高速なミュー粒子の時計が遅れているからである。仮に, ミュー粒子の速度が光速の99.99% であるならば, 地表から見たミュー粒子の寿命は70倍長くなり, 崩壊するまでにミュー粒子は42 km 移動することができるので, 地表に到達することも可能になる。

1.8 ミンコフスキー時空

慣性系から観測した時間 t と空間 $[x, y, z]$ は, ミンコフスキー時空と呼ばれ, 面白い幾何学的な性質が成立する。時空とは時間と空間を個別ではなく, 一つの座標として取り扱うための座標系である。

ニュートン力学では, いかなる観測者から見ても共通の物理量だったので, 空間座標とは区別していた。それに対し, 相対性理論では時間も空間座標と同様, 値も尺度も異なる量に変換され得るため, 時間を座標軸の一つとして取り扱うことが自然である。習慣として, 時間はゼロ番目の座標成分とし, $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とする[3]のである。ここで, あえて時間に対応する成分に光速 c を乗じ, すべての座標成分が長さのディメンジョンをもつようにした。これらの座標成分に関するローレンツ変換を微分すると,

$$c\,\mathrm{d}t' = \frac{c\,\mathrm{d}t - \beta\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - \beta \cdot c\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z,$$

が得られる。これらの微小量を用いて,

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \tag{1.4}$$

なる微小量 $\mathrm{d}s$ を定義しよう。この新たな微小量は時空の線素と呼ばれる。この線素に対してローレンツ変換を適応すると,

$$-c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = -c^2\mathrm{d}t'^2 + \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2,$$

[3]他の章でも現れるが, 座標成分を表す添え字は相対性理論では (正確に言うとリーマン幾何学では), 習慣的に右上に書く。べき乗を表す指数と紛らわしいので慣れないうちは注意が必要である。

が成り立つことから, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$ である。すなわち, $\mathrm{d}s$ はローレンツ変換に対して不変である。数学的に言うと, $\mathrm{d}s$ はスカラ[4]である。線素 $\mathrm{d}s$ を適切に定義すればどのような時空でも $\mathrm{d}s$ はスカラとなるのだが, 特に, 定義式 (1.4) で定義された線素がスカラとなる時空はミンコフスキー時空と呼ばれる。

線素 $\mathrm{d}s$ は, その座標系における長さを定義する量であり, 一般相対性理論で用いるような曲がった空間を含め, 一般の座標系 $[x^0, x^1, x^2, x^3]$ において形式的に,

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu,$$

なる数式で表現できる。特に, ミンコフスキー時空の場合, 係数行列 $g_{\mu\nu}$ は,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

なる体格行列となる。この係数行列は特別に $\eta_{\mu\nu}$ なる記号で記述することが多い。その係数行列 $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空の計量 (長さ) を定義する係数なのでミンコフスキー計量と呼ばれる。ミンコフスキー計量は, 空間座標の係数が正で, 時間座標の係数が負になっていることに注意しておこう。

特に, 光の軌跡については, 必ず, $\mathrm{d}s = 0$ が成立する。なぜならば, 光速不変の原理のため, いかなる観測者が見ても,

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = c^2,$$

が成立し, 両辺に $\mathrm{d}t^2$ を乗じると,

$$-(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 = 0,$$

なる関係式が得られるからである。この数式は 3 次元空間の円錐表面からの類推によって, 4 次元時空における超円錐の表面を表すことがわかる。この超円錐は光円錐と呼ばれる。模式的に表すと図 1.6 のようになる。この図では時間の座標軸を上向きにとっている。つまり, 下が過去で上が未来である。空間の座標は時間とは垂直な方向にとる。円錐の頂点が, 観測者の現在位置である。光は光円錐の表面に沿って伝播する。

光円錐の内部は時間的領域と呼ばれる。質量をもつ一般の物体は時間的領域を移動することしかできない。一方, 円錐の外は空間的領域と呼ばれる。空間的領域に情報を伝達するには光速より速い伝達手段が必要である。つまり, 空間的領域への情報伝達は不可能で

[4]座標変換しても変化しない量。

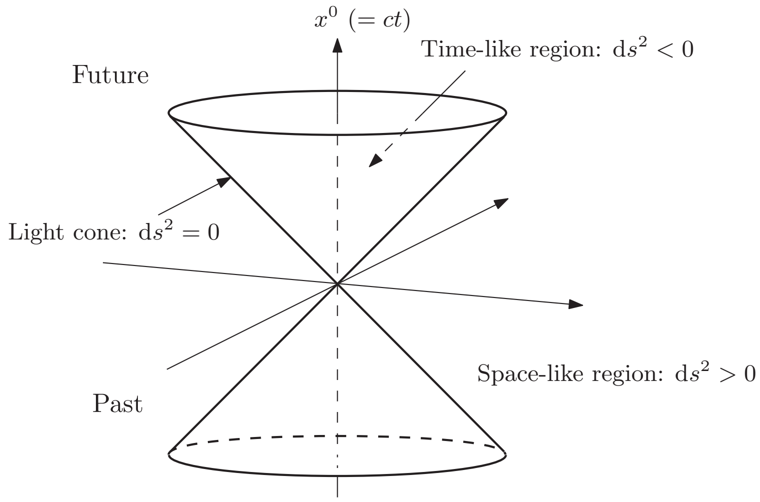


図 1.6: 光円錐と時空における領域

ある。言い換えると, 空間敵領域は観測者とは因果律が成り立たない無関係な事象しか存在しない領域である。また, 光円錐の表面は光速で運動する粒子などの軌跡が存在する領域であるので, 光的領域と呼ばれる。