

楽しくディープな数学・物理

Quora回答がいざなうマニアックな世界

初版 2024年7月10日
第2版 2025年3月23日
第3版 2025年3月30日
第4版 2025年4月20日

著者: Tokieda Yukinobu 技術士 (電気電子部門)

はじめに

目次

第1章 方程式	1
1.1 3次方程式	1
1.1.1 カルダノの公式	1
1.1.2 還元不能な解	3
1.1.3 ヴィエトの解法	6
1.2 特殊な方程式	7
1.2.1 相反方程式	7
1.2.2 相反方程式の応用	8
1.2.3 直感的な解法	9
1.3 ランベルトのW関数	11
1.3.1 基本的な性質	12
1.3.2 応用例	13
第2章 数列と級数級数	17
2.1 漸化式で定義される数列	17
2.1.1 フィボナッチ数列	17
2.1.2 フィボナッチ数列の母関数	19
2.1.3 フィボナッチ数列の一の位	20
2.1.4 フィボナッチ数列の類似数列	21
2.1.5 トリボナッチ数列	22
2.2 無限級数	26

2.2.1	ポアソンの和公式	26
2.3	発散級数	29
2.3.1	整数和とリーマンのゼータ関数	30
2.3.2	無限大の階乗	33
2.3.3	素数の無限乗積	35
2.3.4	階乗の交代級数	37
第3章	微積分学	39
3.1	積分	39
3.1.1	級数展開を利用した積分	39
3.1.2	二年生の夢	42
3.1.3	Sinc 関数の無限積分	44
3.1.4	Sinc 関数べき乗の積分	47
3.1.5	$(1 - x^2)^{1/2} \log x / (x^2 + b)$ の積分	48
3.1.6	$x^{-x}(1 - x)^{-(1-x)} \sin \pi x$ の積分	53
3.1.7	距離の期待値	57
3.2	微分方程式	61
3.2.1	ラプラスの方程式	61
第4章	一般力学	65
4.1	運動量と運動エネルギー	65
4.1.1	力積・仕事との関係	65
4.1.2	運動量保存則	66
4.2	振動の周期	69
4.2.1	一般振り子	69
4.2.2	サイクロイドの等時性	72
4.2.3	放物線状斜面	75

4.3	ジャイロ効果	77
4.3.1	自転車の車輪	77
4.3.2	コマの歳差運動	79
第5章	天文学	83
5.1	惑星の軌道計算	83
5.1.1	ケプラーの法則	83
5.1.2	火星の軌道計算	88
5.2	宇宙規模での放物運動	91
5.2.1	離心率の導出	92
5.2.2	物体の落下時間	94
5.3	宇宙開発とスペースデブリ	97
5.3.1	落とした工具の軌跡	98
5.3.2	工具の相対的位置	100
5.4	地球貫通トンネル	101
5.4.1	球対称の重力源	101
5.4.2	トンネル中心部の気圧	104
5.5	天体の視等級	106
5.5.1	太陽から見た惑星の視等級	106
5.5.2	金星の明るさ	107
5.5.3	満ち欠けによる影響	109
5.5.4	星から届く光子の数	111
第6章	相対性理論	113
6.1	仮想の媒質エーテル	113
6.2	光速不変の原理とローレンツ変換	116
6.2.1	光速不変の原理に対応する座標変換	116

6.2.2	相対性理論の必然性	118
6.3	速度合成則	120
6.3.1	合成速度の限界	120
6.3.2	多段で積み上げた速度	122
6.4	エネルギーと質量	123
6.4.1	アインシュタインの第2論文	123
6.4.2	アインシュタインによる初等的導出	126
6.4.3	高校物理で簡易導出	127
第7章	量子力学	131
7.1	黒体放射	131
7.1.1	ステファン・ボルツマンの法則	131
7.1.2	プランク定数	133
7.2	量子力学に対する注意点	135
7.2.1	粒子/波の二重性	135
7.2.2	不確定性原理	138
7.3	原子構造	139
7.3.1	原子核の大きさ	139
7.3.2	水素原子	142
7.3.3	電子の占有個数	144
7.3.4	電子軌道の占有順序	146

第1章 方程式

1.1 3次方程式

1.1.1 カルダノの公式

2次方程式の解法が紀元前から知られていたのに対し、3次方程式の解法が考案され野は16世紀である。カルダノは1545年の著作「アルス・マグナ」で3次方程式と4次方程式の解法を公開した。3次方程式の解法は、カルダノの公式と呼ばれ、4次方程式の解法はカルダノの弟子フェラーリが考案したことからフェラーリの公式と呼ばれる。Quoraに投稿された質問の回答として、カルダノの公式を導出しよう。

Quora 質問 三次方程式の解の公式を導出していただけますか?

3次方程式の解の公式(カルダノの公式)は、

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

の解を得るための公式だ。この公式が対象とする3次方程式は、(1)のように2次の項がない。一般の3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は、必ず、(1)の形に変形できるので、カルダノの公式はいかなる3次方程式を解くことができる。具体的には、 $x \rightarrow x - a/3$ のように置き換えると(1)のように2次の項が消えてくれる。

方程式が(1)の形に整ったところで、 $x = u + v$ のように変数を置き換える。この置き換えによって、方程式(1)は、

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0, \tag{2}$$

のように変形できる。この数式が恒等的に成り立つためには、

$$u^3 + v^3 = -q, \quad uv = -\frac{p}{3}, \tag{3}$$

を満たさなければならない。数式 (6) を満たす u と v は、2 次方程式:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0, \quad (4)$$

の解によって与えられる。具体的には、方程式 (4) の解は、 u^3 、あるいは、 v^3 になる。ここで、方程式 (4) の解を具体的に計算し、

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad (5)$$

としてみる。複素数まで考えると、 A の 3 乗根は $\sqrt[3]{A}$ 、 $\sqrt[3]{A}\omega$ 、 $\sqrt[3]{A}\omega^2$ の 3 通りが考えられる。ここで、 ω は 1 の複素 3 乗根:

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},$$

だ。実際に (6) を満たす u と v の組み合わせは、

$$(u, v) = \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right), \\ \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega, \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega^2 \right), \\ \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega^2, \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega \right), \quad (6)$$

の 3 組だけだ。それら 3 組に対して $x = u + v$ を計算すれば、3 次方程式 (1) の解が 3 つ得られる。したがって、3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の解は、

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega^2, \\ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \omega, \quad (1.1)$$

となる。これがカルダノの公式であり、この公式によってあらゆる 3 次方程式の解が特定できるわけだ。とはいえ、平方根記号の内部にある $q^2/4 + p^3/27$ が負の数になることがある。現在では、負の数の平方根は虚数として認識されるが、16 世紀にはそのような概念がなかった。カルダノは、負の数の平方根を計算過程での中間産物と考え、そのまま計算すれば最終的には解決できると考えていた。その意味で、歴史上、最初に複素数を取り扱ったのはカルダノだといえる。

1.1.2 還元不能な解

カルダノの方法で3次方程式を解く際、取り扱いが難しい値に遭遇することがある。それは、還元不能な解に遭遇する場合である。3次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の解法としてカルダノの公式を使う場合、係数 p と q が実数であっても、

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

となることがある。その場合、カルダノの公式の過程で複素数が現れる。複素数が現れる場合、結果的には、三つの解はすべて実数となるのだが、代数的に解決するには別の3次元方程式を解く必要がある。その3次元方程式がさらに同様の状態に陥ることがある。そのように、カルダノの公式の過程で生じる複素数を代数的に解決できないことは還元不能と呼ばれる。

Quora 質問 虚数を使わなければ表せない3次方程式の根が、中学校で習った x - y 座標の x 軸上に存在することはありますか、ないのであれば、どうしてこの x 軸上で交わるのでしょうか?

本質問はカルダノの公式を適用したときに現れる複素数に関する質問* のようだ。例として、3次方程式 $x^3 - 6x + 2 = 0$ を例に考えてみよう。この方程式は、図 1.1 に示すように、 x 軸と3点で交わる。その幾何学的関係は、対象とする3次方程式が三つの実数解をも

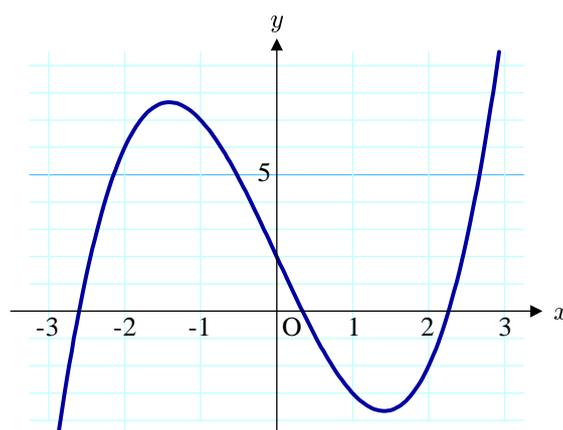


図 1.1: 3次関数 $x^3 - 2x + 2$ のグラフ

つことを意味する。実際のところ、数値解として、 $x \simeq -2.6017, 0.33987, 2.2618$ が特定できる。

*本回答は、Kimura Takumi さん, Soji IKEDA さんのコメントから、深堀を経て得られた回答である。

一方, カルダノの公式を利用して方程式を解くと, 3 次方程式の解の一つが,

$$x = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{7}i} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{7}i}, \quad (1)$$

という形で記述される。この記述では, 実数でなく複素数解が得られたように見えるが, それは気のせいだ。実は, (代数的でないけど) 数値を計算すると,

$$\sqrt[3]{-1 \pm \sqrt{7}i} \simeq 1.13090 \pm 0.84915i, \quad (2)$$

なのだ。この計算結果を反映すると, 複素数解に見えていた上記の解は,

$$x \simeq 2.2618, \quad (3)$$

という実数解になる。つまり, 上に示した複素数の虚部が見事に相殺できるということだ。実数解をもつということは, 3 次方程式に相当する 3 次関数が x 軸と交わることを意味する。なぜ, このようなことが起こるかという点, $\sqrt[3]{-1 \pm \sqrt{7}i}$ がまだ計算途中だと考えればよい。この数値は二重根号がかかった数値だ。二重根号がかかった数値を $a + ib$ のように明確に実部と虚部に分離するとわかりやすい。実部と虚部に分離するのは, 喩えるなら,

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

のように二重根号を外す操作に似ている。とはいえ, 3 次方程式の問題の場合, 二重根号の外側が 3 乗根なので厄介だ。筆者は $\sqrt[3]{-1 \pm \sqrt{7}i}$ を代数的に解決しようと試みたが, 意外にも難しいことがわかり諦めた。確実に言えることとして, 実数係数をもつ 3 次方程式の解のうち, (1) の形で書ける解は, たとえ見かけが複素数であっても, 必ず, 3 個の解がすべて実数になるのだ。それは次のように説明できる (図 1.2)。実数係数による 3 次方程式の解で, 見かけ上, 複素数を伴う解は,

$$x = u + v, \quad \text{where} \quad \begin{cases} u^3 = \alpha + i\beta, \\ v^3 = \alpha - i\beta, \end{cases} \quad (4)$$

のような形で記述できる。ここで, α と β はともに実数だ。ここに表した u^3 と v^3 は, 互いに絶対値が等しい, すなわち, $|u^3| = |v^3|$ が成立する。さらに, 偏角について $\angle u^3 = -\angle v^3$ が成立する。それらの 3 乗根 u と v についても同じ関係が成り立つ。すなわち, $|u| = |v|$ が成立する。偏角については,

$$\angle u = \frac{\angle u^3}{3}, \quad \angle v = \frac{\angle v^3}{3},$$

が成り立つので, $\angle u = -\angle v$ が成立するわけだ。したがって, u と v は, 必ず, 複素共役の関係にある。よって, (4) の形で記述される解は必ず実数 (図 1.2) となるわけだ。

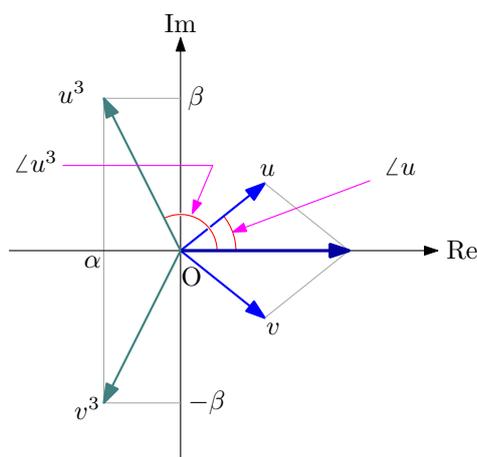


図 1.2: カルダノの公式によって得られる解の解釈

他の二つの解も、必ず、実数になる。カルダノの公式によると、他の二つの解は、

$$x = uw + v\omega^2, \quad u\omega^2 + v\omega, \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 ω は複素数における 1 の立方根の一つ、すなわち、

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},$$

である。この定義から、 ω を乗じる操作は、複素数の絶対値を一定に保ち、偏角を $2\pi/3$ だけ回転させる操作に相当する。一方、 ω^2 を乗じる操作は、複素数の絶対値を一定に保ち、偏角を $4\pi/3$ だけ回転させることに相当する。偏角を $4\pi/3$ 回転させることは、偏角を $-2\pi/3$ だけ回転させることと同じだ。それを考えると、 uw と $v\omega^2$ は、複素共役の関係にある。同様に、 $u\omega^2$ と $v\omega$ も複素共役の関係にある。したがって、(5) の形の解は、必ず、実数になる。

複素数解をもつ場合 実数係数による 3 次方程式の解は三つが実数解とは限らず、実数解が 1 個で、残りの二つが複素数解になる場合がある。複素数解をもつケースは、驚くことに、カルダノの公式では、 u^3 と v^3 がともに実数となるのだ。言い換えると、 $u^3 = \alpha + \beta$ 、 $v^3 = \alpha - \beta$ のように実数となる場合に、3 次方程式が複素数解をもつのだ。 u^3 と v^3 がともに実数の場合、当然ながら、(4) の形の解は実数になる。複素数の数の場合とは異なり、概して、 $|u^3| \neq |v^3|$ なので、 uw と $v\omega^2$ は複素共役の関係ではない。同様に、 $u\omega^2$ と $v\omega$ も複素共役の関係ではない。したがって、(5) の形の解が二つとも複素数になる。以上の考察からわかったこととして、実数係数による 3 次方程式をカルダノの公式で解いたとき、見かけ上、複素数解が得られた場合、本当の解は三つとも実数だ。つまり、方程式に対応する 3 次関数は、3 か所で x 軸と交わる。

1.1.3 ヴィエトの解法

ヴィエトは3次方程式 $x^3 - 3px - 2q = 0$ が三角関数の3倍角の公式 $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ と炊事していることを利用し、3次方程式の解法を考案した。筆者は、次の質問への回答の中でヴィエトの解法を取り上げたので、その内容を説明する。

Quora 質問 三角比の知られざる利用法はありますか?

3次方程式の例として、

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0, \quad (1)$$

を三角関数の3倍角の公式を利用して解いてみよう。最初に、 $x = y - 1$ とおくと、与えられた方程式は、

$$y^3 - 3y = -1, \quad (2)$$

のように変形できる。このように2次の項をゼロにすると、カルダノの公式が思い浮かぶが、ここから異なるアプローチをとる。ここで、 $y = 2z$ という置き換えを適用する。その置き換えによって、方程式(2)は、

$$4z^3 - 3z = -\frac{1}{2}, \quad (3)$$

なる形になります。方程式(??)は、三角関数の3倍角の公式:

$$4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \cos 3\alpha,$$

のような形になっている。つまり、 $\cos 3\alpha = -1/2$ とおけば、 $z = \cos \alpha$ となる。その前提条件 $\cos 3\alpha = -1/2$ から、

$$3\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi, \quad \frac{2\pi}{3} + 4\pi,$$

のような3通りの選択肢をつくっておく。第2、第3の選択肢に 2π や 4π を入れても、 $\cos 3\alpha$ の値は変わらないのだが、 $\cos \alpha$ としたときに、3通りの値をとることを狙っている。上に書いたように $z = \cos \alpha$ であるから、

$$z = \cos \frac{2\pi}{9}, \quad \cos \frac{8\pi}{9}, \quad \cos \frac{14\pi}{9},$$

となる。さらに、 $x = 2z - 1$ によって未知数を z から x に戻せるので、方程式 $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ の解は、

$$x = 0.532088886237956, \quad -2.879385241571817, \quad -0.652703644666140,$$

であることがわかる。なお、方程式 (2) はカルダノの公式では還元不能となる。

ヴィエトの解法の一般系を示しておこう。対象となる方程式のパターンは、 $x^3 - 3px - 2q = 0$ である。この方程式に、 $x = 2\sqrt{p}y$ なる置き換えを適用すると、方程式は、

$$4y^3 - 3y = \frac{q}{p\sqrt{p}},$$

のように書き換えられる。書き換えられた方程式が、3倍角の公式 $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha$ と同じ形になっているため、方程式の解は、

$$x = \sqrt{p} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{q}{p\sqrt{p}}\right), \quad \sqrt{p} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{q}{p\sqrt{p}} \pm \frac{\pi}{3}\right),$$

によって計算できる。この方法は代数的な開放ではないが、還元不能に陥ることがなく、カルダノの公式よりも容易に3次方程式を解くことができる。

1.2 特殊な方程式

1.2.1 相反方程式

Quora 質問 ここでの x の値は: $x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 6$?

この方程式は、実数解が偶然見つかるかもしれない。見つかりそうな実数解は $x = 1$ だろう。偶然見つかるというのは... 左辺が x または $1/x$ によってつくられる6個の項によって構成され、右辺が6なので、カンがはたらけば $x = 1$ なら等式が成立すると気づくかもしれないからだ。高次方程式なので、複素数解までを含めると、他にも解が存在する。

複素数解の特定を目的に、 $y \equiv x + 1/x$ とおくと、質問の方程式は、

$$y^3 + y^2 - 2y - 8 = 0, \tag{1}$$

のように書き換えることができる。この方程式は、

$$(y - 2)(y^2 + 3y + 4) = 0 \tag{2}$$

のように因数分解できる。因数分解の結果から得られる $y = 2$ は、記号を x に戻そうとすると、 $(x - 1)^2 = 0$ なる方程式を経由するので、上で述べた偶然見つかるかもしれない解 $x = 1$ は重解であることがわかる。因数分解 (2) における2次の因数による方程式 $y^2 + 3y + 4 = 0$ は実数解をもたない。複素数を許容するならば、

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2},$$

なる複素数解をもつ。この解についても、上と同様に記号を x に戻せば、

$$x = \frac{-3 \mp \sqrt{7}i + \sqrt{-14 \pm 6\sqrt{7}i}}{4}, \quad \frac{-3 \mp \sqrt{7}i - \sqrt{-14 \pm 6\sqrt{7}i}}{4}, \quad (3)$$

が得られる。ただし、複号同順とする。数式 (3) は 4 個の解を表す。これが質問の方程式の複素数解だ。ここで、平方根が 2 個であることから根号内部が複素数であると数式があいまい[†]になる。あいまいさを避けるため、根号の内部でなく、数式全体として実部と虚部が分離できるように数式変形を試みる。計算過程を省略するが、複素数解 (3) に含まれる二重根号は、

$$\sqrt{-14 \pm 6\sqrt{7}i} = \frac{\sqrt[4]{28}}{2} \left[\pm (\sqrt{7} - 1) + (\sqrt{7} + 1)i \right],$$

のように実部と虚部に分離することができる。この計算結果を (3) に代入すると、質問の方程式の複素数解:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 + \sqrt[4]{28}(\sqrt{7} - 1) \pm \left[\sqrt[4]{28}(\sqrt{7} + 1) - 2\sqrt{7} \right] i}{8}, \\ &= \frac{-6 - \sqrt[4]{28}(\sqrt{7} - 1) \pm \left[\sqrt[4]{28}(\sqrt{7} + 1) + 2\sqrt{7} \right] i}{8}, \end{aligned}$$

が得られる。解の形がいささか煩雑であるが、与えられた方程式に代入して検算すると、この複素数解が正しいことが確認できる。

補足 この質問は、6 次方程式 $x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ を解くことと等価である。このように、係数が左右対称になっている方程式は訪販方程式と呼ばれる。相反方程式は $x + 1/x$ のべき乗で展開すれば次数を半分にできるので、次数が高い方程式を代数的に解くことが可能だ。実際に、4 次方程式までは代数的な手段による解の公式があるので、同伴方程式は 8 次方程式までは代数的に解けるということだ。

1.2.2 相反方程式の応用

Quora 質問 電卓等を使わずにどうやって $\cos(\pi/5)$ を計算しますか?

計算によって得られる値は、

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4},$$

[†]これは Quora 回答へのコメントとして、Toshitaka Suzuki さんからいただいた指摘である。

である。その導出方法を説明しよう。第一に、 $\cos(2\pi/5)$ を特定することを考える。複素解析では、5 次方程式 $x^5 - 1 = 0$ の解の一つに $x = e^{2\pi i/5}$ が含まれる。オイラーの関係式として知られているように、

$$e^{2\pi i/5} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5},$$

の実数部が特定したい値だ。つまり、 $x^5 - 1 = 0$ を解けば $\cos(2\pi/5)$ が得られるということだ。方程式の左辺が $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ のように因数分解できることに注意しよう。すると、容易にわかるように、 $\cos(2\pi/5)$ が 4 次方程式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ の解の一つであることがわかる。その 4 次方程式が相反方程式であるので、の両辺を x^2 で除すると、方程式は、

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0,$$

なる形に書き換えられる。この方程式は、2 次方程式の解の公式を用いて、

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

のように解くことができる。解に含まれる複号に関して、どちらか一方が $e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5}$ ($= 2 \cos(2\pi/5)$) に相当する。その値は正の実数になるべきなので、必要とする解はプラス符号をもつ解である。すなわち、

$$x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

であることがわかった。上に書いたように、この値は $2 \cos(2\pi/5)$ に等しいので、具体的に x を特定することなく、

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4},$$

が得られた。ここで、半角の公式を使って角度を半分にすれば、

$$\cos \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4},$$

が得られる。

1.2.3 直感的な解法

一般的な処方でも高次方程式になるも関わらず、数式の形態から洞察によって解を導く方法を紹介しよう。Quora に次のような質問が投稿された。一般的には、左辺を通分すると分母が x についての 4 次式になるので、4 次方程式を解くことによって x を決定できるはずだ。その手順をあえて実施せず、右辺を因数分解して、左辺の通分した形態との共通性からの洞察で解を求めた例だ。

Quora 質問 ここでの x の値は: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{4448}{6435}$?

与えられた方程式の解は $x = 9/2$ である。方程式を真面目に解くならば、左辺を数式変形した後、その分母を方程式の両辺に乘じれば4次方程式が得られ、4次方程式の解法を用いることが考えられる。しかし、4次方程式を真正面から特アプローチをとらずに方程式を解いてみよう。

与えられた方程式の左辺を計算すると、

$$\text{LHS} = \frac{x \text{ の 3 次式}}{x(x+1)(x+2)(x+3)},$$

のような形になるはずだ。その形になっているかどうか、右辺の分母を因数分解して調べてみよう。因数分解の結果、

$$6435 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13, \tag{1}$$

となっていた。因数分解の結果、 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ という形が明確に現れていない。それに関して、次のように考えてみる。分母が $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$ だったらどうか? 先ほどの因数分解に含まれていない因子が含まれていることについては、分子を計算した結果、約分がされてその因子が消えると考えればよいだろう。ところが、 $10 \cdot 12 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ なので、約分の結果 3^2 が残るのは不自然だ。別の可能性として、分母が $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$ だった場合はどうか? その場合、 $12 \cdot 14 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ なので、やはり約分の結果 3^2 が残るのは不自然だ。そのことから、 $x = 11$ が解でないとわかる。発想を変えて、因数分解 (1) の因数を $9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15$ のように考えてみよう。この積は、 $9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 = 3 \cdot 6435$ ですから、3 が分子との間で約分されたと考えるのだ。しかし、分母が2ずつ増加しているのが曲者だ。実は、 $x = 9/2$ と考えれば、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15},$$

のように、分母が2ずつ増加してくれます。それでは、 $x = 9/2$ と仮定して左辺を計算してみます。

$$\text{LHS} = 2 \cdot \frac{3 \cdot (715 + 585 + 495 + 429)}{3 \cdot 6435} = \frac{2 \cdot 2224}{6435} = \frac{4448}{6435},$$

のように右辺と一致した。したがって、 $x = 9/2$ が解であると判明した。なお、この考え方にしたがつと、 $11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17$ も分母の可能性があるが、15と17が約分されていたとしても、因数3が残るので不自然だ。そのような理由から、この可能性は無効だ。

冒頭に書いたように、真面目に方程式を形成すると4次方程式になるので、解が他に三つ存在するはずだ。ニュートン法で数値解として、三つの解を計算すると、

$$x \simeq -0.456595543330165,$$

$$-1.576117278722589,$$

$$-2.680416674350123$$

が得られた。

次の質問で与えられる方程式は、見た目よりも簡単である。その構造に気づくとほとんど計算することなく、解を特定できる。

Quora 質問 ここでの x の値は: $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+5}{x+3} - \frac{x+6}{x+7}$?

この方程式の解は $x = -9/2$ だ。方程式の各項が $1 - 1/(x+n)$ なる形になっていることに気づけば、ほとんど計算を要することなく、解を特定できる。実際のところ、質問の方程式は、

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+6},$$

に書き換えることができるのだ。左辺と右辺をそれぞれ通分すると、この方程式は、

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x^2 + 13x + 42},$$

となる。左辺も右辺もともに分子が1なので、この方程式の解は、分母が等しくなるような x を特定すればよい。分母どうしを等号で結んで整理すると、 $8x = -36$ が得られる。単なる1次方程式になってしまうのだ。その方程式を解けば、解は $x = -9/2$ であることがわかる。

補足 実は、上記のような工夫をしなくても同じ方程式に帰着する。多少の計算は必要となるが、通分をして、右辺を左辺に移項すれば与えられた方程式は、

$$\frac{8x + 36}{(x+2)(x+3)(x+)(x+7)} = 0,$$

のように変形されるので、定石どおりに計算していても、結局 $8x + 36 = 0$ を解くことになる。

1.3 ランベルトの W 関数

ランベルトの W 関数 $W(x)$ は、 xe^x の逆関数である。言い換えると、変数 y についての方程式 $x = ye^y$ の解が、 $y = W(x)$ と書けるのだ。

1.3.1 基本的な性質

ランベルトの W 関数は, xe^x の逆関数だ。グラフに描くと下図のようになる。その逆関数は, 2 種類考えられる区間があるので, 図 1.3 のように, 青線で描かれる $W_0(z)$ とマゼンタ線で描かれる $W_{-1}(z)$ のような 2 種類の関数を使うことがある。特に注釈がなければランベルトの W 関数 $W(x)$ は, $W_0(x)$ を意味する。

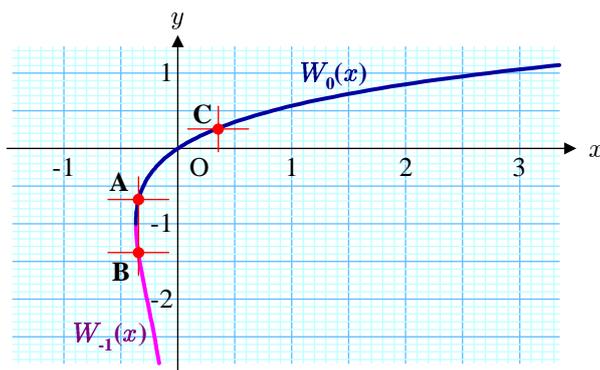


図 1.3: ランベルト W 関数と $x^2 = 2^x$ の解

ランベルトの W 関数は, $x^2 = 2^x$ のような方程式の解法に用いられる。この方程式には, 自明な解 $x = 2, 4$ があるが, 他の解を得る場合に W 関数が役に立つ。ランベルトの W 関数を使うため, 与えられた方程式を $x = \pm 2^{x/2}$ のように変形する。さらにこの方程式は, $x = \pm e^{(\log 2/2)x}$ のように書き換えることができ, さらに変形すると,

$$\frac{\log 2}{2} x e^{-(\log 2/2)x} = \pm \frac{\log 2}{2},$$

のように変形できる。ランベルトの W 関数 $y = W(x)$ が $x = ye^y$ の解であることを考えると, 与えられた方程式の解は,

$$x = -\frac{2}{\log 2} W\left(\pm \frac{\log 2}{2}\right),$$

のように書くことができる。図 1.3 において, 上の数式で指定される解を考えてみよう。ランベルト関数の変数が負の場合, 下図に示す点 A と点 B が方程式の解になる。一方, ランベルト関数の変数が正の場合, 図に示す点 C が方程式の解に対応する。点 A, B, C に対応するランベルトの W 関数の値は,

$$\begin{aligned} \text{A: } & W(-\log 2/2) = -0.693147180559945, \\ \text{B: } & W(-\log 2/2) = -1.386294361119891, \\ \text{C: } & W(\log 2/2) = 0.265705736220497, \end{aligned}$$

となる。与えられた方程式 $x^2 = 2^x$ に関して, 点 A が自明な解 $x = 2$ に対応し, 点 B が自明な解 $x = 4$ に相当する。さらに, 点 C は自明ではない解 $x \simeq -0.7666646959$ に対応する。

1.3.2 応用例

表面上で出てこないが、深掘的に解析をするとランベルトの W 関数が現れるケースを紹介しよう。次の質問が Quora に投稿された。典型的には、質問どおり、左辺を計算すると x に等しくなるのだが、細かく (マニアックに) 解析するとランベルトの W 関数が現れたのだ。

Quora 質問 この式は正しいでしょうか: $\sqrt{x} \sqrt{\sqrt{x} \sqrt{\sqrt{x} \sqrt{\sqrt{x} \sqrt{\sqrt{x} \dots}}}} = x$?

質問の数式を計算するには、 $x_0 = e^{\log x/x}$ とおき、漸化式:

$$x_{n+1} = e^{x_n \log x/x}, \quad (2)$$

を使って、値が十分に収束するまで反復計算すればよい。質問に挙げられた数式は x をある区間に限定すると正しい。質問の数式を y とおいて、対数をとると、

$$\log y = \log x^{1/x} \cdot y = \frac{\log x}{x} \cdot y,$$

が得られるので、

$$\frac{\log y}{y} = \frac{\log x}{x},$$

が成り立つ。ゆえに、 $y = x$ となり、質問の等式が導出できた。¶

もう少し調べてみると、質問の数式 (左辺) は $-1 < \log x < 1$ でしか成り立たないことがわかる。 $\log x < -1$ の条件では収束せず、 $\log x > 1$ では異なる値に収束する。質問の数式が $-1 < \log x < 1$ の条件で x に収束することを証明しよう。上記の数式を、

$$a_1 = x^{1/x}, \quad a_{n+1} = x^{a_n/x},$$

なる漸化式で決定される数列とします。質問の数式は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で数列 a_n のふるまいを調べることと等価です。この数列が x に収束すると仮定して、 $a_n = x(1 - \varepsilon_n)$ とおいてみる。このとき、

$$x(1 - \varepsilon_{n+1}) = x^{1 - \varepsilon_n} = x \cdot x^{-\varepsilon_n},$$

となる。ここで、

$$1 - x^{-\varepsilon_n} \leq \varepsilon_n \log x,$$

に注意する。ここで、 $\varepsilon_n > 0$ とした。等号は $x = 1$ のとき成立する。上に記述した漸化式から、 $\varepsilon_{n+1} = 1 - x^{-\varepsilon_n}$ となるから、

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n \log x,$$

が成立する。つまり、 $|\log x| < 1$ であれば確実に、数列 a_n は x に収束する。念のため、 $x < 1$ のときの初項 a_1 を計算すると、 $a_1 = x^{1/x} < x$ なので、 $a_1 = x(1 - \varepsilon_1)$ とおけば、 $\varepsilon_1 > 1$ とできるので上で調べた誤差のとおりになり、収束できる。一方、 $x < 1$ の振る舞いも調べてみよう。その場合、初項は $a_1 = x^{1/x} > x$ となるので、 $a_n = x(1 + \varepsilon_n)$ なるモデルを考えてみる。このとき、上と同様の考察で、 a_n に関する漸化式は、

$$1 + \varepsilon_{n+1} = x^{\varepsilon_n},$$

なる数式に書き換えられる。ここで注目するのは、

$$1 - x^{\varepsilon_n} \leq \varepsilon_n \log x,$$

です。この数式から $x^{\varepsilon_n} - 1 \geq \varepsilon_n \log x$ が導かれる。この関係式を誤差 ε_n に関する漸化式に代入すると、

$$\varepsilon_{n+1} \geq \varepsilon_n \log x,$$

が得られる。これを見ると発散するように見えるが、 $x < 1$ ならば $\log x < 0$ なので、 ε_n は n の増加とともに符号が交互に切り替わることを意味する。しかも、

$$\varepsilon_{n+1} \leq |\varepsilon_n \log x|,$$

となるはずだ。したがって、 $x < 1$ のときも収束する。結局、収束条件は $|\log x| < 1$ ということになる。改めて結論を書くと、 $|\log x| < 1$ を満たせば a_n は x に収束する。

上記の考察で与えられた数式が $|\log x| < 1$ の条件で x に収束することがわかった。それでは、それ以外の場合は、発散するのか、それとも、違う値に収束するのか？ 次の質問が Quora に投稿された。

Quora 質問 等式 $\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\dots}}}}} = x$ は、 $-1 < \log x < 1$ の条件で正しいそうです。 $\log x > 1$ ではどんな値に収束しますか？

与えられた数式は、ランベルトの W 関数を用いて表現できる値に収束する。上で考察した結果によると、数式の収束先が x_0 であれば、

$$\frac{\log x_0}{x_0} = \frac{\log x}{x},$$

が成り立つが、この数式の解は $x_0 = x$ だけとは限らない。図 1.4 に示すように、 $\log x/x$ が $x = e$ で最大値をもち、 $x > 1$ において同一の関数値をもつ x が二つ (下図では x と x_1 が) 存在するのだ。上の考察によると、 $x > e$ では問題の数式が収束条件を満たさないため、代わりに下図の x_1 に収束する。

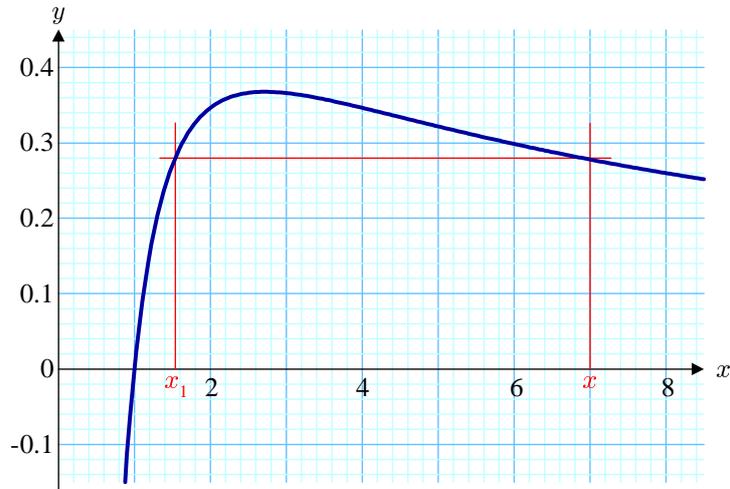


図 1.4: $\log x/x$ が描く曲線と与えられた数式が収束する値の関係

異なる解を特定するため、 $a = \log x/x$ とおき、 $\log x_1/x_1 = a$ を x_1 について解くことを考察する。ここで、 $x_1 = e^\eta$ とおくと、

$$\eta e^{-\eta} = a,$$

となる。ここで、ランベルトの W 関数が $x e^x$ の逆関数であることに注意すると、 $\eta = -W(-a)$ であることがわかる。したがって、 $x_1 = e^{-W(-a)}$ が導かれる。記号をもとに戻すと、

$$y = \exp \left[-W \left(-\frac{\log x}{x} \right) \right], \quad (1.2)$$

となる。したがって、与えられた数式は、 $|\log x| > 1$ のとき、この数値に収束する。図 1.4 は一例として、 $x = 7$ の場合を表している。その場合、(1.2) によると、質問に挙げられた数式は $x_1 \simeq 1.53014011947213$ に収束することになる。漸化式(??)を用いても同じ結果が得られる。

第2章 数列と級数級数

2.1 漸化式で定義される数列

2.1.1 フィボナッチ数列

フィボナッチ数列は、 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ のように直前の2項の和によって順次、項が更新されていく数列である。この数列は、13世紀のイタリアの数学者が、世代にわたるウサギの数をモデルに発表した数列である。初項を $F_0, F_1 = 1$ と定義すると、フィボナッチ数列は、

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\},$$

のような数列となる。この数列の一般項を問う質問が Quora に投稿された。

Quora 質問 次の数列の一般項はどう表せるでしょうか。

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34?

質問では、対象の数列を $\{1, 2, 3, \dots\}$ としているが、ここでは、上に書いたように $\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$ として一般項を考察しよう。先に結果を書いておくと、フィボナッチ数列の一般項は、

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right], \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで、 $\phi \equiv (\sqrt{5}+1)/2$ を定義すると、フィボナッチ数列の一般項は、

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad (2.2)$$

のように簡略化することができる。この一般項の表記は後に導出過程を紹介する。フィボナッチ数列は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、 $F_{n+1}/F_n \rightarrow \phi$ となる興味深い性質がある。その性質は、一般項の公式 (2.2) から明らかだろう。なお、その極限值は $\phi \equiv 1.6180339887$ であり、黄金比と呼ばれる。黄金比はフィボナッチ数列の一般項がわからなくても導出可能だ。十分に大きな n に対して、近似的に $F_{n+1} = rF_n$ が成り立つと仮定すれば、フィボナッチ数列の漸化式は $r^2 = r + 1$ なる2次方程式に置き換わる。その方程式の解が黄金比と言うわけだ。

一般項の導出 フィボナッチ数列の漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ を,

$$F_{n+2} + \alpha F_{n+1} = \beta (F_{n+1} + \alpha F_n),$$

のような数式に変形できるか考えてみよう。この数式がフィボナッチ数列の漸化式に一致するには,

$$\beta - \alpha = 1, \quad \alpha\beta = 1,$$

の関係を満足しなければならない。この関係式を満たす α と β は, 2次方程式:

$$t^2 - t - 1 = 0,$$

の解で与えることができる。正確に言うと, この2次方程式の解は $-\alpha$ と β に相当する。2次方程式を解くと,

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

が得られる。先ほど定義した黄金比 ϕ を使って書くと, $t = \phi, -1/\phi$ が2次方程式の解となる。したがって, $\alpha = -\phi, \beta = -1/\phi$ の場合と, $\alpha = 1/\phi, \beta = \phi$ の場合が考えられる。このように, α と β が決定できると, $F_{n+1} + \alpha F_n$ が項比 β の等比数列となるので取扱いが便利になる。つまり,

$$F_{n+1} - \phi F_n = \left(-\frac{1}{\phi}\right)^{n+1},$$
$$F_{n+1} + \frac{1}{\phi} F_n = \phi^{n+1},$$

が成立する。得られた数式に関し, 第2式から第1式を減じて, その差に $1/\sqrt{5}$ を乗じると,

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

が得られる。このようにしてフィボナッチ数列の一般項が導出された。¶

おまけ 一般項がわかったところで, フィボナッチ数列の負の項 (質問より前の項の値) を計算してみよう。それにはフィボナッチ数列の漸化式を $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ のように変形して, $F_1 = 1, F_0 = 0$ から始めて, 漸化式を繰り返していけばよい。その結果として,

$$\{F_n\} = \{\dots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, \mathbf{0}, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\},$$

が得られる。なお, 上の式のボールド体 (太字) の数値が F_0 だ。負の方向にたどってみると, 絶対値がフィボナッチ数列になっている。しかも, 負の項では, 符号が交互に切り替わることが特徴だ。

2.1.2 フィボナッチ数列の母関数

数列を級数の展開係数とみなしたとき、その級数は母関数と呼ばれる。フィボナッチ数列を展開係数とする級数は、 $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \dots$ となる。これがフィボナッチ数列上関数だ。その母関数に関して、Quoraに次のような質問が投稿された。

Quora 質問 10000/9899 を計算すると、なぜ商 (= 1.0102030508...) にフィボナッチ数列が現れるのですか?

上に書いたように、この質問はフィボナッチ数列の母関数と関係がある。フィボナッチ数列の通常母関数:

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots \quad (1)$$

を調べてみよう。この母関数はフィボナッチ数列を展開係数とするべき多項式だ。この母関数に x と x^2 を乗じると、

$$x f(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots$$

$$x^2 f(x) = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 8x^7 + \dots$$

が得られる。これらの数式を母関数 (1) が減じると、

$$(1 - x - x^2) f(x) = 1, \quad (2)$$

が得られる。このような結果が得られることは、フィボナッチ数列の漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ に注意すればわかる。言いかえると、フィボナッチ数列の通常母関数は $1/(1 - x - x^2)$ と等しい、すなわち、

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots \quad (3)$$

のように書くことができる。質問の割り算は、 $10000/9899 = 1/0.9899$ と考えるとわかりやすい。ここで、 $x = 1/100$ を得られた数式に代入すると、ただちに、

$$\begin{aligned} \frac{1}{0.9899} &= 1 + 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-8} + 8 \cdot 10^{-10} \dots \\ &= 1.0102030508 \dots \end{aligned}$$

が得られる。質問に書かれていた同一の結果が得られ。しかし、フィボナッチ数列が確認できるのは限られた桁までであり、それより下の桁ではおかしな結果になっている。商をもう少し先まで書いてみると、

$$\frac{1}{0.9899} = 1.01020305081321345590463 \dots$$

となる。下線部がフィボナッチ数列とは異なる部分です。この部分はフィボナッチ数列が3桁になり、桁上がりによって隣の桁と干渉するのでフィボナッチ数列と異なる数値が現れる。

2.1.3 フィボナッチ数列の一の位

フィボナッチ数列の一の位は周期性をもっている。結果を述べておくと、周期が60であるので、フィボナッチ数列 F_n の一の位は n を60で割った余りを調べれば、その一の位が特定できることになる。この関連として、Quoraには次の質問が投稿されていた。

Quora 質問 フィボナッチ数列の一の位を導く公式って作れませんか?

