

運動する電荷が生成する電磁場

マクスウェルの方程式が波動方程式に変形できることから、電磁作用が有限の速さで伝播することが導かれる。言い換えると、電磁場は波動方程式の解である遅延ポテンシャルで記述されるように、源の過去の状態によって決定される。どれくらい過去かという、それは観測者と源までの距離に依存する。さらに、源を変動させる状態(すなわち、加速度)が電磁放射を引き起こす。

1 遅延ポテンシャル

静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いると、マクスウェルの方程式は、

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}. \quad (1)$$

のような波動方程式として記述される。これから、この波動方程式の解としての ϕ と \mathbf{A} を導出しよう。それらの物理量は、位置ベクトル \mathbf{r} と時刻 t の関数である。

一般的な議論のため、任意の関数 $f(\mathbf{r}, t)$ と $g(\mathbf{r}, t)$ を用いて、波動方程式が

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -g(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

のように書かれているとする。これらの関数 $f(\mathbf{r}, t)$ と $g(\mathbf{r}, t)$ が逆フーリエ変換:

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3 \mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)},$$
$$g(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3 \mathbf{k} \tilde{g}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)},$$

で定義されているとする。ただし、 \mathbf{k} と ω は、それぞれ、波数ベクトルと角周波数である。このような逆フーリエ変換を代入すると、波動方程式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3 \mathbf{k} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3 \mathbf{k} \tilde{g}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}.$$

のように変形される。これをフーリエ変換すると、この方程式から

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\tilde{g}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

なる関係が導出される。この関係式を逆フーリエ変換すると、解 $f(\mathbf{r}, t)$ が

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 \mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\tilde{g}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 \mathbf{r}_s \int_{-\infty}^{\infty} dt_s \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3 \mathbf{k} \frac{g(\mathbf{r}_s, t_s)}{k^2 - \omega^2/c^2} e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + \omega(t - t_s)]}. \quad (3)$$

のように表されることがわかる。ここで、 \mathbf{r}_s と t_s は位置と時間を表す変数の任意の関数である。さて、簡単のため、積分核 $G(\mathbf{r}, t)$ を

$$G(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}}{k^2 - \omega^2/c^2}, \quad (4)$$

のように定義しよう。すると、 $f(\mathbf{r}, t)$ は

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_s \int d^3\mathbf{r}_s G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t - t_s) g(\mathbf{r}_s, t_s). \quad (5)$$

のようになる。この積分を計算するため、波数ベクトル \mathbf{k} を3次元の極座標系 $[k, \theta, \varphi]$ で表す。このような座標系を用いると、 k は \mathbf{k} の長さ、 θ は \mathbf{k} と \mathbf{r} のなす角、さらに、 φ は \mathbf{r} に垂直な平面上での角度座標を表す。すると、この積分は、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 e^{i(kr \cos\theta + \omega t)}}{k^2 - \omega^2/c^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_1^{-1} d\cos\theta \int_0^{\infty} dk \frac{k^2 e^{ikr \cos\theta}}{k^2 - \omega^2/c^2} \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3 r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_0^{\infty} dk \frac{k}{k^2 - \omega^2/c^2} (e^{-ikr} - e^{ikr}) \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3 r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 - \omega^2/c^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

のように計算できる。ところが、被積分関数が積分路上に2つの極をもっているため、積分計算をこれ以上進めることは困難であり、積分結果を確定できない。このような不確定性を回避するため、被積分関数の分母に無限小の虚数を付加すると、積分核 $G(\mathbf{r}, t)$ は、

$$G_{\pm}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{(2\pi)^3 r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 - \omega^2/c^2 \pm 2i\epsilon\omega/c}. \quad (7)$$

なる形で記述できる。ここで添え字 \pm は、それぞれ、分母の無限小虚数数の符号に対応している。このような数式操作は単なる数学的トリックに過ぎないかもしれないが、無限小虚数 $\pm 2i\epsilon\omega/c$ は本節の後に示すように物理的な意味に対応している。操作された積分核 $G_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ は

$$G_{\pm}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{2(2\pi)^3 r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{1}{k - \omega/c \mp i\epsilon} + \frac{1}{k + \omega/c \pm i\epsilon} \right) e^{i(kr + \omega t)}. \quad (8)$$

のように記述される。実軸に沿った無限積分は図1に示す周回積分について $R \rightarrow \infty$ の極限をとった結果と等価である。留数定理を用いると、周回積分は

$$G_+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+r/c)} d\omega = \frac{1}{4\pi r} \delta(t + r/c), \quad (9a)$$

$$G_-(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-r/c)} d\omega = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r/c). \quad (9b)$$

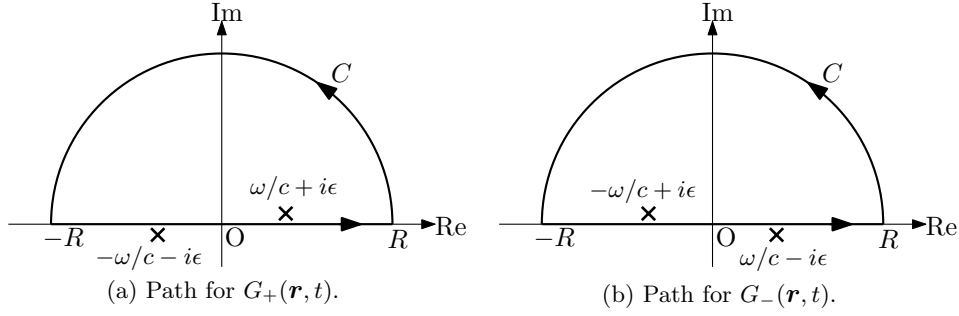


図 1: 積分核 $G_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ を計算するための積分路

のように計算できる。

積分核 $G_+(\mathbf{r}, t)$ を (5) に代入すると、解:

$$\begin{aligned}
 f_+(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\mathbf{r}_s, t_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} \delta(t - t_s + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c) dt_s \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(\mathbf{r}_s, t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s.
 \end{aligned} \tag{10}$$

が得られる。積分核 $G_-(\mathbf{r}, t)$ に対応する解も同様に計算でき、

$$f_-(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s. \tag{11}$$

となる。

このように、波動方程式 (2) は 2 種類の関数 $f_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ を解とする。これらは、物理的観点で異なる意味をもっている。まず、 $f_+(\mathbf{r}, t)$ は先進解と呼ばれ、未来の物理量 g を積分することによって決定される。逆に、 $f_-(\mathbf{r}, t)$ は遅延解と呼ばれ、過去の物理量 g を積分することによって決定される。そのうち、先進解は未来から過去へ情報伝達されるという因果律に反することを意味するため、物理的に無意味ということで棄却される。このように 2 種類の解が得られたのは、(7) に対して施した操作に起因するのである。その操作は、実は、 $e^{(i\omega \pm \epsilon/c)t}$ なる時間依存性を仮定したことと等価であり、正の符号のとき物理量が $t \rightarrow \infty$ の極限で発散し、負の符号のとき $t \rightarrow \infty$ の極限でゼロに収束することを意味している。そのうち、先進解に対応する正の符号の操作が、物理的にふさわしくない条件設定となっているのである。端的に言うと、(7) の被積分関数に対する操作が、物理的に適した解を選択するための境界条件になっているのだ。

さて、波動方程式の解として静電ポテンシャルとベクトルポテンシャルを記述するにあたり、遅延解を採用すると、その解が

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s, \tag{12a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s. \tag{12b}$$

となることは直ちにわかるであろう。これらの解は遅延ポテンシャルと呼ばれる。数式が表すように、遅延ポテンシャルは、源の位置に対応する時間だけさかのぼった過去における電荷密度や電流密度によって決定される。言い換えると、電磁場のポテンシャルは、電磁作用が有限の速度 (すなわち、光速) で伝播するため、過去の電荷密度や電流密度の影響を受けている。

2 リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャル

マクスウェルの方程式は波動方程式の形に書き換えることができ、その結果、電磁作用が有限の速度で伝播することが導かれる。真空中では、 $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ であるので、その伝播速度は光速に等しい。一般的に、マクスウェルの方程式は、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s, \quad (13a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s. \quad (13b)$$

なる解をもっている。これらの解はポテンシャル ϕ と \mathbf{A} が、宇宙全体にわたって存在する源 \mathbf{r}_s からの寄与を重ね合わせて得られることを示している。しかも、被積分関数の時間依存性が $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c$ となっていることから、それらの解が、 \mathbf{r}_s から観測点 \mathbf{r} への伝播遅延に等しい遅延を含んでいることが注目すべき点である。そのため、このようなポテンシャルを遅延ポテンシャルと呼ぶ。

この遅延ポテンシャルの数式を運動する点電荷に応用してみよう。点電荷は、電荷 e をもち、時刻 t に位置 $\mathbf{s}(t)$ に存在すると仮定する。位置ベクトル $\mathbf{s}(t)$ は時間について微分すると点電荷の速度になることを述べておく。すなわち、点電荷の速度は、定式的に $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{v}$ と書けるということである。この点電荷に関して、電荷密度と電流密度は、ディラックのデルタ関数を用いると、

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \mathbf{v} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)),$$

のように書ける。これらの数式を遅延ポテンシャルの数式に代入すると、運動する点電荷によるポテンシャルを計算することができる。これに関して、デルタ関数の取り扱いに注意が必要である。静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ を計算する場合には、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt_i \int \frac{\rho(\mathbf{r}_s, t_i) \delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int dt_i \int \frac{\delta^3(\mathbf{r}_s - \mathbf{s}(t_i)) \delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|} dt_i \end{aligned} \quad (14)$$

が得られる。ここで, t_i は便宜上用いた積分変数である。この積分を計算するにあたり, 単純にデルタ関数の変数がゼロになるように t_i を置き換えればよいと思うかもしれないが, そんなに単純ではない。なぜなら, そのデルタ関数の変数が t_i の汎関数になっているからである。例えば, 変数が汎関数 $f(t_i)$ であるようなデルタ関数は

$$\delta(f(t_i)) = \left| \frac{1}{df/dt_i} \right|_{t_i=t_0} \delta(t_i - t_0), \quad (15)$$

のように書き換えられる。ただし, t_0 は $f(t_i) = 0$ の解である。この関係を適用すると, (14) の右辺に含まれるデルタ関数の変数を微分し,

$$\frac{d}{dt_i} \left[t_i - \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|}{c} \right) \right] = 1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