結果を見出すのは単純であり、漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ に一の位の数値を代入し、結果は一の位の値のみを取り出せばよい。そのような手法で作ると、

表 2.1: フィボナッチ数列の一の位の周期パターン

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	1	1	2	3	5	8	3	1	4	5	9	4	3	7
15	0	7	7	4	1	5	6	1	7	8	5	3	8	1	9
30	0	9	9	8	7	5	2	7	9	6	5	1	6	7	3
45	0	3	3	6	9	5	4	9	3	2	5	7	2	9	1

なる表を得ることができる。この表から、フィボナッチ数列の一の位が周期60で循環することがわかる。しかも、その周期の内部を見ると面白い規則性が見いだせる。具体的には、 F_n の添え字 n が15の倍数であれば一の位は0だが、 n がそれ以外の5の倍数であれば一の位は確実に5になっている。また、 n を15で割った余りが、表を上から下に読むと、1-7-9-3の組み合わせになっているパターンと、2-4-8-6の組み合わせになっているパターンに大別される。

表の読み方として、数列 F_{278} を例に挙げると、その一の位を調べるには、添え字278を60で割った余りを特定する。その余りは38だ。その余りを $38 = 30 + 8$ のように分解し、30の行8の列の交点を読む。つまり、 F_{278} の一の位9となるわけだ。

2.1.4 フィボナッチ数列の類似数列

漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ は、右辺の第1項と第2項が減算で結ばれている。加算で結ばれるのがフィボナッチ数列の漸化式だが、この類似した漸化式はフィボナッチ数列と異なる性質の数列となる。その数列の特性について尋ねたのが以下の質問だ。

Quora 質問 漸化式が $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ として、初項と第2項が実数の場合、 $n \rightarrow \infty$ とき、 $a_n \rightarrow -\infty$ と言えますか？

この質問の漸化式は、フィボナッチ数列に類似しているが、フィボナッチ数列とは異なり周期関数になる。だから、 $n \rightarrow \infty$ において $a_n \rightarrow -\infty$ となることはない。数列 a_n の一般項は次のようにして特定することができる。

与えられた漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ を、

$$a_{n-2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n), \quad (1)$$

なる形に変形してみる。このような形に成立するには、

$$\alpha + \beta = -1, \quad \alpha\beta = 1,$$

でなければならない。そのような α と β は2次方程式 $t^2 - t + 1 = 0$ の解だ。この2次方程式の解は、

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = e^{\pm\pi i/3},$$

となる。これを α と β に割り振ると、

$$\alpha = e^{\pm\pi i/3}, \quad \beta = e^{\mp\pi i/3}, \quad (\text{複号同順})$$

となる。特定できた α と β を漸化式 (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n e^{\pi i/3} &= (a_1 - a_0 e^{-\pi i/3}) e^{-\pi i n/3}, \\ a_{n+1} - a_n e^{-\pi i/3} &= (a_1 - a_0 e^{\pi i/3}) e^{\pi i n/3}, \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる。ここで、(2) の第1式から第2式を減じると、

$$\begin{aligned} 2ia_n \sin \frac{\pi}{3} &= (a_1 - a_0 e^{\pi i/3}) e^{-\pi i n/3} - (a_1 - a_0 e^{-\pi i/3}) e^{\pi i n/3} \\ &= a_1 e^{\pi i n/3} - a_0 e^{\pi i(n-1)/3} - a_1 e^{-\pi i n/3} + a_0 e^{-\pi i(n-1)/3} \\ &= 2i \sin \frac{\pi n}{3} - 2ia_0 \sin \frac{\pi(n-1)}{3}, \end{aligned}$$

が得られる。この数式を整理して a_n を特定すると、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sin(\pi/3)} \left(a_1 \sin \frac{\pi n}{3} - a_0 \sin \frac{\pi(n-1)}{3} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[a_1 \sin \frac{\pi n}{3} - a_0 \sin \left(\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[a_1 \sin \frac{\pi n}{3} + a_0 \sin \left(\frac{\pi n}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{a_0^2 + a_1^2 - a_0 a_1}}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi n}{3} + \phi \right), \end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$\tan \phi = \frac{\sqrt{3} a_0}{2a_1 - a_0},$$

である。この結果から一般項 a_n が周期関数であることがわかる。したがって、 $n \rightarrow \infty$ となっても、 $|a_n| \rightarrow \infty$ とはならない。

2.1.5 トリボナッチ数列

トリボナッチ数列は、漸化式 $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ によって決定される数列だ。フィボナッチ数列が直前の2項によって次項が決定されるのに対して、この数列は3項から決定されるので、トリ (= 3) + フィボナッチで、トリボナッチ数列という命名だ。トリボナッチ数列に関して、Quora で次のような質問が投稿された。

Quora 質問 フィボナッチ数列は一般項が黄金比になっていたり面白い特徴がありますが、トリボナッチ数列はどうでしょうか？

トリボナッチ数列の項比 a_{n+1}/a_n は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、 $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1.839286755\dots$ のように一定値に収束する。その意味で、フィボナッチの数列と類似した性質がある。この比率を計算するのは難しくない。項比が特定の値に収束したと仮定すると、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、 $a_{n+1} = \gamma a_n$, $a_{n+2} = \gamma^2 a_n$, $a_{n+3} = \gamma^3 a_n$ と考えられる。これらの項を、トリボナッチ数列の漸化式:

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n,$$

に代入すると、

$$\gamma^3 - \gamma^2 - \gamma - 1 = 0,$$

なる3次方程式が得られる。この方程式はカルダノの公式を用いると代数的に解くことが可能だ。カルダノの公式によって得られる実数解は、

$$\gamma = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$\simeq 1.83928675521461,$$

である。この解は、当然、ニュートン法のような数値解として得ることも可能だ。

一般項 トリボナッチ数列の一般項の導出は容易ではない。しかも、得られる数式は意外な形をしている。一般項は、

$$a_n = \frac{\gamma^n \sin \phi - \gamma^{(3-n)/2} \sin n\phi + \gamma^{-n/2} \sin(n-1)\phi}{(\gamma^2 + \gamma^{-1} - 2\gamma^{1/2} \cos \phi) \sin \phi}, \quad (2.3)$$

で与えられる。この数式には、

$$\gamma \simeq 1.83928675521461,$$

$$\phi = \arccos \frac{(\gamma - 1)\sqrt{\gamma}}{2} \simeq 2.176233545596230,$$

なるパラメータが含まれている。フィボナッチ数列に比べると、複雑な数式だが正確に一般項を与えることができる。得られた数式を用いて最初の数項を計算すると、

$$\{a_n\} = \{0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, \dots\}$$

が得られる。この結果は、トリボナッチ数列の漸化式で計算した結果と一致する。なお、上で記載した一般項において、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、数式(2.3)の分子の第2項と第3項はゼロに収束する。つまり、右辺の分子は第1項が優勢となり、 $a_{n+1}/a_n \rightarrow \gamma$ であることが確認できる。

一般項の導出 トリボナッチ数列の一般項を特定するための試みとして、漸化式を、

$$a_{n+3} + \alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} = \gamma (a_{n+2} + \alpha a_{n+1} + \beta a_n),$$

の形に数式変形してみよう。この形の数式がトリボナッチ数列の漸化式と一致するには、

$$\gamma - \alpha = 1,$$

$$\gamma\alpha - \beta = 1,$$

$$\gamma\beta = 1,$$

が恒等的に成立しなければならない。第1式と第3式は、

$$\alpha = \gamma - 1,$$

$$\beta = 1/\gamma,$$

のように書き換えることができます。これらの関係式を第2の恒等式に代入すると、3次方程式:

$$\gamma^3 - \gamma^2 - \gamma - 1 = 0,$$

が得られる。この3次方程式は、グラフを描いてみればわかるように、実数解を一つだけもっている。虚数まで考えるならば、三つある解のうち、二つの解は虚部をもっているということだ。3次方程式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ の右辺を $x - \gamma$ を因数とする剰余を用いて書くと、

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x - 1 \\ = (x - \gamma) [x^2 + (\gamma - 1)x + (\gamma^2 - \gamma - 1)] + \gamma^3 - \gamma^2 - \gamma - 1, \end{aligned}$$

となる。ここで、 γ を方程式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ の実数解とする。すると、すでに分かっている関係式から、

$$x^3 - x^2 - x - 1 = (x - \gamma)(x^2 + \alpha x + \beta),$$

であることがわかる。つまり、 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ の解のうち、実数でない解は $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ の解である。それらの解を、 γ_1, γ_2 とするならば、

$$\gamma_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2},$$

と考えればよいだろう。これらの解から、

$$\alpha_1 = \gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 - 1, \quad \beta_1 = \frac{1}{\gamma_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\gamma_2},$$

を定義しておこう。すると、トリボナッチ数列の漸化式は、

$$a_{n+3} + \alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} = \gamma (a_{n+2} + \alpha a_{n+1} + \beta a_n),$$

$$a_{n+3} + \alpha_1 a_{n+2} + \beta_1 a_{n+1} = \gamma_1 (a_{n+2} + \alpha_1 a_{n+1} + \beta_1 a_n),$$

$$a_{n+3} + \alpha_2 a_{n+2} + \beta_2 a_{n+1} = \gamma_2 (a_{n+2} + \alpha_2 a_{n+1} + \beta_2 a_n),$$

のような3通りに書き換えることができる。ここで、 $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$ とすれば、書き換えられた漸化式は、

$$a_{n+2} + \alpha a_{n+1} + \beta a_n = \gamma^n,$$

$$a_{n+2} + \alpha_1 a_{n+1} + \beta_1 a_n = \gamma_1^n,$$

$$a_{n+2} + \alpha_2 a_{n+1} + \beta_2 a_n = \gamma_2^n,$$

のように書き換えることが可能。これらの関係式を, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} が未知数である 3 元 1 次の連立方程式とみなし, a_n について解くと,

$$a_n = \frac{(\gamma - \gamma_2)(\gamma^n - \gamma_1^n) - (\gamma - \gamma_1)(\gamma^n - \gamma_2^n)}{(\gamma - \gamma_2)(\beta - \beta_1) - (\gamma - \gamma_1)(\beta - \beta_2)},$$

が得られる。ここで, 既に得られた関係式を用いて α や β を消去して数式を整理すると,

$$a_n = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma^n + (\gamma_2 - \gamma)\gamma_1^n + (\gamma - \gamma_1)\gamma_2^n}{\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma} + \frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_1} + \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_2}},$$

が得られる。これがトリボナッチ数列の一般項を与える公式だ。数値的に解いた具体的な解は,

$$\gamma \simeq 1.839286755214161,$$

$$\gamma_1 \simeq -0.419643377607080 + 0.60629072907199 i,$$

$$\gamma_2 \simeq -0.419643377607080 - 0.60629072907199 i,$$

である。さらに,

$$A_{12} = \gamma_1 - \gamma_2, \quad A_{01} = \gamma - \gamma_1, \quad A_{20} = \gamma_2 - \gamma,$$

$$B = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma} + \frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_1} + \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_2},$$

を定義すると, 一般項は,

$$a_n = \frac{A_{12}\gamma^n + A_{20}\gamma_1^n + A_{01}\gamma_2^n}{B},$$

によって計算できる。トリボナッチ数列が実数にも関わらず, 上のように複素数を使って計算されるところがなんとなく気味が悪い。気味悪さを解消吸うために, 実数だけで一般項を記述できないかを考えてみよう。ここで注目するのが, γ_1 と γ_2 が複素共役の関係にあることだ。その関係に基づき, $\gamma_1 = \gamma_0 e^{i\phi}$, $\gamma_2 = \gamma_0 e^{-i\phi}$ とおいてみる。ここで, γ_0 と ϕ は実数だ。一方, γ は実数なので他の記号に置き換えず, そのまま使う。その置き換えによって, 一般項を与える数式は,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\gamma\gamma_0 \left[\gamma^n \gamma_0 \sin \phi - \gamma\gamma_0^n \sin n\phi + \gamma_0^{n+1} \sin(n-1)\phi \right]}{(\gamma^2 + \gamma_0^2 - 2\gamma\gamma_0 \cos \phi) \sin \phi} \\ &= \frac{\gamma^n \sin \phi - \gamma^{(3-n)/2} \sin n\phi + \gamma^{-n/2} \sin(n-1)\phi}{(\gamma^2 + \gamma^{-1} - 2\gamma^{1/2} \cos \phi) \sin \phi}, \end{aligned}$$

という形に変形できます。第 2 行目への数式変形には, $\gamma_0^2 = \gamma_1\gamma_2 = \beta = 1/\gamma$ なる関係を利用した。意外にも三角関数を含む数式となったが, 本回答の前半に示したとおり, この一般項の数式を計算すると, トリボナッチ数列の漸化式で計算した数値と同一の結果が得られた。この検証結果から, 正しい数式を特定できたのだと考えられる。

おまけ トリボナッチ数列を項番 n の連続関数として図 2.1 にプロットしてみた。下図のような曲線を描く。

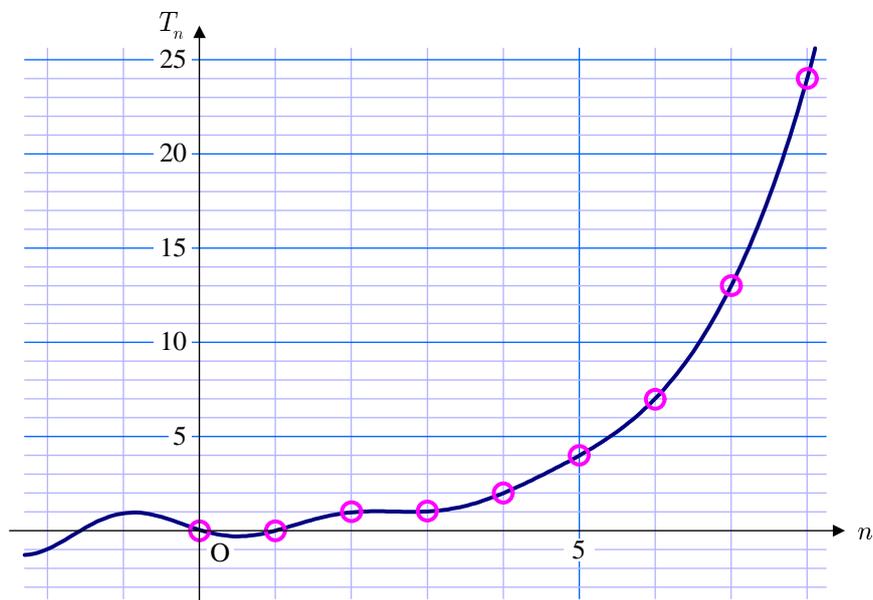


図 2.1: トリボナッチ数列を連続関数としてプロットした例

2.2 無限級数

2.2.1 ポアソンの和公式

下に示す (2.4) から (2.6) のような難解な級数の計算を問う質問が Quora に投稿された。投稿された質問は、下に記載する級数の導出を問う質問だったので、質問を囲みで取り上げる記述を省略する。この種の級数は、フーリエ変換を利用したポアソンの和公式を利用すると計算できる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2 + 1} = \frac{1}{e^2 - 1}, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cos \pi z, \quad (2.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \pi n^2 \right) e^{-\pi n^2} = -\frac{1}{8}, \quad (2.6)$$

公式 (2.4) の導出 この回答の導出にはポアソンの和公式を利用する。ポアソンの和公式は、関数 $f(x)$ に対してフーリエ変換:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx,$$

を計算しておくとして、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k),$$

が成立するという公式だ。本質問においては、 $f(x) \equiv 1/(1 + \pi^2 x^2)$ とする。このとき、フーリエ変換は、

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i k x}}{1 + \pi^2 x^2} dx,$$

なる形で書ける。この積分を実行するには留数定理が便利だ。被積分関数 $f(x) e^{-2\pi i k x}$ は $x = \pm i/\pi$ に 1 位の極をもっている。留数を計算すると、

$$\operatorname{Res}_{x=-i/\pi} f(x) e^{-2\pi i k x} = \frac{i}{2\pi} e^{-2k}, \quad (1)$$

$$\operatorname{Res}_{x=i/\pi} f(x) e^{-2\pi i k x} = -\frac{i}{2\pi} e^{2k}, \quad (2)$$

が得られます。積分の実行にあたり、 k が正の場合、実軸と複素平面の無限遠をまわる下側半円を積分路にとる。一方、 k が負の場合、実軸と複素平面の無限遠をまわる上側半円を積分路にとる。そのように積分路を設定すると、無限遠での積分がゼロになるので、周回積分が計算すべきフーリエ変換と等しくなる。留数定理を使うとフーリエ変換は、

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \begin{cases} e^{-2k} & (k > 0) \\ e^{2k} & (k < 0) \end{cases}$$

のように計算できる。変数 k の両符号をまとめて、

$$F(k) = e^{-2|k|},$$

と書いてもよい。フーリエ変換が k の符号について対称なので、

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} F(k) - F(0) \\ &= \frac{2}{1 - e^{-2}} - 1 = \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}} = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}, \end{aligned} \quad (3)$$

であることがわかる。したがって、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1},$$

となる。先ほどと同様に, $f(n)$ も n の符号について対称なので,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) - f(0) \right) = \frac{1}{e^2 - 1},$$

が導かれる。したがって, 公式 (2.4) が得られる。

公式 (2.5) の導出 第一手として, $\pi \cot \pi z$ を機械的に計算すると,

$$\begin{aligned} \pi \cot \pi z &= \pi i \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = \pi i \frac{1 + e^{-2\pi iz}}{1 - e^{-2\pi iz}} \\ &= \pi i \left[1 + 2 \left(e^{-2\pi iz} + e^{-4\pi iz} + e^{-6\pi iz} + \dots \right) \right] \\ &= \pi i \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi inz} \right). \end{aligned} \tag{1}$$

が得られる。この級数展開に書いた $e^{2\pi inz}$ の絶対値が 1 なので, 級数 (1) が収束しないとの指摘を受けるかもしれないが, 収束することにして計算を進めていこう。級数による $\pi \cot \pi z$ 表現式 (1) は,

$$\pi \cot \pi z = \pi i \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{2\pi inz} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz} \right),$$

のように書き換えることもできる。ポアソンの和公式を適用するにあたり,

$$f(x) = \begin{cases} \pi i e^{2\pi ixz} & (x < 0) \\ \pi i e^{-2\pi ixz} & (x \geq 0) \end{cases}$$

と考える。続いて, フーリエ変換 $F(k)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} F(k) &= \pi i \left(\int_{-\infty}^0 e^{2\pi ix(z-k)} dx + \int_0^{\infty} e^{-2\pi ix(z+k)} dx \right) \\ &= \pi i \left(\frac{1}{2\pi i(z-k)} + \frac{1}{2\pi i(z+k)} \right) \\ &= \frac{z}{z^2 - k^2}. \end{aligned}$$

が得られる。ここでも, $e^{\pm 2\pi ixz}$ が x について無限遠でゼロに収束するという勝手な設定を使っています。ポアソンの和公式により,

$$\pi \cot \pi z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2 - k^2},$$

が成立する。この数式は,

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2},$$

と書き換えることもできる。怪しげな数式変形をしたことは否めないが, 公式を導出することができた。

公式 (2.6) の導出 公式の導出にはポアソンの和公式を利用する。関数 $e^{-\pi x^2}$ と $x^2 e^{-\pi x^2}$ のフーリエ変換を計算すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}, \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\pi x^2 - 2\pi i \xi x} dx = \frac{1 - 2\pi \xi^2}{2\pi} e^{-\pi \xi^2}, \quad (2)$$

が得られる。質問の数式に基づき、 $f(x) = (1/4 - \pi x^2) e^{-\pi x^2}$ なる関数を定義すると、そのフーリエ変換は、(1) と (2) から、

$$F(\xi) = -\left(\frac{1}{4} - \pi^2 \xi^2\right) e^{-\pi \xi^2},$$

であることが導かれる。このフーリエ変換をポアソンの和公式に代入すると、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \pi^2 n^2\right) e^{-\pi n^2} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \pi^2 k^2\right) e^{-\pi k^2},$$

となるので、ただちに、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \pi^2 n^2\right) e^{-\pi n^2} = 0, \quad (3)$$

であることがわかる。さらに、質問の数式が n の符号に対して対称 (偶関数) であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \pi n^2\right) e^{-\pi n^2} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \pi n^2\right) e^{-\pi n^2} + \left[\left(\frac{1}{4} - \pi n^2\right) e^{-\pi n^2}\right]_{n=0} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \pi n^2\right) e^{-\pi n^2} + \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (4)$$

のように計算できる。変形された等式 (4) は、(3) によってゼロと等しいので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} - \pi^2 n^2\right) e^{-\pi n^2} = -\frac{1}{8},$$

が導かれる。したがって、冒頭に書いた回答が得られた。

2.3 発散級数

発散級数は、無限に加算していくと無限大に飛んでいく、あるいは、振動するなど、いわゆる発散をする級数である。この種の級数のいくつかは、かつて、オイラーが考察し特定の値に収束するかのような技巧を編み出した。それが、後に解析接続につながっていった。Quora では発散級数と解析接続された関数の値との関係を問う質問がいくつか投稿されている。

2.3.1 整数和とリーマンのゼータ関数

発散級数の代表例といえば、整数の無限和 $1 + 2 + 3 + \dots$ とリーマンのゼータ関数 $\zeta(-1) = -1/12$ だろう。当然、整数の無限和が $-1/12$ に等しくなるわけがない。とはいえ、オイラーが怪しげな考察で整数和が $-1/12$ になることを示唆していたことは面白い。

整数の無限和が $-1/12$ と対応付けられるのは、リーマンのゼータ関数との解析接続をとおしてのことである。解析接続は複素関数解析における手法であり、関数の定義域の拡張に利用される。もともと、リーマンのゼータ関数は、

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \quad (2.7)$$

のように定義されている。しかし、この定義では $s > 1$ でしか右辺の級数が収束しない。それに対して、 $s < 1$ でも関数を定義できるように拡張したのがリーマンのゼータ関数であり、定義域の拡張に用いた考え方が解析接続というわけだ。例えば、級数 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ は $|x| < 1$ でしか収束しないが、 $1/(1-x)$ と書くと $|x| > 1$ でも定義できる関数になる。しかも、 $|x| < 1$ において $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1/(1-x)$ が成り立つので、関数 $1/(1-x)$ は級数 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ を解析接続した関数である。Quora では解析関数の適用例を尋ねる質問が投稿された。

Quora 質問 解析接続はどのような場面で使われていますか？

解析接続は関数の定義域を拡大する目的で使われる。解析接続は「一致の定理」によって支えられている。一致の定理とは下に示す内容を主張する。

一致の定理 関数 $f(z)$ は領域 D で正則とする。領域 D 内部の点 z_0 に収束する無限点列 $\{z_n\}$ (z_n はすべて異なる) に対して $f(z_n) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ならば、 D において恒等的に $f(z) \equiv 0$ が成り立つ。

— 松田哲, “複素関数,” 岩波書店, ISBN4-00-007975-1, p. 98, 1996.

一致の定理は言いかえると、関数 $f(z)$ と関数 $g(z)$ が与えられたとき、ある限られた区間 (領域) で、少なくとも、加算無限個の点 a において $f(a) = g(a)$ が成立するなら、 $f(z)$ と $g(z)$ が正則である限り、他の区間 (領域) でも $f(z) = g(z)$ が恒等的に成立することを主張する。例えば、 $|x| < 1$ でしか収束しない級数 $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$ を実数、さらには複素数に定義域を拡大して逆正接関数 $\arctan x$ をつくる操作が解析接続にあたる。

筆者の回答のうち、リーマンのゼータ関数に関する例を紹介しよう。リーマンのゼータ関数の定義 (2.7) によると、 $\zeta(s)$ は、 $s > 1$ でしか収束しないので、定義域は $s > 1$ に限定

される*。リーマンのゼータ関数は、その奇妙な対応がゆえに、 $\zeta(-1) = -1/12$ という値が有名だ。あくまでも、その値はゼータ関数を解析接続した結果であり、(2.7) に形式的に $s = -1$ を代入して得られる値ではない。解析接続の結果として得られる $\zeta(-1)$ が $-1/12$ なのだ。

当初の定義式 (2.7) から、数学的に妥当な手順で解析接続をするのが難しいので、ここではオイラー流の胡散臭い手順で $\zeta(-1)$ を特定しよう。その関数の特定には、

$$\eta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

によって定義されるイータ関数を利用する。ここで、

$$2^{-s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots$$

であることに気づけば、ゼータ関数とイータ関数は、

$$(1 - 2^{1-s}) \zeta(s) = \eta(s),$$

のように関係づけられる。ここで、 $\eta(-1)$ を計算してみよう。その値は、

$$\eta(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

となります。これは振幅が拡大しながら振動する級数、すなわち、発散級数だ。ところが、この級数は、

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \quad (5)$$

に $z = -1$ を代入した結果と一致する。右辺の級数は $|z| < 1$ でしか収束しないのですが、右辺の級数は $1/(1-z)^2$ に解析接続できます。胡散臭いですが、この関係性から、

$$\eta(-1) = \frac{1}{[1 - (-1)]^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},$$

となる。この結果を (5) に代入すると、

$$\zeta(-1) = \frac{\eta(-1)}{1 - 2^{1-(-1)}} = \frac{\eta(-1)}{1-4} = \frac{1/4}{-3} = -\frac{1}{12},$$

なる結果が得られる。あたかも、 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$ となっているようで面白い結果だ。胡散臭い方法をだったが、複素解析として妥当な手順を使っても同じ結果が得られる。物理学においては、 $\zeta(-1) = -1/12$ は超弦理論における臨界次元を特定する際に利用される。さらに、 $\zeta(-3) = 1/120$ は、金属板どうしを微小距離だけ離れたときに生じる引力(カシミール効果)において現れる。

*複素数の意味では $\text{Re } s > 1$ が収束条件となる。

ゼータ関数値 $-1/12$ の必然性 整数の無限和とゼータ関数 $\zeta(-1)$ が等しくないことがわかったうえで、それらに関係づける背景を尋ねる質問が、次のように Quora に投稿された。その質問に対して、筆者は整数に緩い窓関数をかけて収束するように仕掛けて無限和をとると $-1/12$ なる定数が見える性質を回答した。その回答を紹介しよう。

Quora 質問 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$ とありますが、なにか条件ってあるのですか？

自然数を無限に加算していても発散するだけであり、決して $-1/12$ になることはないが、 $-1/12$ という数値に必然性を感じることもある。ここで、その必然性を示したい。自然数の無限和 $1 + 2 + 3 + \dots$ は収束しないので、

$$S = 1 \cdot e^{-\varepsilon} + 2 \cdot e^{-2\varepsilon} + 3 \cdot e^{-3\varepsilon} + \dots \quad (1)$$

のように窓関数 $e^{-k\varepsilon}$ を乗じて加算していく。ここで、 ε は正であるとする。指数的に減少する窓関数を乗じたため、級数 (1) は収束し、

$$S = \frac{e^{-\varepsilon}}{(1 - e^{-\varepsilon})^2}, \quad (2)$$

となる。導出過程は省略するが、(2) は高校数学の範疇で得ることができる。ここで、正の数 ε を、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることを考えよう。このようにゼロに近づけていくと自然数の無限和に近づいていくと考えるのだ。ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ における性質を見やすくするため、(2) を変形すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{e^{-\varepsilon}}{(1 - e^{-\varepsilon})^2} = \frac{1 - \varepsilon + \varepsilon^2/2! - \varepsilon^3/3! + \dots}{(\varepsilon - \varepsilon^2/2! + \varepsilon^3/3! - \dots)^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1 - \varepsilon + \varepsilon^2/2! - \varepsilon^3/3! + \dots}{(1 - \varepsilon/2! + \varepsilon^2/3! - \dots)^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1 - \varepsilon + \varepsilon^2/2 - \varepsilon^3/6 + \dots}{1 - \varepsilon + 7\varepsilon^2/12 - \varepsilon^3/4 + \dots} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{12} + o(\varepsilon^3) \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。この計算結果に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、右辺の第 3 項はゼロになりますが、第 1 項があるので S は発散する。もともと自然数の無限和が発散するので当然だが、面白いのが右辺の第 2 項だ。第 2 項が、窓関数のパラメータとして与えた ε に依存しない定数項になっている。この計算結果を見ると、発散するはずの自然数の無限和と、 $\zeta(-1) = -1/12$ の間に必然性を感じてしまう。

2.3.2 無限大の階乗

しばしば、整数の無限和 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ をリーマンのゼータ関数 $\zeta(-1) = 1/12$ と結びつける記事を見ることがある。短絡的に $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$ とすることは正しくないのだが、数学の可能性をさまざまな意味で空想させることで初学習者を魅了する効果はあるだろう。その関連として、Quora で次の質問が投稿された。

Quora 質問 $\infty!$ とは何ですか?

真面目に考えると、 $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots$ のように無限に乗積を重ねていくと値は発散する。ところが、解析接続を利用した遊びによって、その無限乗積が $\sqrt{2\pi}$ に等しいことが導かれる。正しい数式ではないが、その性質を形式的に書くと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! = \prod_{k=1}^{\infty} k = \sqrt{2\pi}, \quad (2.8)$$

となる。その驚くべき性質は、リーマンのゼータ関数を使って導出される。

リーマンのゼータ関数は、

$$\zeta(x) = 1^{-x} + 2^{-x} + 3^{-x} + \dots \quad (1)$$

のように定義されている。ここで議論する無限乗積は、具体的には、

$$\zeta'(x) = -(1^{-x} \log 1 + 2^{-x} \log 2 + 3^{-x} \log 3 + \dots). \quad (2)$$

で記述されるリーマンのゼータ関数の導関数を利用して評価していく。ここでは \log は自然対数を与えるものとする。特に興味の対象となるのは、 $x = 0$ における導関数、すなわち、

$$\zeta'(0) = -(\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots) = -\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots), \quad (3)$$

である。対象とする無限乗積の対数となっていることに注意が必要だ。ゼータ関数 $\zeta(x)$ を評価するにあたり、

$$\eta(x) = 1^{-x} - 2^{-x} + 3^{-x} - 4^{-x} + \dots$$

のように定義されたイータ関数 $\eta(x)$ を考えておくと便利である。イータ関数は、ゼータ関数に似ているが、交代級数になっている。これらの関数は、

$$\eta(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x). \quad (4)$$

なる関係を満足する。この関係式を微分すると、

$$\eta'(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta'(x) + 2^{1-x} \log 2 \cdot \zeta(x),$$

が得られる。前に述べたように、興味の対象が $x = 0$ なので、そのときの導関数は、

$$\eta'(0) = -\zeta'(0) + 2 \log 2 \cdot \zeta(0) = -\zeta'(0) - \log 2, \quad (5)$$

となる。この計算において、 $\zeta(0) = -1/2$ なるゼータ関数の公式を利用し。(この公式は、ここでやっているような遊び形式でも導出可能だ。) ここで、いささかトリッキーな方法で導関数 $\eta'(x)$ を評価する。本当にトリッキーに見えるかもしれないが、イータ関数 $\eta(x)$ を次のように変形しておく。

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1^x} - \frac{2}{2^x} + \frac{2}{3^x} - \frac{2}{4^x} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{1^x} - \frac{1}{2^x} \right) - \left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{3^x} \right) + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left[\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right]. \end{aligned}$$

この数式を微分すると、

$$\eta'(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left[-\frac{\log k}{k^x} + \frac{\log(k+1)}{(k+1)^x} \right],$$

が得られる。この数式に $x = 0$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \eta'(0) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} [-\log k + \log(k+1)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \log \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} \log \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} = \log \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。この計算の第3行目への変形には、ウォリス積:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots} = \frac{\pi}{2},$$

を利用した。数式 (6) を (5) に代入すると、

$$\zeta'(0) = -\log \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \log 2 = -\log \sqrt{2\pi},$$

が得られる。ここで、この結果を (3) を比較すれば、驚くべき結果:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots = \sqrt{2\pi},$$

が導出でき。冒頭で述べたように、この関係式は真面目な意味で成立する等式ではなく、解析接続を使って遊んだ結果として得られた産物である。

2.3.3 素数の無限乗積

前項で紹介したように、オイラー流の怪しげな考察によってすべての整数の乗積 (無限大の階乗) が有限の値 $\sqrt{2\pi}$ になることを確認した。整数の集合の中の部分集合として素数に注目し、その素数の無限乗積に関する質問も Quora に投稿された。

Quora 質問 素数を順番にかけたら $4\pi^2$ であるとはどういうことですか?

素数が無限に存在することから、真実としてはその無限乗積は発散するのだが、オイラー流の怪しげな考察では、質問に書かれているように $4\pi^2$ となる。これを形式的に書くと、

$$\prod_{p \in \text{prime}} p = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots = 4\pi^2, \quad (2.9)$$

となる。オイラー流の怪しげな考察によって上記の等式を導出しよう。

リーマンのゼータ関数は、

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (1)$$

のように定義される。導出を省略するが、この関数は、

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \text{prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (2)$$

のような無限乗積で表現できることが知られている。数式 (2) の対数をとると、

$$\log \zeta(s) = \log \prod_{p \in \text{prime}} (1 - p^{-s})^{-1} = - \sum_{p \in \text{prime}} (1 - p^{-s}), \quad (3)$$

が得られる。ここで、対数関数のテイラー級数:

$$\log(1 - x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right),$$

に注意すると、(3) は、

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= - \sum_{p \in \text{prime}} \left(-\frac{1}{p^s} - \frac{1}{2p^{2s}} - \frac{1}{3p^{3s}} - \frac{1}{4p^{4s}} - \dots \right) \\ &= \sum_{p \in \text{prime}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \in \text{prime}} \frac{1}{np^{ns}}, \end{aligned} \quad (4)$$

のように書き換えられる。両辺を指数関数に代入すると、リーマンのゼータ関数は、

$$\zeta(s) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \in \text{prime}} \frac{1}{np^{ns}}, \quad (5)$$

のように表現できることになる。ここで、両辺を s について微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \zeta(s) &= \left(\frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \in \text{prime}} \frac{1}{np^{ns}} \right) \exp \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \in \text{prime}} \frac{1}{np^{ns}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \in \text{prime}} \frac{1}{n} \frac{d}{ds} p^{-ns} \right) \zeta(s) \\ &= - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \in \text{prime}} p^{-ns} \log p \right) \zeta(s), \end{aligned} \quad (6)$$

が得られます。この結果からただちに、

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \in \text{prime}} p^{-ns} \log p \right), \quad (7)$$

が得られる。ここで、リーマンのゼータ関数に関して、

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi,$$

であることに注意すると、

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\pi, \quad (8)$$

であることがわかる。さらに、(7) に $s = 0$ を代入して (8) と等号で結べば、

$$\begin{aligned} \log 2\pi &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \in \text{prime}} \log p = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 \right) \sum_{p \in \text{prime}} \log p \\ &= -\zeta(0) \sum_{p \in \text{prime}} \log p = \frac{1}{2} \sum_{p \in \text{prime}} \log p, \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。この結果は、 $\sum \log p = 2 \log 2\pi$ であるので、

$$\prod_{p \in \text{prime}} p = 4\pi^2,$$

が得られる。したがって、すべての素数の積は $4\pi^2$ に等しいことが示された。¶

怪しげな手段を使ったわけだが、不思議な関係式が得られた。素数は無限に存在していることが知られているが、その積が有限の値になっているのだ。しかも、 $4\pi^2 \simeq 39.5$ 、すなわち、 $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210 > 4\pi^2$ だ。しかも、別の(怪しげな)考察によって、すべての自然数の積が $\sqrt{2\pi}$ であることも示されてるいるので、なおさら不思議だ。素数は自然数の部分集合なので、素数の積が自然数全体の積よりも大きくなるのが奇怪である。

ここで示した導出には怪しい(正しくない)ところが2か所ある。第一に(4)への変形だ。この級数は、 $n = 1$ のとき素数全体にわたる総和が発散するので、総和記号の順序を入れ替えることができない。第二に(8)への変形だ。級数(2)によるゼータ関数の表現は、 $s \leq 1$ では正しくないので、 $\sum 1 = 1 + 1 + 1 + \dots = \zeta(0) = -1/2$ は誤りである。導かれ関係式は、ゼータ関数を用いた怪しげな考察によって得られる正しくない性質ですが、すべての素数の積が円周率 π に関わる数値になる結果が導かれることは興味深い。

2.3.4 階乗の交代級数

階乗を加算していくとどんな値になるか? そのような質問がQuoraに投稿された。その質問は無級数でなく、階乗の有限和だが、加算する項の数 N が大きくなると、 $(N-1)! \ll N!$ となるので、級数の和は近似的に $N!$ になることは容易に予想できる。

Quora 質問 この数列の和は? $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + N!$

質問の級数は、 N を無限に大きくすると発散するのだが、オイラー流の考察で収束するパターンを紹介しよう。この質問の延長線となる $1! + 2! + 3! + 4! + \dots$ ではなく、階乗による交代級数 $1! - 2! + 3! - 4! + \dots$ であればオイラーによる怪しげな評価で、

$$1! - 2! + 3! - 4! + \dots \simeq 0.59634736232, \quad (2.10)$$

のような値をもつとされる。

対象となる交代級数を評価するにあたり、

$$f(x) = x - x^2 + 2!x^3 - 4!x^4 + \dots \quad (1)$$

なる関数 $f(x)$ を定義しておく。この関数を x について微分すると、

$$f'(x) = 1 - 2!x + 3!x^2 - 4!x^3 + \dots \quad (2)$$

なる導関数が得られる。数式(1)と(2)を比較すると、関数 $f(x)$ が、

$$\frac{df}{dx} + \frac{1}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = 0, \quad (3)$$

なる微分方程式を満足することがわかる。一階の常微分方程式の公式から、(3)が、

$$f(x) = e^{1/x} \int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t} dt, \quad (4)$$

のように記述できることがわかる。評価したい級数は $f(1)$ であるので、 $x = 1$ に対して積分(4)を数値的に評価すると(2.10)が得られる。

第3章 微積分学

3.1 積分

積分は微分の逆演算とはいうものの、被積分関数が初等関数でありながら解析的に積分できないパターンがある。さらに、不定積分が解析的にできないが、定積分では留数定理などのテクニックによって積分が実行できるパターンがある。Quora で議論された例であるが、そのような技巧的な積分のパターンを紹介する。

3.1.1 級数展開を利用した積分

被積分関数を級数展開することによって積分を実行できるパターンがある。この手法を使う場合には、展開した級数が絶対収束することが条件となる。さらに、ここで紹介する公式は、級数として積分した結果がよく知られた級数の公式によって特定の値に落ち着くパターンになっている。

$$\int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)\log x} dx = \log \frac{2}{\pi}, \quad (3.1)$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}, \quad (3.2)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{\pi^2}{3}, \quad (3.3)$$

公式 (3.1) 導出 質問の積分を計算するには、 $x = e^{-u}$ なる置き換えを適用する。この置き換えによって、質問の積分は、

$$\int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)\log x} dx = - \int_0^\infty \frac{(1-e^{-u})e^{-u}}{u(1+e^{-u})} dx, \quad (1)$$

のように書き換えられる。この積分を実行するにあたり、被積分関数をテイラー展開するのだが、いささかトリッキーな技巧を用いる。すなわち、

$$\begin{aligned}\frac{1 - e^{-u}}{u} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^k}{(k+1)!}, \\ \frac{e^{-u}}{1 + e^{-u}} &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-mu},\end{aligned}\tag{2}$$

のように被積分関数を二つの項に分割してテイラー展開するのだ。特に、第2式は u についての展開でなく、 e^{-u} について展開することが肝心だ。テイラー展開 (2) を用いて積分 (1) を計算すると、

$$\begin{aligned}\text{Eq. (1)} &= - \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+m-1} \frac{u^k e^{-mu}}{(k+1)!} du \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m-1}}{(k+1)!} \int_0^{\infty} u^k e^{-mu} du \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m-1}}{(k+1)!} \frac{k!}{m^{k+1}} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{1}{m}\right)^{k+1} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \log \frac{m+1}{m} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\log \frac{2m}{2m-1} - \log \frac{2m+1}{2m}\right) \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \log \frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)} \\ &= - \log \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)} = - \log \frac{\pi}{2} = \log \frac{2}{\pi},\end{aligned}$$

のような結果が得られる。第2行目では、数式の変形をわかりやすくするため、積分記号を総和記号の中に入れた。第3行目で積分を実行する際、

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

を利用した。第4行目で可読性のため、数式を整頓た。この数式に対数関数 (log) のテイラー級数が含まれることがわかるので、第5行目を得られる。その第5行目では総和記号の中が、 m が偶数/奇数によって符号が反転するので、第6行目では、総和記号の中に2項入れることによって、 -1 のべき乗を乗じる操作をなくした。第6行目から第7行目への変形は説明の必要はないだろう。第8行目は、対数の和が、積の対数に等しいことを利用して変形した。その結果、対数関数の変数がウォリス積、すなわち、 $\pi/2$ に等しくなってる。したがって、右辺を得ることができた。これによって、公式が導出された。

公式 (3.2) の導出 上に書いた公式のように, この積分は $\pi^2/6$ に等しい。この値はオイラーが解いたとされるバーゼル問題の結果と一致する。実際に被積分関数を級数で表現し, 項別に積分を実行するとバーゼル問題に帰着する。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= \int_0^\infty x (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\left[-\frac{x}{n} e^{-nx} \right]_0^\infty + \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-nx} dx \right) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left[-\frac{1}{n^2} e^{-nx} \right]_0^\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

上記の数式変形において, 第2行目へ変形は $1/(1 - e^{-x})$ のテイラー級数展開を利用している。 $x > 0$ において $|e^{-x}| < 1$ となるので, そのテイラー級数は確実に収束するので, 第2行目への変形に問題が生じない。第3行目への変形は部分積分を利用した。項別積分の結果として, 自然数の自乗の逆数による級数が得られる。それはまさにバーゼル問題であり, 対称となる積分がリーマンのゼータ関数 $\zeta(2) = \pi^2/6$ と等しいことが導かれる。

公式 (3.3) の導出 この積分もバーゼル問題に準じる級数で表される。積分の実行に関しては, この関数が偶関数である故尾を利用すると便利だ。被積分関数が偶関数であることは後に確認することにして, 対称となる積分:

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 e^x}{(1 + e^x)^2} dx = 2 \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(1 + e^x)^2} dx,$$

を実行しよう。このような書き換えをりょうして積分を実行すると,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(1 + e^x)^2} dx \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx \\ &= 2 \int_0^\infty x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(n+1)!}{n!} e^{-nx} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty (n+1) x^2 e^{-(n+1)x} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{2}{(n+1)^2} = 4 \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right) \\ &= 4\zeta(2) \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 2\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

が得られる。第2行目への数式変形は、分子と分母に e^{-2x} を乗じた。第3行目への数式変形は2項定理によって $(1+e^x)^{-2}$ を展開した。この2項級数は、 $x > 0$ において $|e^{-x}| < 1$ だからうまく収束してくれる。第4行目は、積分を実行しやすい形に積の順序を変更し、第5行目では、

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} dx = \frac{2}{a^3},$$

を利用した。ただし、 a は定数だ。この時点でバーゼル問題に類似した級数が得られる。違いとしては、この級数が交代級数になっていることだ。バーゼル問題の級数が交代級数になっている場合は、単純な関係性によって第6行目のように数式変形できる。いうまでもなく、 $\zeta(2)$ はリーマンのゼータ関数だ。

最後に、被積分関数が偶関数であることをしておこう。分子と分母に e^{-2x} を乗じて、

$$\frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{x^2 e^x \cdot e^{-2x}}{(1+e^x)^2 \cdot e^{-2x}} = \frac{(-x)^2 e^{-x}}{(1+e^{-x})^2},$$

のように計算すると、被積分関数が単純に $-x$ の関数として書き換えられることがわかる。すなわち、被積分関数は符号反転に関する対称があるので、偶関数であるというわけだ。

3.1.2 二年生の夢

本項のタイトルとした「二年生の夢」とは、下に記載する(3.4)を計算する問題の名称だ。後に示すように、級数展開と漸化式による手法で計算できるため、大学2年生としてこの問題を解決したいという願望から命名されたのだろう。第2の公式(3.5)は等式でなく、漸近展開である。特に、(3.5)は項を無限に連ねたときに発散するので、有限項の和での近似式で記述しておいた。これらの積分を計算してみよう。

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}, \tag{3.4}$$

$$\int_1^{\infty} x^{-x} dx \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{240} + \frac{1}{3024} + \frac{1}{28800} \tag{3.5}$$

公式(3.4)の導出 二年生の夢の解放には、指数関数のテイラー展開を利用する*。つまり、 $x^{-x} = e^{-x \log x}$ であることに注意して、テイラー展開すると、

$$x^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k (\log x)^k}{k!}, \tag{1}$$

*この問題の解法は、Kashiwagi Rikiya 氏の回答が Quora に掲載されていたのだが、2025年3月時点で削除されている。

が得られる。ここで、関数 $x^m(\log x)^n$ を区間 $[0, 1]$ で積分しておこう。部分積分を利用して積分を実行すると、

$$\begin{aligned} I_{nm} &= \int_0^1 x^m (\log x)^n dx = \left[\frac{x^{m+1} (\log x)^n}{m+1} \right]_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\log x)^{n-1} dx \\ &= -\frac{n}{m+1} I_{n-1,m}, \end{aligned}$$

なる漸化式が得られる。ここで、 $n = 0$ のとき、

$$I_{0m} = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1},$$

であることに注意して、上記の漸化式で $n = 0$ となるまでさかのぼると、

$$I_{nm} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} I_{0m} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}},$$

が得られるわけだ。この積分結果を、被積分関数のテイラー展開 (1) に注意して適用すると積分公式 (3.4) が得られる。なお、区間 $(0, 1)$ において、 $|x \log x| \leq e^{-1}$ であるので、テイラー級数 (1) が確実に収束することとなり、項別積分は問題なく実行できる。得られた級数は、収束が速く、実際に計算すると、

$$\int_0^1 x^{-x} dx \simeq 1.291285997062664,$$

である。級数を計算するにあたり、 $15^{-15} < 10^{-17}$ に注意すると、15 項の和だけでも計算機の倍精度相当の演算精度が確保できる。

公式 (3.5) の導出 この積分を実行するのにオイラー・マクローリンの和公式を使って計算する。オイラー・マクローリンの和公式は、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f(j) &= \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} [f(n) + f(0)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_m(n), \end{aligned} \quad (3.6)$$

のような形で記述される。ここで、 B_{2k} はベルヌーイ数、 $R_m(n)$ は剰余項だ。オイラー・マクローリンの公式は、通常、級数の評価に積分を利用するために用いられる。ここでは、逆に、級数を使って積分を評価するのだ。そのために (3.6) を、

$$\int_1^\infty f(x) dx = \sum_{j=2}^\infty f(j) + \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(1),$$

のように変形しておく。ここで、 $f(x) = x^{-x}$ とした。なお、 $f(x)$, および、その導関数や高次導関数は無限遠 ($x \rightarrow \infty$) でゼロに収束すると考えた (証明は省略)。また、剰余項 R_m も無限遠でゼロになると仮定した。実際に計算すると、

$$\int_1^{\infty} x^{-x} dx \simeq \sum_{j=2}^{\infty} j^{-j} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{240} + \frac{1}{3024} + \frac{1}{28800} \\ \simeq 0.7042,$$

が得られる。右辺第1項は (3.4) と同一なので、実際の計算にはその結果を使えばよい。とはいえ、計算の有効数字が (3.4) に比べて少ないのは漸近展開の計算精度のためだ。オイラー・マクローリンの公式によって右辺の漸近展開を得るには、 x^{-x} の高次導関数が必要となるが、漸近展開は項を増やしすぎると発散する。漸近展開ではこれが限界だ。数値的に求積すると、

$$\int_1^{\infty} x^{-x} dx \simeq 0.704169960437475,$$

が得られる。さらに、二つの積分 (3.4) と (3.5) の和をとると、

$$\int_0^{\infty} x^{-x} dx \simeq 1.99545595750014,$$

が得られる。

3.1.3 Sinc 関数の無限積分

Sinc 関数 $\sin x/x$ を区間 $(-\infty, \infty)$ で積分すると π となる。もしくは、被積分関数が偶関数であることから $(0, \infty)$ で積分すると $\pi/2$, すなわち、

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (3.7)$$

が成り立つ。その積分について三つの方法でアプローチしてみよう。

コーシー主値による計算 この積分の計算として最も有名な手法はコーシー主値を用いた計算であろう。このアプローチは、被積分関数が $\sin x/x = (e^{ix} - e^{-ix})/2ix$ と書けることを利用している。被積分関数を $e^{ix}/2ix$ と $e^{-ix}/2ix$ に分解すると、ともに $x = 0$ で1位の極をもつ関数となる。積分区間 $(-\infty, \infty)$ は極を通過するので、その極の近傍を除外して積分する。すなわち、コーシー主値を利用する。第1項の積分には、負の実軸 C_- , 正の実軸 C_+ , 反時計回りに微小半円に沿って極を回避する経路 C_r , 無限大の半径の上側半円 C_{+R} に沿った積分で周回する経路をとる。この経路をとれば、積分路の内部に極が存在しないので積分はゼロになる。すなわち、

$$\left(\int_{C_+ + C_-} + \int_{C_r} + \int_{C_{+R}} \right) \frac{e^{ix}}{2ix} dx = 0,$$

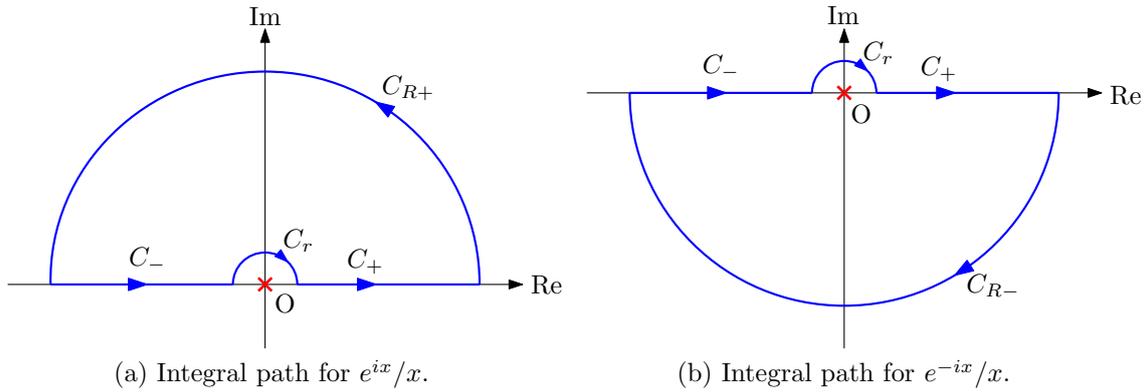


図 3.1: $\sin x/x$ コーシー主値の積分路

である。そのうち、無限遠 C_{+R} に沿った積分はゼロである。一方、被積分関数の $x = 0$ における留数が $1/2i$ なので、ジョルダンの補助定理により C_r に沿った積分は $\pi/2$ となる。原点の近傍を除く実軸 $C_- + C_+$ 上の積分が、区間 $(-\infty, \infty)$ の積分に対するコーシー主値を与えるので、

$$\text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{2ix} dx = \frac{\pi}{2},$$

となる。なお、 $e^{ix}/2ix$ の積分について、上側半円でなく下側半円を積分路としてとると、積分が発散するので議論が困難になることに注意が必要である。一方、第2項 $e^{-ix}/2ix$ の積分では、上側半円を積分路とすると積分が発散するので、下側半円を積分路として選ぶ。第1項と同様に積分を計算すると、コーシー主値の意味で、

$$\text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{2ix} dx = -\frac{\pi}{2},$$

が得られる。これらの結果を組み合わせると、

$$\text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

となるのだが、被積分関数について $x = 0$ が除去可能な特異点なので、コーシー主値でない通常の積分も同じ値をもつことができ、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi,$$

を結論づけることができる。

極をずらして積分 実軸に沿った sinc 関数の積分には、極を微小量ずらして積分路が極を通過することを回避する手法がある。つまり、 $\sin x/x$ の代わりに $\sin x/(x - i\varepsilon)$ を被積分関数とするのだ。なお、 ε は正の微小量である。前に説明した手順のように、被積分関数を $e^{ix}/(x - i\varepsilon)$ と $e^{-ix}/(x - i\varepsilon)$ に分けるのだ。分割した被積分関数について、前者の積分経路

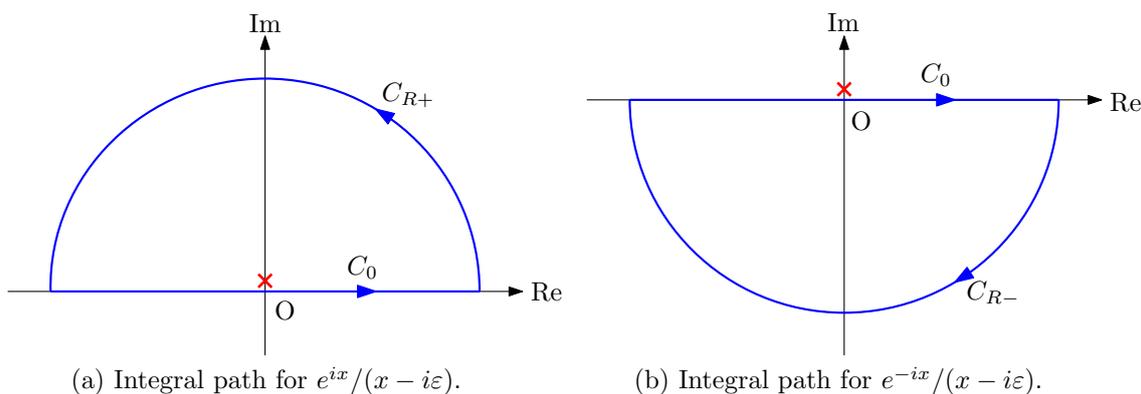


図 3.2: $\sin x/(x - i\varepsilon)$ の積分路

を図 3.2 (a), 後者の積分経路を図 3.2 (b) のように設定する。このように積分路を設定するのは, コーシー主値を考えたときと同じである。つまり, 被積分関数 $e^{ix}/(x - i\varepsilon)$ では, 上側半円 C_{R+} で積分がゼロになるので, 周回積分が実軸上の積分と等しくなるからだ。一方, 被積分関数 $e^{-ix}/(x - i\varepsilon)$ では, 下側半円 C_{R-} で積分がゼロになるので, 周回積分が実軸上の積分と等しくなる。

上で設定した積分路に基づいて積分を実行してみよう。積分路が極を横切らなくなったので積分計算が簡単になった。上側半円を含む経路 $C_0 + C_{R+}$ は被積分関数の極 $x = i\varepsilon$ を取り囲む。被積分関数 $e^{ix}/(x - i\varepsilon)$ の留数が 1 なので周回積分は $2\pi i$ となる。一方, 下側半円は極を囲まないで被積分関数 $e^{ix}/(x - i\varepsilon)$ の周回積分はゼロとなる。そのため, $\sin x/(x - i\varepsilon)$ の積分は,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x - i\varepsilon} dx &= \frac{1}{2i} \left(\int_{C_0 + C_{R+}} \frac{e^{ix}}{x - i\varepsilon} dx + \int_{C_0 + C_{R-}} \frac{e^{-ix}}{x - i\varepsilon} dx \right) \\ &= \frac{2\pi i + 0}{2i} = \pi, \end{aligned}$$

のように計算される。

実数関数による計算 ここでは複素数を使用せずにアプローチしてみよう。それには, $e^{-\lambda x}$ を λ について区間 $(0, \infty)$ で積分すると $1/x$ となることを利用する。すなわち, $\sin x/x$ の積分を,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin x d\lambda dx, \quad (3.8)$$

のように変形することでアプローチするのだ。この積分を計算するにあたり, 積分の順序を入れ替え, x についての積分を先に実行することにする。被積分関数 $e^{-\lambda x} \sin x$ の積分は, 部分積分を 2 回だけ繰り返すことによって,

$$\lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx = 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin x dx,$$

なる関係が得られる。この関係式から,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin x \, dx = \frac{1}{1 + \lambda^2},$$

が得られる。この積分結果を (3.8) に代入すると,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{\pi}{2},$$

が得られる。

3.1.4 Sinc 関数べき乗の積分

前項で計算した sinc 関数の積分の発展形として, sinc 関数のべき乗, すなわち, $(\sin x/x)^n$ の積分公式を紹介しておこう。その積分は

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \, dx = \frac{\pi}{2^n (n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1}, \quad (3.9)$$

のように計算できる。なお, 総和の上限 $\lfloor n/2 \rfloor$ は, $n/2$ の整数部を与える。具体的な指数 n を与えると, この積分は下表のような値をとる。

表 3.1: 区間 $(0, \infty)$ における $(\sin x/x)^n$ の積分

n	Value	n	Value
1	$\pi/2$	2	$\pi/2$
3	$3\pi/8$	4	$\pi/3$
5	$115\pi/384$	6	$11\pi/40$
7	$5887\pi/23040$	8	$151\pi/530$
9	$259723\pi/1146880$	10	$15619\pi/72576$
11	$381773117\pi/1857945600$	12	$655177\pi/3326400$

公式 (3.9) を導出するにはオイラーの関係式 $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ を利用する。つまり, ここで計算すべき積分は,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(2ix)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x},$$

である。被積分関数が極を実軸上にもつため, 前項で紹介したように, 極を微小に虚数方向にずらし,

$$\int_C \left(\frac{\sin x}{x - i\varepsilon} \right)^n \, dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2i)^n} \binom{n}{k} \int_C \frac{e^{i(n-2k)x}}{(x - i\varepsilon)^n} \, dx, \quad (3.10)$$

のように積分を実行する。積分路 C は、 $n - 2k \geq 0$ のとき実軸と無限遠の上側半円であり、そうでないばあに実軸と無限遠の下側半円となるように選ばれる。そのような積分路の設定では、 $n - 2k \geq 0$ のときのみで積分路が極を取り囲むことがわかる。逆に、 $n - 2k < 0$ では、極が積分路の外側に存在する。つまり、この積分は $n - 2k \geq 0$ のみを取り扱えばよい。

積分 (3.10) の計算に留数定理を用いる。被積分関数 $f(x) = e^{i(n-2k)x}/(x - i\varepsilon)^n$ が $x = i\varepsilon$ に n 位の極をもっている。そのように n 位の極をもつ関数の留数は、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{x=i\varepsilon} f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{x \rightarrow i\varepsilon} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x - i\varepsilon)^n f(x) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{x \rightarrow i\varepsilon} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{i(n-2k)x} = \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} (n-2k)^{n-1}, \end{aligned}$$

のように計算できる。この留数を用いて、留数定理にしたがい積分を実行すると、

$$\int_C \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n dx = \frac{2\pi}{2^n(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1}, \quad (3.11)$$

が得られる。

3.1.5 $(1 - x^2)^{1/2} \log x / (x^2 + b)$ の積分

この積分は被積分関数を複素数に拡張し、複素関数における留数定理を利用することによって計算できる。その結果は、

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+b} \log x \, dx = -\frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{1+b}{b}} \log \frac{\sqrt{b} + \sqrt{1+b}}{\sqrt{b}} - \log 2 \right), \quad (3.12)$$

となる。この積分をさらに一般化した公式として、

$$\int_0^\alpha \frac{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{x^2 + \beta^2} \log x \, dx = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \log \frac{\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha\beta} + \log \frac{\alpha}{2} \right), \quad (3.13)$$

を挙げておこう。本稿ではこの一般化した公式を導出する。

導出過程 被積分関数を $f(x)$ とおいて、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{x^2 + \beta^2} \log x = \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \log x \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (x^2 + \beta^2)}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \log x \\ &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \log x}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \frac{\log x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

のように変形しておく。ここで、被積分関数の第1項と第2項に関して、

$$f_1(x) = \frac{\log x}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}}, \quad f_2(x) = \frac{\log x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

なる関数を定義しておく。つまり、 $f(x) = (\alpha^2 + \beta^2)f_1(x) - f_2(x)$ となるように被積分関数を分解しておく。それらの要素を個別に積分し、最後に合成することによって積分を完成させる。

第2項の積分 第2項の方が簡単なので、第2項から積分する。この積分は、

$$\int_0^\alpha \frac{\log x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2} \log \frac{\alpha}{2},$$

のように計算される。この積分は次のように計算していく。

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f_2(x) dx &= \int_0^\alpha \frac{\log(x/\alpha) + \log \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx \\ &= \int_0^\alpha \frac{\log(x/\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx + \int_0^\alpha \frac{\log \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\log u}{\sqrt{1 - u^2}} du + \frac{\pi}{2} \log \alpha \\ &= \int_0^{\pi/2} \log(\sin t) dt + \frac{\pi}{2} \log \alpha \\ &= -\frac{\pi}{2} \log 2 + \frac{\pi}{2} \log \alpha = \frac{\pi}{2} \log \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

第3行目への数式変形では $u \equiv x/\alpha$ なる置き換えを適用し、第4行目への数式変形では $\sin t \equiv u$ なる置き換えを適用した。最終行への変形には、 $\log(\sin t)$ の級数表現を利用したが、その級数は本文の後に補足情報として記述する。

第1項の積分 この積分の実行はかなり厄介だ。第1項の積分には図3.3に描く積分路を設定し、留数定理を利用する。図に示す $\pm\alpha$ は $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ の分岐点だ。一方、 $\pm i\beta$ は被積分関数 $f_1(x)$ の極である。なお、原点や分岐点周りの積分路は限りなく小さな半径の円弧であるとする。実軸と平行な積分路は、ほぼ実軸上を走る。大きな円弧の積分路 C_R は無限遠を回る円周とする。その積分路のうち、実際に計算したいのは P_α に沿った積分のみだが、後に説明するように、図3.3の積分路は対象となる積分を効果的に特定できる積分路だ。記述を簡単にするため、被積分関数の分母を $g_1(x) \equiv (x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ とする。つまり、考えるべき被積分関数は、

$$f_1(x) = \frac{\log x}{g_1(x)},$$

である。積分路での被積分関数の振る舞いは、分子と分母の動きを慎重に追跡して考えておかなければならない。対数 $\log x$ の主値を $\text{Log } x$ と書くことにすれば、被積分関数の分子は P_α と P_R では $\text{Log } x$ だが、 $P_{-\alpha}$ と P_{-R} では $\text{Log } |x| + \pi i$ となる。分母については、平方根 $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ が複素数の $1/2$ 乗を与える関数として解釈する。平方根をそのように解釈すると、被積分関数 $f_1(x)$ は、

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\text{Log } |x| + \pi i}{i(x^2 + \beta^2)\sqrt{x^2 - \alpha^2}} & (x \in P_{-R}), \\ \frac{\text{Log } |x| + \pi i}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} & (x \in P_{-\alpha}), \\ \frac{\text{Log } x}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} & (x \in P_\alpha), \\ -\frac{\text{Log } x}{i(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} & (x \in P_R), \end{cases}$$

のように区別することができる。積分路 P_{-R} の P_R 被積分関数が (5) のようになることはいささかの考察が必要だ。その考察については、本回答の最後で説明します。被積分関数

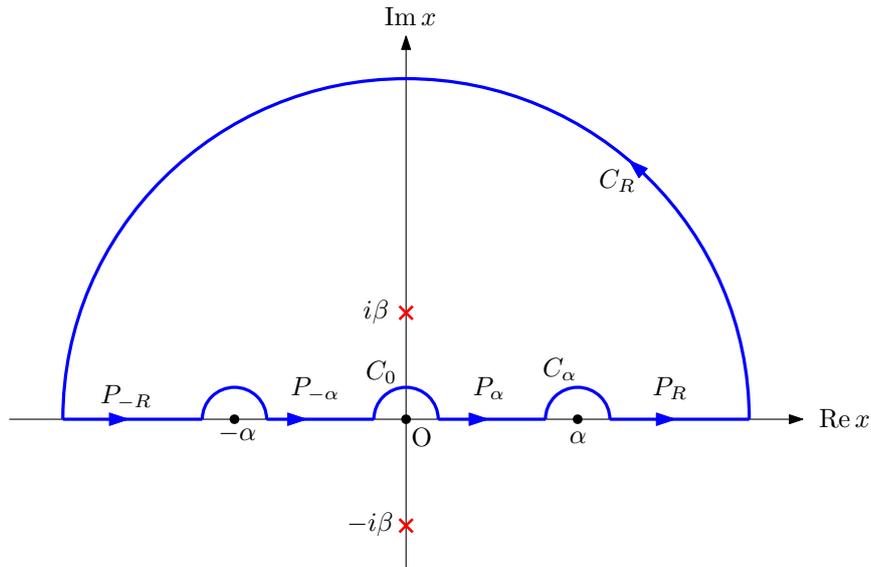


図 3.3: 設定した積分路

は $x \rightarrow \infty$ において、 x^{-2} より速くゼロに収束するので、 $R \rightarrow \infty$ の極限において C_R に沿った積分はゼロになる。この考察の結果として、 $f_1(x)$ を図 3.3 に描く積分路で周回積分をすると、

$$\begin{aligned} \oint_C f_1(x) dx &= \int_0^\alpha \frac{2 \text{Log } x dx}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \\ &+ \int_0^\alpha \frac{\pi i dx}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \int_\alpha^\infty \frac{\pi i dx}{i(x^2 + \beta^2)\sqrt{x^2 - \alpha^2}}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

のように計算することができる。うまい具合に $C_{R\alpha}$ と $C_{\alpha R}$ について $\text{Log } x$ を含む積分が相殺してくれている。先ほど「効果的な積分路」と呼んだのはこのような性質をもつからだ。なお、右辺の第2項と第3項は、置換積分を実行することにより、

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} &= \frac{\pi}{2\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \\ \int_\alpha^\infty \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{x^2 - \alpha^2}} &= \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \log \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta}{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

のように計算できます。これらを (5) に代入すると、

$$\begin{aligned} \oint_C f_1(x) dx &= 2 \int_0^\alpha \frac{\log x dx}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \\ &\quad + \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\pi^2 i + \pi \log \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta}{\alpha} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

が得られる。関数 $f_1(x)$ の積分には、留数定理を利用できる。図1に描いた積分路は二つの極のうち $i\beta$ を取り囲むので、 $x = i\beta$ における留数を利用する。留数は、

$$\text{Res}_{x=i\beta} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow i\beta} (x - i\beta) f_1(x) = \frac{\log \beta + \pi i/2}{2i\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

のように計算できる。留数 (7) を利用して周回積分を書き出すと、

$$\oint_C f_1(x) dx = \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (\pi \log \beta + \pi^2 i),$$

が得られる。積分 (6) と (8) は同じ積分であるので、等号で結ぶと、

$$\int_0^\alpha \frac{\log x dx}{(x^2 + \beta^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = -\frac{\pi}{2\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \log \frac{\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha\beta},$$

を導出することができる。

まとめ 最終的な積分値を得られる準備が整いました。被積分関数を (3) のように分解し、第2項と第1項を個別に積分してきたので、その結果を結合する。

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f(x) dx &= \int_0^\alpha [(\alpha^2 + \beta^2)f_1(x) - f_2(x)] dx \\ &= (\alpha^2 + \beta^2) \int_0^\alpha f_1(x) dx - \int_0^\alpha f_2(x) dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \log \frac{\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha\beta} + \log \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

これで冒頭に書いた一般化した積分公式 (2) が得られた。この公式に対し、 $\alpha = 1$ と $\beta = b^2$ を代入すれば本質問の回答 (1) が得られる。

補足 1 $\log(\sin x)$ の級数展開にはオイラーの関係式を利用する。 $\sin x = e^{ix}(1 - e^{-2ix})/2i$ であることから,

$$\begin{aligned}\log(\sin x) &= ix - \log 2 - \frac{\pi i}{2} + \log(1 - e^{-2ix}) \\ &= ix - \log 2 - \frac{\pi i}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2ikx}}{k},\end{aligned}\quad (3.20)$$

のように書くことができます。一方, $\sin x = -e^{-ix}(1 - e^{2ix})/2i$ とも書くことができるので,

$$\begin{aligned}\log(\sin x) &= -ix - \log 2 - \frac{\pi i}{2} + \log(1 - e^{2ix}) \\ &= -ix - \log 2 + \frac{\pi i}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2ikx}}{k},\end{aligned}\quad (3.21)$$

も成立します。得られた (a1) と (a2) を組み合わせると,

$$\log(\sin x) = -\log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k},$$

が得られる。これが $\log(\sin x)$ の級数表現だ。これを区間 $[0, \pi/2]$ で積分すると, 右辺に書かれた $\cos 2kx$ の級数はゼロになるので,

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

が得られる。その結果, (4b) が計算できます。

補足 2 関数 $f_1(x)$ の積分に対して, 各積分区間における $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ の取り扱いが重要だ。この取り扱い, 具体的には, 複素数としての偏角の取り扱いが正確でなければ, 正しく積分が計算できない。条件 $-\alpha \leq x \leq \alpha$ では, $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ が実数ですが, それを逸脱すると虚数になる。そのとき, $\pm\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ のうち, どの符号をとるかを定めなければならない。符号を正しく選択するには, 遷移状態に位置する積分路を追跡することが有効だ。図 1 の積分路 C_α に沿った遷移を確認しよう。その積分路に沿った x の動きは, $x = \alpha(1 - \varepsilon e^{-i\theta})$ とするのが簡単だ。ここで, ε は無限小であり, $\alpha\varepsilon$ が積分路の半径だ。位相 θ をゼロから π まで動かすと対象の平方根が実数から虚数へ遷移する。なお, 指数を $-i\theta$ としたのは, 積分路が上側複素平面を通るからだ。これを $i\theta$ とすると, 積分路はしたが複素平面を通る。平方根を具体的に計算してみると,

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha^2 - x^2} &= (\alpha^2 - x^2)^{1/2} = \alpha [1 - (1 - \varepsilon e^{-i\theta})^2]^{1/2} \\ &= \alpha [1 - (1 - 2\varepsilon e^{-i\theta})]^{1/2} \\ &= \sqrt{2\varepsilon} \alpha e^{-\theta/2},\end{aligned}\quad (3.22)$$

が得られる。遷移が完了した時点で $\theta = \pi$ となっているので、対象とする平方根の偏角は $-\pi/2$ となる。したがって、 $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ は $x > \alpha$ では $-i\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ として取り扱うべきだと導かれました。一方、 $x < -\alpha$ については、 $x = -\alpha(1 - \varepsilon e^{i\theta})$ として同様の評価をすればよい。その結果、 $x < -\alpha$ では、 $i\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ を選択すべきと結論できる。

3.1.6 $x^{-x}(1-x)^{-(1-x)} \sin \pi x$ の積分

複素関数による積分を利用すると、非常に難解な積分が計算できる場合がある。その例として、

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x^x (1-x)^{1-x}} dx = \frac{\pi}{e}, \quad (3.23)$$

を紹介しよう。

この積分は、山形ゆうじ氏のブログ (<https://ameblo.jp/titchmarsh/entry-12579551016.html>) で紹介されている。ブログの記事をもとに上記積分を実行してみる。この積分は、複素関数による閉曲面の経路積分を利用する。回答を導くための複素関数をとって、

$$f(z) = \frac{e^{\pi iz}}{z^z (1-z)^{1-z}}, \quad (3.24)$$

なる関数を用いる。積分経路として、下図に示す経路をとる。この積分路は、犬が嗜好品(?)として好む「骨」の形状をしていることから、dogbone contour と呼ばれる。積分路 C_0 は $z = 0$ を中心とする微小円周を時計回りにたどる経路、 C_1 は $z = 1$ を中心とする微小円周を時計回りにたどる経路である。一方、 L_+ が実数軸上 (厳密には、実数軸のわずかに上方) を 0 から 1 まで移動する経路、 L_- が実数軸上 (厳密には、実数軸のわずかに下方) を 1 から 0 まで移動する経路である。このような設定において、

$$\int_C f(z) dz = \left(\int_{C_0} + \int_{L_+} + \int_{C_1} + \int_{L_-} \right) f(z) dz, \quad (3.25)$$

を計算する。

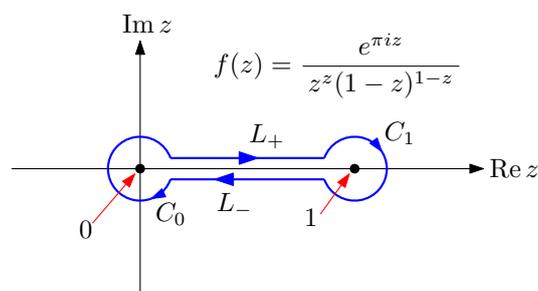


図 3.4: 被積分関数 $x^{-x}(1-x)^{-(1-x)}e^{\pi ix}$ の積分路

積分路の評価 図示された積分路で積分するとは書いたが、その積分が有効かどうかを確認しておく。具体的には、積分路 L_+ から始めて $z = 0$ と $z = 1$ を回って元に戻ったときに、関数値が変化していないことを確認する。関数値が変化した場合、リーマン面のどこかに遷移したことになり、周回積分が成立しない。その振る舞いを調べるには、 z^z の振る舞いを調べる。極座標表示で、 $z \equiv re^{i\theta}$ とおいて、 z^z を計算すると、

$$\begin{aligned} z^z &= e^{z \log z} = e^{re^{i\theta} \log(re^{i\theta})} \\ &= e^{re^{i\theta}(\log r + i\theta)} \\ &= e^{r(\cos \theta + i \sin \theta)(\log r + i\theta)} \\ &= e^{r(\log r \cos \theta - \theta \sin \theta) + i(\log r \sin \theta + \theta \cos \theta)}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

が得られる。実軸上の $z = x$ における z^z を関数値として、積分路 L_+ 上の値を $(x^x)_+$ 、 L_- 上の値を $(x^x)_-$ と書くことにする。 L_+ 上では、 $r = x$ 、 $\theta = 0$ を (3.26) に代入すると、

$$(x^x)_+ = x^x,$$

という当然の結果が得られる。それに対し、 L_- 上では $r = x$ 、 $\theta = 2\pi$ に相当するので、(3.26) を計算すると、

$$(x^x)_- = x^x e^{2\pi i x},$$

が得られる。一方、変数が $z = 0$ のみを周回する過程で、 $z = 1$ から見た偏角はゼロから始まり、ゼロに戻ってくるので $(1-x)^{1-x}$ は変化しない。したがって、設定した被積分関数は、 $z = 0$ をまわって L_+ から L_- に移動した場合、

$$\begin{aligned} f_-(x) &= \frac{e^{i\pi x}}{(x^x)_-(1-x)^{1-x}} = \frac{e^{i\pi x}}{x^x e^{2\pi i x} (1-x)^{1-x}} \\ &= \frac{e^{-i\pi x}}{x^x (1-x)^{1-x}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

となります。さらに、 $z = 1$ を回った場合、 $z = 0$ から見た偏角が変化せず、 $z = 1$ から見た偏角のみが変化します。先ほどの計算からの、

$$((1-x)^{1-x})_{++} = (1-x)^{1-x} e^{2\pi i(1-x)},$$

となるのが容易に類推できる。したがって、図示した積分路をたどって元の位置に戻ってきたとき、関数値は、

$$\begin{aligned} f_{++}(x) &= \frac{f_-(x)}{e^{2\pi i(1-x)}} = \frac{f(x)}{e^{2\pi i x} e^{2\pi i(1-x)}} \\ &= \frac{f(x)}{e^{2\pi i}} = f(x), \end{aligned} \quad (3.28)$$

となるので、もとの値に戻ることがわかる。したがって、図示された積分路は閉曲線とみなすことができる。

各セグメントの積分値 上に記述した積分 (3.24) のうち、経路 C_0 の積分はゼロになる。なぜなら、 $z \rightarrow 0$ における極限として $z^z \rightarrow 1$ だからだ。同様に、被積分関数は、 $z \rightarrow 0$ における極限として $f(z) \rightarrow 1$ となる。積分路 C_0 の半径をゼロに近づけたとき、被積分関数は有限の値をもち、しかも、積分路の長さがゼロに近づくと、 C_0 での積分はゼロとなる。分母が $z = 1/2$ について対称であるので、 $z = 1$ についても同様の考察が成り立つ。したがって、積分路 C_1 での積分もゼロとなる。積分路 L_+ での積分は、形式的に書くと、

$$\int_{L_+} f(z) dz = \int_0^1 \frac{e^{\pi i x}}{x^x (1-x)^{1-x}} dx, \quad (3.29)$$

です。この経路では積分変数が実数であることを意味して、積分変数を x とした。それに対して、積分路 L_- では、上で考察したように関数値が (4) で与えられることがわかっている。したがって、 L_- に沿った積分は、

$$\begin{aligned} \int_{L_-} f(z) dz &= \int_1^0 \frac{e^{-\pi i x}}{x^x (1-x)^{1-x}} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{e^{-\pi i x}}{x^x (1-x)^{1-x}} dx, \end{aligned} \quad (3.30)$$

となる。

無限遠の留数を利用した積分計算 Dogbone contour に沿った周回積分は、

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^1 \frac{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}{x^x (1-x)^{1-x}} dx \\ &= 2i \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x^x (1-x)^{1-x}} dx, \end{aligned} \quad (3.31)$$

のようにも書くことができます。つまり、周回積分を $1/2i$ 倍すれば質問の積分が特定できる。周回積分をするにあたり、無限遠での留数に着目する。無限遠の留数を利用すると、周回積分は、

$$\int_C f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z),$$

となる。積分路が時計回りなので、負の符号が付加されている。無限遠での留数を特定するため、 $1/z$ のべき級数となるように被積分関数を変形していきます。そのように計算すると、

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{\pi i z}}{z^z (1-z)^{1-z}} = \frac{e^{\pi i z}}{z^z z^{1-z} (1/z - 1)^{1-z}} \\ &= \frac{e^{\pi i z}}{(-1)^{1-z} z (1 - 1/z)^{1-z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\pi iz}}{e^{-\pi i(1-z)}z(1-1/z) \cdot (1-1/z)^{-z}} \\
&= -\frac{1}{ez(1-1/z)} \\
&= -\frac{1}{ez} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

のように変形できる。この数式変形において、第2行目では $1/z - 1$ を $1 - 1/z$ の形に書き換えるため、 $(-1)^{1-z}$ を括り出した。第3行目では $-1 = e^{-\pi i}$ を利用し、第4行目では $z \rightarrow \infty$, すなわち、無限遠において $(1 + 1/z)^z \rightarrow e$ となること (自然対数の底の定義) を利用した。そのため、(3.32) は無限遠のみで成立する関係式である。無限遠での留数は、無限遠における関数の振る舞いを調べればよいので、このような数式変形が妥当だ。このような数式変形から、無限遠での留数は $-1/e$ であることがわかる。この留数を利用すると、dogbone に沿った周回積分は、

$$\int_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{e}, \tag{3.33}$$

のように計算される。したがって、質問の積分は、

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x^x(1-x)^{1-x}} dx = \frac{\pi}{e},$$

であることがわかった。したがって、冒頭に書いた回答が得られる。

補足 被積分関数 $f(z)$ の無限遠での留数の導出として、山形ゆうじ氏の資料の導出法を書いておく。方向性としては、 $1/z$ のべき級数となるように数式変形で無限遠での留数を特定します。

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{\pi iz}}{z^z(1-z)^{1-z}} \\
&= e^{\pi iz} \exp \left[-z \log z - (1-z) \log(1-z) \right] \\
&= e^{\pi iz} \exp \left[-z \log z + \pi i(1-z) - (1-z) \log(z-1) \right] \\
&= e^{\pi iz} \exp \left[-z \log z + \pi i - \pi iz - (1-z) \log(z-1) \right] \\
&= -\exp \left[-z \log z - (1-z) \log(z-1) \right] \\
&= -\exp \left[-z \log z - (1-z) \log z - (1-z) \log \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right] \\
&= -\exp \left[-\log z - (1-z) \log \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{z} \exp \left[(z-1) \log \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right].
\end{aligned}$$

ここから先は、対数関数をテイラー級数展開して計算を進める。

$$\begin{aligned}
 f(z) &= -\frac{1}{z} \exp \left[-(z-1) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \cdots \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{z} \exp \left(-1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{12z^3} + \cdots \right) \\
 &= -\frac{1}{ez} \exp \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{12z^3} + \cdots \right) \\
 &= -\frac{1}{ez} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

この計算結果によって、無限遠での留数が $-1/e$ であることがわかる。上で導出した無限遠のみで成立する関係式とは異なり、山形ゆうじ氏の手法では、いかなる z に対しても成立するので厳密性がある。とはいえ、この数式変形のように多くの計算手順が必要となる。

3.1.7 距離の期待値

一辺の長さが1の正方形の中に、ランダムに置かれた二つの点があるとき、それらの距離の平均値は、

$$d = \frac{2 + \sqrt{2} + 5 \log(\sqrt{2} + 1)}{15}, \tag{3.35}$$

となる。

一様乱数によって選ばれた2点の座標を $[x_0, y_0], [x_1, y_1]$ とすれば、2点間の距離の平均値は、

$$d = \int_0^1 dx_0 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dy_0 \int_0^1 dy_1 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}, \tag{3.36}$$

なる積分で計算できる。四重積分となるこのような積分を解析的に計算できるように見えないかもしれない、工夫をすると解析的に積分できる。

二重積分へ変形 積分 (3.36) は四重積分だが、二重積分に書き換えることが可能だ。この積分は、

$$d = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2} p(x) p(y) dx dy, \tag{3.37}$$

のように書き換えることができる。ここで、 x は2点間の x 座標の差、 y は2点間の y 座標の差である。そのように考えると、 x も y も $[-1, 1]$ の範囲で値をとる。さらに、 $p(x)$ は2

点間の座標成分の差が $x_0 - x_1 = x$ となる確率である。当然, y 座標の差も同じ確率にしたがう。その確率は,

$$p(x) = \begin{cases} x + 1 & (-1 \leq x < 0) \\ 1 - x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (3.38)$$

となる。確率密度関数 $p(x)$ は, $x_0 = x$ における確率密度 $p_0(x)$ からつくることができる。当然, x_1 も同一の確率密度 $p_0(x)$ にしたがう。例えば, $x_0 = x$ で $x_1 = y$ となる条件の確率密度は $p_0(x)p_0(y)$ となる。ここで, $x - y = a$ となる確率密度は, $x = y + a$ の関係を満たす確率変数の組み合わせで積分すればよいので,

$$p(a) = \int_{x-y=a} p_0(x)p_0(y) dx dy = \int_0^1 p_0(y+a)p(y) dy,$$

となる。この積分は畳み込み (convolution) である。確率密度 $p_0(x)$ が範囲 $[0, 1]$ で 1 となり, それ以外で 0 である関数なので, 畳み込み演算から (3.38) が導かれる。さらに, 確率密度関数 $p(x)$ の対称性に注意すると, 積分 (3.37) は,

$$d = 4 \int_0^1 \int_0^1 (1-x)(1-y)\sqrt{x^2+y^2} dy dx, \quad (3.39)$$

のように書き換えられる。この積分を解析的に実行できれば厳密値を導出することができる。

内側の積分の実行 積分 (3.39) の内側の積分を実行してみよう。

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-y)\sqrt{x^2+y^2} dy &= \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2} dy - \int_0^1 y\sqrt{x^2+y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \left[y\sqrt{x^2+y^2} + x^2 \log(y + \sqrt{x^2+y^2}) \right]_0^1 - \frac{1}{3} \left[(x^2+y^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{x^2}{2} \left[\log(1 + \sqrt{1+x^2}) - \log x \right] - \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} + \frac{x^3}{3}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

第 1 行目から第 2 行目への計算を省略していますが, $y = x \cosh u$ のように, 積分変数を y から u に置き換えると第 2 行目が得られます。

外側の積分の実行 引き続き, (3.40) に $1-x$ を乗じて積分しよう。その積分はボリュームが大きいので, 要素ごとに個別に積分し, その後に結果を集約することとする。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})}{2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

前に述べたように, この積分は $x = \sinh u$ なる置き換えによって計算できる。

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} \left[(1+x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}. \quad (3.42)$$

この計算も同様に、 $x = \sinh u$ なる置き換えによって計算できる。

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (1+x^2)^{3/2} dx &= \int_{x=0}^1 \cosh^4 u \, du \\
 &= \int_{x=0}^1 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cosh 2u + \frac{1}{8} \cosh 4u \right) du \\
 &= \left[\frac{3}{8}u + \frac{1}{4} \sinh 2u + \frac{1}{32} \sinh 4u \right]_{x=0}^1 \\
 &= \left[\frac{3}{8} \log(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{8} (5 + 2x^2) \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{3 \log(1 + \sqrt{2}) + 7\sqrt{2}}{8}.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

積分 (3.43) も $x = \sinh u$ なる置き換えで計算できるが、いささか複雑なので計算過程を書いておいた。第2行目への数式変形は双曲線関数の半角の公式を繰り返して展開した。その後は機械的に積分を実行する。

$$\int_0^1 x(1+x^2)^{3/2} dx = \left[\frac{1}{5} (1+x^2)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-1}{5}. \tag{3.44}$$

積分 (3.44) も同様に $x = \sinh u$ なる置き換えで計算できるが、この積分は容易に計算できるので計算過程を省略した。

$$\int_0^1 (1-x)x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{20}. \tag{3.45}$$

積分 (3.45) については説明は不要だろう。対数を含む項が残った。それらの積分は、いささか厄介な計算が必要である。

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 x^2 \log(1 + \sqrt{1+x^2}) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \log(1 + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1 + \sqrt{1+x^2}) \sqrt{1+x^2}} \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \log(1 + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_{x=0}^1 \frac{\sinh^4 u}{1 + \cosh u} du \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \log(1 + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_{x=0}^1 (\cosh u - 1) \sinh^2 u du \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \log(1 + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 - \left[\frac{1}{9} \sinh^3 u + \frac{1}{12} \sinh 2u - \frac{u}{6} \right]_{x=0}^1 \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \log(1 + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. -\frac{x^3}{9} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{6} - \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{\log(1+\sqrt{2})}{6} - \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{2}}{6}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x^3 \log(1+\sqrt{1+x^2}) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} \log(1+\sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^5 dx}{(1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\
&= \left[\frac{x^4}{4} \log(1+\sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 \frac{\sinh^5 u}{1+\cosh u} du \\
&= \left[\frac{x^4}{4} \log(1+\sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 - \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 (\cosh u - 1) \sinh^3 u du \\
&= \left[\frac{x^4}{4} \log(1+\sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 \\
&\quad - \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 \cosh u \sinh^3 u du + \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 \sinh u (\cosh^2 u - 1) du \\
&= \left[\frac{x^4}{4} \log(1+\sqrt{1+x^2}) \right]_0^1 \\
&\quad - \left[\frac{1}{16} \sinh^4 u \right]_{x=0}^1 + \left[\frac{1}{12} \cosh^3 u - \frac{1}{4} \cosh u \right]_{x=0}^1 \\
&= \left[\frac{x^4}{4} \log(1+\sqrt{1+x^2}) - \frac{x^4}{16} + \frac{(1+x^2)^{3/2}}{12} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{4} \right]_0^1 \\
&= \frac{\log(1+\sqrt{2})}{4} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{5}{48}. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