を計算する。さらに, 関係式 (15) を利用して (14) を

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))/c}, \quad (16)$$

のように書き換える。ただし, t_0 は方程式:

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|}{c}.$$

の解である。具体的には, t_0 は時刻 t に観測点 \mathbf{r} に到達するように電磁作用が位置 $\mathbf{s}(t_0)$ を出発する時刻である。得られた数式 (16) 運動する点電荷の影響を受けた静電ポテンシャルを表している。一方, ベクトルポテンシャルは, この結果から類推して,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e \mathbf{v}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))/c}, \quad (17)$$

のように記述できる。既に述べたように, 速度ベクトル \mathbf{v} は位置ベクトル \mathbf{s} を時間について微分した導関数であり, これは点電荷の速度を表している。ポテンシャル (16) と (17) は, 1898 年と 1900 年に独立にこれらのポテンシャルを導出した 2 人の名前をとって, リエナール・ヴィーヘルト (Liénard-Wiechert) のポテンシャルと呼ばれる。

2.1 等速度運動する荷電粒子による電磁場

リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルを用いて, 等速度運動する荷電粒子による電磁場を求めてみよう。荷電粒子は x 軸上を速度 v で等速度運動し, 時刻 t における位置が $x = vt$ であるとする。観測点 $[x, y, 0]$ で時刻 t に観測される, その荷電粒子に起因する電磁場を求めてみよう。時刻 t に観測点で観測される電磁作用は時刻 t_0 に荷電粒子を出発したとしよう。電磁作用が光速で伝播することから,

$$t_0 + \frac{\sqrt{(x - vt_0)^2 + y^2}}{c} = t$$

が成立するはずである。時刻 t_0 を右辺に移項し、両辺を自乗するとこの方程式は、

$$(c^2 - v^2)t_0^2 - 2(c^2t - vx)t_0 + c^2t^2 - x^2y^2 = 0$$

なる2次方程式に変形される。よって、電磁作用が荷電粒子を出発した時刻は、2次方程式の解の公式より、

$$t_0 = \frac{c^2t - vx \pm \sqrt{c^2(x - vt)^2 + (c^2 - v^2)y^2}}{c^2 - v^2},$$

となるが、時刻 t_0 は t に対して過去、すなわち、 $t_0 < t$ でなければならない。よって、複号のうち負の符号の解:

$$t_0 = \frac{c^2t - vx - \sqrt{c^2(x - vt)^2 + (c^2 - v^2)y^2}}{c^2 - v^2},$$

が、電磁作用が荷電粒子を出発した時刻となる。リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルを適用するにあたり、 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| = c(t - t_0)$ であることに注意すると、

$$|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| = \frac{cv(x - vt) + c\sqrt{c^2(x - vt)^2 + (c^2 - v^2)y^2}}{c^2 - v^2},$$

が得られる。一方、リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルの分母の第2項は、

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))}{c} &= \frac{v(x - vt_0)}{c} \\ &= \frac{cv(x - vt) + (v^2/c)\sqrt{c^2(x - vt)^2 + (c^2 - v^2)y^2}}{c^2 - v^2}, \end{aligned}$$

のように計算できるので、求める静電ポテンシャルは

$$\phi(x, y, 0, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)y^2}}, \quad (18)$$

となる。このポテンシャルは、観測点が xy 平面上に存在する場合である。これを xy 平面上に限らない任意の座標 $[x, y, z]$ に拡張するのは容易である。数式(18)において、 y は荷電粒子の運動経路から観測点までの距離であるので、観測点の座標が $[x, y, z]$ ならば、この数式の y^2 を $y^2 + z^2$ に置き換えればよい。つまり、任意の観測点における静電ポテンシャルは、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}, \quad (19)$$

となる。

静止した荷電粒子が生成する電磁場の等位ポテンシャル面は荷電粒子を中心とする球面である。それに対し、速度 v で x 軸方向に等速度運動する荷電粒子が生成する電磁場の等位ポテンシャル面は回転楕円体の表面となる。それは、(19)の左辺を定数とすると、

$$\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 = \text{const},$$

のように書けるからである。この等位ポテンシャル面は、 x 軸方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ の比率で収縮した回転楕円体の表面である。しかも、面白いことに、回転楕円体の中心は荷電粒子の過去の位置 $\mathbf{s}(t_0)$ ではなく、現在の位置 $\mathbf{s}(t)$ である。

続いて、等速度運動する荷電粒子の周囲の電場を評価してみよう。電場ベクトル \mathbf{E} は、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

によって計算できる。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} が

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}}{\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}},$$

となることについて説明は不要だろう。静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} を微分して \mathbf{E} を計算すると、

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-\beta^2}{[(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} \begin{bmatrix} x-vt \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

が得られる。この結果を見ても、意外なことに、電場は動径方向に直線的に伸び、しかも、向いている方向が荷電粒子の過去の位置 $\mathbf{s}(t_0)$ ではなく、現在の位置 $\mathbf{s}(t)$ である。これはあたかも、荷電粒子が電磁場を引きずりながら運動しているようである。

等速度運動する荷電粒子の周囲の電場は、図 2 に示すように、荷電粒子の速度によって電場の強度分布が異なる。この図は、放射線状に伸びる線分が電場の方向を示し、濃さが

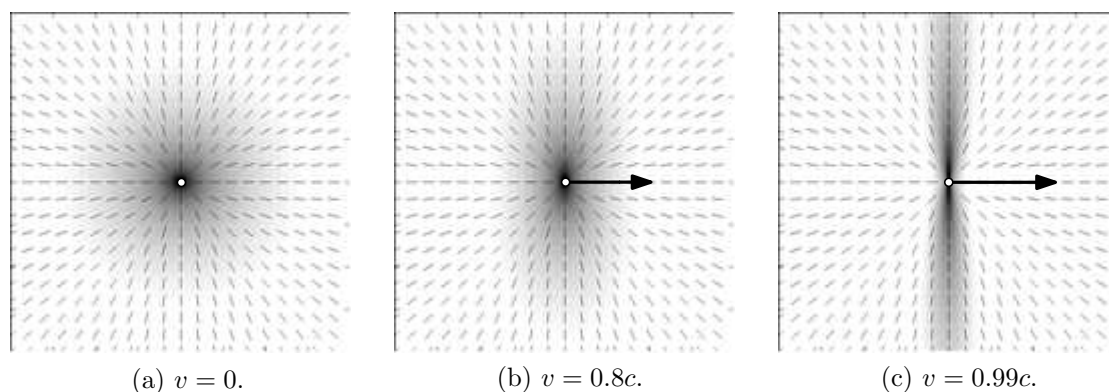


図 2: 等速度運動する荷電粒子の周辺の電場

電場の強度を表している。荷電粒子が静止している場合、強度分布は荷電粒子の現在位置について点対象である。荷電粒子が運動すると、その速度に応じて強度分布が歪む。電場の方向は荷電粒子の現在位置を向いているのだが、強度分布が点対称にならないのだ。しかも、歪んだ強度分布は回転楕円体ではなく、荷電粒子の運動方向とは垂直方向に強い電場が現れ、運動方向の電場が弱い。しかも、荷電粒子の運動経路の近傍では、さらに電場が弱くなっている。

2.2 任意の運動をする荷電粒子による電磁場

等速度運動に限らず, 任意の運動をする荷電粒子がつくる電磁場を計算してみよう。注目する電磁場は, リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルから計算できる。リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルは,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R(t_0)(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}, \quad (20a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}}{R(t_0)(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}. \quad (20b)$$

のような形をしている。ここで, 簡単のため, 新たな変数 $R(t_0) \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|$ と, $\mathbf{n} \equiv (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))/R(t_0)$ を定義しよう。新たな変数 $R(t_0)$ は運動する点電荷 (場の源) から観測点までの距離であり, \mathbf{n} は, 場の源から観測点に向かう単位ベクトルである。言うまでもなく, $\boldsymbol{\beta}$ は注目する点電荷の正規化速度 (つまり, $c\boldsymbol{\beta} \equiv d\mathbf{s}/dt$) である。また, t_0 は電磁作用が時刻 t に観測点に作用するように運動する点電荷を出発した過去の時刻である。数式には明示的に書かれていないが, \mathbf{n} と $\boldsymbol{\beta}$ も t_0 の関数である。

静電ポテンシャルとベクトルポテンシャルによって, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - d\mathbf{A}/dt$ と $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ なる関係を適用して電磁場 \mathbf{E} と \mathbf{B} が計算できる。とはいえ, その計算は厄介であるので, 準備が必要である。

ポテンシャル ϕ と \mathbf{A} の微分計算を複雑にしているのは, 遅延ポテンシャルに含まれる過去の時刻 t_0 の存在である。過去の時刻 t_0 は,

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|}{c}. \quad (21)$$

に示されるように, \mathbf{r} と t の関数になっているからである。つまり, t_0 は \mathbf{r} についての微分と, t についての微分が計算できるのだ。計算するにあたり, 空間座標を $[x^1, x^2, x^3] \equiv [x, y, z]$ のように対応付け, 任意の座標成分を x^k と書くことにする。その上で, 偏微分 $\partial t_0 / \partial t$ と $\partial t_0 / \partial x^k$ を計算しよう。数式 (21) の両辺を t について微分すると,

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)) = 1 + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \frac{\partial t_0}{\partial t},$$

が得られ, この結果がさらに,

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}, \quad (22)$$

のように変形される。一方, 位置 x^k についての導関数は同様に計算でき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_0}{\partial x^k} &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)^* + \frac{\partial t_0}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t_0} \right] \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|}{c} \right) \\ &= -\frac{n^k}{c} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \frac{\partial t_0}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

のようになるので,

$$\frac{\partial t_0}{\partial x^k} = -\frac{n^k}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}. \quad (23)$$

が導かれる。ここでアスタリスクを付した微分演算子は明示的に x^k についての微分 (t_0 の内部に隠れた依存性を含まない) を与える演算子である。さらに, n^k を単位ベクトル \mathbf{n} の x^k 成分とすれば, 時刻 t_0 を空間座標で微分した導関数を

$$\nabla t_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}. \quad (24)$$

のように記述することもできる。これらの関係式は, リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルから電場 \mathbf{E} と \mathbf{B} を計算するために必要となる。

リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルを微分して電場 \mathbf{E} を計算しよう。電場は $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ によって計算できるのだが, その微分の計算が厄介である。なぜなら, 観測点 \mathbf{r} が変わると, ポテンシャルに影響する過去の時間 t_0 が変化するためである。それを数学的に記述すると,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)^* + \frac{\partial t_0}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad (25)$$

に示すように, 空間についての微分演算子に t_0 の依存性が含まれるのだ。この演算子の関係に注意すると, ナブラ演算子は,

$$\nabla = \nabla^* + \nabla t_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t_0},$$

と書かれることになる。前に書いたように, アスタリスクを伴う演算子は, t_0 の依存性を無視した微分演算子である。つまり, 静電ポテンシャル ϕ の勾配ベクトルは,

$$\nabla\phi = \nabla^*\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t_0} \nabla t_0 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\nabla^* \frac{1}{\rho} - \frac{\mathbf{n}}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{1}{\rho} \right), \quad (26)$$

となるわけだ。ここで, $\rho \equiv R(t_0)(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ とおいた。新たな物理量 ρ は, 図3に示すように, 電磁場の源の過去の位置 $\mathbf{s}(t_0)$ から観測点へ向かう直線に向かって, その源の現在位置 $\mathbf{s}(t)$ から垂線を下ろした足を点Hとしたとき, 観測点Oから点Hの距離が ρ となる。新たな物理量 ρ を t_0 について微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt_0} &= \frac{\partial R}{\partial t_0}(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - R(t_0) \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t_0} \cdot \boldsymbol{\beta} - \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \\ &= -c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \beta^2 + R(t_0)\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}] \\ &= -c(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\beta} - R(t_0)\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}, \end{aligned}$$

が得られる。なお, 第2行目への数式変形では,

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|}$$

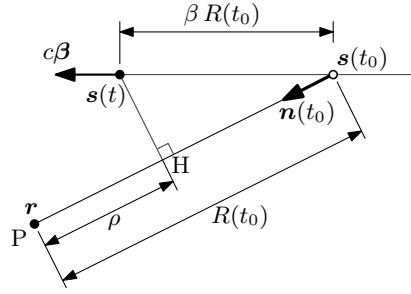


図 3: 物理量 ρ のイメージ

$$\begin{aligned}
&= \frac{c\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|^2} (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)) - \frac{\boldsymbol{\beta}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|} \\
&= \frac{[(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}] c}{R(t_0)},
\end{aligned}$$

を利用した。この関係は、荷電粒子の過去の位置 $\mathbf{s}(t_0)$ から観測点 \mathbf{r} へ向かうベクトル \mathbf{n} が時間とともに変動することを意味する。さらに、 ρ の勾配ベクトルは、 t_0 の依存性を無視すると、

$$\nabla^* \rho = \nabla^* [|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| - (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\beta}] = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|} - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta},$$

のように計算される。ここまでは準備段階である。静電ポテンシャルの勾配ベクトル (26) の右辺の第 1 項と第 2 項に含まれる $1/\rho$ の導関数は、先ほどの準備段階で得た中間結果を用いて、

$$\begin{aligned}
\nabla^* \frac{1}{\rho} &= -\frac{\nabla^* \rho}{\rho^2} = -\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\rho^2}, \\
\frac{\partial}{\partial t_0} \frac{1}{\rho} &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t_0} = \frac{c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2)}{\rho^2} + \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\rho(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})},
\end{aligned}$$

のように計算できる。これらをまとめると、静電ポテンシャルの勾配ベクトルは、

$$\nabla \phi = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\rho^2} + \frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2}{\rho^2} + \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{c\rho(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \right], \quad (27)$$

のように記述できる。電場を算出するため、さらに、ベクトルポテンシャルの時間微分が必要である。時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\partial t_0}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0} = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{c\boldsymbol{\beta}(t_0)}{\rho(t_0)} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \left[\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\rho} + \boldsymbol{\beta} \left(\frac{c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \beta^2}{\rho^2} + \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{c\rho(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right) \right], \quad (28)
\end{aligned}$$

が得られる。なお、第1行目から第2行目への数式変形では $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ なる関係を利用した。これらの導関数を、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - d\mathbf{A}/dt$ に代入すると、

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) - (1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}}{cR(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right]. \quad (29)$$

なる形で電場が導かれる。さらに、 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ なる事実とベクトル解析における公式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (30)$$

を利用すれば、導出した数式の第2項が変形でき、電場 \mathbf{E} が、

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \right], \quad (31)$$

なる形で書き換えられる。この結果は、点電荷の加速度によって \mathbf{n} と直交する方向に R に反比例する大きさの電場がつくられることがわかる。第1項が R^2 に反比例するので、遠方では加速度によって作られる電場が支配的になる。

磁束密度 \mathbf{B} は、公式 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を計算すれば得ることができる。電場を導出したときと同様に、位置についての微分演算子には t_0 の依存性が含まれるので注意が必要である。演算子についての関係式 (25) に注意をすると、回転演算子が、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla^* \times \mathbf{A} - \nabla t_0 \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0} = \nabla^* \times \mathbf{A} - \frac{\mathbf{n}}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0},$$

であることが導かれる。この数式の右辺の第1項と第2項を個別に計算しておこう。まず、第1項は、

$$\begin{aligned} \nabla^* \times \mathbf{A} &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \left(\frac{\nabla^* \times \boldsymbol{\beta}}{\rho} + \nabla^* \frac{1}{\rho} \times \boldsymbol{\beta} \right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \left(\frac{\nabla^* \times \boldsymbol{\beta}}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \nabla^* \rho \times \boldsymbol{\beta} \right) \\ &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}{R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}, \end{aligned}$$

のように計算できる。右辺を得るには、 $\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} = 0$ であることを利用した。また、強引に分母を $R^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3$ にしている理由も、最終結果を得るときにわかるであろう。引き続き、第2項目は、

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{n}}{c(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0} &= \frac{\mathbf{n}}{c(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})} \times \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t_0} \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{n}}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}} \times \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\rho} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t_0} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{n}}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}} \times \left[\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\rho} + \frac{c(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\beta} + R(t_0) \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{\rho^2} \boldsymbol{\beta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \mathbf{n} \times \left[\frac{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \boldsymbol{\beta} \right] \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \mathbf{n} \times \left[-\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] - (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \boldsymbol{\beta} \right] \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \mathbf{n} \times \left[-\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \boldsymbol{\beta} \right],
\end{aligned}$$

のように計算される。トリッキーであるが、第5行目への数式変形は(30)を利用した。このように変形しておけば、 $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$ を利用して右辺が得られるのだ。これらの中間結果を用いて磁束密度 \mathbf{B} を計算すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla^* \times \mathbf{A} - \frac{\mathbf{n}}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0} \\
&= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \mathbf{n} \times \left[-\frac{(1 - \beta^2) \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right],
\end{aligned}$$

が得られる。改めて結果を書くと、

$$\mathbf{B} = \frac{e\mu_0 c}{4\pi} \mathbf{n} \times \left[-\frac{(1 - \beta^2) \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right], \quad (32)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) = -\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}$ であることに気づけば、磁束密度と電場には

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{c} \quad (33)$$

なる面白い関係が成立することがわかる。この関係式を用いれば、電場が測定できれば、磁束密度も容易に計算できるのだ。この関係式によると、磁束密度は、必ず、電場と直交し、しかも、 $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ が成立する。

電場 (31) と磁場 (32) の間に明確な共通点がある。どちらも第1項が R^2 に反比例するが、第2項が R に反比例する。しかも、第2項は加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ についての依存性がある。荷電粒子の加速度は電流の変化と解釈することができる。つまり、第2項は電流の変化によって引き起こされる電磁場であり、第1項に比べ遠方での減衰が小さい。第1項は静電磁場であり、第2項は放射電磁場と呼ばれる。改めて静電磁場と放射電磁場を記述すると、

$$\mathbf{E}_{\text{st}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}, \quad \mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}, \quad (34)$$

$$\mathbf{B}_{\text{st}} = -\frac{e\mu_0}{4\pi} \mathbf{n} \times \frac{(1 - \beta^2) \boldsymbol{\beta}}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}, \quad \mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{e\mu_0}{4\pi} \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}, \quad (35)$$

のようになる。なお、 \mathbf{E}_{st} と \mathbf{B}_{st} が静電磁場であり、 \mathbf{E}_{rad} と \mathbf{B}_{rad} が放射電磁場である。詳しくは後に説明するが、 \mathbf{E}_{rad} と \mathbf{B}_{rad} の組み合わせでつくられたポインティングベクトルだけが無限遠にエネルギーを伝送できる。つまり、それらの解が電磁放射を表現する解であるので放射電磁場と呼ばれる。

2.3 共変形式

リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルはリーマン幾何学における共変形式で記述することもできる。その記述に関して、観測位置と荷電粒子の位置を、それぞれ4元ベクトルで、 x^μ, ξ^μ のように定義する。非相対論では、観測時刻が t であることに対して、荷電粒子の位置が $\mathbf{s}(t_0)$ のように過去の時刻 t_0 の依存性を含んでいた。相対性理論では、座標が過去の時刻の依存性を含むのではなく、座標 x^μ と ξ^μ の第0成分が時刻に関する情報である。具体的には、観測時刻は $x^0 \equiv ct$ 、観測に影響する荷電粒子の時刻は $\xi^0 \equiv ct_0$ のようになっている。

荷電粒子の速度ベクトル \mathbf{v} は、4元ベクトル u^μ で記述すると、

$$[u^\mu] = \left[\frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]$$

のように対応づけられる。この対応関係から、リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルの分母を4元ベクトルで書くと、

$$|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| - \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))}{c} = -\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{c} \eta_{\mu\nu} u^\mu (x^\nu - \xi^\nu)$$

となる。ここで、 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| = c(t - t_0)$ の関係を利用した。相対性理論における4元ベクトルポテンシャル A^μ が、静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} との間に $[A^\mu] \equiv [\phi/c, \mathbf{A}]$ なる対応関係がある。その対応関係に注意して、リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルを4元ベクトル表記すると、

$$A^\mu = -\frac{e \mu_0 c}{4\pi} \frac{u^\mu}{\eta_{\alpha\beta} u^\alpha (x^\beta - \xi^\beta)} \quad (36)$$

となる。ただし、この式に含まれる x^μ と ξ^μ が、それぞれ任意のベクトルでよいのではなく、拘束条件で規定される必要がある。その拘束条件とは次のような条件である。ミンコフスキー時空上の座標 ξ^μ を出発した電磁作用が光速で伝播し、座標 x^μ に到達するということである。つまり、座標 x^μ は、座標 ξ^μ を頂点とする光円錐の側面上に位置することを意味する。これを数式で書くと、

$$\eta_{\mu\nu} (x^\mu - \xi^\mu)(x^\nu - \xi^\nu) = 0 \quad (37)$$

となる。これがリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルの数式における、 x^μ と ξ^μ に関する拘束条件である。

2.4 電磁放射しない荷電粒子の運動

既に学んだように、電磁放射は荷電粒子の加速度運動に起因する。しかし、双曲線運動と呼ばれる特殊な加速度運動では電磁放射が起こらない。本項では、双曲線運動する荷電

粒子が電磁放射しないことを示そう。

双曲線運動は、相対論的な運動における加速度運動のひとつの形態であり、非相対論近似では等加速度運動に相当する。まず、非相対論近似のもとで等加速度運動する荷電粒子が電磁放射しないことを示そう。非相対論近似 ($\beta \simeq 0$) では、放射界に相当する電場の成分 $\mathbf{E}_{\text{rad}}^{(\text{nr})}$ は、

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}^{(\text{nr})} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R}$$

となる。等加速度運動を仮定しているので $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ は定ベクトルである。つまり、 $d\mathbf{E}_{\text{rad}}^{(\text{nr})}/dt = 0$ である。したがって、ファラデーの法則:

$$\nabla \times \mathbf{B} + \frac{d\mathbf{E}}{dt} = 0$$

を考えると、 $\mathbf{B} = 0$ と考えられる。それにより、ポインティングベクトルは $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0 = 0$ となるので非相対論近似において、等加速度運動する荷電粒子は電磁放射しないことになる。

それでは、相対性理論まで拡張し、双曲線運動する荷電粒子が電磁放射しないことを示そう。ここでは、荷電粒子が x^1 軸上に存在し、その運動と加速度の方向が x^1 軸方向となるように座標軸をとる。そのとき、荷電粒子の4次元座標は、

$$\xi^0 = \alpha \sinh \psi, \quad \xi^1 = \alpha \cosh \psi, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = 0 \quad (38)$$

のようになる。ここで、 ψ は荷電粒子の固有時間の1次関数で表されるパラメータである。また、 ψ も α も加速度に依存するパラメータである。具体的には、非相対論近似での加速度が a であり、固有時間が $\tau = 0$ のときに荷電粒子が原点に静止するようにパラメータを選ぶと、 $\psi = a\tau/c$, $\alpha = c^2/a$ である。

観測場所の座標も、荷電粒子の座標にならい、双曲線関数を用いて記述すると後の計算で都合がよい。具体的に、

$$x^0 = \rho \sinh \chi, \quad x^1 = \rho \cosh \chi, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (39)$$

のように定義してみよう。双曲線関数を用いて記述したが、観測場所が双曲線運動するわけではない。パラメータ χ は固有時間 τ には無関係な定数である。また、パラメータ ρ は、任意の座標 x^0 と x^1 が与えられたとき、 $\rho^2 = (x^1)^2 - (x^0)^2$ となるように選ばれている。

ところで、前節で述べたように、電磁作用の源 ξ^μ と観測位置 x^μ は拘束条件 (37) によって、その関係が規定される。この拘束条件に、(38) と (39) を代入すると、(37) は

$$\cosh(\psi - \chi) = \frac{\alpha^2 + R^2}{2\alpha\rho}$$

のように書き換えられる。ただし、 $R^2 = \rho^2 + y^2 + z^2$ である。ここに示したパラメータのうち、 α と ψ は荷電粒子の位置を決めるパラメータである。特定の荷電粒子に注目する意味で、そのパラメータのうち α は定数である。これに対し、 χ, ρ, y, z は観測位置を決めるパラメータである。観測位置に関するパラメータはすべて変数であると考えよう。したがって、拘束条件の全微分を計算すると、

$$\sinh(\psi - \chi)(d\psi - d\chi) = \frac{[\alpha \cosh(\psi - \chi) - \rho] d\rho + y dy + z dz}{\alpha \rho}$$

が得られる。この関係式に対して、 $d\chi, d\rho, dy, dz$ のうち一つを除いてゼロを代入すると、 ψ の偏微分を得ることができる。その結果は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} &= 1, & \frac{\partial \psi}{\partial \rho} &= \frac{\alpha \cosh(\psi - \chi) - \rho}{\alpha \rho \sinh(\psi - \chi)}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{y}{\alpha \rho \sinh(\psi - \chi)}, & \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{z}{\alpha \rho \sinh(\psi - \chi)} \end{aligned} \quad (40)$$

となる。このように、観測位置と荷電粒子の位置に関する拘束条件を偏微分の形で書いておくことは有用である。なぜなら、電場や磁束密度を計算するには電磁ポテンシャルを空間座標や時間について偏微分することが必要だからである。実際に電場や磁場を計算することによって、この関係式のありがたさを実感してみよう。

電場や磁束密度は相対性理論では電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ によって与えられる。電磁場テンソルは、

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

のように定義されている。電場に関する成分は、 $F_{k0} = E_k/c$ のように関係づけられている。ところで、荷電粒子の座標 ξ^μ を固有時間 τ で微分した結果が速度ベクトル u^μ であるので、速度ベクトルは、

$$[u^\mu] = \left[a \cosh \psi \cdot \frac{d\psi}{d\tau}, a \sinh \psi \cdot \frac{d\psi}{d\tau}, 0, 0 \right].$$

である。この速度ベクトルをリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルに代入すると、

$$[A_\mu] = \frac{e\mu_0 c}{4\pi\rho} \left[\frac{\cosh \psi}{\sinh(\psi - \chi)}, -\frac{\sinh \psi}{\sinh(\psi - \chi)}, 0, 0 \right], \quad (41)$$

が得られる。ここで、電磁ポテンシャルの添え字が右下に位置していることに注意されたい。添え字が右下に位置するベクトルは共変ベクトルと呼ばれ、 $A_\mu = \eta_{\mu\lambda} A^\lambda$ のように計算される。

さて、時刻 $t = 0$ (すなわち、 $x^0 = 0$) の条件で電磁場が観測されると仮定しよう。その観測の瞬間に荷電粒子が相対的に静止するように座標軸がとられるとする。そのような条

件を設けると、 $dx^0 = \rho d\chi$ と $dx^1 = d\rho$ が成立する。つまり、 x^0 や x^1 について偏微分は、 χ や ρ について偏微分すれば得ることができる。しかも、 x^μ と ξ^μ との間の拘束条件から導出した偏微分に関する関係式を用いると、基本的に ψ についての偏微分を中継すれば簡単に偏微分が計算できるのである。その処方箋を適用すると、電場の x 成分 (x^1 成分) は、

$$\begin{aligned}
E_x &= c F_{10} = \frac{\partial A_0}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^0} \\
&= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0\rho} \left[\frac{\cosh\chi}{\sinh^2(\psi-\chi)} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{\sinh\chi}{\rho\sinh^2(\psi-\chi)} \frac{\partial\psi}{\partial\chi} \right] \\
&= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0\rho} \frac{\cosh\chi}{\sinh^2(\psi-\chi)} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0\alpha\rho^2} \frac{\alpha\cosh(\psi-\chi) - \rho}{\sinh^3(\psi-\chi)} \\
&= -\frac{e}{\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2(\alpha^2 + R^2 - 2\rho^2)}{[(\alpha^2 + R^2)^2 - 4\alpha^2\rho^2]^{3/2}}. \tag{42}
\end{aligned}$$

のように計算される。この計算において、 $x^0 = 0$ なる条件に対応し、 $\chi = 0$ を適用した。電場の y 成分 (x^2 成分) も同様に、

$$\begin{aligned}
E_y &= c F_{20} = \frac{\partial A_0}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^0} \\
&= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0\rho} \frac{\cosh\chi}{\sinh^2(\psi-\chi)} \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0\alpha\rho^2} \frac{y}{\sinh^3(\psi-\chi)} \\
&= \frac{2e}{\pi\epsilon_0} \frac{\alpha^2\rho y}{[(\alpha^2 + R^2)^2 - 4\alpha^2\rho^2]^{3/2}}. \tag{43}
\end{aligned}$$

のように計算される。さらに、電場の z 成分 (x^3 成分) が $E_z = 0$ となることは容易にわかる。

引き続き、電束密度を計算しよう。計算の手順は電場と同様であるので、計算結果のみを示す。

$$B_x = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = 0, \tag{44a}$$

$$B_y = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} = -\frac{e\mu_0 c}{4\pi\rho} \frac{\sinh\chi}{\sinh^2(\psi-\chi)} \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \tag{44b}$$

$$B_z = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = \frac{e\mu_0 c}{4\pi\rho} \frac{\sinh\chi}{\sinh^2(\psi-\chi)} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \tag{44c}$$

ここでも、 $\chi = 0$ という条件から、磁束密度のすべての成分はゼロとなる。この結果が示すように、双曲線運動する荷電粒子による磁束密度は、荷電粒子が相対的に静止している時刻に観測すると、必ずゼロになるのである。

3 電磁放射

点電荷の加速度によって作られる電磁場は無限遠への放射を示す。電磁場の放射はポインティングベクトル $\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ を計算すれば確かめることができる。電磁場のエネルギーを W としたとき、

$$\frac{dW}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0,$$

なる流れの方程式を満たすため、ポインティングベクトルは電磁場のエネルギーの流れを表す。流れの方程式は、積分表示すると

$$\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V W d^3\mathbf{r}.$$

のように書かれる。電磁場の源をすべて含む領域 V をとり、その領域の境界面でポインティングベクトルを面積分すると、その結果は領域 V に含まれるエネルギーの減少分に等しいことを流れの方程式は主張している。言い換えると、ポインティングベクトルを領域 V の境界面の面積分は、領域 V からもち去られるエネルギー、すなわち、放射エネルギーに等しい。