積分 (3.46) と (3.47) の計算には、第 1 行目で部分積分を適用した。その後は、これまでと同様に $x = \sinh u$ なる置き換えを利用した。残された項は、容易に積分ができ、

$$\int_0^1 x^2 \log x dx = \left[\frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 dx \right]_0^1 = -\frac{1}{9}, \tag{3.48}$$

$$\int_0^1 x^3 \log x dx = \left[\frac{x^4}{4} \log x - \frac{1}{4} \int_0^1 x^3 dx \right]_0^1 = -\frac{1}{16}, \tag{3.49}$$

を得ることができる。ここまでに計算した要素を集約すると d が得られる。実際に計算してみると、

$$d = 4 \left[\frac{\text{Eq.(3.41)} - \text{Eq.(3.42)}}{2} + \frac{\text{Eq.(3.46)} - \text{Eq.(3.47)}}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{\text{Eq.}(3.48) - \text{Eq.}(3.49)}{2} - \frac{\text{Eq.}(3.43) - \text{Eq.}(3.44)}{3} - \frac{\text{Eq.}(3.45)}{3} \right] \\
& = \frac{2 + \sqrt{2} + 5 \log(1 + \sqrt{2})}{15},
\end{aligned}$$

が得られる。これが、一様乱数によって得られた2点間の距離の平均値だ。冒頭で書いた結果と一致した。¶

3.2 微分方程式

3.2.1 ラプラスの方程式

電磁気学では、静電場において静電ポテンシャル ϕ に関するポアソンの方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ に対して、

$$\phi(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0},$$

が原点に存在する点電化による静電ポテンシャルが解として得られる。そのように、電磁気学のテキストに書かれているのだが、微分方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ からどのような論理で q や ϵ_0 が現れるのだろうか？ その疑問に関する Quora の質問が次の質問である。

なぜ $\nabla^2(1/|\mathbf{r}|)$ (ただし、 \mathbf{r} はベクトル) を3次元空間ですべての空間で体積分すると、 $|\mathbf{r}| \neq 0$ のとき0であるのに、定義されてなさそうな、 $|\mathbf{r}| = 0$ を含めると -4π になるのですか？

上記の質問に答えたうえで、静電ポテンシャルに関する疑問を考察しよう。原点からの距離の逆数のラプラシアン $\nabla^2(1/r)$ は、に原点以外ではゼロである。そのため、原点以外で体積分(三重積分)してもゼロになる。しかし、原点まで含めるように書くと、ラプラシアンは、

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{1}$$

となる。だから、体積分した結果が -4π となる。ここで、3次元のデルタ関数は、 $\mathbf{r} = [x, y, z]$ としたとき、 $\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ とする。ここでは、(1)を導出する。

ベクトル \mathbf{r} を成分分解して成分ごとに偏微分すると、原点以外で $\nabla^2(1/r) = 0$ となることが導かれるだけだ。ここでは、 $1/r$ をフーリエ変換してみよう。後の記述の便宜のため、

$f(\mathbf{r}) = 1/r$ と書くことにしよう。これをフーリエ変換し、波数 $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]$ を変数とするスペクトル $F(\mathbf{k})$ を計算する。求めるスペクトル:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-ik_x x} dx \cdot e^{-ik_y y} dy \cdot e^{-ik_z z} dz, \\ &= \int \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2)$$

は、積分計算にあたり極座標に表すと便利だ。座標のとり方は、波数ベクトル \mathbf{k} を対称軸 (通常 z 軸に相当) とし、位置ベクトルとなす角度を θ とする。この θ を天頂角とし、対象軸周りに回転させた角度 ϕ を方位角と設定して積分を計算する。そのように計算していくと、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k}) &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r \sin \theta \cdot e^{-ikr \cos \theta} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta r \sin \theta \cdot e^{-ikr \cos \theta} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dr \int_{-ikr}^{ikr} \frac{e^u}{ik} du = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ik} dr \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin kr}{k} dr, \end{aligned} \quad (3)$$

のように計算を進めることができる。しかし、(3) を r について積分しても結果が収束しない。その種の積分が収束するとは、積分域を $(0, R)$ としたとき、 $R \rightarrow \infty$ の極限で積分が収束することを意味する。ところが、(3) は R の変化に対して振幅が一定で振動するので収束しないのだ。そこで、いささか怪しい手法であるが、被積分関数に窓関数 $e^{-\lambda r}$ を乗じ、緩やかに減少させてみる。ここで、 λ は非常に小さな実数であるとする。窓関数を乗じて積分して得られるスペクトルを $F_{\lambda}(\mathbf{k})$ としよう。そのスペクトルは、

$$F_{\lambda}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} \sin kr dr, \quad (4)$$

となる。この数式のうち、被積分関数 $e^{-\lambda r} \sin kr$ のみを抜き出して積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} \sin kr dr &= \frac{k}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} \cos kr dr \\ &= \frac{k}{\lambda^2} - \frac{k^2}{\lambda^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} \sin kr dr, \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。いうまでもなく、この計算には部分積分を2回繰り返した。この数式からだちに、

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda r} \sin kr dr = \frac{k}{k^2 + \lambda^2},$$

であることがわかる。積分結果 (5) を (4) に代入すると,

$$F_\lambda(k) = \frac{4\pi}{k^2 + \lambda^2},$$

が得られる。指数関数で減少するような窓関数を設定したので、積分が収束してくれた。ここで、 $\lambda \rightarrow 0$ の極限が求めるべきスペクトル $F(\mathbf{k})$ と考える。その思想に基づくと,

$$F(\mathbf{k}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2}, \quad (6)$$

であることがわかる。得られた数式 (7) の右辺が $1/r$ のフーリエ変換である。この結果は、 $1/r$ が,

$$\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d^2\mathbf{k} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d^3\mathbf{r},$$

のように逆フーリエ変換で表現できることを意味する。このように表現された関数のラプ
ラシアンを計算することは容易であり,

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{1}{2\pi^2} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k},$$

が得られる。この関数は,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{r} &= -4\pi \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x x} dk_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_y y} dk_y \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_z z} dk_z \\ &= -4\pi \delta(x) \delta(y) \delta(z) = -4\pi \delta^3(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

のように変形できる。この数式変形において、デルタ関数のフーリエ変換公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x),$$

を利用した。したがって、冒頭に示した数式 (1) が導出できた。¶

上記の証明から静電ポテンシャルに関するラプラスの方程式を考察しよう。上記の証明から直接的に主張できることは、ラプラスの方程式 $\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r})$ の解が,

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r},$$

であることだ。ここで、電磁気学におけるマクスウェルの方程式に立ち返ると、静電場では、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ との間に $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ なる関係がある。マクスウェルの方程式のうち、ガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ は、ポテンシャル ϕ を用いると、 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ なる形に書き換えられる。ここで、 $\rho(\mathbf{r})$ は空間に分布する電荷の電荷密度、 ϵ_0 は真空の誘

電率だ。原点に点電荷 q があるのみで、他に電荷が存在しないならば、 $\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r})$ が成り立つ。そのような考察から、原点に存在する点電荷 q による静電場が満たす方程式は、

$$\nabla^2\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta^3(\mathbf{r}), \quad (7)$$

となるわけだ。これまでの考察を総合すると、微分方程式 (7) の解が、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

であることが容易にわかる。冒頭で述べた q と ε_0 の出現に関しては、本来、(7) なる形で書かれるべき微分方程式が $\nabla^2\phi = 0$ と書かれていることに起因していたということだ。

第4章 一般力学

4.1 運動量と運動エネルギー

4.1.1 力積・仕事との関係

質量が m で、速度 v で運動する物体の運動量は mv で、運動エネルギーは $mv^2/2$ である。これらの量は、物体を静止状態からその速度の状態に変化させるまでの力積と仕事である。静止状態からの運動状態の変化は、物体に作用させた力によってもたらされ、その力の功績が運動量や運動エネルギーである。逆考えると、運動量や運動エネルギーは、衝突によって他の物体の運動状態を変化させる可能性を表すともいえる。

Quora 質問 力, エネルギー, 運動量の違いがよくわからず混乱している物理が苦手な高校生に, なるほど! と納得できる説明をしていただけますか?

運動エネルギー 運動エネルギーは、静止状態から現在の運動状態に至るまでの間に物体に作用した力が実行した仕事である。力学における「仕事」とは、物体に与えた力を、物体が動いた距離だけ積分していった量だ。例えば、10 N の力を加えて物体を 30 m だけ動かした場合、300 N・m、または、300 J の仕事をした、と表現する。逆の表現としては、エネルギーは、相互作用によってほかの物体に与えることができる影響を「仕事」に換算して表現した量である。その影響を見積もるには、静止状態から現在の運動状態に変化させるのに費やした仕事は運動エネルギーと考えるとよい。その考えに基づき、静止状態からぜんざいの運動状態に至るまでの仕事を計算すると、

$$\begin{aligned} E &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{x} \\ &= m \int \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot d\mathbf{v} = m \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2, \end{aligned}$$

が得られる。これが物体の運動エネルギーというわけだ。上記の数式変形は、等加速度運動などの特定の運動を仮定したものではなく、一般化した条件での計算であるので、この運動エネルギーは、現在の運動状態に至るまでの経緯には依存しないことになる。

運動量 運動量は、静止状態から現在の運動状態に至るまでの間に物体に作用した力の累積した量、すなわち、力積である。言い換えると、「力積」とは物体に与えた力を、作用した時間にわたって積算(積分)した量だ。例えば、10 N の力を 5 s 間にわたって与え続けたとき、力積は 50 N・s となる。運動量は、衝突によって他の物体に与えることができる力積だ。その影響を見積もる方法として、静止状態から現在の状態に変化させるのに要した力積が運動量とするわけだ。その考えに基づき、静止状態から現在の運動状態に至るまでの力積を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \mathbf{F} dt = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt \\ &= m \int d\mathbf{v} = m\mathbf{v}, \end{aligned}$$

が得られる。これが物体の運動量というわけだ。上記の数式変形は、等加速度運動などの特定の運動を仮定したものではなく、一般化した条件での計算であるので、この運動量は、現在の運動状態に至るまでの経緯には依存しないことになる。

4.1.2 運動量保存則

運動量保存則は、衝突の問題のように衝突の結果を解析する際に使用されることが多いかもしれないが、衝突の途中であっても運動量は保存されている。

Quora 質問 物体が衝突している間(前後ではなく)の運動量は保存されていますか?

質量 m_1 と m_2 の物体が衝突した場合を考えよう。座標系は重心系をとってみる。つまり、これら二つの物体の重心が静止しているように見えるような慣性系から観測することを想定する。簡単のため、両者の運動方向が x 軸方向であるように座標系が選ばれているとする。ここから先は、運動量は x 軸成分のみを考えることにしよう。質量 m_1 と m_2 の速度が、衝突前にそれぞれ、 V_1 と $-V_2$ だったとしよう。重心系をとっているので、

$$m_1 V_1 - m_2 V_2 = 0, \tag{1}$$

が成立する。二つの物体は、時刻 $t = 0$ で衝突を開始した仮定する。衝突は有限の時間だけ続いたとし、衝突によって、 m_1 は m_2 に力 $F(t)$ を作用させたとする。そのとき、作用反作用の法則によって、 m_2 は m_1 に力 $-F(t)$ を作用させることになる。衝突中の任意の時刻 t において、質量 m_1 の速度は、

$$v_1(t) = V_1 - \int \frac{F(t)}{m_1} dt, \tag{2}$$

であり、質量 m_2 の速度は、

$$v_2(t) = -V_2 + \int \frac{F(t)}{m_2} dt, \quad (3)$$

となる。時刻 t における運動量の総和は (2) と (3) に注意すると、

$$\begin{aligned} m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t) &= mV_1 - \int F(t) dt - m_2 V_2 + \int F(t) dt \\ &= m_1 V_1 - m_2 V_2 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

が得られます。運動量の総和は (1) によると、衝突前はゼロだった。数式 (4) によると、衝突中の任意時刻 t においても、運動量の総和はゼロだ。つまり、衝突中も運動量は保存される。両者の速度が等しくない、すなわち、 $v_1(t) \neq v_2(t)$ であれば、物体は離れるので力を互いに与えない、と思うかもしれない。しかし、衝突の間、物体は変形するので、たとえ速度が異なっているとしても、互いに接している、力を相互に与えている。

補足 数式 (4) の右辺の直前が、 $m_1 V_1 - m_2 V_2$ となっていて、この時点で運動量が保存している数式になっている。これを見ると、わざわざ重心系にこだわらなくてもよかったと思えるかもしれませんが。速度ベクトルが互いの重心を貫く場合は、確かにその通りだ。しかし、速度ベクトルが互いの重心を貫かない場合、いわゆるオフセット衝突の場合、衝突によって x 軸方向以外の速度成分が現れるので解析がちょっと面倒になる。その面倒さ为了避免するため、わざわざ重心系で解析をしたのだ。

衝突の経過 作用反作用の法則があるがゆえに、衝突の過程においても運動量保存則が成り立つことを上で説明した。衝突の過程では、物体にどのように力が作用し、運動量が保存されながらも、物体の速度が変化していくのかを、簡単なモデルによって示そう。Quora に投稿された次の質問とその回答を持ち出すのがよいだろう。

Quora 質問 高校の物理で習う「力積」をどのように教えたらいいのでしょうか？ まだ運動エネルギーや位置エネルギーは教えやすいのですが力積をどのように教えたらいいのか悩んでいます。

簡単な衝突の例を使ってみよう。図 4.1 のように、質量 m の物体 1 が、質量 $2m$ の物体 2 に速度 v で衝突する現象を考える。衝突後、物体 1 は速度が $-v/3$ (つまり逆方向に)、物体 2 は速度が $2v/3$ になったとする。これらの速度は、運動量保存則とエネルギー保存則から計算した。つまり、衝突によって交換されるエネルギーはすべて、運動エネルギーに寄与したという前提だ。

衝突中の運動を考えてみよう。衝突はごく短い時間 τ に起き、時刻 $t = -\tau/2$ で物体 1 が物体 2 に接し、時刻 $t = \tau/2$ で二つの物体が離れると仮定する。簡単のため、物体 1 と物体

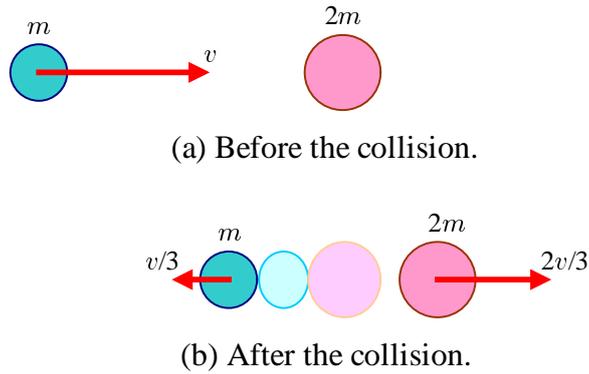


図 4.1: 物体の男性衝突

2 は, 衝突の間 $(-\tau/2 \leq t \leq \tau/2)$ に,

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{v}{3} \left(1 - 2 \sin \frac{\pi t}{\tau} \right), \\ v_2(t) &= \frac{v}{3} \left(1 + \sin \frac{\pi t}{\tau} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

のように変化すると考えよう。この速度変化は, 特に根拠があるわけではなく, 計算に都合がよさそうな簡単なモデルとして使っている。グラフとして描くと, 下に示す 図 4.2 (a) のようになる。図では物体 1 の速度が青曲線で, 物体 2 の速度がマゼンタ曲線で描かれています。

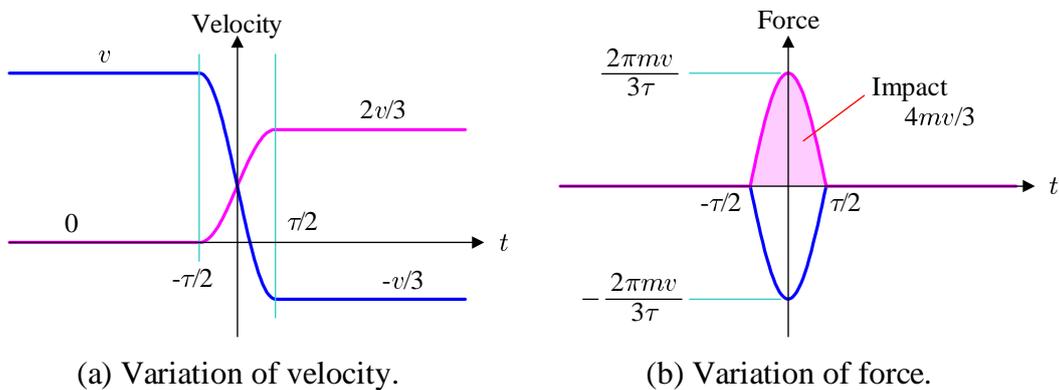


図 4.2: 衝突の間の速度と力の変化

速度 (5) を時間について微分し, 物体 1 と物体 2 の加速度を計算すると,

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -\frac{2\pi v}{3\tau} \cos \frac{\pi t}{\tau}, \\ a_2(t) &= \frac{\pi v}{3\tau} \cos \frac{\pi t}{\tau}, \end{aligned} \quad (6)$$

となる。これらに物体の質量を乗じると、物体1と物体2が受ける力が計算できる。計算された力は、

$$\begin{aligned} F_1(t) = m a_1(t) &= -\frac{2\pi m v}{3\tau} \cos \frac{\pi t}{\tau}, \\ F_2(t) = 2m a_2(t) &= \frac{2\pi m v}{3\tau} \cos \frac{\pi t}{\tau}, \end{aligned} \tag{7}$$

のような時間の関数になる。ここで、 $F_1(t) + F_2(t) = 0$ が満たされていることが重要だ。これは物体1と物体2の間の作用反作用の法則を意味する。速度(5)は計算の便宜から設定したモデルだったが、作用反作用の法則を満たしてくれたので、ひと安心というところだ。計算された力を時間の関数としてグラフ表示すると、図4.2(b)のようになる。ここで、特に物体2が受ける力に網掛けをしました。その網掛けが、物体2が受ける力積(Impulse)だ。図示するように、力積は力を時間の関数として描いたときに力が描く面積である。言い換えると、力を時間について積分した量、さらに言い換えると、力を時間的に積み上げた量だ。力の数式(7)を実際に計算するとわかるが、網掛け部の面積は $4mv/3$ だ。これは衝突によって生じる物体2の運動量の変化である。つまり、力積は運動量の変化をもたらす。

補足 上で述べたように、作用反作用があるので、 $F_1(t) + F_2(t) = 0$ が成り立つ。これは、 $F_1(t) = -F_2(t)$ のように書き換えられるように、衝突の間に物体1が受ける力と物体2が受ける力は、必ず、同じ大きさで逆向きになる。図4.2を見てもわかるように、力積は、同じ大きさで逆符号となるので、物体1が受ける力積と物体2が受ける力積は、足し合わせると相殺する。つまり、系全体の力積の収支はゼロとなります。これが運動量保存則というわけだ。

衝突中に物体1と物体2が異なる速度になっていることに疑問を感じる読者がいるかもしれないので注釈しておこう。衝突の間は物体は接し続けているはずなので物体は同じ速度でなければならない、という考えからそのような疑問を持っているかもしれない。数式(5)は物体の重心の速度だ。衝突の間、物体は変形するので、互いの速度が違っていても、物体は伸び縮みすることによって互いに接した状態になっている。図1の衝突した瞬間(淡色表示の物体)は多少、ひずませて描いている。その形状変形の復元力が働き、二つの物体は衝突後に、別の速度となって離れていく。

4.2 振動の周期

4.2.1 一般振り子

一般振り子の周期は近似的に単振動となるため高校物理で取り扱うが、厳密には楕円積分と呼ばれる数学が必要になり、高等学校の範囲では厳密に解析することができない。

Quoraでも高校物理で計算できない現象を問う質問が投稿され、筆者は一般振り子の周期をその例として回答した。

Quora 質問 高校物理では厳密に計算できていない現象の具体例はなにがありますか？

長さ l の一般振り子は、その振れ幅が小さいとき、周期 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ で振動することは高校物理で学習する。それに対し、振れ幅が大きくなると、上記の周期よりも長くなる。具体的には、振れ幅 θ_0 の一般振り子の周期は、

$$T = 4K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (4.1)$$

となる。ここで、 $K(\cdot)$ は第1種完全楕円積分と呼ばれ、

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (1)$$

のように定義される。完全楕円積分のパラメータ k は楕円積分の母数 (modulus) と呼ばれる。一般振り子の周期に関して、母数は $k \equiv \sin(\theta_0/2)$ のように対応付けられ、振れ幅が大きくなると母数が大きくなる。母数が $k \ll 1$ のとき、完全楕円関数 $K(k)$ は近似的に $\pi/2$ となるため、高校物理で学習する振り子の周期に近い値となる。

完全楕円積分の計算法にはいくつかの手法があり、その中でもっとも簡単な手法は、(1) の被積分関数を級数展開し、項別に積分を計算することだ。そのように計算すると、

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \dots \right), \quad (4.2)$$

が得られる。したがって、一般振り子の周期は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \dots \right), \quad (4.3)$$

のように級数表現することができる。なお、上に書いたように楕円積分の母数は $k = \sin(\theta_0/2)$ である。この級数を計算し、振り子の周期をグラフに書くと図 4.3 のようになる。振れ角が $\theta_0 = 10^\circ$ ならば、微小振れ角に比べ 0.8% 程度周期が長くなる。有効数字としては2桁が確保できるので、高校物理で単振動として近似するのは、その程度の振れ角である。さらに大きな振れ角として、 $\theta_0 = 60^\circ$ の場合、微小振れ角に比べ 10% ほど周期が長くなる。

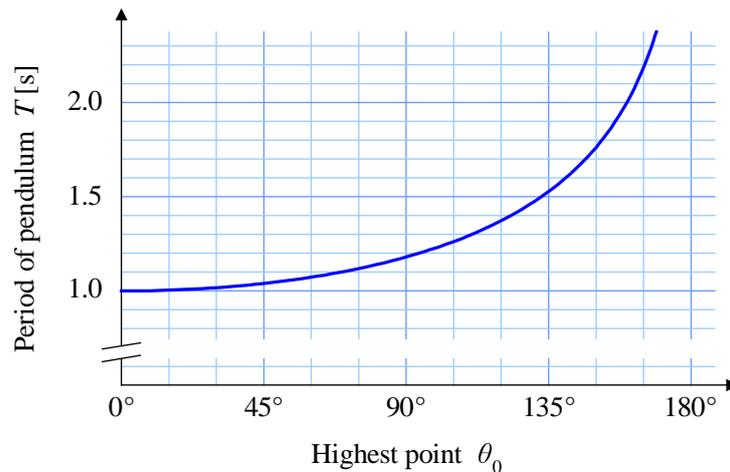


図 4.3: 長さ $l = 0.25$ m の単振り子の周期

ハイジのブランコの速度 一般振り子の運動の応用例として、アニメ世界名作劇場の「アルプスの少女ハイジ」のブランコに関する質問が Quora に投稿された。

Quora 質問 アルプスの少女ハイジがオープニングで乗っているブランコの速度はどうなっているのでしょうか？

その質問は、ハイジのブランコの速度について尋ねている。ブランコの最高点と最低点の高さの差がわかればエネルギー保存則で計算できるのだが、テレビアニメーションの映像からブランコの回転半径がわからない。ブランコの回転半径を特定するために利用したのが、ブランコの振れの角度と周期である。

アニメーションを見ながらブランコの周期を計測し。ブランコのシーンは、前方に進んでいるところから始まり、最高点に到達した後、後方に進み、後方の最高点に到達した後、再び前方に進んでいる途中でブランコの映像が切れる。その中で、前方の最高点から後方の最高点までの時間を計測し。その時間は 4.25 秒でした。つまり、ブランコの周期は 8.5 秒だ。最高点に達したときの角度は、鉛直下方から 70° もの角度がついていた。ブランコの周期は、長さが l 、重力加速度 g とすると、単振動モデルで、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2)$$

としたいところだが、最高点が 70° もの角度がついているので、その周期は (??) より少し長くなる。実際には楕円積分によって計算できるが、その最高点の高さから、単振動モデルより周期が約 1.10 倍になる (図 4.3 参照)。

単振動モデルでのブランコの周期として $T' = 8.5 \text{ s} / 1.1 = 7.73 \text{ s}$ を使ってブランコの長

さを計算すると,

$$l = \frac{gT'^2}{4\pi^2} = 14.2 \text{ m},$$

が得られた。ブランコの最下点で最大速度となるので, その速度を計算する。エネルギー保存則を適用すると,

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos 70^\circ)} = 13.8 \text{ m/s} = 49.7 \text{ km/h},$$

がえられるので, ハイジが載っているブランコはロープの長さが約 14 m であり, 前後に 70° ずつ振れ, 最下点で最高速度は 50 km/h 程度となることが計算によってわかった。

4.2.2 サイクロイドの等時性

一様な重力の場において, 物体を斜面に沿って落下させて高所の点 A から低所の点 B に移動する場合, できるだけ速く移動できるように斜面を選ぶと, その斜面はサイクロイドと呼ばれる形状になっている (図 4.4)。サイクロイドは, 最も速く物体を移動できる斜面であるため, 最速降下曲線とも呼ばれる。サイクロイドについて, Quora で次の質問が投稿された。

Quora 質問 サイクロイド曲線は円弧と比べてどう違うのでしょうか?

円弧は中心を固定して回転させた円の外周が描く曲線だが, サイクロイドは平面上を転がした円の外周が描く曲線だ。円弧に沿うように振動する振り子 (一般振り子) の周期は, 振幅が大きくなると徐々に長くなりますが, サイクロイドに沿うように振動する振り子 (サイクロイド振り子) は, 振幅によらず周期が一定である。

サイクロイドは最速降下曲線とも呼ばれ, 一様重力下で, 高さが異なる任意の 2 点を, 最も短時間で重力のみの作用で移動させる経路だ。その形状はスケートボードのハーフパイプの斜面として使われている。

サイクロイドの等時性について, 筆者は Quora のスペース「数理科学 Q らほらとりい」でサイクロイドの等時性について記事を投稿した。その記事の内容を紹介しよう。水平方向に座標 x , 鉛直下に y をとったとき, サイクロイドは,

$$x = r(\theta + \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta), \quad (1)$$

のように表される。ここで, θ は簡単に斜面を記述するための媒介変数 (パラメータ) だ。サイクロイドは, 物体を速く移動させるだけではなく, 等時振り子を与える曲線になっている。

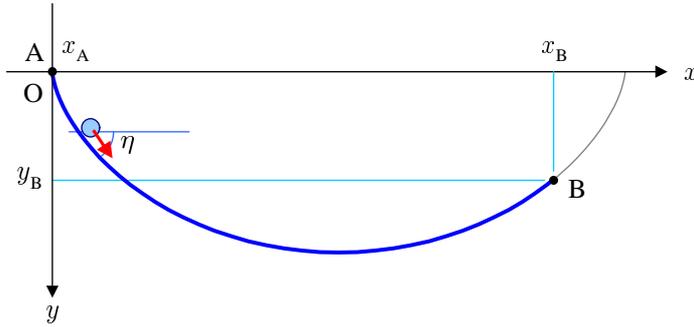


図 4.4: 最急降下線 (サイクロイド)

等時振り子は、バネの振動のように、振幅に依存せず常に一定周期で振動する振り子だ。サイクロイドの斜面に沿って落下させた物体は、その勢いで反対側へ同じ高さまで上り、再び降下することを繰り返して往復運動する。斜面のどこを始点にしたかとは無関係に、往復運動の周期が一定になる。その性質を考えると、サイクロイドにフックの法則のような規則性が見いだせると予想する。任意の θ において斜面の傾きを評価してみよう。単純に x と y を θ について微分すると、

$$x' = r(1 + \cos \theta), \quad y' = r \sin \theta,$$

が得られる。この微分は、

$$dx = r(1 + \cos \theta) d\theta, \quad dy = r \sin \theta d\theta,$$

のように書き換えられる。これらは、サイクロイドの傾斜ベクトルの x 成分と y 成分に相当する。そのベクトルの大きさは、

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = r\sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= r\sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2r \cos \frac{\theta}{2} d\theta, \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで、 θ におけるサイクロイドの斜度を η とすると、

$$\begin{aligned} \cos \eta &= \frac{dx}{ds} = \frac{1 + \cos \theta}{2 \cos(\theta/2)}, \\ \sin \eta &= \frac{dy}{ds} = \frac{\sin \theta}{2 \cos(\theta/2)}, \end{aligned}$$

となる。ここで、サイクロイドに沿って落下する物体に作用する重力加速度を考える。自由空間では物体には鉛直下方に加速度 g が作用する。サイクロイドに沿っての加速度は、その加速度に $\sin \eta$ を乗じた積が負の方向に作用する。すなわち、

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \eta = -\frac{g \sin \theta}{2 \cos(\theta/2)}$$

$$= -\frac{2g \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2)} = -g \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2)$$

のように斜面方向に沿った加速度が計算できる。一方、サイクロイドの最下点から θ までサイクロイドに沿った長さを計算すると、

$$s = \int_0^\theta ds = 2r \int_0^\theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4r \sin \frac{\theta}{2}, \quad (3)$$

が得られる。ここで、(2) と (3) を比較すると、

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4r} s, \quad (4)$$

が得られる。つまり、斜面に沿った加速度は、最下点に向かい、最下点からの経路長に比例する。これは紛れもなくフックの法則だ。したがって、重力にしたがってサイクロイドに沿う物体の往復運動運動は、最下点からの経路長に関して単振動しているわけだ。そのため、振幅によらず一定の周期の振動となる。それがサイクロイドが等時振り子を実現する原理である。さらに、微分方程式 (4) によって、(1) で定義されるサイクロイドに沿う物体の振動周期が、

$$T = \pi \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad (4.4)$$

であることが容易にわかる。この振動周期の見積もりは、微分方程式 $\ddot{x} = -(k/m)x$ の単振動の周期が $T = 2\pi\sqrt{k/m}$ であることから類推できるのだ。さらに補足すると、(??) が示す周期は、長さ $4r$ の単振り子の周期 (振れ幅が小さい場合に限る) と一致している。その特徴は、等時振り子の構成を考えると明らかである。等時振り子は図 4.5 のように、天井の断面がサイクロイド形状をしていて、頂点に振り子の支点が設けられている。振り子は滑

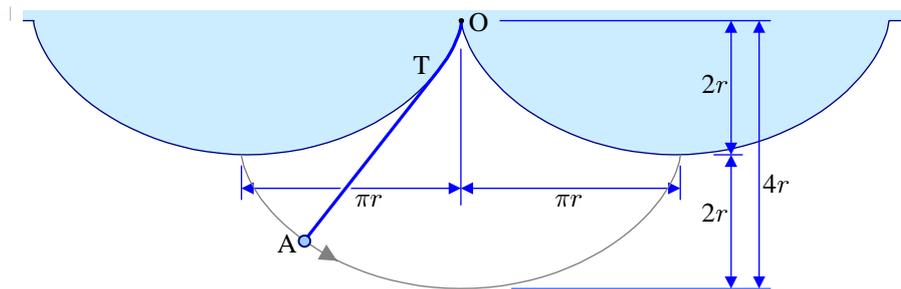


図 4.5: 等時振り子の構成例

らかなひもで吊るされていて、振れ幅が大きくなると、ひもは天井のサイクロイドに沿う。そのため、振り子 (図中の A) はサイクロイドを描き、周期が一定になる。図か明らかなように、振れ幅が小さい場合、近似的に長さ $4r$ の単振り子になるわけだ。それが等時振り子の周期 (4.4) に現れているというわけだ。

4.2.3 放物線状斜面

前項で示したように、サイクロイド形状の斜面を滑る物体はその振幅に関わらず一定の周期で運動し、その運動は斜面に沿った長さについて単振動となる。一方、円弧の形状の斜面に沿って滑る物体は一般振り子となり、振幅が大きくなるとその周期が長くなる。その周期は既に示したように楕円関数であらわされる。それでは、放物線形状の斜面だとどうなるだろうか？ これについて次の質問が Quora に投稿された。

Quora 質問 放物線の形 ($y = x^2$) をした摩擦や抵抗がないパイプの中を質量 m の質点が高さ h から滑り始めた場合、再び高さ h になるのは何秒後ですか？ (重力加速度は g で一定)

容易に予想できるように、周期は振幅に依存する。しかも、その周期は振幅に対して楕円関数であらわされるのだ。筆者の回答を用いて、その内容を説明しよう。

斜面の形状が $y = x^2/\kappa$ であたえられるとする。なお、 κ は長さの次元をもつ定数とする。高さ h から放物線形状の斜面に沿って物体を滑らせた場合、物体は $y = 0$ を通過し、反対側の $y = h$ まで到達する。周期を計算する手法として、 $y = 0$ を通過する時点から $y = h$ に到達するまでの時間を 4 倍することで計算する。なお、 $y = h$ となる位置の x 座標を $x = \pm x_0$ としておく。つまり、 $h = x_0^2/\kappa$ とする。結果としては、その放物面を滑る物体の振動周期は、

$$T = \sqrt{\frac{8(4h + \kappa)}{g}} E\left(\sqrt{\frac{4h}{4h + \kappa}}\right) \quad (4.5)$$

となる。ここで、 $E(\cdot)$ は第 2 種完全楕円積分であり、

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta,$$

のように定義されている。

上で述べた計算方針にしたがうと、 $y = x^2/\kappa$ なる放物面を滑る物体の振動周期は、

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_{x=0}^{x_0} dt = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{v_x} \\ &= 4 \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{4x^2/\kappa^2 + 1}{2g(x_0^2 - x^2)/\kappa}} \, dx \\ &= \sqrt{\frac{8\kappa}{g}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(4x_0^2/\kappa^2) \cos^2 \theta + 1} \, d\theta \\ &= \sqrt{\frac{8\kappa}{g}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(4x_0^2/\kappa^2) - (4x_0^2/\kappa^2) \sin^2 \theta + 1} \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{8\kappa(4x_0^2/\kappa^2 + 1)}{g}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{4x_0^2}{4x_0^2 + \kappa^2} \sin^2 \theta} \, d\theta \\
&= \sqrt{\frac{8(4h + \kappa)}{g}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{4h}{4h + \kappa} \sin^2 \theta} \, d\theta \\
&= \sqrt{\frac{8(4h + \kappa)}{g}} E\left(\sqrt{\frac{4h}{4h + \kappa}}\right). \tag{1}
\end{aligned}$$

のように計算できる。この計算において、第1行目の v_x は物体の速度の x 成分だ。物体の速度は、 y においては $h - y$ の落差を落ちてきた速度なので、 $v = \sqrt{2g(h - y)}$ となる。水平座標 x について、斜面の傾きが $2x/\kappa$ となることから、速度の x 成分は、

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \sqrt{\frac{2g(h - y)}{4x^2/\kappa^2 + 1}},$$

となるので、第2行目のように数式を記述できる。これ以降の積分を実行するにあたり、 $x = x_0 \cos \theta$ とおいた。最後から2行目では、この積分は第2種完全楕円積分の形になっている。最後の行で記述した関数 $E(\cdot)$ は第2種完全楕円積分だ。第2種完全楕円積分は、楕円の周長を計算する際に現れる積分である。なお、第2種完全楕円積分は、

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 - \dots \right),$$

なる級数で計算できる。なお、楕円積分の変数となっている $k = \sqrt{4h/(4h + \kappa)}$ は楕円積分の母数 (modulus) と呼ばれる。導出された公式 (1) にしたがって計算すると、最高点までの到達時間 T は図??のような曲線を描く。この曲線が、 $h = 0$ でゼロでないのは、下の [考察] で取り上げるように $h \ll \kappa$ での振る舞いに起因する。一方、 $h \gg \kappa$ では、(これも [考察] に書いたように) 振動周期は $T = 2\sqrt{8h/g}$ に漸近していく。

考察 第2種完全楕円積分は、母数 k が非常に小さい ($k \ll 1$) とき、 $E(k) \simeq \pi/2$ となるので、始点位置が十分に低い場合、すなわち、 $h \ll \kappa$ のとき、

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{\kappa}{2g}} \quad (h \ll \kappa),$$

となる。つまり、 $h \ll \kappa$ のとき、到達時間 T は h にほぼ依存せず一定となる。これに対し、長さ l の単振り子の周期が、 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ であることを比較すると、放物線斜面において $h \ll \kappa$ での運動は $l = \kappa/2$ の単振り子に相当することがわかる。それは、放物線 $y = x^2/\kappa$ の頂点付近での曲率半径が $\kappa/2$ であることとも合致する。母数が $k \simeq 1$ の場合、第2種完全楕円積分は $E(k) \simeq 1$ となる。それは、 $h \gg \kappa$ の場合に対応する。そのときの振動周期は、

$$T \simeq 4\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (h \gg \kappa),$$

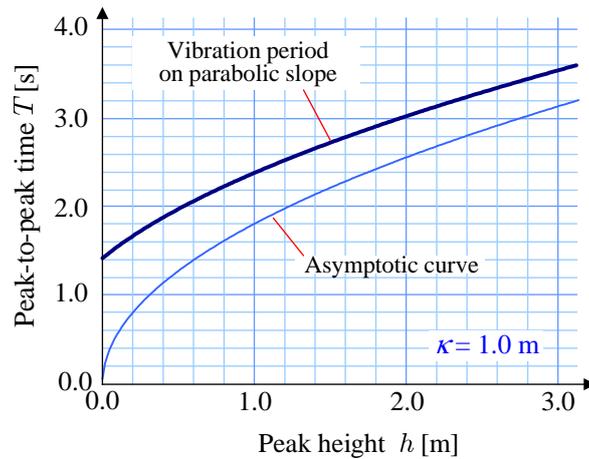


図 4.6: 放物面 $y = x^2/\kappa$ を滑る物体の振動周期

となる。この時間は、自由空間で高さ h だけ自由落下し、地面で弾性衝突して高さ h に戻ってくるのを2往復する時間と等しい。つまり、非常に高い位置から放物線に沿って物体を落下させると、物体の運動はほぼ自由落下となることを意味する。

4.3 ジャイロ効果

回転する物体は、その回転を一定に保とうとする性質があり、その一定性を阻害する力を受けた場合、歳差運動のように独特の運動を始める。そのような運動の特性はジャイロ効果と呼ばれる。ジャイロ効果は、典型的に、自転車の車輪やコマの運動として観測することができる。

4.3.1 自転車の車輪

自転車は停止しているとき、横からの力を受けると容易に点灯するが、走行中に横から力を受けても容易に倒れることはない。それがジャイロ効果だ。車輪におけるジャイロ効果について Quora で質問が投稿された。

Quora 質問 自転車やコインのように止まっているより前に進みながらの方が左右の揺れに対して安定するのは何故ですか？

自転車やコインが前に進むと倒れにくくなるのは、ひとことで言うと回転に伴う自然の制御機構に起因する。そのメカニズムの決め手は、前に進んでいると車輪、または、コイ

ンが回転をしているからだ。現象としては、回転する車輪が傾くと、その傾きに応じて車輪の進行方向が変化する。いわば、勝手に舵(ステアリング)がきれる現象である。それによって、車輪は円形の軌跡を走る。円形の軌跡を走ることによって遠心力が発生し、車輪を倒そうとする重力に反抗するのでなかなか倒れない。それでもなおかつ、車輪が倒れこむと、車輪はさらに小さな円軌道を描こうとする。小さな円軌道は大きな遠心力を生むので、しつこく重力に反抗するのだ。それが、回転する車輪(自転車やコイン)が安定している現象だ。どのようなメカニズムで車輪が自動的に操舵されるかを、角運動量の観点と、慣性力の観点、の2種類の立場で説明しよう。

角運動量の観点 図 4.7 (a) を用いて説明しよう。この図は、車輪を後ろから見た様子であり、傾いた物体が車輪である。車輪の回転は角運動量をもつ。物理学では角運動量は回転に対して右ねじの方向に向かうベクトルで表される。この例では、記号 L を付した矢印(ベクトル)が角運動量だ。車輪が左に傾いているから、重力によって車輪をさらに倒そうとする力(赤い矢印)が作用する。その力は、車輪の接地点を軸とする回転運動を引き起こすので力のモーメントを発生させる。力のモーメント N は力の方向に対して右ねじの方

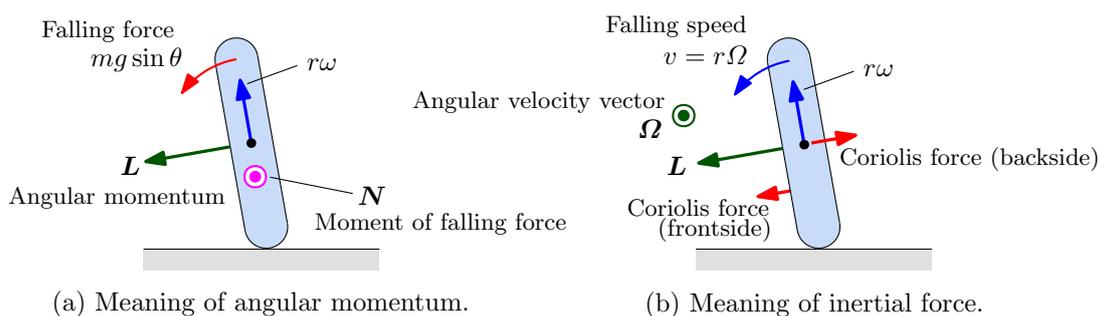


図 4.7: 回転する車輪に作用する角運動量と慣性力

向に発生するので、画面から手前に飛び出る方向を向く。力のモーメントは角運動量の時間微分であるから、時間の経過とともに角運動量 L は次第に、画面から手前に飛び出してくる成分をもつように回転するようになる。角運動量がそのように回転するということは、車輪が左の方向に操舵されることを意味する。車輪が操舵されること、そのように説明できているが、回転軸方向のベクトルである角運動量を想像するのが難しい読者がいるかもしれない。想像しやすさを狙って、次に慣性力の観点で説明する。

慣性力の観点 傾いた車輪が勝手に操舵されるのは慣性力の観点でも説明できる。実は、角運動量に関する現象は、(面倒だが) 慣性力の観点で説明できるのだ。図 4.7 (b) は先ほどとまったく同じ現象を描いているが、記号が異なる。傾いた車輪は重力で倒れる。倒れる現象は、車輪の接地点を中心とした回転運動になる。その回転運動に対して慣性力が現れる。具体的な現象として、車輪が深く傾くと、車輪の後方では回転する車輪表面の速度