位置 $\mathbf{s}(t)$ に存在する荷電粒子による電磁放射を計算してみよう。電磁放射によって荷電粒子が失うエネルギーは流れの方程式に従うのだが、注意が必要である。なぜなら、電磁作用が有限の速度 c で伝播するため、荷電粒子がエネルギーを失った時刻と、領域 V の境界面からエネルギーが放出される時刻が異なるからである。この事実を考慮すると、点電荷によるエネルギー流れの積分表示は、

$$P(t_0) dt_0 = \left(\int_{\partial V} \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{n} dS \right) dt$$

と書くことができる。ただし、 $P(t_0)$ は単位時間当たりの荷電粒子のエネルギー損失、言い換えると、荷電粒子の放射電力である。この方程式は、時刻 t_0 における期間 dt_0 に荷電粒子が失うエネルギーは、時刻 t における期間 dt に領域 V から放出されるエネルギーに等しい、と解釈すればよい。したがって、放射電力 $P(t_0)$ は、

$$\begin{aligned} P(t_0) &= \left(\int_{\partial V} \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{n} dS \right) \frac{dt}{dt_0} \\ &= (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}(t_0)) \int_{\partial V} (\mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad (45)$$

となる。この式において、時刻が t と t_0 とが混在しているので注意が必要である。

積分面を電磁場の源 $\mathbf{s}(t_0)$ を中心とする半径 R の球面としよう。前節で計算したように、加速度をもつ点電荷による電磁場 \mathbf{E} と \mathbf{B} が与えられたとき、ポインティングベクトルは R^{-2} , R^{-3} , R^{-4} に比例する項を含んでいるはずである。半径 R の球面における面積分が、

$$\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) R^2 \sin \theta.$$

であることから、ポインティングベクトルのうち、 R^{-3} と R^{-4} の次数の項は $R \rightarrow \infty$ の極限で面積分するとゼロとなる。つまり、残った項 (R^{-2} の次数の項) が無限遠へ放射されるエネルギーの流れを示している。言うまでもなく、ポインティングベクトルにおける無限遠への放射成分は、加速度が生成する \mathbf{E} と \mathbf{B} の項に起因するのである。

電磁場 \mathbf{E} と \mathbf{B} のうち、放射界に相当する成分を \mathbf{E}_{rad} , \mathbf{B}_{rad} と書くと、それらの成分は

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}, \quad (46)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{e\mu_0}{4\pi} \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}. \quad (47)$$

のようになる。これらの成分の外積を計算すると、電磁放射に対応するポインティングベクトル:

$$\mathbf{S} = \frac{|\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2}{c\mu_0} \mathbf{n} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^6} \mathbf{n}. \quad (48)$$

が得られる。ポインティングベクトル \mathbf{S} の計算結果によって、電磁放射が動径方向 \mathbf{n} を向き、 \mathbf{E}_{rad} と \mathbf{B}_{rad} が \mathbf{n} と直交することがわかる。したがって、電磁放射を伝播する波動 (電磁波) が横波であることが結論づけられる。

荷電粒子から任意方向に向かう放射強度を計算してみよう。そのような方向依存性は指向性と呼ばれる。電磁放射の指向性は、単位立体角あたりの放射電力で表現される。微小立体角 $d\Omega$ を仮定すると、(45) の面積素が $dS = R^2 d\Omega$ となるので、

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= R^2(t) (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \end{aligned} \quad (49)$$

が得られる。この電磁放射の指向性は、(45) とは異なり、 t の依存性を排除できたため、すべて時刻 t_0 における物理量で記述されている。

それでは、 xy 平面上に限定し電磁放射の指向性を計算してみよう。観測点の方向と荷電粒子の速度が角度 φ をなすとしよう。さらに、速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ のなす角度を η とする。この条件を (49) に代入すると、電磁放射の指向性は

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{[\sin(\eta - \varphi) - \beta \sin \eta]^2}{(1 - \beta \cos \varphi)^5} \quad (50)$$

となる。このように電磁放射の指向性は、加速度の方向と観測点の位置によって異なる。そのうちの特別な場合として、 $\eta = 0, \pi/2$ のときの指向性を次の項で計算しよう。

3.1 速度と平行な加速度の場合

荷電粒子の速度と加速度が平行な場合として、直線導体に流れる高周波電流が一例にあげられる。その電流は、直線導体内を荷電粒子(電子)が往復運動することに起因している。荷電粒子の往復運動には加速度を伴うため、電磁波が放射されるのである。

速度ベクトル β と加速度ベクトル $\dot{\beta}$ が平行である場合の電磁放射の指向性は、(50) に $\eta = 0$ を代入し、

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi}{16\pi^2 \varepsilon_0 c R^2 (1 - \beta \cos \varphi)^5}$$

となることが導かれる。導体内の荷電粒子の速度はかなり小さい ($< 1 \text{ mm/s}$) ので、直線導体を流れる高周波電流による電磁放射は、図 4 (a) のような指向性になる。この図は放射強度を色の濃さで表している。この場合、荷電粒子の運動方向 ($\varphi = 0, \pi$) には放射がなく、運動方向に対して垂直方向 ($\varphi = \pm\pi/2$) が最大放射の方向となる。この指向性は、直線導体で構成されるダイポールアンテナの指向性と同一である。

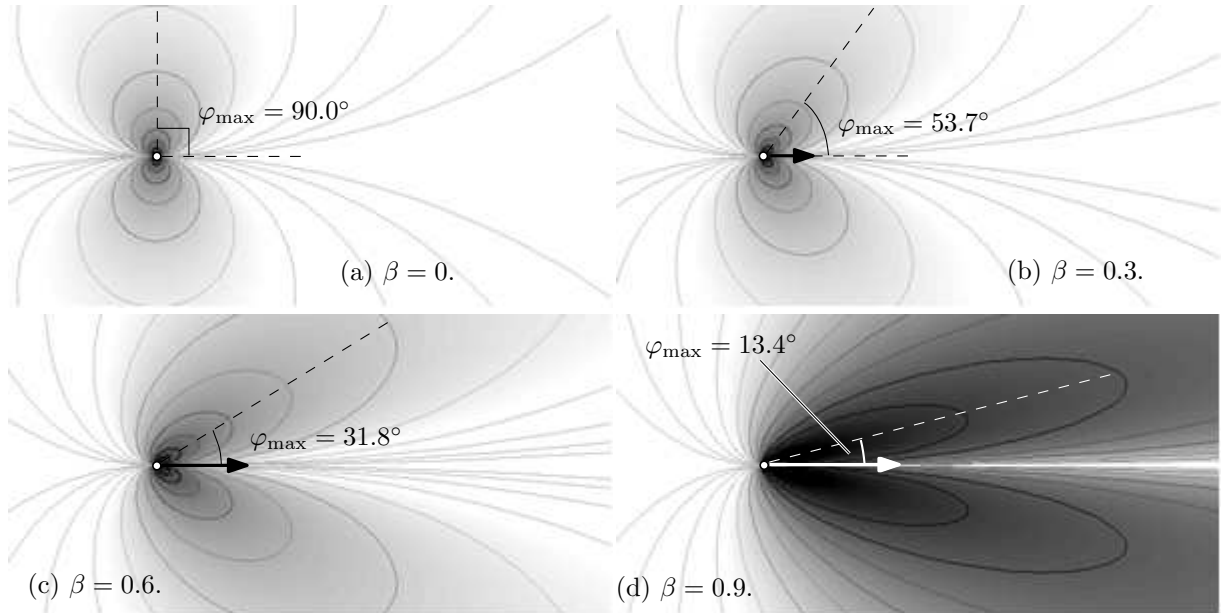


図 4: 速度と平行な加速度による電磁放射の強度

荷電粒子の速度が大きくなると、アンテナ軸方向には放射されないことには変化はないが、最大放射の方向が運動方向に向かって偏ってくる。最大放射の方向を φ_{\max} とすれば、

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta}$$

で最大放射の方向が計算できる。図 4 に示すように、速度を上昇させると、最大放射の方向は前方に偏ってくる。さらに、この最大放射の方向は、 $\beta \approx 1$ であれば $\varphi_{\max} \approx \sqrt{1 - \beta^2}/2$

のように近似できる。

電磁放射の指向性の形状は速度に依存し、加速度には依存しない。加速度が大きくなると、全方向に対し一定の比率 (加速度の自乗) で放射が増大する。

この形態の電磁放射は、直線導体を流れる交流電流だけでなく、高エネルギー状態に加速した電子を金属に衝突させた場合にも発生する。電子が金属に衝突する瞬間に、速度が失われ、その制動加速度によって電磁放射が発生する。この原理は X 線発生装置で応用されている。

3.2 速度と垂直な加速度の場合

速度と加速度が直交する場合、荷電粒子は円軌道を描く。つまり、この場合に相当する放射は、円形加速器を周回する荷電粒子による放射である。このような放射は、一般にサイクロトロン放射と呼ばれる。特に、その速度が光速と比較できる程度になると、シンクロトロン放射と呼ばれる。

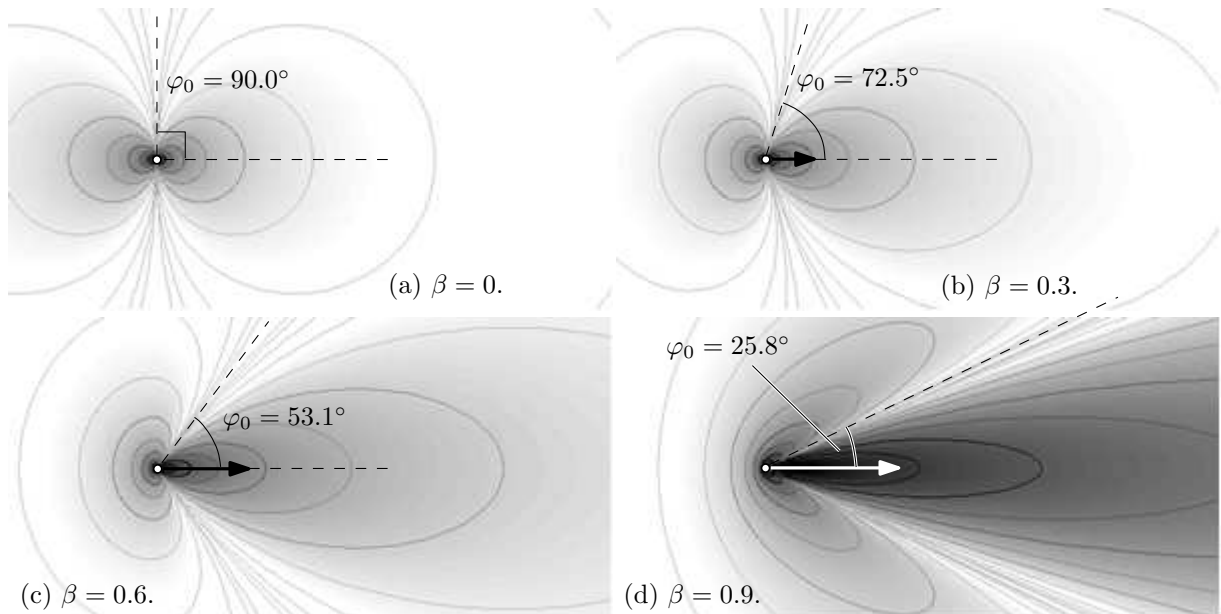


図 5: 速度と垂直な加速度による電磁放射の強度

速度ベクトル β と加速度ベクトル $\dot{\beta}$ が直交する場合、電磁放射の指向性が、

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 \beta^2 (\cos \varphi - \beta)^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c R^2 (1 - \beta \cos \varphi)^5}$$