方向はさらに内側を向く。そのような速度変化と逆方向に慣性力が働く。つまり、車輪の後方では、傾いた方向とは逆方向に慣性力が働く。

車輪の前方では逆方向に慣性力が発生する。なぜなら、車輪が深く傾くと表面の速度は外側に向くからだ。その速度変化に対して、慣性力は内側に向くようになる。前方で慣性力が内向きに作用し、後方で慣性力が外向きに作用するので、車輪が自動的に操舵されるのだ。回転する座標系において、この例のように、速度方向に依存して発生する慣性力はコリオリの力と呼ばれる。

慣性力による説明は、若干、角運動量による説明とは異なる。角運動量の説明では、重力がかかっているならば必ず車輪がきれることを説明している。しかし、慣性力による説明では、車輪が倒れこまないければ（つまり、斜めで釣り合った状態では）、コリオリの力が発生しない。では互いに矛盾するのか... というと、そうではない。斜め方向で釣り合えば、コリオリの力は発生しないが、すでに車輪が勝手に切れるという回転運動が始まっているので、勝手に同じペースで操舵が継続する。車輪の速力が（摩擦によって）弱まれば重力が勝り、車輪を倒す速度成分が生まれる。その時点で再び、コリオリの力が発生し、操舵（旋回率）が加速するわけだ。

上で説明した2種類の観点のうち、実際の物理現象をステップ・バイ・ステップで説明しているのは、慣性力の観点だろう。その観点で考えると、回転する車輪が傾いたときに勝手に切れていくのは、自然界に備わった精巧な制御機構のようにも思えてくる。この考察によっていえることは、二輪車がハンドルで曲がるのではないということだ。車体を倒すことによって、上で述べた理屈によって二輪車は自動的に旋回するのだ。前輪はその旋回に合わせてつじつまが合うように補助をしているだけなのだ。

4.3.2 コマの歳差運動

コマの歳差運動も、自転車の車輪と同じ原理であり、慣性力によって自然に制御機構が働く。その制御機構がゆえに、回転中のコマが傾いてもすぐには転倒しないのである。

Quora 質問 コマの歳差運動は回転軸を横に引っ張る力ですが、その原因はなんでしょか？

傾いたコマに作用する慣性力を考え、歳差運動の原理を考察しよう。回転するコマの回転軸の周りに90°ずつ、回転方向に向かってA、B、C、Dのように名前を付けておこう。図4.8に示すように、コマがDの方向に傾いたと仮定する。そのとき、回転するコマの速度（ベクトル）は、軸の傾きに伴い、点Bでは下に向かう成分が増加する。逆に、点Dでは上

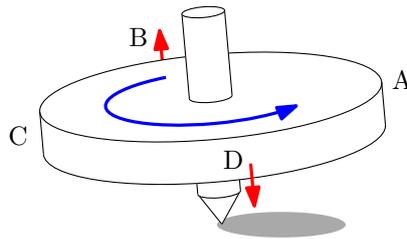


図 4.8: 傾いたコマに作用する慣性力

を向く成分が増加する。その速度変化に対して、速度を一定に保持するように慣性力が作用する。すなわち、点 B では慣性力が上向きに、点 D では下向きに作用する。つまり、コマの回転軸が D の方に倒れそうになると、慣性力が軸を D の方向に倒そうとするのだ。結果的に、回転軸は時計回りに回転を始める。それが歳差運動というわけだ。

歳差運動を始めると、倒れかけたコマに新たなつり合いの状態が生まれる。歳差運動による軸の回転と、コマ自体の回転によって、コマの外周では遠心力が働く。コマの傾きによって、A 側の外周の遠心力はコマを立て直す方向働くが、C 側の外周の遠心力はコマを深く倒す方向に働く。コマの軸が倒れる力と、外周の遠心力が釣り合う位置でコマは一定の角度で歳差運動をする。コマの回転速度が低下すると釣り合いが崩れ、コマが深く倒れ、それに伴い歳差運動が速くなり、新たなつり合いが形成される。そのように、コマは倒れないような制御が自動的に起きている。

参考 図4.9は半径5cmのコマの歳差運動をシミュレーションした結果だ。コマの重心は床上の支点から4cmの位置にあると設定した。コマは $\omega = 40 \text{ rad/s}$ で回転し、 $\Omega = 9.0 \text{ rad/s}$ で歳差運動している(現実的な条件設定)とする。歳差運動と もとの回転によって、コマの外周は図(a)のように運動する。その運動によって、図(b)の淡色曲線(Magnitude of acceleration)のように遠心力起因の加速度が作用する。その加速度は、濃色曲線(Magnitude of tangential component)に示す成分によってコマの軸に影響を与える。この成分は、上に書いたように、瞬間的な位置によって軸を倒す方向に作用することも、軸を立て直す方向に作用することもある。このグラフでは、濃青線が低くなった位置が倒す方向、高くなった位置が立て直す方向だ。それにしても、手で回せる程度のコマの外周に 80 m/s^2 もの遠心加速度が作用していることには驚く。

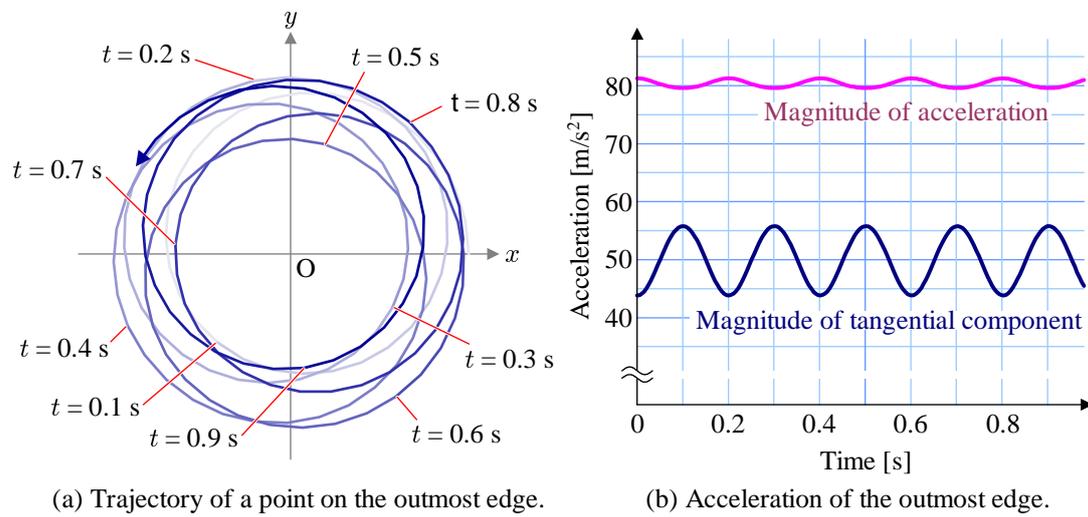


図 4.9: 回転するコマの外周の軌跡と加速度の変化

第5章 天文学

5.1 惑星の軌道計算

惑星の軌道は、厳密に円軌道ではなく、わずかに扁平した楕円軌道を描く。軌道の扁平率が最も大きい惑星は水星であり、扁平度合いに相当する離心率なるパラメータで表すと0.2程度である。それに比べ、地球は扁平率が0.0167なので極めて円軌道に近い。しかしながら、天文学で取り扱う時間は年単位のスケールであるため、小さな離心率であっても等速円軌道のモデルで計算すると無視できない誤差が生じる。本節では、楕円軌道を描く惑星の軌道計算について解説する。

5.1.1 ケプラーの法則

楕円軌道を描く天体の公転速度は一定ではなく、下に挙げる面積速度一定の法則にしたがい、場所によって異なる。楕円軌道や面積速度一定のような惑星の軌道の性質は、ケプラーの法則によって支配される。ケプラーの法則は以下の三つの法則で構成される。

第1法則 (楕円軌道の法則) 惑星は、太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する。

第2法則 (面積速度一定の法則) 惑星は、太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積が一定であるように運動する。

第3法則 (調和の法則) 惑星の公転周期の2乗は、軌道長半径の3乗に比例する。

これらの法則の中で、楕円軌道の法則と、面積速度一定の法則を本節で取り扱う。ケプラーの法則は、膨大な観測結果から導かれた法則であるが、ニュートン力学に基づいて証明することができる。Quoraでは、ケプラーの法則に関する質問が投稿された。

Quora 質問 ケプラーの法則の導出を詳しく教えてくださいませんか? 1から3までよろしくをお願いします。

質問に書かれている1から3とは、上記の第1法則から第3法則までを意味する。ケプラーはこれらの法則を自身の師匠ティコ・ブラーエの観測結果から推察したのだが、ニュートン力学に基づいて理論的に導出することができる。ニュートン力学の法則は、

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (1)$$

だけだ。この方程式は運動方程式と呼ばれる。ここで、 m が惑星の質量、 \mathbf{r} が惑星の位置ベクトルだ。なお、 \mathbf{F} は惑星と太陽の間に作用する重力であり、その大きさは、

$$|\mathbf{F}| = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (2)$$

となる。ここで、 G は万有引力定数、 M は太陽の質量、 r は太陽から惑星までの距離である。ケプラーの法則を導出するには、運動方程式(1)を極座標表示に書き換えることが必要だ。導出過程を省略するが、太陽を原点に置いて極座標表示された運動方程式は、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (4)$$

である。これらの方程式は、(3)が方位角方向の加速度、(4)が動径方向の加速度を表している。惑星は太陽から直接、重力の作用を受けるので、動径方向にしか加速度が生じない。方位角方向の加速度に関する方程式(3)は、**第1法則(面積速度一定の法則)**を意味する。動径方向の運動方程式(4)は、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2}, \quad (5)$$

のように書き換えられる。ここで、 $l \equiv r^2(d\theta/dt)$ とおいた。つまり、 l は面積速度の2倍の量です。方程式(5)は容易に解くことができ、

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta}, \quad (5.1)$$

が得られます。ここで、 $r_0 \equiv l^2/GM$ とおいた。得られた解(??)は、 $0 \leq e < 1$ において楕円を描くので、**第2法則(楕円軌道の法則)**がここで得られたことになる。なお、 e は離心率と呼ばれ、太陽の位置となる焦点が中心からどれだけずれているかを表す。解(??)による楕円に囲まれる領域の面積を、面積速度 $l/2$ で除すると公転周期が得られます。その公転周期を T とすると、計算結果だけを書くと、

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_m^3, \quad (5.2)$$

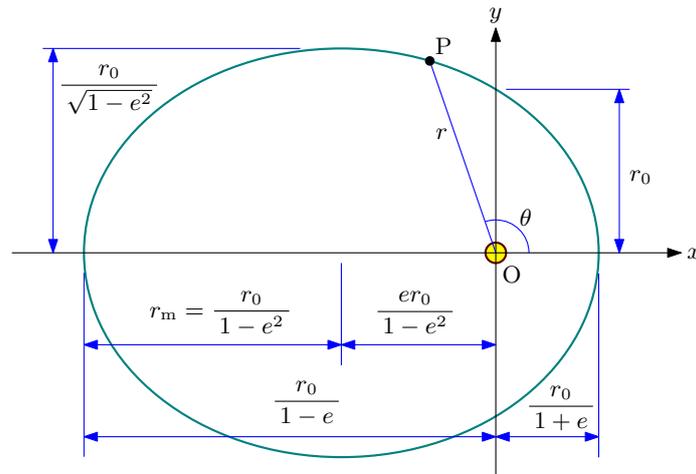


図 5.1: ケプラーの法則による惑星の楕円軌道

が得られる。ここで、 r_m が軌道長半径です。つまり、(5.2) は**第 3 法則 (調和の法則)** に他ならない。

上で示したように、ケプラーの法則はニュートンの運動方程式から導出できる。その導出のモデルは、太陽を原点におき、太陽に比べ質量が無視できるくらい小さな天体の運動を解析した解として与えられる。正確に言うと、ケプラーの法則のうち一つだけ万有引力の法則でなくても成り立つ。これに関して、以下の質問が Quora に投稿された。

Quora 質問 ケプラー第 3 法則を万有引力の法則を利用せずに証明することはできますか？ もしできるなら、その証明をしてください。

ケプラーの法則のうち、第 3 法則ではなく、第 2 法則 (面積速度一定の法則) だけは、万有引力なしで証明できる。面積速度一定の法則は、重力源からみた天体の位置ベクトルと、天体の速度ベクトルとの外積が一定である、という法則だ。これは角運動量保存の法則に対応する。つまり、中心力場であれば必ず成り立つので、万有引力の法則に限った現象ではない。一方、第 1 法則 (楕円軌道の法則) は、万有引力の法則の解である。一般の中心力場では楕円軌道になるとは限らない。第 3 法則は、第 1 法則と第 2 法則を組み合わせで得られます。したがって、第 3 法則の証明には万有引力の法則が必要となるのだ。

ケプラーの第 3 法則を検証すると、外惑星ほど理論からの誤差が大きくなるようだ。Quora でその誤差を取り上げた質問が投稿された。この質問のレベルの高さには驚く。

Quora 質問 ケプラーの第 3 法則についてです。太陽系のすべての惑星について比を計算してみたところ、わずかながら差が出てしまいました。これは計算誤差でしょうか。それとも理論的に何か理由があるのでしょうか？

筆者が実際に計算してみると下表の結果が得られた。計算にあたっては、2018年理科年表から惑星の軌道長半径と公転周期を参照した。ケプラーの第3法則が正しければ T^2/r^3 がすべて等しくなるはずだが、わずかにばらついている。火星までの内惑星については、軌道長半径が4桁程度の精度しかないので、 T^2/r^3 のばらつきはデータの誤差の範囲内と思える。それに対して、外惑星では T^2/r^3 が小さくなっている。木星の質量が太陽の約1000

表 5.1: 太陽系惑星のケプラー第3法則の検証

惑星	起動長半径 [au]	公転周期 [年]	T^2/r^3
水星	0.3871	0.24085	1.000055
金星	0.7233	0.61520	1.000178
地球	1.0000	1.00002	1.000020
火星	1.5237	1.88085	1.000023
木星	5.2026	11.8620	0.999205
土星	9.5549	29.4572	0.994728
天王星	19.2184	84.0205	0.994532
海王星	30.1104	164.7701	0.994506

分の1、天王星の質量が太陽の約1万分の1となるので、有効数字4桁に対して影響を及ぼしてくる。単純モデルとして2体問題を考えても、木星と太陽とでは、木星質量の影響のため重力計算の上での換算質量が0.2%ほど太陽質量より小さくなる。その影響が外惑星における T^2/r^3 を小さくしているのだろう。このような影響をもたらすのが木星だけでなく、4個の外惑星なので影響は複雑となる。実際のところ、外惑星による摂動に影響で T^2/r^3 が小さくなっていると考えるのが妥当だ。

Quoraには惑星の軌道計算についての質問も投稿された。次の質問に書かれているとおり、惑星の軌道計算は第2法則である面積速度一定の法則を利用する。この質問に対して筆者が回答した内容を合わせて紹介する。

Quora 質問 惑星の軌道計算をするには面積速度一定の法則を使うと思うのですが、どのように解けばよいのですか？

面積速度一定の法則に関して、惑星のように公転する天体が描く面積とは図??に示す面積 S を考えればよい。この図は原点 O を太陽とする天体の公転軌道を太い曲線で描いている。この軌道は原点 O を焦点の1つとする楕円軌道であり、長半径を1としている。離心率を e としたとき、太陽の位置は楕円軌道の中心から e だけずれた位置にあり、楕円の短半径は $\sqrt{1-e^2}$ となる。天体が反時計回りに公転していると仮定し、現在位置を P とす

る。近日点を A としたとき、天体が描く面積 S とは楕円軌道における扇形 OAP の面積である。面積速度一定の法則とは、面積 S が時間経過に対して一定の比率で増加するように天体が運動するという意味である。

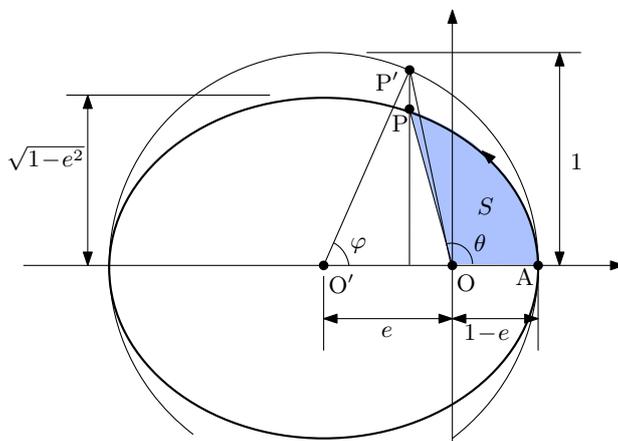


図 5.2: 公転する天体が描く面積

天体の位置を表すには、太陽からみた近日点との離角 (真近日点角) θ よりも図??に示す離心近日点角 φ を用いるほうが便利である。この図には、楕円軌道の短軸方向を $(1-e^2)^{-1/2}$ 倍した円を楕円軌道と中心が一致するように描き、天体の現在位置 P を短軸方向に $(1-e^2)^{-1/2}$ 倍した位置に点 P' をとっている。楕円軌道の中心 O' からみた点 P' の近日点との離角を離心近日点角 φ と定義する。このとき、扇形 $O'AP'$ の面積は $\varphi/2$ である。三角形 $O'OP'$ の面積が $e \sin \varphi / 2$ であるので、領域 OAP' の面積は $\varphi - e \sin \varphi$ である。よって、天体が描く面積 S は、 $S = (\varphi - e \sin \varphi) / 2$ なる関係を満たす。したがって、単位時間あたりの面積増加率 (面積速度) を $\omega/2$ とすれば、面積速度一定の法則は、

$$\varphi - e \sin \varphi = \omega t, \tag{5.3}$$

なる数式で表される。この方程式を φ について解けば、惑星の位置を計算できる。とはいえ、この方程式は厳密に解くことができず、数値解法によって未知数 φ を解決することになる。例えば、ニュートン法であれば初期解 φ_0 を設定し、漸化式:

$$\varphi_{n+1} = \frac{(\sin \varphi_n - \varphi_n \cos \varphi_n) e + \omega t}{1 - e \cos \varphi_n},$$

によって解を更新していけば、中間解 φ_n は真の解 φ に収束する。この解法は、察しがつくように離心率 e が大きくなると収束が悪い。精度として 10 進 10 桁を得るには、火星の離心率 $e = 0.9341$ では反復 3 回だが、水星の離心率 $e = 0.2056$ では反復 4 回、ハレー彗星の離心率 $e = 0.967$ では反復 8 回を要する。例示するならば、ハレー彗星の軌道計算では図 5.3 のような結果が得られる。図は 2061 年 7 月に予想されるハレー彗星の近日点通過まで

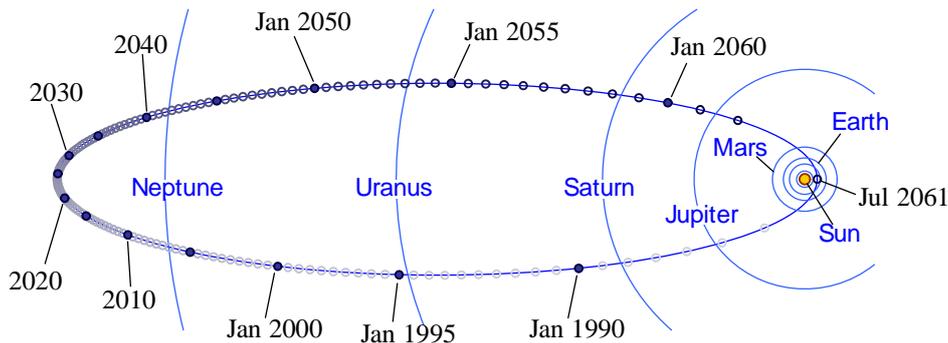


図 5.3: ハレー彗星 ($e = 0.967$) の軌道計算結果

を半年間隔でプロットした。ハレー彗星は大きな離心率をもつ軌道で公転する天体であり、遠日点は海王星の外側だが、近日点は金星の内側まで入り込む。約 76 年の公転周期の間、ケプラーの面積速度一定の法則のため、海王星軌道の外側で 35 年程度も滞在するが、逆に、木星軌道付近まで飛来したハレー彗星は約 1 年で近日点を通過するほどの速度に達する。実際の速度としては、遠日点で 0.913 km/s 、近日点では 54.4 km/s である。

5.1.2 火星の軌道計算

火星は、太陽系の惑星の中では水星の次に離心率が大きい軌道を公転する。離心率が大きく、地球のすぐ外側を公転する惑星のため、地球への接近も楕円軌道のどこで接近するかによって距離が異なる。本項では Quora の質問とともに火星の軌道を考察しよう。

Quora 質問 火星の公転周期の求め方を教えてください。

この質問に対しては、火星の軌道長半径がわかれば即座に公転周期が計算できる。火星の軌道長半径が 1.524 天文単位との情報があれば、公転周期は $1.524^{3/2} \simeq 1.88$ 年のように計算できるわけだ。しかし、この質問に対して、古代の人類が観測可能な情報で火星の公転周期を割り出す方法を回答した。その方法とは、火星が地球に接近する周期を使う方法だ。

地球の公転周期を T 、火星の公転周期を T_1 としたとき、接近周期 T' は、

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T'}$$

によって計算できる。この計算方法は単純である。左辺の第 1 項 $1/T$ は地球が単位時間に公転軌道を周回する回数を表している。第 2 項も同様で、 $1/T_1$ は火星が単位時間に公転軌道を周回する回数を表している。時間の単位に年を使うなら、1 年あたりに 360° の何倍を

公転するかということだ。第1項と第2項の差をとると、公転を角度(公転の回数)で見たときの地球と火星の公転の差となる。これが1回転分の差となる時間が接近周期である。そのような考察から、右辺が接近周期の逆数となる。火星の接近周期が780日(= 2.136年)であるので、上記の公式を利用し、

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \frac{1}{1\text{年}} - \frac{1}{2.136\text{年}} \approx \frac{1}{1.88\text{年}}$$

が計算できる。この計算結果から、火星の公転周期が約1.88年だとわかるわけだ。接近周期は、古代の観測でも可能だったので惑星が太陽の周りを公転している事実さえ受け入れれば、古代人でも火星の公転周期を計算できただろう。

上にも書いたように、火星は大きな離心率を持った楕円軌道を公転するので、地球への接近時は、軌道上のどこで接近したかによって地球との距離が異なる。実際、2018年8月に火星は近日点付近で地球と会合し、6000万kmを切る距離まで大接近した。この現象は火星大接近、あるいは、スーパーマーズと呼ばれた。そのような大接近は、15年あるいは17年間隔で発生する。

筆者は前項で紹介したケプラーの法則を使い、スーパーマーズ付近時期において火星と地球の軌道計算をし、その結果をQuoraのスペース **数幾何学 Qらぼらとりい** に投稿した。軌道計算によって、図??に示すように2018年8月に近日点付近で会合する様子が確認できる。内惑星である地球の方が速度が速いので、後ろから火星を追い抜く形で会合し

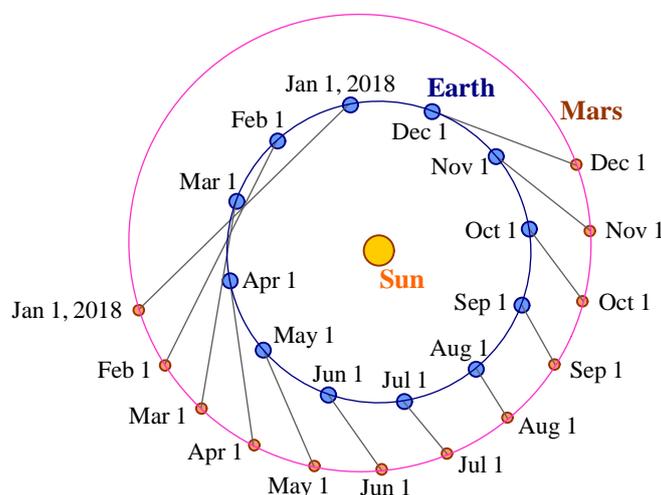


図 5.4: 火星大接近の付近の地球との位置関係

て、火星の前に抜けていく。火星の軌道の離心率は $e = 0.09341$ 程度だが、すぐ内側を公転する地球の軌道と比べると、火星の離心率が大きく感じる。近日点では地球軌道との距離が約5700kmであるのに対し、遠日点では地球軌道との距離が9900kmにもなるからだ。

地球と火星の距離の変化を調べてみよう。ケプラーの法則を解いて地球と火星の位置を計算し、それらの位置から距離を計算しプロットすると図??の上グラフのような曲線を描く。このグラフからも、火星が2年2か月の周期で地球に接近する様子がわかる。特に、

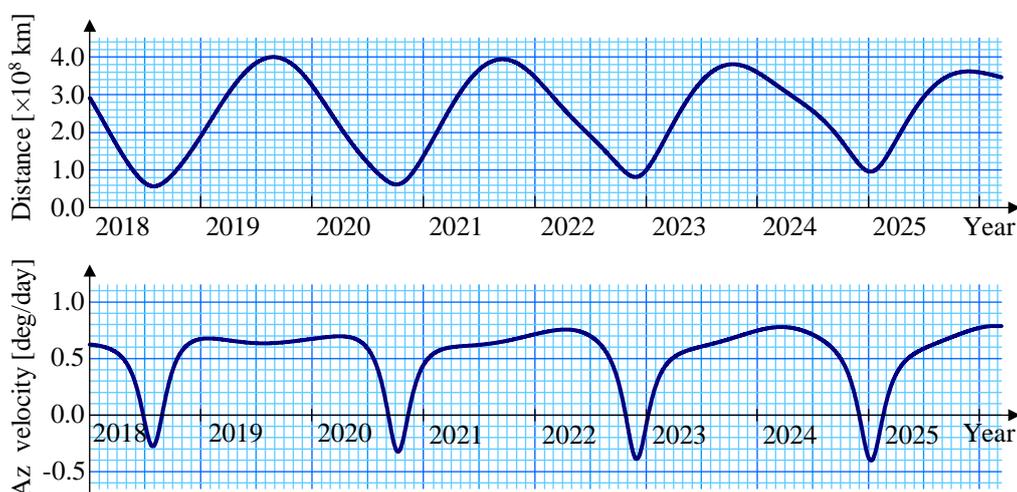


図 5.5: 火星までの距離 (上) と天球における火星の移動速度 (下)

2018年8月の会合で火星は地球に大接近し、距離が約5800万kmに迫る様子が図示されている。会合の位置は2年2か月の周期で徐々にずれ、2024年の会合では、遠日点付近で会合するため、会合時の距離は1億km程度しか小さくならない。

図5.5の下グラフには、天球における火星の移動速度をプロットした。惑星は公転しているため、概して黄経の正の方向に移動する。その運動が、天球上の星座から別の星座へ渡り歩いているように見える。それが惑星と呼ばれる所以である。ところが、会合の前後で、地球が追い越すときに、地球からの相対位置で外惑星は黄経の負の方向へ移動する。すなわち、外惑星は会合の前後で、見かけ上の逆行する。当然、その現象は火星でも生じる。その逆行現象は、グラフにおいて会合の前後で移動速度が負になっていることに相当する。なお、外惑星の逆行現象は、16世紀のコペルニクスの地動説の根拠となった。Quoraでは、次のように地球が公転している証拠を問う質問が投稿された。その質問に対して、筆者は火星の逆行現象を使って回答した。

Quora 質問 地球の自転はフーコーの振り子によって検証できるが、地球の公転を検証する身近な手段はありますか？

天体の公転軌道のスケールは地球のサイズよりもけた違いに大きく、直接的にその形状を視認することができないが、人類の観測によって地球さえも太陽の周りを公転していること、惑星が楕円軌道を描いていることなどの証拠が集まっていることに驚きを感じる。

5.2 宇宙規模での放物運動

物体を投げ上げると投げられた物体は放物線を描く。人工衛星の速度まで初速度を大きくすると物体は、もはや、放物線ではなく楕円軌道を描く。それはケプラーの法則にしたがっている。とはいえ、周回軌道を描くわけではなく、地表から投げ上げられた物体は地表に戻ってくる。例えば、地球の半径が無視できないくらいの長距離を射程とする大砲やミサイルの弾道はケプラーの法則の適用領域となる。そのような例として次の質問がQuoraに投稿された。

Quora 質問 射程数十キロの大砲を水平に撃っても、それは重力によって地球の形にそって曲がりますか？ そのまま真っ直ぐに飛びでるにはロケットでないとダメですか？

この質問の回答として、大砲の弾であっても、ロケットであっても、地球の重力の影響によって地球に向かって軌道が曲がる。地表近くの運動として、投げ上げた物体が棒物船を描くという、いわゆる放物運動は、地表近くの運動として成り立つ近似的な表現であり、地球の半径が無視できないくらいの大きな規模になると、ケプラーの法則による楕円軌道のモデルにしたがう。

打ち上げた弾道やロケットが推進システムを装備され、適切に加速度の方向や大きさを調整することができるのであれば、楕円軌道ではなく、直線的に地球の重力を振り切ることが可能になるが、ここでは地球の重力に任せてケプラーの法則にしたがう運動として解析しよう。水平方向から 45° 上方にロケットを打ち上げたときの軌道を図 5.6 に描いた。なお、図に記載した v_0 は初速度であり、打ち上げ後、推進がなく惰性で飛ぶものとした。さらに、空気抵抗や地球の自転・公転も考慮していない。上で述べたように、初速度を与えて、惰性で運動する軌道は、ケプラーの法則にしたがい、地球の中心を焦点とする楕円軌道を描く。ただし、初速度 11.5 km/h は第 2 宇宙速度を超えているので双曲線軌道を描く。初速度が 8.0 km/s において、すでに第 1 宇宙速度を超えていますが、斜めに打ち上げているため、地表に落下します。第 2 宇宙速度を超えなければ、地表に戻ってきますが、初速度が大きくなるほどに、離心率が大きくなる。

軌道のパラメータを紹介しておこう。地球の半径を R 、質量を M 、万有引力定数を G とする。打ち上げの初速度が v_0 、角度 θ_0 だけ上方に打ち上げる状況を考える。そのとき、離心率は、

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{2v_0^2}{V_1^2} - \frac{v_0^4}{V_1^4} \right) \cos^2 \theta_0}, \quad (5.4)$$

となる。この離心率の導出法は、後に説明することにしておく。なお、 V_1 は第 1 宇宙速度、

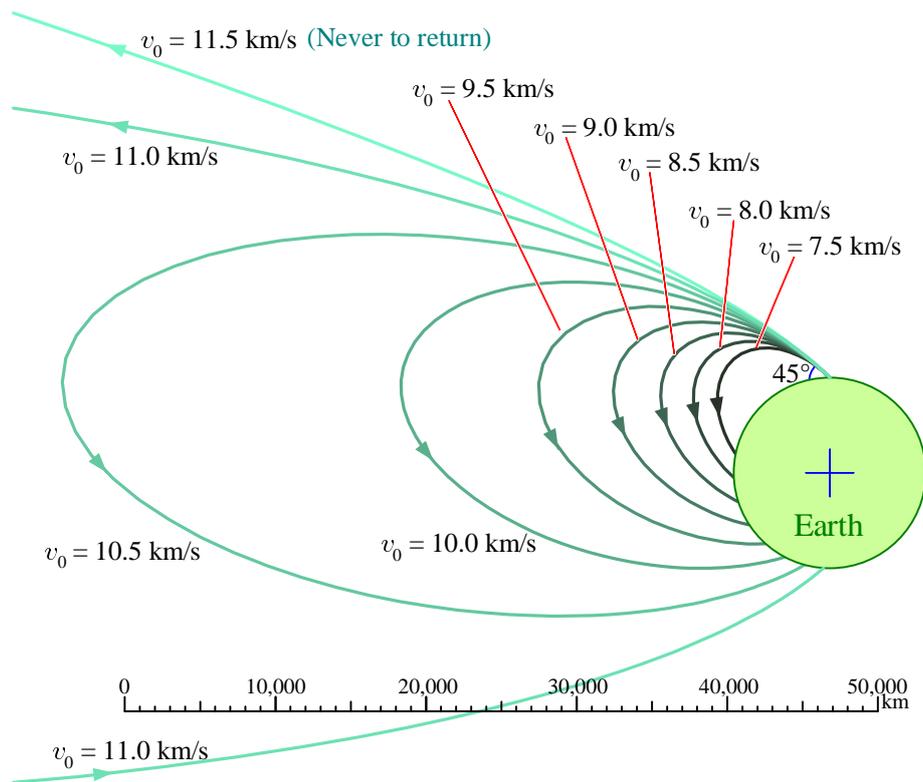


図 5.6: 地表から 45° 上方に投げ出された物体の軌道

すなわち,

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

である。数式 (5.4) から, $v_0 = \sqrt{2} V_1$ のとき, 離心率が $e = 1$ となることがわかる。その速度は, 軌道が放物線になり, 地球に戻ってこない最低速度であることを示唆している。第 1 宇宙速度の $\sqrt{2}$ 倍は第 2 宇宙速度なので, それは当然の性質だ。さらに, 方位角 φ において, 地球中心からの距離 r は,

$$r = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta_0}{V_1^2} \frac{R}{1 + e \cos \varphi},$$

のように計算できる。なお, ここでは $\varphi = 0$ が地球中心に対する最近点の方位とした。上図では, 打ち上げ位置が方位 $\varphi = \pi/2$ となるよう, 適切に方位を変換して軌道を描いた。

5.2.1 離心率の導出

離心率の導出にはエネルギー保存則と面積速度一定の法則を利用する。初期条件と知って, 半径 R で物体が水平方向から角度 θ_0 だけ上方に速度 v_0 で投げ上げられることを考え

る。そのとき、面積速度は $(Rv_0 \cos \theta_0)/2$ となる。面積速度一定の法則のため、投げ上げられた物体は、軌道のどこにいても面積速度はその値を保持する。その物体が距離 r で動径方向の速度成分がゼロになったとしよう。実際に、近点と遠点で速度成分がその条件を満たす。面積速度一定の法則から、そのような距離 r での物体の速度は $(R/r)v_0 \cos \theta_0$ となる。その条件からエネルギー保存則を記述すると、

$$-\frac{GM}{R} + \frac{1}{2}v_0^2 = -\frac{GM}{r} + \frac{R^2v_0^2 \cos^2 \theta_0}{2r^2},$$

となる。この方程式は、左辺が初期状態を表し、右辺が近点、または、遠点に相当する。この方程式は、

$$\frac{R^2v_0^2 \cos^2 \theta_0}{r^2} - \frac{2GM}{r} + \frac{2GM}{R} - v_0^2 = 0,$$

のように、 $1/r$ についての2次方程式である。この方程式を解くと、

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R^2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \left(GM \pm \sqrt{G^2M^2 - \left(\frac{2GM}{R} - v_0^2 \right) R^2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right),$$

なる解が得られる。ここで、第1宇宙速度 $V_1 = \sqrt{GM/R}$ を利用すると、上記の解は、

$$\frac{1}{r} = \frac{V_1^2}{Rv_0^2 \cos^2 \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2v_0^2}{V_1^2} - \frac{v_0^4}{V_1^4} \right) \cos^2 \theta_0} \right), \quad (1)$$

のように変形できる。この解の複号について、正符号が近点に、負符号が遠点に対応する。離心率を特定するにあたり、ケプラーの法則の解:

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + e \cos \varphi}, \quad (2)$$

に注目しよう。なお、 φ は方位角であり、 $\varphi = 0$ が近点、 $\varphi = \pi$ が遠点に対応する。ケプラーの法則の解 (2) から、遠点の距離 r_{\max} と近点の距離 r_{\min} は、

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - e}, \quad r_{\min} = \frac{r_0}{1 + e},$$

であることがわかる。これらの数式から離心率 e を特定すると、

$$e = \frac{1/r_{\min} - 1/r_{\max}}{1/r_{\min} + 1/r_{\max}}, \quad (3)$$

が得られる。距離 r_{\max} と r_{\min} が距離の逆数 (1) において負符号と正符号に対応していることに注意すると、(5.4) のように離心率が特定できる。

5.2.2 物体の落下時間

前項で計算した軌道は、大陸間弾道ミサイルが一つの例である。地球の半径と比較できる、もしくは、それより大きな地上高まで上昇する場合、投げ上げた場所から最高点に到達するまでの時間を考察しよう。状況としては、図 5.7 に示すように、点 P_0 から発射され、点 P_1 で最高点に到達し、点 P_2 に落下する過程を想像すればよい。この軌道は、いうまでもなく、ケプラーの法則にしたがう楕円軌道である。

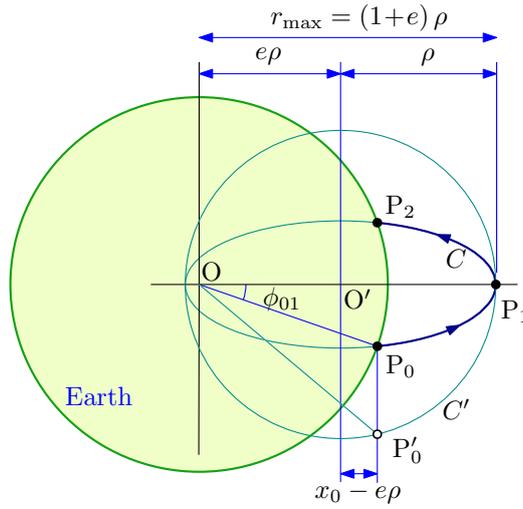


図 5.7: 地表から投げ出された物体の軌道

初期条件として、投げ上げる速度は、水平方向に $\alpha_h V_1$ 、垂直方向に $\alpha_v V_1$ とする。結果を書くとき、最高点に達するまでの時間は、

$$t_{01} = \sqrt{\frac{R^3}{(2 - \alpha^2)^3 GM}} \left(\alpha_v \sqrt{2 - \alpha^2} + \arctan \frac{\alpha_v \sqrt{2 - \alpha^2}}{1 - \alpha^2} \right), \quad (5.5)$$

となる。なお、 $\alpha^2 \equiv \alpha_h^2 + \alpha_v^2$ である。言い換えると、公式 (5.5) で用いた α は前項で初速度 ($v_0 = \alpha V_1$) に用いた α と同一である。また、水平方向の初速度で導入した α_h も、 $v_0 \cos \theta_0 = \alpha_h V_1$ であることに注意しておこう。

発射された物体が描く楕円軌道とその離心率は (5.4) で与えられているが、ここでは第 1 宇宙速度に対する倍率 α などを用いて書き換えておく。そうすると、

$$e = \sqrt{1 - (2 - \alpha^2) \alpha_h^2}, \quad (5.6)$$

のように記述が簡単になる。前項の計算過程を拝借すると、最高点 P_1 での距離は、

$$\frac{r_{\max}}{R} = \frac{1 + \sqrt{1 - (2 - \alpha^2) \alpha_h^2}}{2 - \alpha^2} = \frac{1 + e}{2 - \alpha^2}, \quad (5.7)$$

のように書くことができる。この数式から、軌道長半径に関して、

$$\frac{\rho}{R} = \frac{1}{2 - \alpha^2}, \quad (5.8)$$

が成り立つことがわかる。例えば、点 P_0 から初速度 $v_0 = 7000$ m/s で角度 $\theta_0 = 65^\circ$ に投げ上げた場合、 $\alpha_h = 0.37434$, $\alpha_v = 0.80277$, $\alpha = 0.88576$ となる。その初速度によって軌道の離心率は $e = 0.91087$, 最高点 P_1 の位置は $r_{\max}/R = 1.5722$, すなわち、 $r_{\max} = 10027$ km となる。地表からの高さに換算すると、高さ 3649 km に達するということだ。投げ上げてから最高点に達するまでの時間は、 $t_{01} = 1335$ s, すなわち、22 分 15 秒となる。さらに、地球中心 O から点 P_0 と点 P_1 を見込む角度を ϕ_{01} とすると、

$$\phi_{01} = \arctan \frac{\alpha_h \alpha_v}{1 - \alpha_h^2}, \quad (5.9)$$

であることがわかる。これを利用すると、投げ上げた物体が最高点に到達した後に落下するまでの地点は、地表面の沿って測った長さとして、

$$L_{02} = 2R\phi_{01} = 2R \arctan \frac{\alpha_h \alpha_v}{1 - \alpha_h^2},$$

となる。つまり、初速度 7000 m/s で 65° だけ上方に発射した物体は、44 分 30 秒後に約 4290 km だけ隔てた地点に落下するのだ。ここで紹介した公式を次の段落で導出しよう。

導出過程 地表に落下する場所を特定するには、楕円軌道と地表の交点を計算すればよい。地球の半径で正規化した座標 $[x, y]$ を使うことにすると、地表は、

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (1)$$

なる単位円に相当する。それに対し、打ち上げられた物体の軌道は、

$$(x - e\rho)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \rho^2, \quad (2)$$

のように記述できる。これらの方程式を連立方程式として解くと、

$$x = \frac{R - (1 - e^2)\rho}{e}, \quad (3)$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{(1 - e^2)[2\rho R - (1 - e^2)\rho^2 - R^2]}}{e}, \quad (4)$$

が得られる。注意すべきこととしては、2 次方程式の解である x が一つだけ選ばれていることである。本来、解 x は二つ出てくるのだが、選択が悪いと $y (= \sqrt{R^2 - x^2})$ が虚数になるのだ。つまり、 y が実数になるような解を選んだというわけだ。いうまでもなく、特定し

た x と y は物体を発射した場所 P_0 と落下場所 P_2 の座標である。明確に発射場所 P_0 の座標として, $[x_0, y_0]$ なる記号を使うことにすると,

$$x_0 = \frac{R - (1 - e^2)\rho}{e}, \quad (5)$$

$$y_0 = -\frac{\sqrt{(1 - e^2)[2\rho R - (1 - e^2)\rho^2 - R^2]}}{e}, \quad (6)$$

となる。点 P_0 は楕円軌道の中心 O' を帰順した座標では,

$$x'_0 = x_0 - e\rho = \frac{R - \rho}{e},$$

となる。ここで, 図 5.7 に示すように, 点 O' を中心に半径 ρ で円 C' を描いておこう。点 P_0 を x 軸と直交する方向に延長し, 円と交わる点を P'_0 とする。そのとき, 点 P'_0 の y 座標 y'_0 は,

$$y'_0 = -\sqrt{\rho^2 - x_0'^2} = -\frac{\sqrt{2\rho R - R^2 - (1 - e^2)\rho^2}}{e},$$

となる。ここで面積速度一定の法則を思い出そう。面積速度一定の法則とは, 重力源から見込んだときに公転する物体が描く面積が, 単位時間あたりに一定であるという法則だ。その法則の見方を変えると, 重力源から見込んだ面積を計算できれば, 物体がその経路を移動する時間が割り出せることになる。見込んだ面積は本来, 楕円軌道上の面積なのだが, 先ほど描いた円の面積で考えてもよい。なぜなら, 円の面積は楕円の面積に定数を乗じただけの違いしかないからだ。物体が投げ上げ点 $[x'_0, y'_0]$ から最高点に到達する間に, 重力源から見込む面積は,

$$S_{01} = \frac{1}{2} \left(\rho \sqrt{2\rho R - R^2 - (1 - e^2)\rho^2} + \rho^2 \arctan \frac{\sqrt{2\rho R - R^2 - (1 - e^2)\rho^2}}{R - \rho} \right),$$