となることは、(50) に $\varphi = \pi/2$ を代入すれば導かれる。この場合の電磁放射の最大放射の

方向は、荷電粒子の進行方向 ($\varphi = 0$) である。また、図 5 に示すように、放射がゼロとなる方向が存在する。その方向を φ_0 とすると、 $\cos \varphi_0 = \beta$ が成立する。

サイクロトロン放射の場合も、速度を上昇させると、図 5 に示すように、放射ゼロの方向は前方に偏ってくる。特に、 $\beta \approx 1$ であれば、 $\varphi_0 \approx \sqrt{1 - \beta^2}$ となる。速度方向への電磁放射は、速度の上昇とともに放射の幅が狭くなり強度が増大する。荷電粒子の速度と加速度が平行な場合と同様に、電磁放射の指向性パターンは荷電粒子の速度に依存し、加速度の大きさには依存しない。加速度が大きくなると、全方位に対して一定の比率 (加速度の自乗) で放射が増大する。

シンクロトロン放射は、上に述べたように、速度方向が最大放射の方向となるので、円形加速器を周回する荷電粒子は、周回運動しながら、周囲に鋭い電磁波を放射していることになる。最大放射の方向におけるポインティングベクトルの大きさが $(1 - \beta)^{-3}$ に比例することから、速度が大きくなると速度方向への放射が急激に強くなる。逆に、荷電粒子の周回速度を一定に保つには、放射される電磁エネルギーと同じ量のエネルギーを荷電粒子に与え続けなければならない。

4 荷電粒子のエネルギー損失

前節で学んだように、加速する荷電粒子は電磁エネルギーを放射する。言い換えると、荷電粒子は加速の過程でエネルギーを失うのである。本節では、荷電粒子が単位時間に失うエネルギーを評価してみよう。そのエネルギーの損失は、

$$-\frac{dW}{dt_0} = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \quad (51)$$

なる数式で評価できる。前節でも述べたように、導関数の基準となる時間は無限遠で電磁放射を観測する時刻 t ではなく、荷電粒子から電磁放射される時刻 t_0 であることに注意が必要である。

積分 (51) はそのまま計算すると手間がかかるので楽に計算できる方法を紹介しよう。その計算には、相対性理論を用いる。最初に、 $\beta \rightarrow 0$ の極限で積分 (51) を計算する。具体的には、 β の 2 次以上の項を無視するのである。その近似式は、速度がゼロに近い荷電粒子にしか成立しないので、荷電粒子の速度が大きくなるような座標系にローレンツ変換するのである。そのようにすれば、任意の速度で運動する荷電粒子におけるエネルギー損失を計算できる。

それでは、 $\beta \rightarrow 0$ の意味で β の 2 次以上の項を無視して積分 (51) を計算してみよう。結

果は次のようになる:

$$\begin{aligned}
 -\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{dW}{dt_0} &= \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left| \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right|^2 \\
 &= \frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 c} \dot{\beta}^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0 c} \dot{\beta}^2.
 \end{aligned} \tag{52}$$

この積分計算において, 正規化加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が $\theta = 0$ となるように座標を設定している。この積分結果 (52) が非相対論近似による単位時間当たりのエネルギー損失である。

それでは, (52) を任意の速度 $\mathbf{v} \equiv c\boldsymbol{\beta}$ に拡張してみよう。便宜上, 速度 v が x 軸方向を向き, 加速度 $\dot{\mathbf{v}} \equiv c\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が xy 平面上に存在するように座標軸を設定する。さらに, 静止系 (K 系) に対して, x 軸方向に速度 v で運動する慣性系 K' を考えよう。 K' 系からみると荷電粒子が静止しているように見えるので, K' 系からみた荷電粒子の単位時間当たりのエネルギー損失は,

$$-\frac{dW'}{dt'_0} = \frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0 c} \dot{\beta}'^2$$

となるはずである。ここで, t'_0 は K' 系からみた荷電粒子の時計の読みである。この式における K' 系からみた観測量 (プライムのついた物理量) を K 系からみた観測量に変換すればよい。 K' 系が K 系に対して x 軸上に速度 v で運動していることから, 加速度の x 成分と y 成分は,

$$\dot{\beta}'_x = \frac{\dot{\beta}_x}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad \dot{\beta}'_y = \frac{\dot{\beta}_y}{1 - \beta^2}$$

のように変換される。この変換式を上式の式に代入すると,

$$-\frac{dW'}{dt'_0} = \frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - \beta^2 \dot{\beta}_y^2}{(1 - \beta^2)^3} = \frac{e^2}{6\pi \varepsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1 - \beta^2)^3}$$

が得られる。さらに, この数式の左辺を K 系の観測量で記述する必要がある。左辺の W' とは K' 系からみた荷電粒子のエネルギーである。エネルギーは,

$$W = \frac{W' + vp'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

によって K 系からみたエネルギーに変換される。しかも, 荷電粒子は K' 系からみると静止しているので, 運動量に関して $p'_x = 0$ が成立する。したがって, $W = W'/\sqrt{1 - \beta^2}$ となる。この量を t_0 について微分すると

$$\frac{dW}{dt_0} = \frac{dt'_0}{dt_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dW'}{dt'_0} \right) = \frac{dW'}{dt'_0},$$

が得られる。なお, ここで荷電粒子の時計のよみに関して $dt'_0 = \sqrt{1 - \beta^2} dt_0$ が成立することを利用した。この関係は, 荷電粒子が K 系からみると x 軸方向に速度 v で運動し, K'

系からみると静止していることから導かれる。すなわち、荷電粒子の時計の読みは、

$$t'_0 = \frac{t_0 - v \cdot vt_0/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1-\beta^2} t_0,$$

のようにローレンツ変換されるからである。この結果を反映させると、

$$-\frac{dW}{dt_0} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1-\beta^2)^3}, \quad (53)$$

が得られる。これが、一般の速度に対する荷電粒子の電磁放射によるエネルギー損失である。ここでは、非相対論近似からローレンツ変換によって一般の速度に拡張してエネルギー損失を導出した。計算が容易ではないが、積分(51)を直接計算しても同一の結果が得られる。その具体的な計算は、付録に記載する。

正規化速度 $\boldsymbol{\beta}$ が z 軸方向を向き、正規化加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が xz 平面上に位置するように座標軸を選ぶ(図6)。すると、それらのベクトルは、

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \sin \eta \\ 0 \\ \dot{\beta} \cos \eta \end{bmatrix}, \quad (54)$$

のように成分表示できる。ただし、 η は z 軸と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ のなす角である。観測方向 \mathbf{n} が z 軸と角度 θ をなし、 xy 平面に \mathbf{n} を投影したときの方角を φ とすると、観測方向 \mathbf{n} は、

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (55)$$

のように書くことができる。

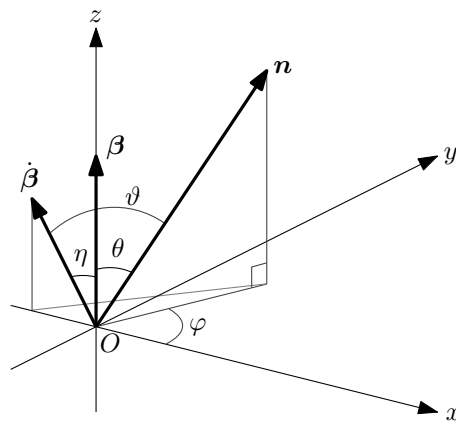


図6: 面積分のための座標軸の設定

このような条件設定において、 θ と φ が積分変数となる。ところで、内積 $\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}$ を計算すると、 \mathbf{n} と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ がなす角 ϑ が

$$\cos \vartheta = \cos \theta \cos \eta + \sin \theta \sin \eta \cos \varphi, \quad (56)$$

なる関係を満足することが導かれる。この関係式は積分 (51) を計算する上で有用な情報である。なぜなら、この関係式によって $\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}$ が

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta} \cos \vartheta = \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{\beta^2} + \sin \theta \sin \eta \cos \varphi, \quad (57)$$

のように書けるからである。一方、被積分関数 (51) の分子は、

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 &= \left| (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right|^2 - \left(\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right)^2 \\ &= |\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}|^2 \dot{\beta}^2 - [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}]^2 - [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 \\ &= (1 + \beta^2) \dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - 2 \dot{\beta}^2 (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\ &\quad + 2(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - [\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2, \end{aligned} \quad (58)$$

のように変形できる。被積分関数の分子を見てわかるように、この積分を一気に計算するのが煩わしいので、次のように被積分関数を分解して積分計算しよう。

$$I_0 = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{(1 + \beta^2) \dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \sin \theta, \quad (59)$$

$$I_1 = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{-2 \dot{\beta}^2 (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) + 2(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \sin \theta, \quad (60)$$

$$I_2 = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{-(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \sin \theta, \quad (61)$$

$$I_3 = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{-[\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \sin \theta, \quad (62)$$

これらの分解した積分関数ごとに積分計算し、結果を加算すればよいのである。分離した被積分関数も、直ちに計算できるとは言えないが、その計算を記述すると、

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{e^2}{8\pi \varepsilon_0 c} \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{(1 + \beta^2) \dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \\ &= \frac{e^2(1 + \beta^2)}{4\pi \varepsilon_0 c(1 - \beta^2)^4} \left[(1 + \beta^2) \dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right], \end{aligned} \quad (63)$$

$$I_1 = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ 2 \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\beta} - \dot{\beta}^2 \beta \right] \cos \theta + 2(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \dot{\beta} \sin \theta \sin \eta \cos \varphi \right\} \\
& = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{2 [(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 / \beta - \beta \dot{\beta}^2] \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \\
& = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\beta} - \beta \dot{\beta}^2 \right] \frac{4\beta (5 + \beta^2)}{3(1 - \beta^2)^4}, \tag{64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 & = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \left[\dot{\beta}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \eta \right. \\
& \quad \left. - \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \eta) \cos^2 \varphi - \dot{\beta}^2 \sin \theta \cos \theta \sin \eta \cos \eta \cos \varphi \right] \\
& = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \left[\left(\frac{-3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{2\beta^2} + \frac{\dot{\beta}^2}{2} \right) \cos^2 \theta \right. \\
& \quad \left. - \frac{\dot{\beta}^2}{2} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{2\beta^2} \right] \\
& = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \frac{-12(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + 2\dot{\beta}^2(1 - \beta^2)}{3(1 - \beta^2)^4}, \tag{65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 & = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \frac{-d \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \\
& \quad \times \beta^2 \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \eta) \cos^2 \varphi \\
& = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{2} - \frac{\beta^2 \dot{\beta}^2}{2} \right] (1 - \cos^2 \theta) \\
& = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \frac{2(1 - \beta^2)}{3(1 - \beta)^4} [(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - \beta^2 \dot{\beta}^2], \tag{66}
\end{aligned}$$

のようになる。これらの計算結果 (I_0 から I_3) の総和を計算すると、積分 (51) の結果となる。すなわち、単位時間当たりには加速する荷電粒子が失うエネルギー:

$$\begin{aligned}
-\frac{dW}{dt_0} & = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2(1 - \beta^2)^2 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2(1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)^4} \\
& = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2(1 - \beta^2) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \beta^2)^3} \\
& = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2(1 - \beta^2) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1 - \beta^2)^3} \\
& = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1 - \beta^2)^3}, \tag{67}
\end{aligned}$$

が得られる。

分母にベクトルの外積を含むエネルギー損失 (67) の数式は, 特殊相対性理論を用いると簡単な形で表現できる。まず, 積分 (51) を非相対論的 ($\beta \rightarrow 0$) な極限で計算する。その結果, エネルギー損失は

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2$$

となる。ここで, \dot{v}^2 は加速度の大きさの自乗である。この量が, 加速する荷電粒子の非相対論的なエネルギー損失である。一般的な (光速と比較できる) 速度 v の場合のエネルギー損失を計算するには, \dot{v}^2 を相対論的な 4 元加速度 B^μ の大きさの自乗, すなわち, $B_\mu B^\mu$ で置き換えて計算できないだろうか? 相対論的な 4 元加速度は, 3 元加速度ベクトル $\dot{\mathbf{v}}$ との間に,

$$[B^\mu] = \left[\frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})/c}{(1 - \beta^2)^2}, \quad \frac{\dot{\mathbf{v}}}{1 - \beta^2} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})\mathbf{v}/c^2}{(1 - \beta^2)^2} \right]. \quad (68)$$

なる関係があることが知られている。この関係式を用いて 4 元加速度ベクトル B^μ の大きさの自乗を計算すると,

$$B_\mu B^\mu = \frac{(1 - \beta^2)\dot{v}^2 + (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2/c^2}{(1 - \beta^2)^3} = \frac{\dot{v}^2 - |\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}|^2/c^2}{(1 - \beta^2)^3}. \quad (69)$$

となるのである。したがって, 一般的な速度 v の場合の加速する荷電粒子のエネルギー損失は, 相対性理論における 4 元加速度ベクトルを用いて

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} B_\mu B^\mu \quad (70)$$

のように簡単な形, しかも, 非相対論近似とほぼ同じ形で記述することができるのである。

サイクロトロン放射 ここでサイクロトロン放射について述べておこう。サイクロトロン放射とは, 円運動する荷電粒子による電磁波の放射である。円運動をすれには, 向心力による加速度が必要であるので, その加速度によって電磁放射が起きるのである。ここでは, 荷電粒子が等速円運動をしていると仮定しよう。その場合, 速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ と加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ は必ず直交するので,

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2}{(1 - \beta^2)^2} \quad (71)$$

となる。さらに円運動の回転半径を r とすると, $\dot{\boldsymbol{\beta}} = c\beta^2/r$ であるので, サイクロトロン放射によって荷電粒子が単位時間あたりに失うエネルギーは,

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{c\beta^4}{r^2(1 - \beta^2)^2}$$

となる。特に, 荷電粒子の周回速度が光速に近い場合, サイクロトロン放射と区別し, シンクロトロン放射と呼ばれる。シンクロトロン放射は, 素粒子物理学の実験設備である粒子

加速器で発生する。先ほど導出した式によって半径が小さいほど荷電粒子が失うエネルギーが大きくなるので、それを避けるため、高エネルギーの粒子加速器は大きな敷地¹を要する。

古典論による水素原子の寿命 正の電荷をもった原子核の周りを負の電荷をもった電子が運動する原子モデルは、量子力学によって安定性が保証されている。量子力学が提唱される前、周回運動する電子は電磁波を放射することによってエネルギーを失い、原子核に向かって落下すると考えられていた。つまり、すぐに原子が崩壊してしまうので電子が原子核を周回するモデルは受け入れられなかったのである。ここでは、量子力学を無視し、水素原子が崩壊するまでの時間を計算してみよう。

水素原子の中心には電荷 e の原子核が存在し、その周りを電荷 $-e$ をもつ電子が周回している。電子の質量を m 、速度を v 、電子と原子核の距離を r としよう。電子の速度が光速に比べて無視できる程度とすると、電子のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

となる。この式の第1項が運動エネルギー、第2項がポテンシャルエネルギーである。また、原子核と電子の間に作用するクーロン力が、電子を円運動させるための向心力となっているとすると、

$$m\dot{v} = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

となる。この関係式から v を消去すると、電子のエネルギーは

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (72)$$

のように変形される。ところが、電子が周回運動をするとこのエネルギーは電磁放射によって失われていく。非相対論近似で、単位時間に電子が失うエネルギーは

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e^4}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \right)^2 \quad (73)$$

である。電子がエネルギーを失うと、電子は徐々に原子核に向かって落下していくはずである。初期状態で r_0 の距離にあった電子が原子核に衝突するまでの時間 T を算出しよう。時間 T は

$$T = \int_{r=r_0}^{r=0} dt = \int_{r_0}^0 \frac{dt}{dr} dr \quad (74)$$

¹欧州原子核研究機構 (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire; CERN) の世界最大の円形粒子加速器は、全周 27 km の規模である。

のように計算できる。この計算に必要な dr/dt はエネルギー (72) を r について微分し、その結果を (73) と比較すれば得られる。結果を書くと、

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^3 r^2}$$

となる。これを (74) に代入すると、

$$T = - \int_{r_0}^0 \frac{3}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 m^2 c^3 r^2 dr = \frac{1}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 m^2 c^3 r_0^3$$

となる。初期状態での原子核までの距離 r_0 として、ボーア半径:

$$r_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m} \approx 0.529 \times 10^{-10} [\text{m}]$$

を設定し、さらに、数式を簡略化するために、微細構造定数:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

を用いて T を書くと、

$$T = \frac{\hbar}{4mc^2\alpha^5}$$

となる。この時間を具体的に計算すると 1.56×10^{-11} 秒という非常に短い時間になる。つまり、量子力学が提唱される前、このように原子が一瞬のうちに崩壊するため、原子核を電子が周回するモデルは支持されなかったのである。

5 電磁放射の反作用

これまで学んだように、加速する荷電粒子は電磁波を放射し、その結果エネルギーを失う。エネルギーを失うことによって、運動エネルギーが減少し、荷電粒子は減速するのである。端的に言うと、加速する荷電粒子は放射によって減速する力の作用を受けるのである。その減速する力の作用を放射の反作用と呼ぶ。

5.1 電磁放射の反作用の導出

次の手段によって電磁放射の反射用を計算してみよう。荷電粒子には時刻 t_0 から t_1 にわたって力 \mathbf{F} が印加されているとする。しかし、時刻 t_0 と t_1 において、荷電粒子の速度がゼロとなるように \mathbf{F} は制御されているとする。それ以外の時刻における速度は任意であるが、非相対論近似が適用できる程度の小さな速度とする。そのような荷電粒子は、

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \quad (75)$$

の仕事率でエネルギーを失う。この場合、エネルギー保存則は

$$\begin{aligned}
 E_k(t_1) - E_k(t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 \right) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt - \left[\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{F} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt. \tag{76}
 \end{aligned}$$

のように書かれる。この数式変形において、 $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}(t_1) = 0$ を仮定した。右辺において、第2項が荷電粒子に作用する減速する力を表している。その減速する力は、(76)の右辺がいかなる速度 v に対してもゼロとなる条件として、

$$\mathbf{F}_{\text{dec}} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \tag{77}$$

でなければならない。この結果は、非相対論的な電磁波の放射の反作用である。

5.2 相対論的な電磁放射の反作用

導出した (77) は速度が小さい場合の近似式であるので、一般の速度に対して (77) を拡張してみよう。そのために、次のように考えてみる。対象とする荷電粒子は、静止系 (K 系) からみて x 軸方向に速度 v で運動している。もう一つの慣性系 K' 系を考える。 K' 系は K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動している。ある時点において、荷電粒子は K' 系からみると静止している。同時に、K 系からみると荷電粒子は x 軸方向に速度 v で運動している。荷電粒子の加速度は xy 平面上となるように座標軸が選ばれている。このような設定において、 K' 系からみると、荷電粒子に作用する放射の反作用は非相対論近似が成り立つので、 K' 系からみた放射の反作用を \mathbf{K}' とおくと、

$$\mathbf{K}' = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{u}}'$$

が成り立つ。ここで、 \mathbf{u}' は K' 系からみた荷電粒子の速度とする。同様に、K 系からみた荷電粒子の速度を \mathbf{u} とおくと、上記の条件設定より、