となる。円 C' の面積 $\pi\rho^2$ が楕円軌道を公転する周期:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho^3}{GM}},$$

に相当する (何らかの定数を乗じた) 量である。面積の比例関係から, 点 P_0 から最高点 P_1 に到達するまでの時間を計算すると,

$$t_{01} = \sqrt{\frac{\rho}{GM}} \left(\sqrt{2\rho R - R^2 - (1 - e^2)\rho^2} + \rho \arctan \frac{\sqrt{2\rho R - R^2 - (1 - e^2)\rho^2}}{R - \rho} \right),$$

が得られる。最後に, 軌道長半径についての関係式 (5.8) と離心率 (5.6) に注意して数式を整理すると,

$$t_{01} = \sqrt{\frac{R^3}{(2 - \alpha^2)^3 GM}} \left(\alpha_y \sqrt{2 - \alpha^2} + \arctan \frac{\alpha_v \sqrt{2 - \alpha^2}}{1 - \alpha^2} \right),$$

のように、いささか簡略化された数式 (5.5) が得られた。ついでに、 $\alpha \ll 1$ の想定で、 t_{01} を α について 1 次近似をとってみよう。機械的に数式変形すると、

$$\begin{aligned} t_{01} &\simeq \sqrt{\frac{R^3}{8GM}} \cdot \sqrt{8} \alpha_v = \frac{R^2}{GM} \sqrt{\frac{GM}{R}} \frac{v_0 \sin \theta_0}{V_1} \\ &= \frac{V_1}{g} \cdot \frac{v_0 \sin \theta_0}{V_1} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}, \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 g は地表での重力加速度だ。得られた近似式は重力加速度 g の一様な重力による現象と一致する。

地球の中心 O から発射地点 P_0 と最高点 P_1 を見込む角度は、 $\phi_{01} = \arctan(y_0/x_0)$ によって計算できる。この量も機械的に計算すると、

$$\begin{aligned} \phi_{01} &= \arctan \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sqrt{(1-e^2)[2\rho R - (1-e^2)\rho^2 - R^2]}}{R - (1-e^2)\rho} \\ &= \arctan \frac{\sqrt{(2-\alpha^2)\alpha_h^2 [2(2-\alpha^2) - (2-\alpha^2)\alpha_h^2 - (2-\alpha^2)^2]}}{2-\alpha^2 - (2-\alpha^2)\alpha_h^2} \\ &= \arctan \frac{(2-\alpha^2)\alpha_h \sqrt{\alpha - \alpha_h^2}}{(2-\alpha^2)(1-\alpha_h^2)} = \arctan \frac{\alpha_h \alpha_v}{1-\alpha_h^2}, \end{aligned}$$

がえられる。これで、公式 (5.9) が得られたわけだ。発射点 P_0 から落下点 P_2 までの地表に沿った長さは、角度 ϕ_{01} を 2 倍して R を乗じればよいので、ただちに、

$$L_{02} = 2R\phi_{01} = 2R \arctan \frac{\alpha_h \alpha_v}{1-\alpha_h^2},$$

が得られる。この数式についても、 $\alpha \ll 1$ で近似をとってみよう。その結果として、

$$\begin{aligned} L_{02} &\simeq 2R\alpha_h \alpha_v = 2R \frac{v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{V_1^2} \\ &= 2R \frac{R}{GM} v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}, \end{aligned}$$

のように一様な重力による現象と一致した。

5.3 宇宙開発とスペースデブリ

宇宙開発が将来に向かって加速していく中で、スペースデブリの危険性について考えてみよう。ここでは、地表からの高度が 410 km の国際宇宙ステーションで、船外活動時に誤って落とした工具の運動を考えてみる。この考察は、Quora に投稿された次の質問が発端になっている。

Quora 質問 宇宙遊泳中に、地球に向かって一生懸命レンチを投げたらどうなりますか？ レンチは地球の大気圏に入り、燃え尽きますか？

質問は一生懸命にレンチを投げた場合での想定であるが、初速度を小さくすれば、誤って落とした工具にも適用できる。工具が素直に落下して地球の大気圏に達してくれれば、大気の摩擦(本当は断熱圧縮)によって燃え尽きてくれるのだが、大気圏に届くかどうかの考察から始めた方がよいだろう。

5.3.1 落とした工具の軌跡

これまでの考察で導出した公式を利用し、船外活動中に誤って落とした工具の軌道を計算してみよう。ある高度を境に明確に大気圏が現れるわけではないが、高度 100 km 以内に落下すれば工具が大気の影響で燃え尽きてくれると(単純に)考えてみよう。後に計算結果を説明するとおり、誤って落下させた程度の初速度では工具は大気圏まで落下できない。大気圏へ到達するためには、初速度 366 m/s 以上で下方に投げる必要がある。言い換えると、人間の力で投げただけでは、工具はわずかに楕円軌道を描くことになるが、大気圏に到達しないのだ。大気の摩擦を無視したとき、工具がさらに地表まで到達するには 492 m/s を超える速さが必要である。

地球の半径を R 、宇宙ステーションの高さを h_0 、大気圏上端の高さを h_1 とする。その条件では、数式 (5.4) の議論において、 R を $R + h_0$ で置き換える。その結果、第 1 宇宙速度は、

$$V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R + h_0}} = 7.660 \times 10^3 \text{ m/s}, \quad (1)$$

のように計算できる。ここで、工具を投げる速度を v とすると、上の数式に対しては、

$$v_0^2 = V_1^2 + v^2, \quad \cos^2 \theta_0 = \frac{V_1^2}{V_1^2 + v^2}, \quad (2)$$

となるので、離心率を特定する公式 (5.4) が、

$$e = \frac{v}{V_1}, \quad (3)$$

のように非常に簡単な数式に書き換えられる。しかも、方位 φ において地球の中心からの距離を計算する数式も、

$$r(\varphi) = \frac{R + h_0}{1 + e \cos \varphi}, \quad (4)$$

のように簡単な数式に変形できる。この軌道が最も地球中心に近づく距離は、 $(R+h_0)/(1+e)$ となる。これが、大気圏の中に入る条件は、

$$\frac{R+h_0}{1+e} < R+h_1,$$

です。これを解くと、

$$e > \frac{R+h_0}{R+h_1} - 1 = 0.0453,$$

となるので、(3)によって工具を投げる速度が、

$$v > eV_1 = 0.0453 \times 7.660 \times 10^3 \text{ m/s} = 347 \text{ m/s},$$

であることが算出される。工具が地表に届く条件も同様に計算できる。一例として、初速度 200 m/s で落下した工具の軌道を計算すると、図 5.8 のようなわずかに扁平した楕円軌道を描くことがわかる。その初速度は人間の投球スピードをはるかに超えているが、その

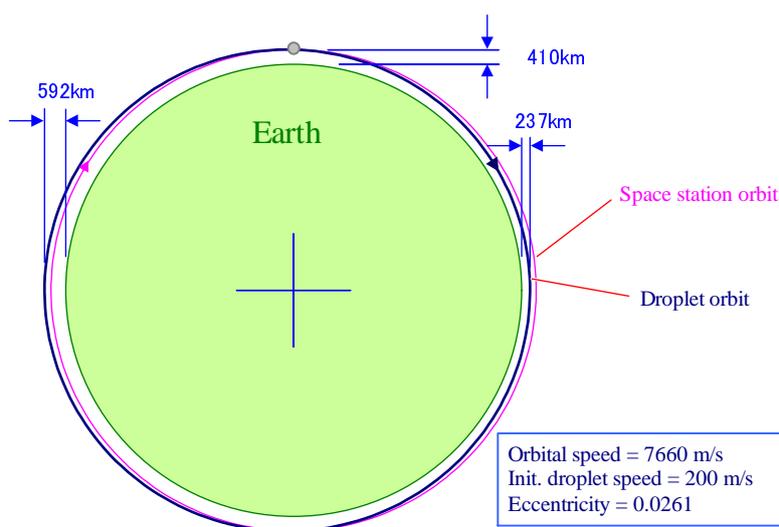


図 5.8: 初速度 200 m/s で投げ出された工具の軌道

程度の離心率しか与えられないのだ。人間の投球スピード、あるいは、不注意で手を滑らせた程度の初速度では、軌道の離心率はさらに小さくなる。

上に書いたように、これくらいの速さ (200 m/s) では工具は大気圏に達することもできない。その計算結果は、宇宙ステーションでの船外活動に対して大きな注意を発することになる。大気圏に達してくれれば、燃え尽きてしまうだろうが、大気圏に達しなければ作業中に落とした工具はスペースデブリとして地球を周回し続けることを示唆する。言い換えると、船外活動には工具の落下防止が極めて重要となる。

5.3.2 工具の相対的位置

船外各堂で落下他工具は宇宙ステーションとの位置関係はどのように変化するかを考察しよう。上の計算では、わずかに扁平した楕円軌道を描くことがわかった。相対位置が宇宙ステーションに近づくことがあれば、工具を回収できるかもしれない。次の段落で説明するシミュレーション結果によると、宇宙ステーションが軌道を周回する間に、不注意で落下した工具は再び宇宙ステーションに接近し、回収できる可能性がある。初速度が大きいと、宇宙ステーションに戻ってきたとしても、宇宙ステーションと工具の周期に違いが生じ、接近点のずれが大きくなる。ずれが大きくなると回収できずに、工具はスペースデブリとなる。不注意で落とした工具は初速度が小さいため、接近点のずれが回収可能な範囲に収まるという計算になる。

初速度 10 m/s で投げ込んだ工具が描く軌跡を宇宙ステーションから見た座標で表している。地表からの高さ 410 km で周回する宇宙ステーションを原点におき、その軌道は x 軸の負の方向が周回方向の前方、重力が作用する方向(下方)は y 軸の負の方向として図を描いた。そのシミュレーション条件では、工具 8.87 km 程度落下した後上昇し、宇宙ステー

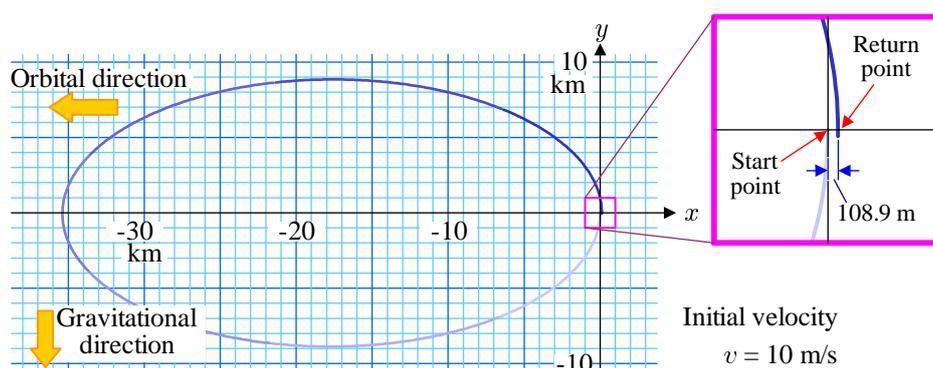


図 5.9: 初速度 10 m/s で投げ出された工具の相対位置

ションの前方 35.4 km を上昇した後、向きを変えて宇宙ステーションより 8.85 km だけ上まで上昇して、落下に転じて宇宙ステーションに接近するが、約 108.9 m 後方に落下する。宇宙ステーションの大きさや工具を落とした場所などの条件によっては回収可能となるだろう。意識的に投げ込んだのではなく、不注意で落下した工具ならば初速度はもっと小さいはずだ。例えば、初速度が 1 m/s ならば、工具が戻る位置は約 1 m だけ後方となる。それならば工具は十分に回収可能だろう。

工具がずれた位置に戻ってくることについて補足しておこう。工具はわずかに扁平した楕円軌道を描くので、工具はまったくずれずに一定の軌道を描く。戻ってきた位置がずれるのは、あくまでも、宇宙ステーションを基準にした相対位置を議論しているからだ。初速度 v で投げ込まれた工具は、 $e = v/V_1$ の離心率の楕円軌道を描く。その楕円軌道は、宇宙ス

ーションの円軌道よりも $1/(1-e^2)$ 倍だけ長半径が大きくなる。そのため、工具の公転周期は宇宙ステーションの約 $1+3e^2/2$ 倍だけ長くなる。つまり、工具が1周期だけ交点したとき、宇宙ステーションは、時間にして既に $3e^2T/2$ だけ前方を周回していることになる。ここで、 T を宇宙ステーションの公転周期とした。これは長さにとすると、 $\Delta x = 3e^2V_1T/2$ に相当する。その量がずれの大きさであり、整理すると、

$$\Delta x \simeq \frac{3\pi v^2(R+h)}{V_1^2} = \frac{3\pi(R+h)^2v^2}{GM},$$

が得られる。この近似式で計算すると、 $v = 10 \text{ m/s}$ のとき $\Delta x \simeq 109.0 \text{ m}$ となり、上に書いた計算結果をよく近似できている。得られた近似式から、戻って来た位置のずれは初速度の自乗に比例することがわかる。

5.4 地球貫通トンネル

中心を通り、地球を貫通するトンネルを掘ったとすると、何が起きるか？ 重力を使って加速し、地球の反対側まで短時間で移動する、または、物品を輸送することはできないか？ そのようなトンネルの建設は極めて非現実的だが、そのような仮想的なトンネルに関する物理現象を考察しよう。

5.4.1 球対称の重力源

球対称な密度をもつ球体において、その内部に観測点を設定した場合、その観測点で受ける万有引力は、観測点より内部の球体による万有引力と等しい。さらに正確に言うと、球全体が一様でなくても、密度が球対称ならば（密度が中心からの距離のみに依存するなら）、観測点で受ける万有引力は、観測点より内側の球体による万有引力と等しい。当然、観測点の外側からも万有引力は受けているが、結果的に外側からの万有引力が相殺されるので、観測点で受ける万有引力の合力は、内側の寄与しか残らない。

上に書いたことは、高校の物理学でも取り扱い、筆者も高校時代に、地球を貫通するトンネルに物体を落とすと単振動運動することを確認した。地球の内部に入った物体にとって、本当に自分の内部の質量しか重力に寄与しないのは本当なのか？ Quora でもそのような質問が投稿された。

Quora 質問 質量の密度が一様な球体 (半径 R) の中に物体があるとき (中心からの距離 r , $r < R$)、物体は半径 r の球体による万有引力しか受けないってほんとはですか？

外側からの万有引力の寄与が相殺することは、図 5.10 によって説明できる。球体の中心 O から距離 r だけ離れた位置に観測点 P を設定する。この観測点から、図に描いたように、左右に微小立体角 $d\Omega$ で見込む微小体積による万有引力の寄与を考える。微小体積は中心

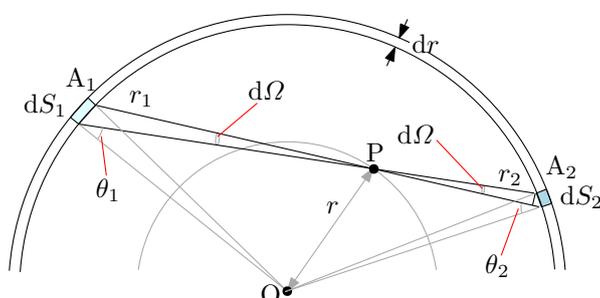


図 5.10: 球対称の質量分布における重力の寄与

から $R > r$ だけ離れた球殻状にあり、球殻の厚さが dr とする。左の微小体積の位置を A_1 、右の微小体積の位置を A_2 、観測点 P から A_1 までの距離を r_1 、一方、 A_2 までの距離を r_2 とする。そのとき、観測点 A_1 において、立体角 $d\Omega$ が見込む面積は $r_1^2 d\Omega$ である。しかし、球殻は線分 $\overline{PA_1}$ と直交するとは限らないので、その面積は dS_1 とは等しくない。具体的には、線分 $\overline{PA_1}$ と線分 $\overline{OA_1}$ がなす角を θ_1 としたとき、

$$dS_1 = \frac{r_1^2}{\cos \theta_1} d\Omega, \quad (1)$$

となる。同様に、 A_2 で微小立体角 $d\Omega$ が見込む面積は、

$$dS_2 = \frac{r_2^2}{\cos \theta_2} d\Omega, \quad (2)$$

となる。ここで、三角形 OA_1A_2 が二等辺三角形であることに注意すると、 $\theta_1 = \theta_2$ であることがわかる。それを考慮して、(1) と (2) を、

$$dS_1 = \frac{r_1^2}{\cos \theta_1} d\Omega, \quad dS_2 = \frac{r_2^2}{\cos \theta_1} d\Omega,$$

のように書き換えておく。ついでに、原点から R だけ離れた位置で、密度が $\rho(R)$ のように R の関数になっているとしよう。そのとき、 A_1 における微小体積の質量は、

$$dM_1 = \rho(R) dS_1 dr = \frac{r_1^2 \rho(R)}{\cos \theta_1} d\Omega dr$$

である。同様に、 A_2 における微小体積の質量は、

$$dM_2 = \rho(R) dS_2 dr = \frac{r_2^2 \rho(R)}{\cos \theta_1} d\Omega dr,$$

となり。観測点 P に置いた単位質量が A_1 の微小体積から受ける万有引力の大きさは、

$$dF_1 = \frac{G dM_1}{r_1^2} = \frac{G \cdot r_1^2 \rho(R)}{r_1^2 \cos \theta_1} d\Omega dr = \frac{G\rho(R)}{\cos \theta_1} d\Omega dr,$$

となる。同様に、観測点 P に置いた単位質量が A_2 の微小体積から受ける万有引力の大きさは、

$$dF_2 = \frac{G dM_2}{r_2^2} = \frac{G \cdot r_2^2 \rho(R)}{r_2^2 \cos \theta_1} d\Omega dr = \frac{G\rho(R)}{\cos \theta_1} d\Omega dr,$$

となる。その結果、 $dF_1 = dF_2$ 、すなわち、 A_1 と A_2 からの万有引力の寄与が互いに等しいことがわかる。しかも、それらの重力の寄与は互いに逆方向を向いているので、それらの合力は相殺してゼロになる。半径 R の球殻すべてにおいて、観測点 P から見て互いに相殺するペアをつくることのできるため、観測点より外側にある球殻全体からの万有引力の寄与も相殺されることになる。この関係は、観測点より外側であれば、必ず成立するので、密度が球対称である物体は観測点より外側からの万有引力の寄与はすべて相殺し、内側の球体からの寄与のみが残る。

自分より内部に存在する質量しか万有引力に寄与しないということは、地球の中心は無重力状態ということだ。地球を貫通するトンネルを掘って、その中央に置いた物体には重力が作用しないことになるので、物体はトンネルの中央で静止して漂うことになる。それでは、地表からトンネルの内部に物体を落とすとどのような運動をするだろうか？ その疑問は Quora にも投稿されている。

Quora 質問 仮に地球の反対側まで穴を開けられるとします。その穴に物を落とすと、どんな動きをするのでしょうか？ その物は地球の真ん中に来た時点で浮遊して止まるのでしょうか？

地球の内部に物体があることを考え、物体から地球の中心までの距離を r とする。地球が一様な球体であるならば、自分より内側の質量は r の 3 乗に比例する。その重力源の重心が地球の中心であるから、物体に作用する重力は r の自乗に反比例する。したがって、物体に作用する重量は、 r に比例することになり、

$$F = -\frac{GMm}{R^3}r,$$

のように書くことができる。なお、 m は落とした物体の質量である。この力はばねにおけるフックの法則 $F = -kx$ と同じ形になっているので、落下した物体は地球の中心を通過し、反対側で引き戻され、単振動することになる。単振動の周期が $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ であることに注意すると、地球を貫通するトンネルでの振動の周期は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}, \tag{5.10}$$

である。地球の質量 $M = 5.972 \times 10^{24}$ kg, 半径 6.378×10^6 m を代入すると, この周期は約 84 分となる。つまり, トンネルに落とした物体は, 約 42 分で地球の反対側に届き, 重力で引き戻されて 84 分で手元に戻ってくるのだ。しかも, その時間は地峡すれすれを飛ぶ人工衛星の公転周期と一致する。仮に, 反対側で物体を引き上げることができれば, 地球の裏側までわずか 42 分で物体を輸送できることにもなる。とはいえ, 次項で議論するように, そのトンネルには空気が流れ込み, 物体の輸送を阻むのである。

5.4.2 トンネル中心部の気圧

すでにトンネルを使って地球の裏側への物体の輸送を考えたが, 現実的には, そのトンネルに空気が流れ込み, 中心部ではかなり高圧になる。どれくらいの圧力になるのか, Quora でも質問が投稿されている。その質問の回答として, トンネルに流れ込んだ空気の圧力を考察しよう。

Quora 質問 地球の中心まで達する縦穴を掘ったとして, いちばん下では空気圧は何気圧になりますか?

流れ込んだ空気が, 上から圧縮されて, 中心付近のみならず, 地表の近くでも液化/固化することが計算によってわかる。その結果として, トンネル中心では約 31 万気圧に達する。

空気が理想気体であり, どこまでも圧縮できるモデルを使うと, トンネルの中心では 1.5×10^{162} 気圧というとんでもない高圧が計算される。このような高圧を実現するには, 機体の原子核がほぼ重なるくらいの高密度状態でなければならず, そのような状況は非現実的である。現実的には, ある程度の圧力で空気は液化/固化するはずなので, 10^{162} 気圧にはならない。ある深さで空気が液化したとの前提を設け, 計算を引き継いでみよう。

理想気体モデル 理想気体モデルでの計算には, 完全流体の基礎方程式:

$$\int \frac{dp}{\rho} + U(r) = \text{const},$$

を利用する。ここで, p は空気の密度, $U(r)$ が重力場のポテンシャル (単位質量あたりのポテンシャルエネルギー) である。なお, 基本方程式には通常, 流体の速度が含まれるが, ここでは流れを考えないので速度に関する項を省略した。さらに, 座標 r は地球の中心から測った距離だ。つまり, 地表は $r = R_0$ である。基礎方程式の両辺を微分すると,

$$\frac{dp}{\rho} = - \frac{dU}{dr} dr,$$

のように変形される。ここで、空気の密度 ρ は、理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ から、

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{RT},$$

であることがわかる。ここで、 V が気体の体積、 n が V に含まれる気体分子のモル数、 R が気体定数 ($= 8.31 \text{ J/mol K}$)、 T が絶対温度です。さらに、 M が 1 モル当たりの気体の質量 ($= 28.8 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$) です。一方、ポテンシャル U は、

$$U = \frac{g}{2R_0} r^2,$$

である。ここで、 g は地表での重力加速度 ($= 9.8 \text{ m/s}^2$)、 R_0 は地球の半径 ($= 6.378 \times 10^6 \text{ m}$) である。したがって、完全流体の基礎方程式は、

$$\frac{RT}{M} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_0} r dr,$$

なる形で記述される。この微分方程式を解くと、

$$p(r) = p_0 \exp \left[\frac{Mg}{2RT \cdot R_0} (R_0^2 - r^2) \right],$$

が得られます。ここで、 p_0 は積分定数であり、地表 ($r = R_0$) における気圧に相当する。絶対温度が $T = 290 \text{ K}$ の条件で、地球中心の気圧を計算すると、 $p(0) = 1.5 \times 10^{162} p_0$ 、すなわち、 1.5×10^{162} 気圧というとんでもない値が算出される。さすがに、この計算結果は非現実的と考えるべきであり、次の段落のように空気が液化/固化することを前提に計算するべきである。

液化空気モデル 上記のとんでもない圧力は、空気がどこまでも圧縮できるモデルを使ったことが起因する。圧力が高くなると、然るべき条件で液化し、それ以上圧縮できなくなる。簡易的な設定として、1000 気圧で空気は液化することにして計算しよう。液化した空気の密度は、水と同じ $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ とする。

準備として、空気が液化する r を計算しておこう。上で導出した結果を用いて、 $p(r) = 1000p_0$ となる r を特定するのだ。その結果、 $r = 6.318 \times 10^6 \text{ m}$ が得られる。その系結果は、地下たったの 60 km で空気は液化してしまうことを意味する。

次に液化した空気の圧力を計算する。地球の中心に至るまで空気は液体で、しかも、完全流体とする。完全流体の基礎方程式は、

$$\frac{dp}{\rho} = -\frac{g}{R_0} r dr,$$

だが、液化した空気がそれ以上圧縮できないと仮定し、 ρ を定数とする。その条件で微分方程式を解くと、

$$p(r) = p_c - \frac{\rho g}{2R_0} r^2,$$

が得られる。ここで、 p_c は地球中心での圧力を意味する積分定数だ。準備段階で得た結果に基づき、 $r = 6.318 \times 10^6$ m で 1000 気圧になるように p_c を決定すると、

$$p_c = 3.14 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 = 3.10 \times 10^5 \text{ atm}, \quad (5.11)$$

が得られる (atm は「気圧」の意味)。したがって、高圧のため空気が液化したと仮定すると、地球中心での気圧は約 31 万気圧と算出された。

5.5 天体の視等級

簡単なモデルとして、光は距離が延びるとともに面積でエネルギーが拡散するので、観測される光の強度は距離の自乗に反比例する。そのような逆自乗則によって恒星の絶対等級が換算され、絶対等級は恒星が放出するエネルギーの強度を比較する尺度として用いられる。惑星の場合、太陽から惑星へ放射される光の強度が逆自乗則にしたがい、惑星表面で反射された光も逆自乗則で拡散する。その場合、光を反射している惑星を新たな光源と見立てて、逆自乗則のもとで観測される光の強度を計算すれば惑星の視等級も計算できる。

5.5.1 太陽から見た惑星の視等級

対応の位置から惑星を見るとどのような強度で見えるだろうか？ 下に掲げる Quora の質問に回答してみた。実際には、太陽自身の光が強すぎて観測を阻むだろうが、その影響を考慮せずに計算した。

Quora 質問 太陽から各惑星は、肉眼ならどう見えていますか？

厳密には、ある程度離心率が大きく、無視できないくらい距離が変化する惑星がある (水星と火星) が、平均距離で強度を計算した。その計算結果として下表が得られた。木星から外側の天体は、地球から見た視等級とほぼ同じ値になった。

太陽から見ると、すべての惑星の中で金星が最も明るい。金星は距離が近いだけでなく反射率が高い (75%) ので明るいのが視等級が高くなる。水星は太陽から最も近いが、小さな天体であり、反射率が小さい (11%) ので、金星ほど明るくならない。地球は -3.8 等級

表 5.2: 太陽から見た惑星の視等級

天体	平均距離 [au]	視等級
水星	0.3871	-4.5
金星	0.7223	-5.8
地球	1.0000	-3.8
火星	1.5237	0.4
木星	5.2026	-2.2
土星	9.5549	0.9
天王星	19.2184	5.7
海王星	30.1104	8.0
月	1.0000	0.3

なので、地球から見える金星程度の明るさである。計算結果によると、太陽自身の光による邪魔を考えなければ土星まではしっかりと見えることになる。天王星もかろうじて見える範囲だろう。

太陽から見ると、地球の近傍に月が視認できるかもしれない。地球も月も肉眼で見える十分な明るさであり、太陽から見た地球と月の視距離が 0.14° (地球から見た月の視直径の約3分の1) なので判別もできることが推測できる。

上記の計算には、次の数式を利用した。

$$\text{A.M.} = -26.74 - 2.5 \log_{10} \frac{\eta R_0^2 r^2}{R^4}. \quad (5.12)$$

ここで、 R_0 は太陽から地球までの距離、 R は太陽から対象天体までの距離、 r は対象天体の半径、 η は対象天体の反射率だ。この数式は、地球から見た太陽が -26.74 等級であることを利用し、最終的に観測点に到達する天体からの反射光の強さを、地球から見た太陽光との仕事率密度 (単位は W/m^2) の比率で計算している。

5.5.2 金星の明るさ

Quora の質問ではなく、Quora で筆者が公開しているスペース **Sci-Dog ブログ** に掲載した記事から金星の明るさを計算した結果を紹介しよう。距離と明るさの関係は既に述べたように逆自乗則なのだが、金星のような内惑星は、太陽、金星、地球の位置関係によって満ち欠けを生じるので、その影響を考慮しなければならない。

地球と金星の位置関係と満ち欠けは図 5.11 に示すような対応関係になっている。金星のような内惑星は、位置関係によっては、太陽光が当たっていない面が地球を向くことがあるので満ち欠けが生じるのだ。図に示すように、地球に近いほど欠けが大きい。距離が近

くなつたとしても、欠けが大きくなると明るさは小さくなるので、視等級の計算がややこしくなるわけだ。地球の公転軌道の長半径は1億4960万km、金星の公転軌道は1億0821

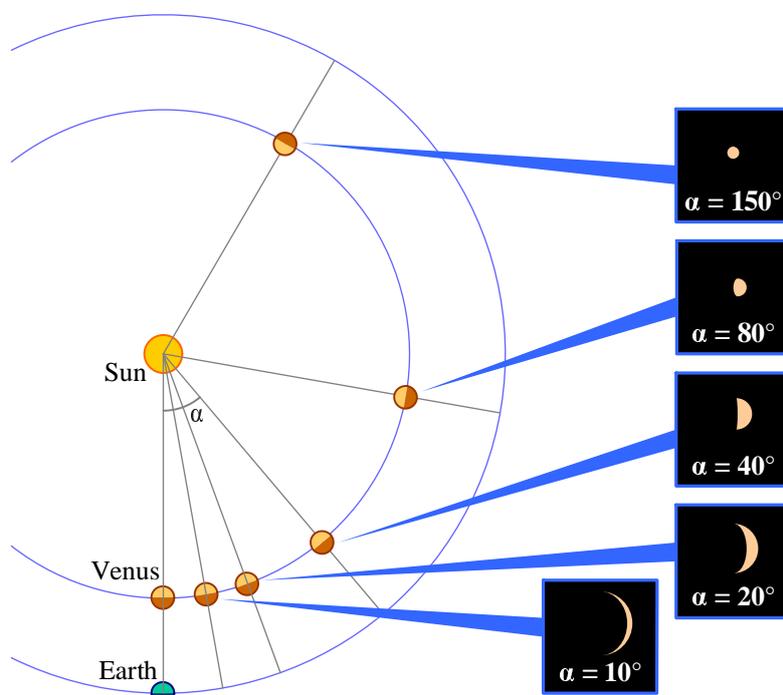


図 5.11: 地球との位置関係による金星の満ち欠け

万kmであり、双方とも離心率が小さいので、ここでは円軌道と考える。その条件で計算すると、太陽から見た地球と金星の離角が 43.9° のとき、地球から見た金星と太陽の離角が最も大きくなる。その離角は 46.2° である。言い換えると、地球から見た金星は、必ず、太陽から 46.2° 以内の角度の範囲に見えることになる。図5.11のように、地球と太陽を結ぶ線分よりも金星が右側に存在すれば、金星は日の出前に見えることになる。その時間帯に見える金星は明けの明星と呼ばれる。逆に、地球と太陽を結ぶ線分よりも金星が左側に存在する場合、金星は日没後に見えることになり、宵の明星と呼ばれる。また、離角に依存し、金星は図5.11に示すように満ち欠けをする。満ち欠けの大きさは、太陽から金星に向かうベクトルと、地球から金星に向かうベクトルの内積をとれば、計算できる。満ち欠けの大きさは、後に計算結果を示すことにする。

満ち欠けを考慮しなければ、視等級は、

$$\text{A.M.} = -26.74 - 2.5 \log_{10} \frac{\eta a^2 R_0^2}{R_1^2 R_{10}^2},$$

によって計算できる。ここで、 η は反射率、 a は金星の半径、 R_0 は太陽から地球までの距離、 R_1 は太陽から金星までの距離、 R_{10} は金星から地球までの距離だ。上で述べたように、金星は地球との位置関係によって満ち欠けをするので、視等級にはその影響が含まれる。

計算方法として、満ち欠けの影響は反射係数 η に盛り込むとよい。第 5.5.3 項で導出する (5.13) を反射係数 η に乗じ、その結果を η として置き換えれば満ち欠けの影響が盛り込まれるのだ。

満ち欠けの影響も考慮して計算した金星の視等級は図 5.12 のようになる。計算の結果、

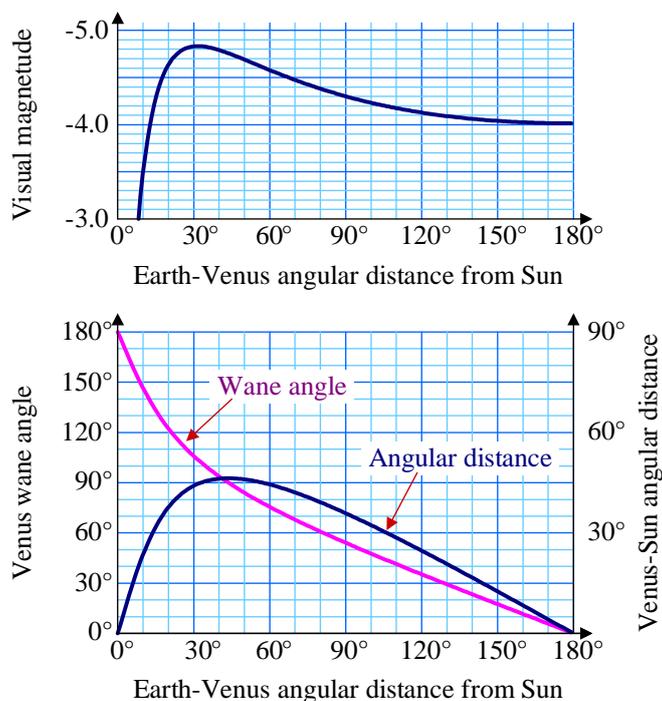


図 5.12: 金星の視等級・満ち欠け・離角

太陽との離角が 30° のとき、視等級 -4.8 で最大等級となることが確認できる。金星が近づくと視半径が大きくなるが、欠けが大きいので等級が下がる。遠くなると欠けが少なくなるが、距離の分だけ暗くなる（緩やかに等級が下がる）。図 5.12 に示す計算結果は、観測結果とよく合致している。

5.5.3 満ち欠けによる影響

月や金星で発生するような満ち欠けは視等級を変化させる。満ち欠けが視等級を変化させるのは、地球（観測点）と太陽（光源）の位置関係によって、観測される光の照射面の面積が異なるからである。当然、満月のように全体からの反射がある方が、欠けている状態よりも明るくなるわけだ。結果を先に紹介しておく、観測方向と光源からの光のなす角を ϕ としたとき、反射光の強さは、

$$F(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left[(2\pi - 2\phi + \sin 2\phi) \cos \phi + (1 - \cos 2\phi) \sin \phi \right], \quad (5.13)$$

となる。角度 ϕ に補足しておこう。角度が $\phi = 0$ が満月に、 $\phi = \pi/2$ が半月に、 $\phi = \pi$ が新月に相当する。なお、上の公式は反射帯となる天体の表面で乱反射を仮定している。後続の段落で公式の導出過程を紹介する。

準備段階 計算するにあたり、対象となる天体が球面であると仮定し、その表面の座標を設定する。天体表面の座標として球面座標 $[\theta, \varphi]$ を用いる。地球に向かう方向を $\varphi = 0$, $\theta = \pi/2$ とする。一方、太陽に向かう方向を $\varphi = \phi$, $\theta = \pi/2$ とする。この設定のもと、天体の明るさを太陽の方位 ϕ の関数で表すのが本稿の目的である。

計算するにあたり、天体の任意の地点 $[\theta, \varphi]$ において、太陽との角度 η と地球 ξ との角度を計算しておこう。それらの角度は、球面余弦定理によって、

$$\cos \eta = \sin \theta \cos(\phi - \varphi), \quad \cos \xi = \sin \theta \cos \varphi, \quad (5.14)$$

となる。具体的な角度よりも、これらの数式のように余弦関数のほうが後の計算のために都合がよい。

明るさの計算 準備が整ったので計算に入る。計算は、天体表面における太陽光の反射量を積分することによって実行する。積分にあたり、球面座標の微小量から作られる微小立体角が $\sin \theta d\theta d\varphi$ であることに注意しておこう。

乱反射のモデルとして、反射面の法線に対して余弦関数 (cosine) の指向性を仮定する。法線方向に最も強く放射があり、角度 45° をなす方向には 71% の強度、角度 60° をなす方向には 50% の強度、角度 90° をなす方向、すなわち、表面に沿った方向には放射がゼロとなるような指向性を仮定するのだ。そのモデルによると、

$$\begin{aligned} F_1(\phi) &= \int_0^\pi d\theta \int_{\phi-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \sin \theta \cos \eta \cos \xi \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_{\phi-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \sin^3 \theta \cos \varphi \cos(\phi - \varphi) \\ &= \frac{1}{3} [(2\pi - 2\phi + \sin 2\phi) \cos \phi + (1 - \cos 2\phi) \sin \phi], \end{aligned} \quad (5.15)$$

が得られる。ただし、この計算は反射光の方向依存性のみを取り扱っているため、絶対的な強度を計算していることにならない。方向の依存性を与える意味で、正面方向 $\phi = 0$ を基準となるように結果を正規化しておくのが適切であろう。得られた積分結果を正面方向で正規化すると、

$$F_1(\phi) = \frac{1}{2\pi} [(2\pi - 2\phi + \sin 2\phi) \cos \phi + (1 - \cos 2\phi) \sin \phi],$$

が得られる。このモデルは、金星の満ち欠けと視等級の関係とよく合致している。金星の表面は典型的な乱反射が支配的というわけだ。それに対し、月の満ち欠けと視等級の関

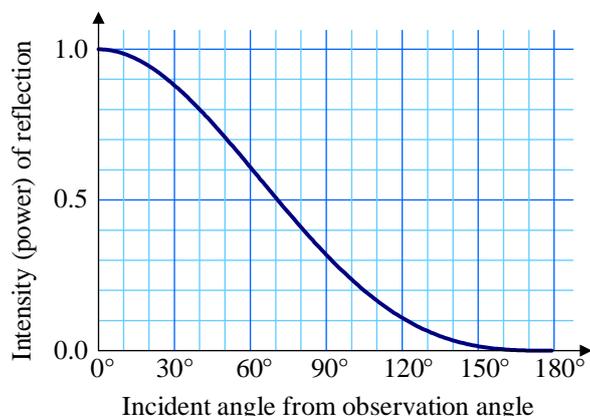


図 5.13: 表面で乱反射する球体の満ち欠けと反射強度

係は、このモデルでは合致しない。正確に言うと、満月の付近での合致性が悪いのだ。

5.5.4 星から届く光子の数

夜空に輝く星を見たとき、われわれの目にはどれくらいの数の光子が網膜に達しているのだろうか？ そのような疑問が Quora に投稿された。簡単な計算で大まかな見積もりができるので回答を紹介しよう。

Quora 質問 6等星の星が見えているとき、目の視神経には、その星からの光子が毎秒何個届いていますか？

大まかな見積もりで、1秒あたり約2万個の光子が届いている計算になる。地球付近の宇宙空間で、太陽からのエネルギーは 1370 W/m^2 だけ届いる。太陽の視等級が -26.7 等級なので、6等星の場合のエネルギーは、

$$1370 \text{ W/m}^2 \cdot 100^{0.2 \times (26.7 + 6.0)} = 1.14 \times 10^{-10} \text{ W/m}^2$$

のように計算できる。このエネルギーがすべて波長 $\lambda = 600 \text{ nm}$ (周波数 $\nu = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$) といういささか乱暴な仮定を設けると、6等星から届く光子の密度は、

$$\frac{1.14 \times 10^{-10} \text{ W/m}^2}{6.63 \times 10^{-34} \cdot 5 \times 10^{14} \text{ J}} = 3.44 \times 10^8 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1},$$

のように計算される。つまり、1 平米あたり 1 秒間に約 3.44 億個という光子の密度だ。瞳孔を半径 3 mm の円板だとすると、

$$3.44 \times 10^8 \cdot (3.0 \times 10^{-3})^2 \cdot \pi \text{ s}^{-1} = 9.72 \times 10^3 \text{ s}^{-1},$$

のように計算されるので、毎秒 約 1 万個の光子が片目の瞳孔を通り抜けていることになる。両眼を通過する光子はその 2 倍なので、毎秒 約 2 万個の光子が届いていると見積もられるわけだ。それに対し、1 等級は 6 等級の 100 倍なので、1 等星からの光は毎秒 200 万個の光子が網膜にとらえられる計算になる。

第6章 相対性理論

Quoraでは自己学習として物理数学を学習する者が質問者・回答者として参加している。趣味の一環としての学習の対象となる分野の代表であるため、アインシュタインの相対性理論に関する質問が多い。本章では、初学習者にとってQuoraで挙げられた有益なトピックを紹介する。

6.1 仮想の媒質エーテル

光(電磁波)が光であることが明らかになり、宇宙には光の波を伝搬するための媒質エーテル

Quora 質問 昔の物理にあった「エーテル」とは何ですか？ 宇宙背景温度による重力のこと？

エーテルは光が伝搬するための媒質と考えられていた空想上の物質*だ。17世紀、ニュートンは光を粒子と考えていたが、ホイヘンスは波動と考えていた。粒子説は光の反射を単純に説明できたが、波動説は干渉や回折を説明できた。波動説を支持するのであれば、光が伝搬する媒質が必要と考えられた。音が空気や水、固体を媒質とするように、光も媒質が必要と考えられたのだ。実際に存在が確認されたわけではないが、その空想上の媒質はエーテルと呼ばれていた。電磁波の媒質としてのエーテルの存在は、アインシュタインの特殊相対性理論によって否定された。それまでの変遷を説明しよう。

電磁気学の発展 電磁気学の発展によって光の波動説はさらに強まった。そのきっかけがマクスウェルの方程式だ。マクスウェルの方程式は、波動方程式の形で電磁波の存在を予言したのだ。その波動方程式によると、電磁波は真空中を約30万km/sで伝搬することが理論的に導かれた。当時、既に光がその速さで伝搬することがわかっていたので、光が電磁波であると推測されたのだ。マクスウェル方程式に基づく回折理論の考察、ヘルツによ

*電磁波の媒質と考えられていた空想上の物質エーテルは、コンピュータネットワークに広く利用されているイーサネット(ethernet)の語源である。正確には、イーサ(ether)がエーテルの意味である。

る実験などをおして、光が電磁波であることが明らかになってきた。さらに、電磁波にはマクスウェルの応力というものがある。具体的には、電磁場の運動量密度の時間微分を調べると、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \right]_n + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial T_{nm}}{\partial x_m} = -f_n, \quad (1)$$

なる方程式が導かれる。ここで、 $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ (電束密度と磁束密度の外積) が電磁場の運動量密度だ。さらに、 T_{nm} がマクスウェルの応力テンソル、 f_n がローレンツ力だ。特に、マクスウェルの応力は、

$$T_{nm} = \frac{\delta_{nm}}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - (E_n D_m + H_n B_m), \quad (2)$$

のように定義されるテンソルである。方程式 (1) は、形式的に連続体の方程式と同じ形をしている。この方程式のため、ますます、エーテルの存在が説得力を増してきた。つまり、マクスウェルの応力とは、エーテルの応力だと考えられたのだ。

エーテルの謎 電磁気学によってエーテルの必要性が高まったのだが、その性質を考えると謎がいくつも出てくる。その謎を大まかに挙げると次の3点だ。

1. マクスウェルの方程式にエーテルとの相対速度が出てこない。
2. 電磁波は横波である。
3. 電磁波の伝搬速度がすごく速い。

波動は媒質の歪みで伝搬するので、媒質に対して一定の相対速度で伝搬する。そう考えると、マクスウェルの方程式にエーテルに対する相対速度が含まれるべきだ。しかし、マクスウェルの方程式には速度が含まれない。ある解釈として、マクスウェルの方程式はエーテルに対して静止した系でしか記述されない、と考えられる。その解釈がマイケルソン・モーレーの実験につながっていく。第2の謎「電磁波が横波である」も非常に不可解だ。連続体の物理学によると、流体を伝搬する波には横波成分がなく、縦波です。空気中や水中を伝搬する音波が縦波であることが、その一例だ。電磁波が横波であることは、エーテルが流体ではないということだ。第3の謎「電磁波の伝搬速度がすごく速い」も不可解だ。連続体における波の伝搬速度は、弾性定数 μ と、密度 (単位体積当たりの質量) ρ を用いて、

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (3)$$

であることが知られている。この類推から、エーテルは極めて軽く、きわめて硬い物質であることが類推できる。これが真空の性質だと考えると、非常に不可解なのだ。

エーテルの流れ マクスウェルの方程式がエーテルに対して静止している系でしか成立しないことは不可解だった。なぜなら、地球は自転をしているし、太陽の周りを公転しているからだ。宇宙に基準となる絶対静止系があり、エーテルがその絶対静止系に静止していると考えれば、地球上での電磁現象がマクスウェルの方程式にしたがうのがおかしいと考えられる。

エーテルが宇宙の絶対静止系に静止しているなら、時刻や季節によって、地球上でのエーテルとの相対速度が変化するはずだと考えられた。マイケルソンとモーレーは干渉計を開発し、エーテルとの相対速度を計測する実験を実施した。しかし、時刻や季節を変えてもエーテルの速度は検出されなかった。干渉計の実験は非常に感度がよく、ベルリンの交通によって影響を受けたそう。そのため、人里離れたポツダム天文台で実験を実施した[†]そう。マイケルソン・モーレーの実験でエーテルとの相対速度が見いだされず、様々な仮説が出てきた。エーテルには粘性があり、地球がエーテルを引きずって運動しているとの説、かつての天動説により戻す説などが出てきました。その中で、ローレンツがローレンツ収縮を提唱した。運動すると、エーテルの抵抗力によって物体の長さ縮むというものです。運動速度を v とし、光速を c とすると、物体の長さは運動方向に $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ で短縮するという説です。この説によって、計測される光速が運動方向によって一定になることが示せるのだ。計測される事実と異なり、光速が一定になるからマイケルソン・モーレーの実験でエーテルの相対速度が検出できないと主張したわけだ。ローレンツはその説を行き当たりばったりで提唱したのではなく、後にローレンツ変換と呼ばれる座標変換:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (4)$$

によって導いた。ローレンツ変換は、マクスウェルの方程式が運動によっても不変になるという数学的な要請を導入することで得られる。この座標変換は、異なる速度で等速運動する系間の座標変換だ。従来から利用されてきたガリレイ変換はマクスウェルの方程式を不変に保てないのだが、ローレンツ変換ではそれを解決した。この変換式は、異なるアプローチによってアインシュタインによっても導出されることになる。

スイスの特許庁に勤務していたアインシュタインは、1905年「動いている物体の電気力学」という論文^[2]を発見した。それは相対性理論の第1論文だった。彼の新理論は、光速があらゆる慣性系から見て一定であるという仮説(光速不変の原理)から始まる。この仮説によって、ローレンツ変換、すなわち、ローレンツがマクスウェルの方程式を不変とするようにして導いた座標変換と同一の変換が得られる。同じ公式とはいえ、出発点が異なるため、アインシュタインの解釈はローレンツと異なる。ローレンツは、運動する物体の長さが縮むからエーテルの相対速度が検出されなかったと主張した。それに対し、アイン

[†]広瀬立成, “空海とアインシュタイン,” PHP 研究所, PHP 新書 388, 2006.

シュタインは、光速不変の原理があるからエーテルの相対速度は検出されない。そもそも、エーテルの存在は不要であると主張した。また、ローレンツ変換から導かれるように、運動する慣性系から見ると長さが縮んで見えることも主張した。様々な検証実験によって、否定する反例が見つからないことから、アインシュタインの相対性理論が受け入れられている。それによって、エーテルの存在が否定されている。

6.2 光速不変の原理とローレンツ変換

アインシュタインの特殊相対性理論は、光速不変の原理から始まる理論物理学の体系である。光速不変の原理は、慣性系から観測される真空中の光の伝搬速度が、観測者の運動速度とは無関係に必ず同じ速度となることを主張している。

6.2.1 光速不変の原理に対応する座標変換

対地速度 60 km/h で運動する車両を 80 km/h で走行しながら追いかけた場合、20 km/h で近づいてくるといふ日常的な経験があるため、光速不変の原理を受け入れることに抵抗がある者がいるかもしれない。一方で、光の伝搬速度を観測することによって地球の自転速度や公転速度を割り出そうとする試みが失敗したこと（マイケルソン・モーレーの実験）や、電磁気学のマクスウェルの方程式が光速を不変の値と位置づけていることから、1905年の時点で、光速不変が不変であるとするのが妥当と思えるようになってきた。それが、日常の速度合成速と合致しないのは、光の速度は日常的に扱う速度よりも極めて大きいからである。

Quora 質問 光速度不変の原理をすんなり理解・納得できる説明はありますか？
光に対して相対速度がないというのがどうもしっくりきません。

光速不変の原理は、実験によって観測された事実を「原理」と位置付けたものなので、論理的に納得はできないだろう。しかし、これは受け入れるしかないのだ。光速不変の原理は、相対性原理が成立するために必要である。相対性理論は、光速不変の原理によって相対性原理を補強した物理学である。光速不変も相対性原理も、実験によって観測された結果を、普遍的な宇宙の性質として取り込んだ物理学の基礎概念である。その原理が意図しているところは、宇宙には基準となる特定の系は存在せず、慣性系であれば、どの系でも同一の物理法則が成り立つというものだ。

相対性理論より前は、異なる慣性系の中の座標変換はガリレイ変換:

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

にしたがうとされた。その場合、ある静止系から発射した光の速度が c である場合、その光源に速度 v で接近する観測者から見ると、光の速度は $c + v$ になってしまう。エーテル仮説のように、光の速度が絶対静止系に対する速度であれば、光の速度を計測することによって自分の移動速度がわかるということになり、相対性原理と矛盾する。とはいえ、 c が無限大であれば、 c と $c + v$ の違いを検出できないので、相対性原理は何とか矛盾せずに助かっていた。マクスウェルの電磁場の方程式によって、光速が有限であることが判明した。すると、ガリレイ変換は相対性原理を満足させられなくなってきた。一方、マクスウェルの方程式も、ガリレイ変換に対して不変でないことから都合が悪かったのだ。光速が有限であり、マクスウェルの方程式が不変になるような慣性系の中の座標変換は、ローレンツ変換:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (6.1)$$

となる。ローレンツ変換を適用すると、慣性系であれば、いかなる観測者から見ても光速が一定になる (アインシュタインは、光速不変の原理からローレンツ変換を導出したが。)。例えば、ある光源から発射した光の速度が c であるとき、その光源に対して相対速度をもついかなる慣性系から見ても、光の速度が c となる。絶対静止系のような特別な慣性系が存在しないために、光速不変が必要であり、それをサポートする座標変換がローレンツ変換なのだ。

ローレンツ変換 (6.1) のうち、 t' と x' の変換が、時間の遅れや長さの短縮 (ローレンツ収縮) のような尺度の変化に相当するのだが、そもそも、運動方向と垂直方向が、 $y' = y$, $z' = z$ のように、尺度の変化がない。それはなぜか? その疑問が Quora に投稿された。

Quora 質問 ローレンツ変換において、物体の進行方向に平行な方向の長さの縮みは考えるのに、どうして、垂直方向の縮みや伸長は考えないのでしょうか?

ローレンツ変換の導出をする際に、 x と t が 1 次変換で表され、暗黙的に y と z が不変であるかのように書いたテキストを見ての質問だと解釈する。実際のところ、最初から不変と考えているのではなく、数段階の考察の結果として y と z が不変だと考えられる。そこに至るまでの考察について解説しよう。相対性理論の慣習として、慣性系 K' は、基準となる慣性系 K に対し、 x 軸方向に速度 v で等速直線運動しているとする。逆に、 K 系は K' 系に対し、 x' 軸方向に速度 $-v$ で等速直線運動している。

第 1 段階 K 系と K' 系を結ぶ座標変換は 1 次変換でなければならない。なぜなら、高次項をもつと K 系から見たときに等速直線運動をしている物体が、 K' 系から見たとき加速度をもつかのよう見え、それが相対性原理に反するからだ。

第2段階 第1段階の考察から,

$$t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + z_{03}z,$$

$$x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + z_{13}z,$$

$$y' = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + z_{23}z,$$

$$z' = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + z_{33}z,$$

のような形となる。係数 $a_{\mu\nu}$ は速度 v の依存性を含むが、座標 t, x, y, z の依存性を含まない。座標の依存性を含むと1次変換ではないからだ。

第3段階 展開係数 $a_{\mu\nu}(-v)$ は $a_{\mu\nu}(v)$ の逆行列である。なぜなら、 K に対して x 軸方向に速度 v で運動する系が K' であり、その系に対して x' 軸方向に速度 $-v$ で運動する系は K に戻るからだ。

第4段階 空間座標の成分は互いに干渉しない。言い換えると、 x' には x の依存性が含まれる、 y と z の依存性は含まれない。 y' と z' ついても同様だ。空間座標の成分が互いに干渉するなら、その座標変換は回転変換、または、斜交軸への変換となる。速度が異なる関係系から見たときに座標軸の方向が変化するのは相対性原理に反するからだ。

第5段階 x' に t の依存性が含まれることは許容できるが、 y' と z' に t の依存性は含まれない。なぜなら、 K 系から見たときに x 軸に沿って運動する物体を K' 系から見たとき、 y' 軸方向や z' 軸方向の速度成分をもつようになり、不都合が生じるからだ。つまり、 y 方向については、 $y' = a_{22}(v)y$ となります。

第6段階 y に関する座標変換の係数について、少なくとも、 $a_{22}(v)$ と $a_{22}(-v)$ は絶対値が等しい。なぜなら、 K 系から見た K' 系と、 K' 系から見た K 系は向きが逆なだけであり、同一の関係だ。第3段階の考察から、 $a_{22}(v)a_{22}(-v) = 1$ が成立する。それを考えると、 $a_{22}(v) = \pm 1$ でなければならない。負を採用すると、異なる慣性系から見ると y 座標が反転することになり、不都合なので、 $a_{22} = 1$ とするのが妥当だ。同様に、 z についても $a_{33} = 1$ となる。したがって、 y に関する変換は $y' = y$ 、 z に関する変換は $z' = z$ となる。

以上の考察によって、ローレンツ変換を通してであっても、運動方向と直交する方向はその影響を受けない。

6.2.2 相対性理論の必然性

特殊相対性理論は、アインシュタインが突如として発表した斬新な理論だったのではなく、当時の物理学のトレンドとしてでき上がりつつあった理論だった。そのような歴史的背景があるため、次のような質問が Quora に投稿された。筆者の回答も併せて紹介する。

Quora 質問 A. アインシュタインの相対性理論は盗作ですか？ 彼以前に数名の科学者から相対論の考え方が発表され、アインシュタインは引用せずにその事実を自分の論文で書いたと言われていますが本当ですか？

特殊相対性理論の基礎となる座標変換であるローレンツ変換は、確かに、アインシュタインよりも前に数名の科学者が導出して、最初に、1887年にフォークトがマクスウェルの方程式を不変に保つ座標変換として導出した。続いて、1897年にラーモアが、1899年にローレンツが同様の座標変換を導出し、さらに、1905年、アインシュタインの論文の直前に数学者ポアンカレがローレンツ変換を発表していた。アインシュタインが論文を発表する頃には、マクスウェルの方程式を不変に保つ座標変換として、専門家の間でローレンツ変換が周知されていたことだろう。

筆者の解釈としては、アインシュタインが論文を盗用したという考えは正しくない。彼は、自らが仮定した物理学の原理に基づき、彼らとは独立にローレンツ変換を導出した。事実、アインシュタインはプロフェッショナルな物理学者ではなく、特許庁に勤める役人で、時間の合間に物理学を研究していた。そのような背景から、アインシュタインはローレンツやポアンカレの業績について知らなかったかもしれない。

ローレンツとアインシュタインは、互いに異なる開始位置から同一の座標変換にたどり着いた。ローレンツはマクスウェルの方程式を不変に保つ座標変換を発表した。マクスウェルの方程式は、数式変形によって波動方程式:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0,$$

の形で記述できます。この波動方程式に含まれる括弧の中の演算子は、ダランベルシアンと呼ばれる。空間座標と時間座標 $[x, y, z, t]$ の代わりに、 $w = ict$ (i は虚数単位) で変換し、 $[x, y, z, w]$ なる記号を用いると、ダランベルシアンは4次元のラプラシアンと呼ばれる演算子に変わる。言いかえると、マクスウェルの方程式は4次元のラプラス方程式だ。通常、ラプラス方程式が座標回転に対して不変であるのと同様に、4次元のラプラス方程式は4次元の座標回転に対して不変となる。その4次元の座標回転がローレンツ変換だったわけだ。

一方、アインシュタインは光速不変の原理を仮定した。その新たな仮定はマイケルソン・モーレイの実験で観測された不可解な実験結果を受け入れて基本原理とした仮定だ。異なる開始条件に関わらず、アインシュタインは彼以前に発見された座標変換と同一の結果を導いた。マクスウェルの方程式を不変にする目的で導出されたローレンツのアプローチは、その結果として、光速不変の原理を予想する。逆に、光速不変の原理から開始したアインシュタインのアプローチは、その結果として、マクスウェルの方程式が座標変換に対して不変であることを証明したのだ。

6.3 速度合成則

相対性理論は光速不変の原理を開始点とし、異なる慣性系の間関係はローレンツ変換で記述できる。基準となる慣性系 K のにおいて速度 $[u_x, u_y, u_z]$ で運動する物体を、別の慣性系 K' で観測される速度は、ローレンツ変換から導出できる。K 系から見た物体の運動は、

$$x = u_x t + x_0, \quad y = u_y t + y_0, \quad z = u_z t + z_0,$$

のように記述できる。この数式にローレンツ変換:

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z',$$

を代入して数式を整理すると、

$$\begin{aligned} x' &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} t' + \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v/c^2} x_0, \\ y' &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_y}{1 - u_x v/c^2} t' + \frac{u_y v/c^2}{1 - u_x v/c^2} x_0 + y_0, \\ z' &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_z}{1 - u_x v/c^2} t' + \frac{u_z v/c^2}{1 - u_x v/c^2} x_0 + z_0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

が得られる。これが、K' 系で観測される物体の運動である。得られた数式において、 t' の係数が K' における速度というわけだ。その係数を改めて、 $[u'_x, u'_y, u'_z]$ と書くと、

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_y}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} u_z}{1 - u_x v/c^2}, \tag{6.3}$$

が得られる。導出された (6.3) が速度合成則と呼ばれる公式である。一方、物体の位置 (6.2) も興味深い。例えば、 $u_x = 0$ のとき x' の定数項は $\sqrt{1 - \beta^2} x_0$ になっている。これは並走する慣性系から見たときの長さが x_0 であっても、相対速度 v をもつ慣性系からでは $\sqrt{1 - \beta} x_0$ に長さが短縮していることを意味する。そのような長さの短縮現象は、ローレンツ収縮と呼ばれる。

6.3.1 合成速度の限界

速度合成則によると、光速を超えて速度を変化させることができない。それは、超光速を否定しているのではなく、光速より遅い物体はどんなに加速しても光速を超えることができないことを意味している。一方、仮に光速より速く運動する物体が存在した場合、どんなに減速しても光速より遅くならないことになる。その意味で、光速は合成速度の限界である。

反対方向に運動する2台の宇宙船が、他方を見たときに相対速度をどのように観測するかという質問がQuoraに投稿された。単純に速度を加算すると光速を超えるのだが、相対性理論ではそうならないことを回答で説明している。

Quora 質問 2つの宇宙船が互いに逆方向に向かって $0.75c$ で進むと、それらの相対速度は光速よりも速くなりますか？

単純に速さを足し算すると光速を超えるかもしれないが、逆方向に向かう物体の相対速度は単純な足し算にならない。光速と比較できるような速さでは時間も長さも尺度が変わるので単純な足し算にならないのだ。

速さ v と u で逆方向に航行する宇宙船に対して、もう一方を見たときの相対速度は、速度 u で航行する宇宙船を、速度 $-v$ で運動する慣性系から見たシチュエーションで速度合成則を適用すればよい。すなわち、相対速度は、

$$v' = \frac{u + v}{1 + uv/c^2},$$

となるわけであり、質問の条件 $u = v = 0.75c$ を代入すると、相対速度は $v' = 0.96c$ のように計算される。合成された速度は、光速より遅いのだ。

速度合成則で光速を超える速度を作り出せないことは、簡単に証明することができる。計算の便宜上、 $\beta \equiv v/c$, $\beta_u \equiv u/c$ を定義しておこう。このように記号を定義しておくと、速度合成則は、

$$\beta'_u = \frac{\beta + \beta_u}{1 + \beta\beta_u},$$

なる形で記述できる。この合成則に対して、 $1 - \beta'^2_u$ を計算すると、

$$1 - \beta'^2_u = \frac{(1 - \beta^2)(1 - \beta'^2_u)}{1 - \beta\beta_u},$$

が得られる。分子に含まれる因数 $1 - \beta^2$ と $1 - \beta'^2_u$ はともに、絶対値が1より小さい正の数であり、

$$(1 - \beta\beta_u)^2 \geq (1 - \beta^2)(1 - \beta_u)^2,$$

であるので、 $|\beta'_u| < 1$ となることが証明できる。このことから、光速より小さい速度を合成しても、光速を超える速度をつくり出せないことがいえるわけだ。

上のように光速を超える速度を速度合成できないことを示したのだが、Quoraに次のような質問が投稿されることがある。このような設定で光速を超えるような気になるのは、速度合成が日常のように単純な加算となる感覚をもっているからだだろう。仮に、基準となる系 (K系) から宇宙船の中のボールを観測できたとすると、そのボールは宇宙船の内部を

かなりゆっくりと飛んでいるように見え、K系に対する速度は宇宙船の速度とほとんど変わらない。

Quora 質問 もし光速より 50 km/h ほど遅いスピードで動く宇宙船があったとして、その中で宇宙船の進行方向に向かって野球のボールを 100 km/h で投げるとそのボールは光速を超えたことになりますか？

この質問の場合、光速に比べて無視できるくらい小さな速度を加算する例であるので、 $\beta_u \ll 1$ とする。その想定で速度合成光速より遅い則を適用すると、

$$\begin{aligned}\beta'_u &= \frac{\beta + \beta_u}{1 - \beta\beta_u} \simeq (\beta + \beta_u)(1 - \beta\beta_u) \\ &= \beta - \beta^2\beta_u + \beta_u - \beta\beta_u^2 \simeq \beta + (1 - \beta^2)\beta_u,\end{aligned}$$

のように計算できる。この計算によると、宇宙船の内部でボールを β_u なる速度で投げたとしても、Kからの観測では、ボールは宇宙船に対して $(1 - \beta^2)\beta_u$ という非常に小さい速度で動いていることになる。質問の値を代入すると、 $1 - \beta^2 \simeq 9.3 \times 10^{-8}$ という微量である。これは宇宙船内部の出来事がスローモーションのように見えるということだ。それは宇宙船内部の時間がゆっくり経過すること、いわゆる時計の遅れに起因する。結果として、K系から見たボールの速さは、光速に近づいたとは言えない程度にすぎない。

6.3.2 多段で積み上げた速度

相対性理論によると、速度をどんなに合成しても究極の速度である光速に届くことができない。多段ロケットのように、基準系から打ち上げられたロケットで十分に加速したところで、2段目を発射し、十分に加速したところで、3段目を発射し... を繰り返すとどうなるだろうか？ そのような質問が Quora に投稿された。

Quora 質問 時速 100 キロで走る乗り物の上で時速 100 キロで走る乗り物の上で時速 100 キロで... と延々と繰り返して行くと、何が起こりますか？

次段の乗り物が 100 km/h で飛び出しても、前段の乗り物の質量が十分に大きいため、前段の乗り物の速度に影響がないものとする。第 1 段目で 100 km/h、第 2 段目で 200 km/h、第 3 段目で 300 km/h、... のように速度が上昇すると、単純計算では第 10,792,529 段目で光速を超えことになる。とはいえ、既に説明したように、どんなに速度を合成しても光速に達することはできない。速度が光速に近づくと、相対性理論の効果で長さや時間の尺度が変わるので、速度の合成が単純な足し算にはならないのだ。

積み上げる速度 100 km/h は光速に比べ十分に小さいので、 Δv と書くことにしよう。その速度を n 回だけ積み上げると、合成される速度は、

$$v = c \tanh \frac{n \Delta v}{c},$$

となる。この数式によると、第 10,792,529 段目での速度は光速の 76.2% 程度にしかならない。段数 n をさらに増加させると、光速に近づいていくが、光速を超えることはない。

6.4 エネルギーと質量

アインシュタインは 1905 年に第 1 論文「動いている物体の電磁気学」に続き、第 2 論文「物体の慣性はそのエネルギー量に関するか?」を発表した。アインシュタインの第 2 論文での $E = mc^2$ を示唆を、筆者は Quora のスペース「数理科学 Q らぼらとりい」で紹介した。その紹介記事を取り上げてみよう。

6.4.1 アインシュタインの第 2 論文

K 系に静止した物体から正反対の方向に光子を 1 個ずつ放射する様子を観測する設定 (図 6.1 (a)) で論文が書かれている。この事象を x 軸方向に速度 v で運動する K' から観測した場合 (図 6.1 (b)) を計算し、両者の観測結果を比較することによってエネルギーと質量の関係を考察しよう。

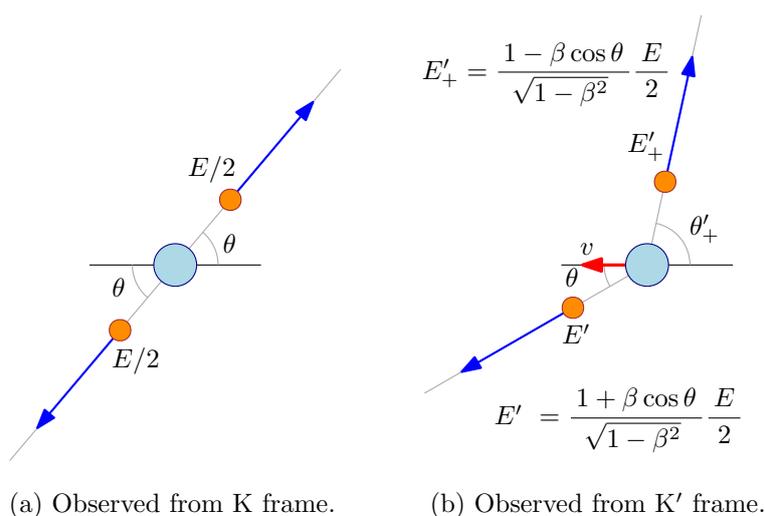


図 6.1: 第 2 論文における $E = mc^2$ 示唆の条件設定

K系からの観測 質量 m の物体が静止し, x 軸と角度 θ をなす方向と, その反対方向 $\theta + \pi$ にそれぞれ, $E/2$ の光子を放出する。光子の放出は対称なので, 物体の運動状態に影響を与えない。このとき, 物体に関するエネルギー保存則は,

$$U_0 = U_1 + E, \quad (1)$$

だ。ここで, U_0 と U_1 は物体の全エネルギーである。とはいえ, この物体は光子放出の前後ともに静止しているので, 全エネルギーは内部エネルギーと考えてよい。

K'系からの観測 この系からの観測では, エネルギー保存則 (??) は,

$$U'_0 = U'_1 + \frac{E}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (2)$$

となる。ここで, 便宜上, $\beta \equiv v/c$ なる記号を使った。あっさりと言っているが, 物体から放出される光子は, 放出方向もエネルギーも K 系とは異なる。まず, K 系において方角 θ に放出された光子のエネルギーと放出方向は,

$$E'_+ = \frac{1-\beta \cos \theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E}{2}, \quad \cos \theta_+ = \frac{\cos \theta - \beta}{1-\beta \cos \theta}, \quad (3)$$

となる。一方, 方角 $\theta + \pi$ に放出された光子のエネルギーと放出方向は,

$$E'_- = \frac{1+\beta \cos \theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E}{2}, \quad \cos \theta_- = \frac{-\cos \theta - \beta}{1-\beta \cos \theta}, \quad (4)$$

となる。これらの数式は, 相対性理論によるドップラ効果, あるいは, エネルギー変換則から導かれる。それらの変換則は, ともにアインシュタインの第 1 論文で発表されている。したがって, K' 系において光子が放出するエネルギーの合計は,

$$E'_+ + E'_- = \frac{1-\beta \cos \theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E}{2} + \frac{1+\beta \cos \theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{E}{2} = \frac{E}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となるので, 数式 (2) のように記述できたのだ。また, 物体の全エネルギーが U'_0 や U'_1 のように, K 系とは異なる値を仮定しておくことは重要だ。しかも, 結果的に光子の放射方向 θ の依存性がなくなっていることは興味深いです。

両者の比較 エネルギー保存則 (1) と (2) の差をとると,

$$U'_0 - U_0 = U'_1 - U_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) E, \quad (5)$$

が得られる。ここで注目するのは異なる系からの観測による物体のエネルギーの差だ。K 系の観測では物体は静止, 一方, K' 系の観測では物体は速度 $-v$ で運動している。そのため, 系の違いによるエネルギーの差は運動エネルギーであると推測できる。アインシュタ

インは第2論文において、エネルギーの差を (K' 系から観測される) 運動エネルギー、および、座標変換に起因する定数だとし、

$$U'_0 - U_0 = K_0 + \alpha, \quad U'_1 - U_1 = K_1 + \alpha, \quad (6)$$

とおいた。ここで、 K_0 と K_1 が、光子放出の前後における運動エネルギー、 α が座標変換に起因する定数ということだ。それらを (2) に代入すると、

$$K_0 + \alpha = K_1 + \alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) E,$$

が得られる。この数式を変形すると、

$$K_1 + K_0 = - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) E, \quad (7)$$

が得られる。この数式のように、光子の放出によって、 K' から観測される運動エネルギーが減少することがわかる。しかし、物体の速度は光子の放出によって変化しないはずだ。にも関わらず運動エネルギーが減少するのは質量が変化したからだと考える。ここで、運動速度が十分に小さい ($\beta \ll 1$) と考えます。そのような仮定の下では、

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{\beta^2}{2} = 1 + \frac{v^2}{2c^2},$$

なる近似が成り立つ。したがって、運動速度が十分に小さいとき、運動エネルギーの変化 (6) は、

$$K_1 - K_0 \simeq - \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{c^2} v^2, \quad (8)$$

となる。小さい速度域ではニュートン力学が成立するので、物体の運動エネルギーは $mv^2/2$ となる。それらの情報を総合すると、光子の放出によって物体は、

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}, \quad (9)$$

だけ質量が減少したと考えられる。ここでは、物体がエネルギーを放出した場合を考察したが、逆にエネルギーを吸収した場合は同様の議論によって質量が増加することを示唆する。したがって、エネルギー E は、 $m = E/c^2$ 関係によって物体の慣性に影響すると結論できる。

以上がアインシュタインの第2論文で $E = mc^2$ を示唆する内容だ。実は、第1論文では、質量 m の電子を速度 v まで加速するために、

$$W = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

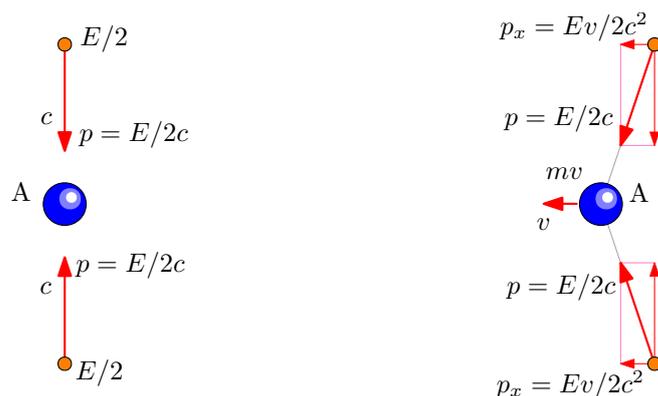
なる仕事を要することが書かれています。第1論文と第2論文でアインシュタインは、 $E = mc^2$ の公式化を宣言していません。しかし、直接的に $E = mc^2$ を積極的に記述するようになったのは1907年からだそう。1905年の時点で導出した結果を検討・醸成した結果として $E = mc^2$ を主張するようになったと推測する。1905年の論文ではエネルギー保存則を用いているが、アインシュタインは1946年に運動量保存則を用いて初等的な議論によって $E = mc^2$ を示している。

6.4.2 アインシュタインによる初等的導出

前項の最後で述べたように、アインシュタイン自身が初等的な方法で $E = mc^2$ の証明を公開している。以下の質問の回答としてその方法を紹介しよう。

Quora 質問 アインシュタインの相対性理論の帰結である有名な公式 $E = mc^2$ を分かりやすく極力簡単に導出できる方法を教えてくださいませんか？

アインシュタイン自身が発表した方法での証明だが、とても簡単に導出できるようにするため、かなり限定的なシチュエーションでの導出になっている。この導出において、光のエネルギー E と運動量 p の間に $E = pc$ が成立することが前提知識として必要だ。図6.2 (a)のように、観測者に対して静止した物体Aに注目する。この物体に上下から、それぞれ、エネルギー $E/2$ の光子が衝突する。二つの光子は、正反対の運動量をもつため、衝突後も物体Aの運動状態は維持さる。(つまり静止状態を保つ。)



(a) Rest relative to the object A. (b) Moving at v relatively to the object A.

図 6.2: $E = mc^2$ 初等的導出の条件設定

この様子を図6.2 (b)のように、物体Aに対して速度 v で運動する観測者から見た場合を考える。ただし、 $v \ll c$ とする。観測者から見ると、物体Aは後ろに動いているように

見える。一方、光子も後ろ向きに v という速度成分をもちます。ここで、光子の運動量を考えてみよう。エネルギー $E/2$ の光子は、運動量 $E/2c$ をもっている。水平方向の速度成分が v であるので、水平方向の運動量は、 $p_x = Ev/2c^2$ です。図を見ても明らかなように、衝突によって物体 A の水平方向の運動量は増加する。とはいえ、物体 A の速度が変化すると図 (a) と矛盾するのだ。ここで、物体 A の運動量変化が、速度変化の代わりに質量の変化をもたらしたと考える。つまり、物体 A の質量は、 m から $m + \Delta m$ になったと仮定する。その仮定のもとで運動量保存則は、

$$mv + \frac{Ev}{c^2} = (m + \Delta m)v,$$

となる。この数式から、

$$E = \Delta m c^2,$$

が得られます。つまり、衝突した光子のエネルギー E が物体の質量増加に使われたことになる。これが、 $E = mc^2$ の簡易的な導出です。

補足 上記の導出は、簡易的な証明なので限定された条件を使っている。まず、光子のエネルギー $E/2$ から運動量が $E/2c$ であることについて、日常レベルでの運動エネルギー $mv^2/2$ と運動量 mv と関係が異なると思うかもしれない。光の場合、運動量が $E/2c$ となることは、電磁気学で示唆されているものの、一般的な成立を理解するには相対性理論の学習が必要だ。

また、本稿の導出は一般の物体でなく、光子を衝突させている点に怪しさを感じるかもしれない。実は、相対性理論にしたがい、運動量を正確に記述すれば、一般の物体の衝突であっても、また、速度 v が c と比較できるくらいの大きな速度域であっても、同じ結果を得ることができる。

6.4.3 高校物理で簡易導出

筆者が相対性理論の学習を始めたころ、書店で何冊ものテキストを探したが、明確に $E = mc^2$ の導出だと宣言してる書籍に出会った記憶がない。法則 $E = mc^2$ での E はあらゆる種類のエネルギーが対象となり得るので、「これで導出できた」と言いにくいかもしれない。

筆者が高校生の頃、等価速度運動を相対論的に書き換え、速度ゼロから v に至るまでに物体に与えたエネルギーを計算し、質量と運動エネルギーの関係を導いて、 $E = mc^2$ との関連性を考察した。当時の考察内容を、次の質問の回答として紹介しよう。

Quora 質問 $E = mc^2$ を大学受験程度の物理と数学の技で導き出すことはできますか？

等加速度運動の運動エネルギーを利用して考察しよう。基準となる慣性系(静止系)を K 系, 運動する観測者の系を K' 系とする。K' 系が K 系に対して速度 v で運動していると仮定する。前提条件として, 座標に対するローレンツ変換と速度の合成則が既知であるとする。

加速度変換 K' 系からみた自分の加速度を, K 系から加速度に変換しよう。加速度は, 過去の自分の速度に対する現在の相対速度の時間比であると考え。そのように考えると, 相対性理論の速度変換則で加速度の変換ができそうだ。K' から見たとき, 微小時間 $\Delta t'$ の間に速度が $\Delta v'$ だけ変化したとする。一方, これを K 系から見ると, 微小時間 Δt の間に速度が Δv だけ変化したように見る。この関係を速度合成則によって記述すると,

$$v + \Delta v = \frac{v + \Delta v'}{1 + v \Delta v' / c^2}, \quad (1)$$

のようになる。ここで, Δv が微小量であると仮定すれば,

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= (v + \Delta v') \left(1 - \frac{v \Delta v'}{c^2} \right) \\ &= v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta v', \end{aligned}$$

のように計算できるので,

$$\Delta v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta v', \quad (2)$$

なる関係式を得る。ここで, 相対性理論における時間の遅れ $\Delta t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t$ に注意すると,

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \frac{dv'}{dt'},$$

が得られる。ここで, K 系と K' 系から見た加速度を, それぞれ, a と a' と書くと,

$$a = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} a',$$

が加速度の変換式であることがわかる。

等加速度運動 K'系から見た加速度 a' が一定であると仮定する。その前提条件で微分方程式:

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a',$$

を解くと、速度を時間の関数とした記述:

$$v = \frac{a't}{\sqrt{1 + a'^2 t^2 / c^2}}, \quad (3)$$

が得られる。加速度 a' が一定なので、加速する観測者自身は常に一定の慣性力を感じている。しかし、その運動を K系から観測すると (3) のように、(ニュートン力学における) 等加速度運動とは異なる速度変化をする。しかし、運動している本人の感覚を尊重し、これを等加速度運動と呼ぶことにする。つまり、(3) は等加速度運動する物体の速度変化を表す公式だ。公式 (3) を積分すると、

$$x = \frac{c^2}{a'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + a'^2 t^2 / c^2}} - 1 \right),$$

が得られる。ここで、 $t = 0$ のとき $x = 0$ となるように積分定数を決定した。公式 (3) に注意すると、変位を表すこの公式は、

$$x = \frac{c^2}{a'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right), \quad (4)$$

のように書き換えることができる。

運動エネルギー ここまでに考えた等加速度運動によって加速してきた物体の運動エネルギーを考えてみよう。運動する自分自身から見た質量を m としたとき、加速度 a' で加速するために力 ma' を、変位 x となるまで印加し続けることになるので、物体が受けた仕事は、

$$E = ma'x = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right), \quad (5)$$

となります。これが相対論的な運動エネルギーというわけだ。ここで、

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (6)$$

を定義してみよう。この定義を利用すると、運動エネルギー (5) は、

$$E = Mc^2 - mc^2,$$

のように書き換えることができる。このエネルギーの表現は次のように仮定してみる。質量 m は mc^2 なるエネルギーを有している。運動することによってその質量が M に増大す

る。その増大に相当するエネルギーの増加分 $Mc^2 - mc^2$ が運動エネルギーだ。このように考えると、質量と運動エネルギーの間に矛盾がない(と思えるので、この仮定は正しいと考えます。したがって、

$$E = mc^2, \quad (6.4)$$

が成立すると考えます。

補足 冒頭で述べたように、これは等加速度運動を前提としている。「自分自身の相対速度」という観点で加速度の変換を利用したが、座標のローレンツ変換を2階微分しても同じ加速度変換を得ることがでる。運動エネルギーを計算する際に、 $E = ma'x$ を計算していますが、これはいささか乱暴だ。なぜなら、 ma' は K' から見た力だ。K から見てもその力が不変であることを示さなければならない。実際のところ、その力は座標系に関わらず不変であるので、導出される結果は正しいことになる。なお、座標系の間の変換などを慎重に進めていけば、任意の運動においても運動エネルギーから $E = mc^2$ を導くことができる。

第7章 量子力学

7.1 黒体放射

黒体放射は量子力学のきっかけになった物理学の分野である。黒体放射は、産業革命のさなか、製鉄業の溶鉱炉における熟練の温度管理ノウハウを学問として研究したところから始まった。その間に電磁気学が定式化され、電磁波の存在が明らかになると、高温の溶鉱炉で光を放っていたのが熱による電磁波であることが明らかになった。その研究の延長戦として、光が光量子と呼ばれる粒子の放出であることがわかり、量子力学が始まるのである。

7.1.1 ステファン・ボルツマンの法則

本節の冒頭で書いたように、高温の溶鉱炉から放たれていた光は熱による電磁波の放射である。その放射は絶対温度の4乗に比例する強度となる。その法則性は、電磁気学と熱力学の融合によって導出された。Quoraでは次のような質問が投稿された。その質問の回答とともに、熱放射の4乗則を説明しよう。

Quora 質問 黒体輻射は、なぜ絶対温度の4乗に比例するのでしょうか？

電磁波の圧力 一辺の長さが L の立方体の容器に運動量が \hat{p} の光子が閉じ込められている仮定する。その光子は立方体の向かい合った面で反射し、往復運動している。光子が往復する時間が $2L/c$ だから、ある特定の面に光子が衝突する回数は $c/2L$ 回/s だ。衝突1回につき、光子は容器の面に $2\hat{p}$ の運動量を渡すので、光子が特定の面に与える力 (単位時間当たりの力積) は、 $c\hat{p}/L$ となる。ここで、光子の運動量 \hat{p} とエネルギー ϵ の関係が $\epsilon = c\hat{p}$ であることに注意すると、光子1個が特定の面に与える力は、 ϵ/L と書くことができる。立方体の容器の壁は、 x, y, z の方向に向いていると考え、特定の壁にあたる光子は、容器に閉じ込められた光子の3分の1である (等分配の法則)。光子1個が壁に与える力が ϵ

なので、箱に閉じ込められた光子によって与えられる力は、 $U/3L$ となる。壁が一辺 L の正方形なので、光子による圧力は、

$$p = \frac{1}{L^2} \frac{U}{3L} = \frac{U}{3L^3} = \frac{u}{3}, \quad (1)$$

となる。ここで、 U が箱に閉じ込められた電磁波のエネルギーの総和 (内部エネルギー) であり、 u は単位体積当たりの内部エネルギー、すなわち、内部エネルギー密度だ。

熱力学第一法則 熱力学第一法則として、

$$dU = \delta Q - p dV,$$

なる公式がある。ここで、熱量 Q は状態量でないので微小変化量を示す記号として d の代わりに δ を使っている。エントロピーの定義 $dS = \delta Q/T$ より、熱力学第一法則は、

$$dU = T dS - p dV, \quad (2)$$

のように書き換えられます。数式 (2) をエントロピーの微小変化を表す等式に書き換えると、

$$dS = \frac{dU + p dV}{T} = \frac{V du + u dV + p dV}{T}, \quad (3)$$

となる。ここで、 $U = uV$ なる関係を利用した。上で導出した関係式 $p = u/3$ を (3) に代入すると、

$$dS = \frac{4u}{3T} dV + \frac{V}{T} \frac{dU}{dT} dT,$$

が得られる。この数式がエントロピーの全微分表現であると解釈すると、

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4u}{3T}, \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{dU}{dT}, \quad (4)$$

が得られる。なお、エントロピー S が全微分可能な必要十分条件として、 T と V についての偏微分を重ねる場合、微分の順序に依存しない、すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial V} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial V}, \quad (5)$$

が成り立ちます。偏微分 (4) を用いて、(5) の両辺を個別に計算し双方を等号で結ぶと、

$$\frac{du}{dT} = \frac{4u}{T},$$

が得られる。この微分方程式を解くとただちに、

$$u = \alpha T^4, \quad (7.1)$$

が得られる。ここで、 α は積分定数である。得られた解は、内部エネルギー密度が絶対温度の 4 乗に比例していることを示唆している。

7.1.2 プランク定数

プランク定数は、周波数 ν の光に対応する光の量子 (光量子, あるいは, 光子) のエネルギーを与える比例係数である。具体的には、周波数 ν の光子 1 個のエネルギーは、

$$E = h\nu, \quad (7.2)$$

だ。可視光線では $\nu = 6 \times 10^{14}$ Hz のような非常に高い周波数であり、光子 1 個のエネルギー $h\nu$ が小さな値になるため、その比例係数 h が必然的に非常に小さな値 ($h \simeq 6.63 \times 10^{-34}$ J·s) になる。

Quora には下のように、非常に素朴な質問が投稿された。上で述べたように、プランク定数は光子のエネルギーと周波数を関係づける比例係数なのだが、さかのぼると黒体放射でもその存在が見えてくる。

Quora 質問 プランク定数とは?

プランク定数は、プランクの公式から光子 1 個のエネルギーが $h\nu$ であることが導かれたことに由来する名称なのだ。プランクの公式とは、絶対温度 T の黒体放射のエネルギー密度のスペクトル密度 (単位体積から放射されるエネルギーが、周波数において単位周波数あたりに占める値) が、

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (7.3)$$

であることを表す。この公式は黒体放射理論の研究の末に導出された公式であり、それ以前は、

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}, \quad (7.4)$$

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/k_B T}, \quad (7.5)$$

なる公式が知られていた。公式 (7.4) と (7.5) は、それぞれ、レイリー・ジーンズの公式、ウィーンの公式と呼ばれる。図 7.1 で比較するように、レイリー・ジーンズの公式 (図中の Rayleigh-Jeans) は低周波領域で実験値 (図中の True distribution) との一致性がよく、ウィーンの公式 (図中の Wien) は高周波域で一致性がよい。補足しておく、図 7.1 は、(a) 図が真数スケール、(b) 図が対数スケールで描いている。レイリー・ジーンズの一致性は真数スケールではわかりにくい、対数スケールでは低周波領域の一致性が明確に確認できる。それに対し、プランクの公式 (7.3) は低周波でも高周波でも実験とよく一致した*。

*正直に言うと、ここでは True distribution はプランクの公式で計算してグラフを描いている。

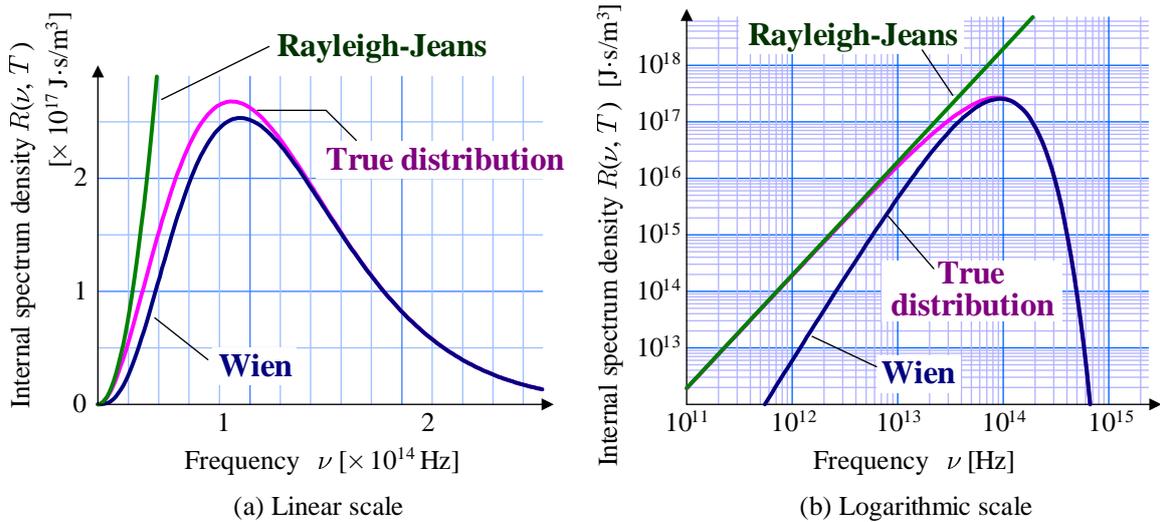


図 7.1: 熱放射のスペクトル分布 ($T = 1500 \text{ K}$)

プランクの公式を統計力学にしたがって数学的に考察すると、黒体放射のエネルギーが $h\nu$ の整数倍のエネルギーの寄せ集め、すなわち、

$$h\nu, 2h\nu, 3h\nu, 4h\nu, \dots$$

を寄せ集めたエネルギー値であると解釈できることがわかった。このことから、周波数 ν の光は、エネルギー $h\nu$ の光子で構成されていると推察される。このような考察が出たものの、当初、プランク自身は光子の存在についてあまり自信がもてなかったようだ。しかし、アインシュタインの光電効果が光子の存在を後押しすることになった。

補足 マクスウェルの方程式から導かれる電磁場のエネルギー密度に、相対性理論におけるローレンツ収縮とドップラ効果からの考察で、特定体積内に含まれる電磁場のエネルギーが周波数 ν に比例することが導かれます。それは $E = h\nu$ とつじつまが合う。また、マクスウェルの方程式からの考察で、電磁場のエネルギー密度を光速 c で割ると、電磁場の運動量密度と等しくなる。それは、相対性理論によると光子が質量ゼロの粒子であることを示唆する。

関連情報として、2019年5月20日に国際度量衡総会で、国際単位系 (SI) のうち質量 (kg)、電流 (A)、温度 (K)、物質質量 (mol) の定義の改定が承認された。その改定で、これまで定数だった光速に加え、プランク定数、電気素量、ボルツマン定数、アボガドロ数が定数として加わった。改定された単位は、それらの定数に基づく定義として書き換えられることになった。それに対して、次の質問が Quora に投稿された。

Quora 質問 キログラムのプランク定数に基づく新定義は、関係式 $E = mc^2 = h\nu$ から、光子のエネルギーで質量単位を定義したものと解釈できますか？

新たなキログラムの定義は、質問に書かれている関係式に基づいている。光速とプランク定数が厳密値を定義された物理定数で、時間も明確に定義されているので、これで質量が正確に定義できるというものだ。

以前のキログラム (質量) の定義は 1889 年に設定され、キログラム原器を参照する定義だった。どんなに厳重に保管されていても、多少なりとも変質 (化学変化) するので年間に 10^{-9} kg 程度の変化があるらしい。

新定義決定の際には、炭素原子 ^{12}C の質量からキログラムを定義する案もあったようだ。筆者の見解としては、温度が変化すると熱エネルギーのため若干質量が変わる ($E = mc^2$ のため) ので普遍的な定義としてはふさわしくなく、むしろ、今回の新定義がよいと考える。

7.2 量子力学に対する注意点

量子力学には粒子/波の二重性や、不確定性原理など特別な意識が必要な事項がある。とはいえ、量子力学でのみ必要だとすると、どれくらいのスケールから適応されるのか、などと考えてしまうかもしれない。実際のところ、それらの注意事項はマクロの世界でも起きているのだが、マクロの世界では扱う観測量が大きく、無視しても問題がないレベルだった。量子力学で新たにこんりよが必要に見える事項について、Quora の質問とともに確認していこう。

7.2.1 粒子/波の二重性

有限の伝搬速度で伝わる波は、観測者が運動している場合、ドップラ効果を生じる。ド・ブロイ波は同様にドップラ効果を生じるのだろうか？ そのような疑問が Quora に投稿された。筆者の回答では、ド・ブロイ波にもドップラ効果が生じるのだ。下を書く回答に書いているように、ド・ブロイ波は、エネルギーが周波数に、運動量が波数 (波長の逆数) に対応する。そのうち、エネルギーは運動エネルギーではなく $E = mc^2$ (静止エネルギーと運動エネルギーの和) である。

Quora 質問 水面の波や音波の波長は観測者の座標系に依存して変化しますか？ 電子のド・ブロイ波長 $\lambda = 2\pi h/mv$ は、観測者との相対速度に依存して変化しますか？ ご解説をお願いできますか？

確かにド・ブローイ波長が $\lambda = 2\pi\hbar/mv$ (ただし, $\hbar \equiv h/2\pi$) と書くと, その波長が相対速度に依存して変化するように見る。相対速度によって変化することは事実だが, 水面波の波長などが相対速度によって変化しないだろうと思うと, ド・ブローイ波長の振る舞いは奇妙に思えるかもしれない。しかし, 水面波の波長も相対速度によって変化する。それは相対論的なローレンツ変換に起因する。ド・ブローイ波のエネルギーと運動量は,

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k, \quad (1)$$

のように書くことができる。ここで, ω はド・ブローイ波の角速度, k ($= 2\pi/\lambda$) は波数だ。ド・ブローイ波のエネルギーと運動量も, 相対論的なエネルギーと運動量との関係:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

を満たす。ここで, m_0 は対象とする粒子の静止質量だ。その粒子とともに運動する観測者から見ると, 運動量はゼロであり, エネルギーは $E = m_0 c^2$ となる。エネルギーと運動量 (1) に注意すると, 粒子並走する観測者から見たド・ブローイ波の角速度と波数は,

$$\omega = \frac{m_0 c^2}{\hbar}, \quad k = 0, \quad (2)$$

となる。相対性理論では, 角速度と波数は 4 元波数ベクトルに収納することができる。具体的には, ω/c が 4 元波数ベクトルの第 0 成分, k が第 1 成分 (x 軸方向の運動のみを考えている場合) となる。また, 4 元波数ベクトルは, 座標と同じローレンツ変換にしたがう。例えば, 4 元波数ベクトルの第 0 成分と第 1 成分を, それぞれ, k^0 と k^1 とすると, x 方向に速度 $-v$ で運動する観測者から見た波数ベクトル k'^0 と k'^1 は,

$$k'^0 = \frac{k^0 + (v/c) k^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad k'^1 = \frac{k^1 + (v/c) k^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

となる。この変換式に (2) を代入すると,

$$\omega' = \frac{m_0 c^2}{\hbar\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad k' = \frac{m_0 v}{\hbar\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3)$$

が得られる。この結果は, 観測者に対して速度 v で運動する粒子のド・ブローイ波の物理量だ。得られた (3) の第 2 式から, $k' = 2\pi/\lambda$ に注意してド・ブローイ波長を計算すると,

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4)$$

であることがわかる。ここで, $m \equiv m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ なる相対論的質量を使うなら, (4) は $\lambda = 2\pi\hbar/mv$ のように, よく知られたド・ブローイ波長と一致する。つまり, ド・ブローイ波長は相対速度によって変化するが, その変化はローレンツ変換によってもたらされる。水面波などの身の回りの波動現象も, 波長はローレンツ変換によって変化する。そのような比較から, ド・ブローイ波は一般の波動現象と同じように思えてくる。

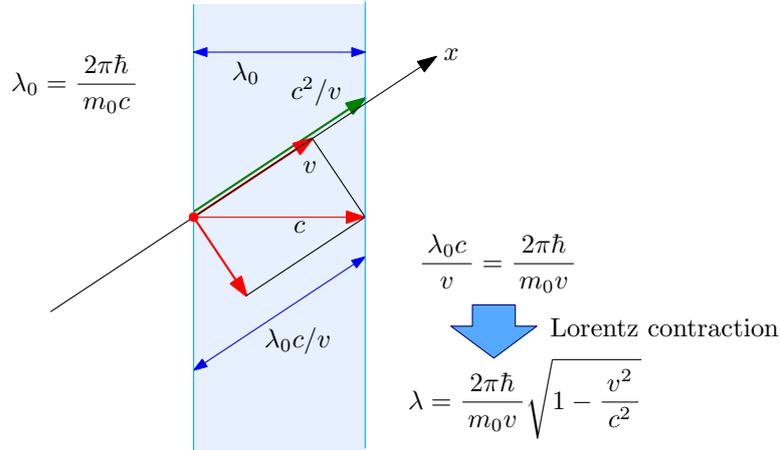


図 7.2: ド・ブローイ波の波長

補足 ド・ブローイ波長の速度依存性をローレンツ変換から直接的に導いてみよう。上で説明したように、粒子と並走する観測者から見ると、ド・ブローイ波の波長は無限大になる。これを数式として表現するには、ド・ブローイ波の波動関数を $e^{i\phi(x,t)}$ と考え、位相 $\phi(x,t)$ をローレンツ変換すればよい。波長が無限大なので、位相は、

$$\phi(x,t) = -\omega t,$$

のように、 x に依存しない形で記述できる。ここで、時間に関するローレンツ変換:

$$t = \frac{t' - vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

を適用する。つまり、粒子に対して速度 $-v$ で運動する観測者から見ると、ド・ブローイ波の位相は、

$$\phi'(x',t') = \frac{\omega(vx'/c^2 - t')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

となる。この位相は x の依存性をもっているので波長が定義できます。波長は、位相を 2π だけ変化させるための x の変化分だと考えればよいので、

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{2\pi c^2}{v\omega} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2\pi\hbar c^2}{\hbar\omega v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{2\pi\hbar c^2}{m_0c^2v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2\pi\hbar}{m_0v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。ここで、 $\hbar\omega = m_0c^2$ なる関係を利用した。計算結果 (5) は上で説明した (4) と合致する。ローレンツ変換を直接実行することによって、ド・ブローイ波長の速度依存性を示すことができた。とはいえ、粒子と並走する観測者から見たとき、波長が無限大になることが、受け入れにくいだろう。

7.2.2 不確定性原理

位置と運動量の不確定性の関係、時間とエネルギーの不確定性の関係など、どちらかを正確に測定しようとするともう一方の精度が悪くなる、というのが量子力学における不確定性原理だ。そのように異なる二つの観測量の間に制度のトレードオフが生じることが日常生活で意識しづらいため、量子力学における不確定性原理が必然的に成り立つことが理解しづらいかもしれない。だから、次のような質問が投稿されるのだろう。

Quora 質問 不確定性原理は理論上だけの話ですか？

端的に言うと、観測の不確定は必然的に起こるので、不確定性原理は必ず成り立つ。不確定性原理は量子力学で顕在化したのかもしれないが、量子力学でなくても成り立つ。実際には、巨視的な(マクロのスケールであれば、観測の不確定は無視できる程度の大きさである)ので気にならないだけである。量子のようなミクロのスケールでは、観測の不確定が無視できないので、しっかりと向き合わなければならいと解釈すればよい。

ある時間 Δt だけの時間をかけて周波数を評価する場合を考えよう。フーリエ変換から導かれるように、有限の観測時間 Δt で評価した周波数は $1/\Delta t$ という広がりをもっている。それが周波数観測の不確かさだ。量子力学では(ド・ブROI波の)波動関数の周波数は、エネルギーとの間に $E = h\nu$ という関係をもっているので、フーリエ変換から導かれる観測時間と周波数の不確かさの関係は、

$$\begin{aligned}\Delta t \Delta E &= \Delta t \cdot \Delta(h\nu) = h \Delta t \Delta \nu \\ &= h \Delta t \cdot \frac{1}{\Delta t} = h,\end{aligned}$$

なる関係に書き換えられる。つまり、量子力学における不確定性原理 $\Delta t \Delta E = h$ が導かれたわけだ。

位置と運動量の不確かさについて考えてみよう。位置を観測するには、何らかの方法で位置を検出の機構が必要だ。例えば、波長 λ の光を照射する場合を考える。レンズを利用した光学において、波長 λ の光で観測できる位置は $\Delta x = \lambda$ 程度の不確かさをもっている。その光の粒子(光子)は $p = h/\lambda$ の運動量をもっている。その運動量の光をあてられた物体は、照射する角度やエネルギー吸収の条件等に左右され、おおむね、衝突してきた光子の運動量 p に相当する分だけ運動量の変化を受ける。つまり、観測対象の物体は $\Delta p = h/\lambda$ 程度の不確かさをもつことになる。したがって、位置と運動量の不確かさは、

$$\Delta x \Delta p = h,$$

なる関係を満たす。このような上記の不確かさは、観測すると必然的に生じるのだ。マクロのスケールであっても、ミクロのスケールであっても必ず生じる。不確かさの積であるプランク定数は、 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$ という非常に小さい値であるので、マクロのスケールでは十分に無視できるレベルだった。しかし、電子や陽子のレベルではプランク定数のスケールを無視できないので、不確定性原理を意識しなければならないわけだ。

7.3 原子構造

化学の研究で元素とされた水素、窒素、炭素、酸素などの原子は究極の素粒子ではなく、原子核と電子で構成される構造体であることが明らかになった。原子核が正電荷をもち、電子が負電荷をもつことで物質は電氣的忠誠を保っている。正電荷をもつ原子核は、正電荷をもつ陽子と、電氣的に中性な中性子によって構成されている。

7.3.1 原子核の大きさ

次項で紹介する水素原子モデルによって、原子の大きさが 10^{-10} m 程度であることが明らかになったが、原子核の大きさはさらに小さく 10^{-15} m 程度である。つまり、原子の内部はほとんど何もない空間である。この話題について、筆者が Quora で公開しているスペース [数理科学 Q らぼらとりい](#) に投稿した記事を紹介する。

今でこそ、原子は原子核と電子によって構成されていることがわかっている、以前は原子全体に電荷がのっぺりと分布しているモデル(トムソンのモデル)など、複数の説が提唱されていた。原子核の存在を明らかにしたのはガイガー・マースデンの実験だ。

ガイガー・マースデンの実験はラザフォードの指導で実施され、アルファ線を金箔に打ち込むことで原子の構造を明らかにした。実験の結果、ほとんどのアルファ線が金箔を通過、8000 個に 1 個の割合で、 90° 以上軌跡が曲がる散乱が確認された。その実験結果から洞察して原子内部は、非常に小さな原子核が存在し、スカスカの状態であることがわかったのだ。現在では、原子核の大きさは 10^{-15} m 程度と考えられている。それは水素原子の約 10 万分の 1 の大きさにすぎない。

ラザフォードの実験条件に基づいて、アルファ線の散乱を計算すると図 7.3 のようにアルファ線の軌跡を描くことができた。撃ち込まれたアルファ線の速さは約 1.6 万 km/s、光速の約 20 分の 1 にあたる。その速度で原子核の正面に撃ち込まれたアルファ線は、原子核のわずか $4.25 \times 10^{-14} \text{ m}$ の距離まで接近し、正電荷をもった原子核に弾き返されることとなります。その時点でも、すでに原子半径の 2000 分の 1 まで中心部に入り込んでいることになる。

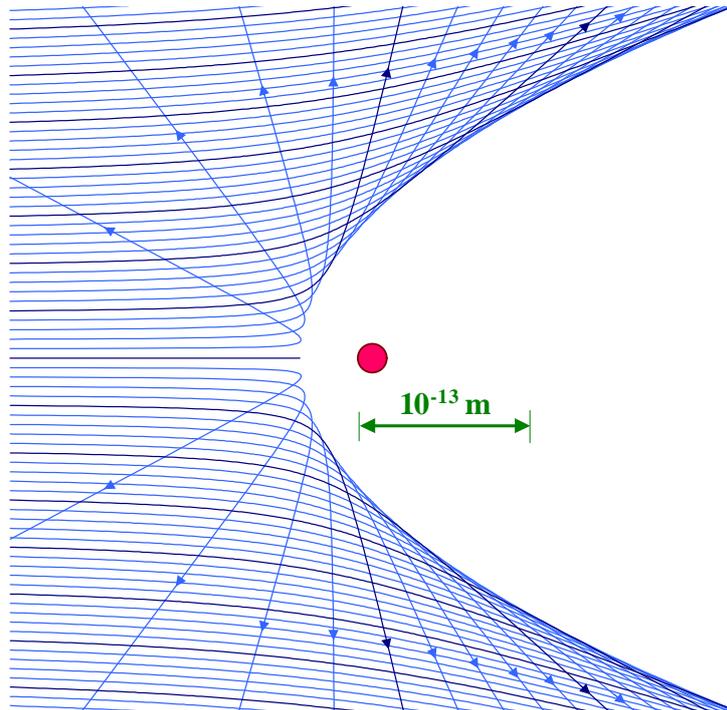


図 7.3: 金 Au の原子核に照射されたアルファ粒子の軌跡

図 7.3 に示すように、アルファ線が入り込めない領域が存在する。その領域はシャドウコーン[†]と呼ばれ、その領域への境界は回転放物面となる。境界が回転放物線となることが、**数理科学 Q** らぼらとりいに投稿されているので、併せて紹介しておく。

ラザフォード散乱の古典モデルでは、アルファ線の軌跡は、

$$\frac{1}{u} = -\frac{1 + \cos \theta}{a^2} + \frac{\sin \theta}{a}, \quad (1)$$

なる数式で与えられる。ここで、座標は原子核を原点にとった。変数 u がアルファ線と原点との距離、 θ が方位角だ。さらに、 a は無限遠をアルファ線が出発したときの y 座標に関するパラメータだ。なお、数式 (1) は距離を無次元化して記述している。影の領域の境界線を計算するにあたり、ある特徴に注目する。それは、パラメータ a に対応する軌跡が、 a を変えたときの軌跡を横切っていることだ。そこでパラメータ a を微小に変化させ、 $a(1+\delta)$ としたときの軌跡の交点が、影の領域の境界線上にあると考える。つまり、そこでパラメータ a を微小に変化させながら軌跡の交点を追跡すると、影の領域の境界線を辿ると考えるのだ。

パラメータ $a(1+\delta)$ に関して、数式 (1) を計算すると、

$$\frac{1}{u} \Big|_{a+\delta} = -\frac{1 + \cos \theta}{a^2(1+\delta)^2} + \frac{\sin \theta}{a(1+\delta)}$$

[†]この名称は、成蹊大学 理工学部 教授の中野武雄氏から教えてもらった。

$$\simeq -\frac{1 + \cos \theta}{a^2} + \frac{\sin \theta}{a} + \frac{(2 + 2 \cos \theta - a \sin \theta) \delta}{a^2}, \quad (2)$$

が得られる。ここで、右辺は δ の 1 次の項までとった。ここで、(1) と (2) の交点を考えているので、 $1/u$ が微小量 δ に依存しないと考える。そのように考えると、アルファ線の軌跡は、

$$2 + \cos \theta - a \sin \theta = 0, \quad (3)$$

を満たす θ で交点をとることになる。この方程式は、

$$\sqrt{a^2 + 4} \sin \left(\theta - \arctan \frac{2}{a} \right) = 2, \quad (4)$$

のように書き換えられる。この方程式は容易に解くことができ、

$$\begin{aligned} \theta &= \arcsin \frac{2}{\sqrt{a^2 + 4}} + \arctan \frac{2}{a} \\ &= 2 \arctan \frac{2}{a}, \end{aligned}$$

が得られる。この解から交点となる方位角 θ における三角関数を計算しておく、

$$\sin \theta = \frac{4a}{a^2 + 4}, \quad \cos \theta = \frac{a^2 - 4}{a^2 + 4}, \quad (5)$$

が得られる。これらを (1) に代入すると、原点から交点までの距離が、

$$u_c = \frac{a^2 + 4}{2},$$

であることがわかる。この結果から、カルテシアン座標系における交点の位置:

$$x = u_c \cos \theta = \frac{a^2 - 4}{2},$$

$$y = u_c \sin \theta = 2a,$$

が特定できる。この数式から a を消去すると、

$$x = \frac{y^2}{8} - 2,$$

が得られるので、ラザフォード散乱の古典モデルにおける影の領域は、放物線を境界とする内側に存在することが判明した。原子核を通る断面で見ると境界が放物線となるので、立体的には境界が回転放物面となるわけだなお、ここでは座標が無次元量になるように正規化しているが、その座標に係数:

$$r_0 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2},$$

を乗じると実際の寸法に変換できる。ここで、 q と Q は、それぞれ、アルファ線とターゲット原子核の電荷、 ϵ_0 は真空の誘電率、 m はアルファ線の質量、 v_0 は入射するアルファ線の速さとした。

7.3.2 水素原子

水素原子における電子の波動関数に関するシュレーディンガー方程式を解くと、主量子数、方位量子数、磁気量子数という三つのパラメータが現れる。これらは整数値であり、その整数の組み合わせによって電子の軌道が定まる。とはいっても、惑星のような明確な軌道が定まるのでなく、電子の存在確率が高くなる場所に特徴があが現れ、その特徴を電子軌道と呼ぶのだ。Quora に投稿された次の質問が、電子軌道に関する質問だ。

Quora 質問 s 軌道と p 軌道の確率分布曲線を説明できますか？

水素原子のシュレーディンガー方程式の解は、主量子数 n 、方位量子数 l 、磁気量子数 m を伴って記述される。その解は、

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (7.6)$$

のように変数分離解として記述される。そのうち、 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ は球面調和関数である。主量子数 n に関連する因数 $R_{nl}(r)$ は、

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\frac{1}{n^2 a_0} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} e^{-r/na_0} \left(\frac{2}{na_0}\right)^{l+1} r^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right), \quad (7.7)$$

のように書くことができる。これが、動径方向 r の依存性だ。なお、 a_0 ($\simeq 0.53 \times 10^{-10}$ m) は、古典的な水素原子の半径とされるボーア半径である。また、(2) に含まれる $L_{n-l-1}^{2l+1}(2r/na_0)$ は、それ以上説明しないが、ラゲールの陪多項式と呼ばれる関数だ。補足として、 $R_{nl}(r)$ は特殊な次元をもっている。数式を見ると明らかのように、その関数は長さの $-3/2$ の次元 ($L^{-3/2}$) をもっている。それは、この関数を自乗して r^2 を乗じると、動径方向の単位長さあたりの電子の存在確率 (次元は L^{-1}) になるからだ。この回答を書いているとき、筆者が気になった点としてあえて補足しておいた。

上で補足したように、 $r^2 |R_{nl}(r)|^2$ は、動径方向の単位距離あたりの電子の存在確率になる。関数は、図1のような曲線を描く。そのグラフの横軸は、ボーア半径 a_0 を単位とする距離だ。主量子数が $n=1$ のとき、存在確率のピークはボーア半径と一致する。量子数 n が大きくなると、図7.4のように山を複数個伴う波動関数となる。量子力学における電子軌道とは、そのような確率密度の山である。厳密な電子の経路が存在するのではなく、電子が見いだされる確率の濃淡のパターンが作られている。その濃淡のパターンは量子数の組み合わせによって異なるわけだ。

電子の存在位置の期待値は、 $r^2 |R_{nl}(r)|^2$ を評価することによって、

$$\langle r \rangle = \frac{a_0}{2} [3n^2 - l(l+1)], \quad (7.8)$$

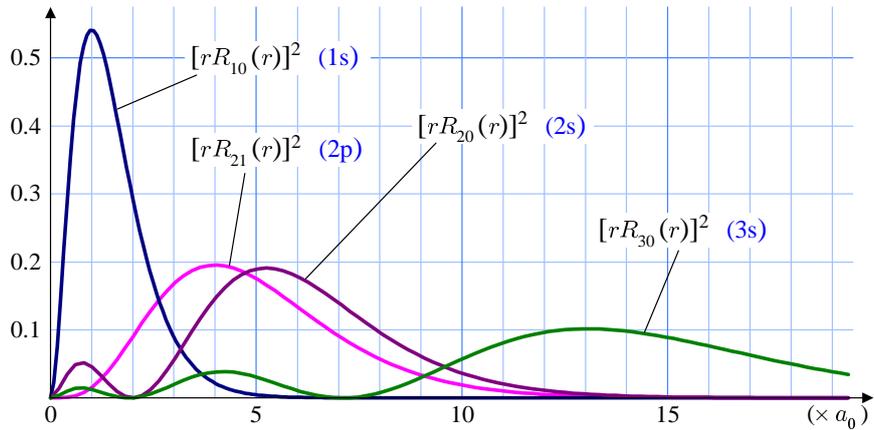


図 7.4: 水素原子の電子の存在確率 (動径座標依存性)

であることがわかる。例えば、主量子数 $n = 1$ の水素原子半径の期待値は、ボーア半径 (古典モデルによる半径) の 1.5 倍ということだ。さらに、半径の期待値は方位量子数 l にも依存することがわかる。

補足 図 7.5 は原点を通り方位 $\varphi = 0, \pi$ で切断したときの電子の存在確率の断面を表している。いわゆる電子雲の断面だ。

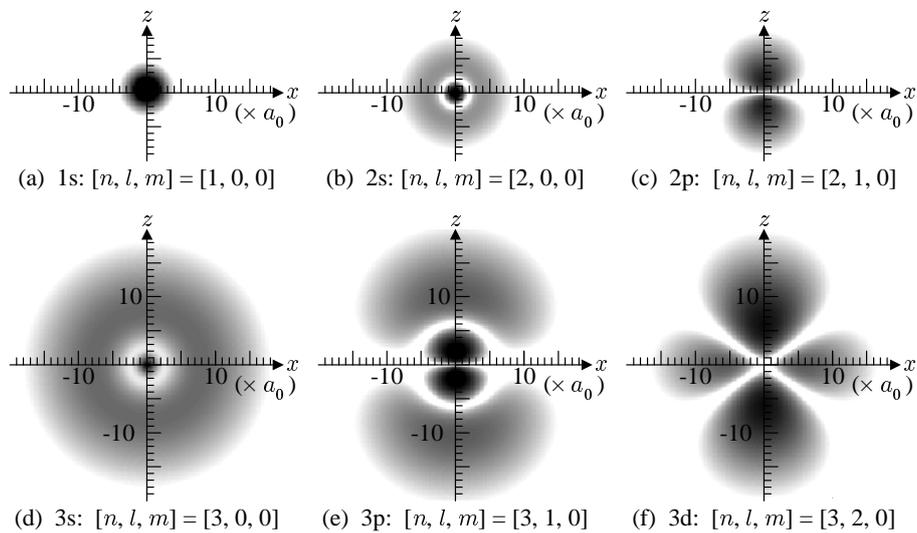


図 7.5: 水素原子の電子雲 (電子の存在確率)

この図を得るには、方位角 φ と天頂角 θ の依存性を含む波動関数も考慮し、 $|R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)|^2$ を図 7.5 における電子雲の濃さとして描いている。電子雲の濃さは、その場所における単位体積あたりの電子の存在確率にあたる。

$Y_l^m(\theta, \varphi)$ は軌道の形状をつくる関数だ。上に書いたように、その関数は球面調和関数だ。球面調和関数の例を図 7.6 に示しておく。これが、方位量子数 l と磁気量子数 m によってつくられる電子雲の形状である。

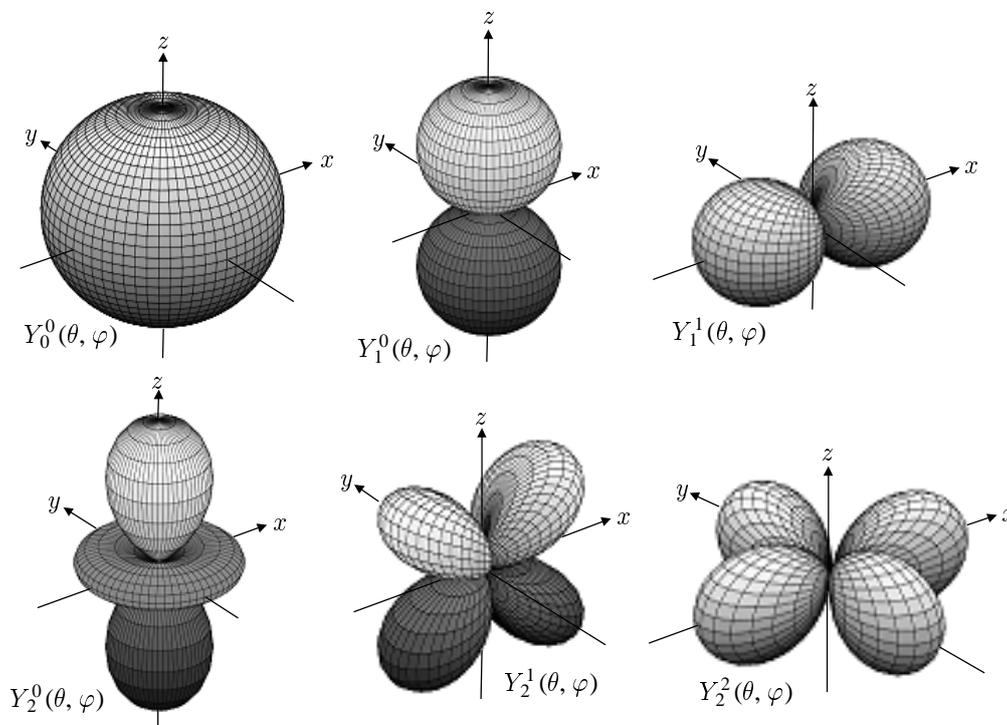


図 7.6: 球面調和関数の外形

水素原子モデルで見る s 軌道, p 軌道, d 軌道は方位量子数 l に対応する名称だ。そのうち、方位量子数 $l = 0$ に対応する軌道が s 軌道であり、電子の存在確率が図 7.6 に示すような球形の電子雲を形成する。方位量子数 $l = 1$ が p 軌道, $l = 2$ が d 軌道に対応する。そのうち、d 軌道は急を二つ並べたような電子雲であり、原子核が球の接合位置にあたる。

7.3.3 電子の占有個数

電子はフェルミ統計にしたがう粒子、いわゆるフェルミ粒子であり、フェルミ粒子は同じエネルギー順位を救数でとることが許されない。そのような制約のため、主量子数 n に対応する電子の占有個数が決まっている。電子の占有個数に関して次のような質問が投稿された。

Quora 質問 主量子数 $n = 3$ に属する軌道に入りうる電子の数はいくつか? 答えは 18 個なんですけど、なぜか教えてくださいませんか?

球対称のシュレーディンガー方程式(水素原子モデル)によると、電子の状態は、主量子数 n 、方位量子数 l 、磁気量子数 m 、とスピン s によって決まる。これらの値はとびとびの値であり、 n は 1 以上の整数、 l は軌道角運動量に相当し、0 から $n - 1$ の整数、 m は $-l$ から $+l$ の整数、 s は上向きか下向きか、というスピンの方向を表す。つまり、主量子数 n に属する電子の数は、

$$N = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2 \cdot [n(n - 1) + n] = 2n^2, \quad (7.9)$$

となる。したがって、主量子数 $n = 3$ に属する電子の数は、 $2n^2 = 18$ となる。これを模式的に書くと、図 7.7 のようになる。青い矢印はスピンの方向を表している。パウリの排他原理によると、電子は同じ状態を複数個で共有することができない。図 7.7 の各ボックスは方位量子数と磁気量子数で決まる状態だ。その中に上向きと下向きのスピンの電子が入る。この図に描いた矢印が、電子だと考えればよい。図中にも矢印は 18 個ある。なお、方位量子数に関して、 $l = 0$ に対応する軌道が s 軌道、 $l = 1$ が p 軌道、 $l = 2$ が d 軌道と呼ばれる。

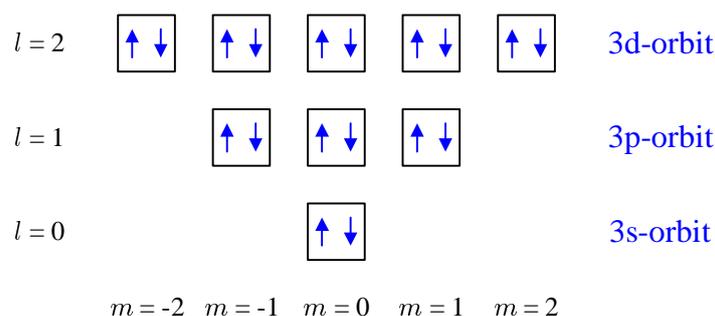


図 7.7: 主量子数 $n = 3$ に対応する電子のエネルギー状態

電子番号が 30 までの原子の電子配置を図 7.8 に示す。電子はエネルギーが低い順に入っていく。典型的な順序としては、 $l = 0$ について上向きスピンと下向きスピンの電子が占有したのちに、 $l = 1$ のすべての m についてスピン状態が一つずつ入っていく。空いた状態がなくなれば、次に、もう一方のスピン状態が入っていくという具合だ。そのような電子の占有順序の規則性は**フントの法則**と呼ばれる。ただし、上向き/下向きというスピンの状態は人間が勝手に決めた状態なので、上と下でどちらが優先かは特にならない。図 7.8 において、太文字の数字は、その軌道の電子が満席であることを意味する。この表によると、カリウム (K) 以降の電子配置が変則的だ。これは 4s 軌道のエネルギーが、3d 軌道よりもわずかに低くなっていることに起因する。

相対性理論を考慮した量子力学(相対論的量子力学)によると、スピン s を入れなければ角運動量保存則が成立しないことがわかっている。つまり、スピンは電子の状態を表すパラメータとして必要であることが理論的にわかっている。その事項に関しては、筆者は次の質問に対して短い回答を投稿した。

	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s
H	1						
He	2						
Li	2	1					
Be	2	2					
B	2	2	1				
C	2	2	2				
N	2	2	3				
O	2	2	4				
F	2	2	5				
Ne	2	2	6				
Na	2	2	6	1			
Mg	2	2	6	2			
Al	2	2	6	2	1		
Si	2	2	6	2	2		
P	2	2	6	2	3		
S	2	2	6	2	4		
Cl	2	2	6	2	5		
Ar	2	2	6	2	6		

	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s
K	2	2	6	2	6		1
Ca	2	2	6	2	6		2
Sc	2	2	6	2	6	1	2
Ti	2	2	6	2	6	2	2
V	2	2	6	2	6	3	2
Cr	2	2	6	2	6	5	1
Mn	2	2	6	2	6	5	2
Fe	2	2	6	2	6	6	2
Co	2	2	6	2	6	7	2
Ni	2	2	6	2	6	8	2
Cu	2	2	6	2	6	10	1
Zn	2	2	6	2	6	10	2

図 7.8: 原子の電子配置

Quora 質問 ディラック方程式はスピンとどのように関係しているのですか?

ディラック方程式の解から得られる角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ は、ハミルトニアン H と可換ではない。つまり、 $[\mathbf{L}, H] \neq 0$ だ。これは角運動量 \mathbf{L} が保存されないことを意味する。一方、 $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma}/2$ のようにスピン角運動量を加算すると、 $[\mathbf{J}, H] = 0$ となる。これは、スピン角運動量が加算された角運動量が保存量となることを意味する。このことから、スピンは相対論的量子力学において、角運動量を保存させるために必要な量であることだ。つまり、ディラックの方程式はスピンの必要性を示唆しているのだ。

7.3.4 電子軌道の占有順序

原子を構成する電子はエネルギーが小さい軌道から順序で入っていくので、1s 軌道、2s 軌道、2p 軌道、3s 軌道、3p 軌道の順に電子が占有していく。ただし、それ以降は多少複雑である。実際には電子のエネルギーの解析が必要になるのだが、大まかには図 7.9 に示す順序で電子が軌道を占有していく。

この電子の占有順序に関して、次の質問が Quora に投稿された。周期表の上の部分とは、元素周期表の第 1 周期の第 2 族から第 17 族、第 2 周期と第 3 周期の第 3 族から第 12 族が空白になっていることを意味する。

Quora 質問 なぜ周期表の上の部分は空白になっているのですか?

$n \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7
7	7s	7p	7d	7f	7g	7h	7i
6	6s	6p	6d	6f	6g	6h	
5	5s	5p	5d	5f	5g		
4	4s	4p	4d	4f			
3	3s	3p	3d				
2	2s	2p					
1	1s						

図 7.9: 原子における電子軌道の占有順序

元素周期表の形状は巧妙に作られていて、最外殻電子の電子軌道がわかるようになっていいる。最も内側の軌道は電子が2個まで、次の軌道は電子が8個までしか入らないで、周期表の上の部分には空白になる。

電子はエネルギーの低い軌道から入っていき、埋まれば、次にエネルギーが低い軌道に入っていく。いわば、イベントやセミナーで入場者に座席案内をするようなもので、案内中の座席(2階のS席, 3階のA席のような感じ)が周期表からわかる。案内中の座席を周期表に書くと図 7.10 のようになる。周期表の左2列はs軌道, 右2行がp軌道, 残りがd軌道に対応する。例えば, 周期4の第7族は, 3d軌道が案内中の座席だ。このとき, 1s軌道, 2s軌道, 2p軌道, 3s軌道, 3p軌道, 4s軌道は満席になっている。各軌道の席数は, 周期番号(主量子数)に関わらず, s軌道が2席, p軌道が6席, d軌道が10席, f軌道が14席である。その座席数を考えると, 周期表はうまい形になっていることがわかる。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	1s																		1s
2	2s													2p					
3	3s													3p					
4	4s			3d										4p					
5	5s			4d										5p					
6	6s		4f 5d	5d										6p					
7	7s		5f 6d	6d										7p					

図 7.10: 2025年時点で命名された原子による元素周期表

特殊なのが, 第6周期の第3族と第7周期の第3族である。第6周期はランタノイドと呼ばれるグループで, 原子番号57のランタン(La)から原子番号70番のイットルビウム(Yb), 原子番号71番のルテチウム(Lu)までが含まれる。そのうち, LaからYbまでは最

外殻電子が4f軌道であり、Luの最外殻電子は5d軌道である。一方、第7周期はアクチノイドと呼ばれるグループで、原子番号89のアクチニウム(Ac)から原子番号102のノーベリウム(No)、原子番号103のローレンシウム(Lr)が含まれる。そのうち、AcからNoまでは最外殻電子が5f軌道であり、Lrは最外殻電子が6d軌道である。日本国が元素名に取り込まれた原子番号113のニホニウム(Nh)は第7族の第13族の元素であり、最外殻電子は7p軌道である。

2016年11月に原子番号118の原子までが国際的に命名され、図7.10のように周期表を作ることができる。2025年の時点で原子番号119以降の元素が未発見であるが、それらが発見されると周期表はどのように変化するだろうか？その疑問が次の質問として投稿された。

Quora 質問 119番以降の元素が発見されたら、周期表のどこに配置するのでしょうか？新しい元素を入れるスペースがないように思えるのです。将来の周期表はどのようになるのでしょうか？どのように構成されるのでしょうか？

新元素が発見されたら？さらに大きな人工元素が生成されたら？筆者は高校生のとき、そのような観点で元素周期表の拡張を考えたことがある。元素周期表が災害各電子の配置を表現していることを考えると、原子番号119以降の元素を含む周期表は図7.11のようになるだろう。図7.11は化学のテキストで見る周期表より横に伸びている。というのも

	s1	s2	d	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	p1	p2	p3	p4	p5	s6
1	H																														He	
2	Li	Be																									B	C	N	O	F	Ne
3	Na	Mg																									Al	Si	P	S	Cl	Ar
4	K	Ca															Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
5	Rb	Sr															Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
6	Cs	Ba	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
7	Fr	Ra	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Td	No	Lr	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	Nh	Fl	Mc	Lv	Ts	Og
8	Uue	Ubn	Ubu	Ubb	Ubt	Ubc	Ubd	Ube	Ubf	Ubg	Ubh	Ubi	Ubj	Ubk	Ubl	Ubm	Ubn	Ubo	Ubp	Ubb	Ubc	Ubd	Ube	Ubf	Ubg	Ubh	Ubi	Ubj	Ubk	Ubl	Ubm	Ubn
	Element	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139												
		Ubu	Ubb	Ubt	Ubc	Ubd	Ube	Ubf	Ubg	Ubh	Ubi	Ubj	Ubk	Ubl	Ubm	Ubn	Ubo	Ubp	Ubb	Ubc	Ubd	Ube	Ubf	Ubg	Ubh	Ubi	Ubj	Ubk	Ubl	Ubm	Ubn	Ubo

図 7.11: 未発見の元素を含む元素周期表

原子番号57から71のランタノイド系列と、原子番号89から103のアクチノイド系列が入るように枠を広げたからだ。第6周期のランタノイド系に属する原子番号57から70の原子は、最外殻電子が4f軌道です。第7周期のアクチノイド系に属する原子番号が89から102の原子は、最外殻電子が5f軌道です。第8周期では、原子番号が139から152の原子が最外殻電子が6f軌道となり、原子番号121から138の原子が最外殻電子が5g軌道となる。ただし、原子番号138以降の原子は、安定した電子順位が作れないことが相対論的量子力学からわかっている。そのため、原子番号138以降の原子は名称を淡色表示した。

図 7.11 の元素周期表において、原子番号 119 以降の原子の名称は国際純正応用化学連合 (International Union of Pure and Applied Chemistry; IUPAC) が 1978 年に定義した原子の命名法 (表 7.1) に基づいて記載した。IUPAC の命名法では、原子番号の各桁の数値を表

表 7.1: IUPAC による元素命名規則

数	語	元素名	数	語	元素名
0	nil	-nilium	5	pent	-pentium
1	un	-unium	6	hex	-hexium
2	bi	-bium	7	sqpt	-septium
3	tri	-trium	8	oct	-octium
4	quad	-quadium	9	en	-ennium

7.1 に従って拾い上げ、最終桁の数値に -ium を付加して物質名とする。例えば、原子番号 113 は、現在ではニホニウムと命名されたが、それ以前は ununtrium (ウンウントリウム) という名称だった。また、安定した電子軌道をもつだろう最大となる原子番号 137 の元素は、untriseptium (ウントリセプティウム) という名称になる。