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}' = 0,$$

である。K 系からみた放射の反作用は、速度成分と平行成分と垂直成分に分離すると力のローレンツ変換より、

$$\mathbf{K}_{\parallel} = \mathbf{K}'_{\parallel}, \quad \mathbf{K}_{\perp} = \sqrt{1 - \beta^2} \mathbf{K}'_{\perp},$$

となる。K系からみた放射の反作用を計算するには、加速度の時間微分 $\dot{\mathbf{u}}'$ をローレンツ変換し、 \mathbf{K}'_{\parallel} と \mathbf{K}'_{\perp} をK系からみた物理量で記述する。その後、力のローレンツ変換によってK系からみた力に変換する。

まず、加速度の時間微分の変換を導出するため、加速度のローレンツ変換を書いておこう。加速度のローレンツ変換は、座標のローレンツ変換を時間について2階微分すれば得られる。そのうち、 x 軸と y 軸方向の成分について結果を書くと、

$$\begin{aligned}\dot{u}'_x &= \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-vu_x/c^2)^3} \dot{u}_x, \\ \dot{u}'_y &= \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-vu_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \dot{u}_y + \frac{v\dot{u}_x}{c^2} u_y \right],\end{aligned}$$

である。また、座標のローレンツ変換から、時間微分を与える演算子は

$$\frac{d}{dt'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-vu_x/c^2} \frac{d}{dt},$$

のように変換される。この規則性を利用して加速度のローレンツ変換を時間について微分すると、

$$\begin{aligned}\ddot{u}'_x &= \frac{(1-\beta^2)^2}{(1-vu_x/c^2)^5} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \ddot{u}_x + \frac{3v(\dot{u}_x)^2}{c^2} \right], \\ \ddot{u}'_y &= \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-vu_x/c^2)^3} \left[\frac{3v\dot{u}_x}{c^2} \dot{u}_y - \frac{3v^2\dot{u}_x^2}{c^4(1-\beta^2)} u_y + (1-\beta^2) \ddot{u}_y + \frac{v\ddot{u}_x}{c^2} u_y \right],\end{aligned}$$

が得られる。ここで、速度ベクトルに関する設定条件 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{u}' = 0$ を代入し、加速度の時間微分を、速度に対して平行成分と垂直成分としてベクトル表記すると、

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{v}}'_{\parallel} &= \frac{(\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{v^2(1-\beta^2)} \mathbf{v} + \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2 v^2 (1-\beta^2)^3} \mathbf{v}, \\ \ddot{\mathbf{v}}'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\frac{\ddot{\mathbf{v}}}{1-\beta^2} + \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{c^2(1-\beta^2)^2} \dot{\mathbf{v}} - \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2 v^2 (1-\beta^2)^2} \mathbf{v} - \frac{3(\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{v^2(1-\beta^2)} \mathbf{v} \right],\end{aligned}$$

のようになる。ここで、K'系からみた放射の反作用が、

$$\mathbf{K}'_{\parallel} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{u}}'_{\parallel}, \quad \mathbf{K}'_{\perp} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{u}}'_{\perp},$$

であることに注意し、力のローレンツ変換によってK系からみた放射の反作用が、

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\parallel} + \mathbf{K}_{\perp} = \mathbf{K}'_{\parallel} + \sqrt{1-\beta^2} \mathbf{K}'_{\perp},$$

によって計算できるので、

$$\mathbf{K} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{1-\beta^2} \left\{ \ddot{\mathbf{v}} + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2(1-\beta^2)} \dot{\mathbf{v}}, + \frac{\mathbf{v}}{c^2(1-\beta^2)} \left[(\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}}) + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)} \right] \right\}, \quad (78)$$

が得られる。この式が相対論的な放射の反作用である。

5.3 共変形式による表記

相対論的な電磁放射の反作用を4元ベクトル表記してみよう。電磁放射の反作用力の非相対論近似を参考にして

$$\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2}, \quad (79)$$

が反作用力の4元ベクトル表現となるか調べてみよう。力のベクトル K^μ は、速度ベクトル u^μ と直交することが知られている。つまり、 $\eta_{\mu\nu} K^\mu u^\nu = 0$ が成立する。この性質を利用して、反作用力の候補(79)が力のベクトルであるかを調べてみる。そのために、

$$\frac{d}{d\tau} \left(\eta_{\mu\nu} u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau} \right) = \eta_{\mu\nu} u^\mu \frac{d^2 u^\nu}{d\tau^2} + \eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du^\nu}{d\tau},$$

の関係に注意すると、

$$\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2} u^\nu = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\frac{d}{d\tau} \left(\eta_{\mu\nu} u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau} \right) - \eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du^\nu}{d\tau} \right],$$

となるのだが、 $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$ であることから、右辺の第1項は必ずゼロとなる。さらに計算を進めると、

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2} u^\nu &= -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \eta_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\tau} \frac{du^\beta}{d\tau}, \\ &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \eta_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\tau} \frac{du^\beta}{d\tau} \cdot \frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \end{aligned}$$

が得られる。この式の右辺は一般にゼロとはならないので、上に示した力のベクトルの候補は力のベクトルではない。しかし、右辺を左辺に移項すると、

$$\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \eta_{\mu\nu} \left(\frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\tau} \frac{du^\beta}{d\tau} u^\mu \right) u^\nu = 0, \quad (80)$$

が得られるので、

$$K^\mu = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\tau} \frac{du^\beta}{d\tau} u^\mu \right), \quad (81)$$

この式の左辺が力の4元ベクトルの性質を満たす。つまり、これが電磁反作用の4元ベクトルの候補である。

引き続き、上で定義した4元ベクトル K^μ が電磁放射の反作用力であることを証明しよう。そのために、4元加速度ベクトルの定義を参考にしよう。荷電粒子の速度を \mathbf{v} とすると、その荷電粒子の4元加速度は、

$$\left[\frac{du^\mu}{d\tau} \right] = \left[\frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})/c}{(1-\beta^2)^2}, \quad \frac{\dot{\mathbf{v}}}{1-\beta^2} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})/c}{(1-\beta^2)^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \right],$$

となる。ここで、 $d\tau = \sqrt{1-\beta^2} dt$ に注意して、4元加速度を τ ついて微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u^0}{d\tau^2} &= \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left[\frac{(\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}})}{c(1-\beta^2)} + \frac{(\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c(1-\beta^2)} + \frac{4(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^3(1-\beta^2)^2} \right], \\ \frac{d^2 u^k}{d\tau^2} &= \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left\{ \ddot{v}^k + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2(1-\beta^2)} \dot{v}^k \right. \\ &\quad \left. + \frac{v^k}{c^2(1-\beta^2)} \left[(\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}}) + \frac{4(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)} + (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \right] \right\},\end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $k = 1, 2, 3$ とする。また、4元加速度ベクトルの長さの自乗は、

$$\eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3} + \frac{(\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{(1-\beta^2)^2},$$

のように計算される。この式の両辺に4元速度ベクトル u^μ/c^2 を乗じると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du^\nu}{d\tau} u^0 &= \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left[\frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^3(1-\beta^2)^2} + \frac{(\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c(1-\beta^2)} \right], \\ \frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du^\nu}{d\tau} u^k &= \frac{u^k}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left[\frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)^2} + \frac{c^4(\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2(1-\beta^2)} \right],\end{aligned}$$

が得られる。これらの結果から、

$$\begin{aligned}K^0 &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left[\frac{(\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}})}{c(1-\beta^2)} + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^3(1-\beta^2)^2} \right], \\ K^k &= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left\{ \ddot{v}^k + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2(1-\beta^2)} \dot{v}^k \right. \\ &\quad \left. + \frac{v^k}{c^2(1-\beta^2)} \left[(\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}}) + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)} \right] \right\},\end{aligned}$$

が得られる。この結果をまとめて書くと、

$$[K^\mu] = \left[\frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{v})/c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right],$$

となる。このベクトルの第1成分から第3成分は、電磁放射の反作用力となる3次元ベクトル \mathbf{K} を4元ベクトルで表現した結果と一致する。第0成分は3次元ベクトルの力と速度の内積になっているので、4次元の力ベクトルの第ゼロ成分が仕事率であるという前提と矛盾していない。したがって、(81)は電磁放射の反作用力4元ベクトル表記であると結論できる。

5.4 電磁放射のない条件

非相対論近似が成立する条件では, $\ddot{v} = 0$ の場合に電磁放射が発生しない。つまり, 等速度運動だけでなく, 等加速度運動する荷電粒子も電磁放射しないのである。

それでは, 光速と比較できる速度をもつ荷電粒子まで拡張し, 電磁放射しない条件を求めよう。その場合, 電磁放射の反作用力の4元ベクトルがゼロである条件を求めればよい。簡単のため, 速度と加速度がともに x^1 軸方向に限定される場合を考えてみよう。すなわち, $u^2 = u^3 = 0$ とする。そのとき, 電磁放射の反作用力は,

$$K^\mu = \frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{du^1}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{du^0}{d\tau} \right)^2 \right] u^\mu = 0 \quad (82)$$

なる条件を満たすと考えればよい。この微分方程式を直接解く代わりに,

$$\frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2} - \frac{a^2}{c^2} u^\mu = 0 \quad (83)$$

を解いてみよう。その方程式の解は, $u^\mu = A \cosh a(\tau - \tau_0)/c$, または, $u^\mu = A \sinh a(\tau - \tau_0)/c$ である。ここで, A と τ_0 は積分定数である。これらの解のうち, (82) も同時に満たすことができるのは,

$$u_0 = A \cosh \frac{a(\tau - \tau_0)}{c}, \quad u_1 = A \sinh \frac{a(\tau - \tau_0)}{c}$$

の組み合わせである。この解を (82) に代入した結果, (83) と同一の方程式になるには $A = c$ でなければならないので, (82) の解は,

$$u_0 = c \cosh \frac{a(\tau - \tau_0)}{c}, \quad u_1 = c \sinh \frac{a(\tau - \tau_0)}{c}$$

となる。双曲線関数で記述されているとおり, このような数式で記述される運動は双曲線運動と呼ばれる。つまり, 双曲線運動する荷電粒子は電磁放射をしないのだ。双曲線運動は, 非相対論近似では等加速度運動にあたる。非相対論近似で $u^1 \simeq a(t - t_0)$ (ただし, $\tau \simeq t, \tau_0 \simeq t_0$) であることから, a は加速度に相当するパラメータである。

5.5 エネルギー損失と4元ベクトルの関係

加速する荷電粒子が電磁放射によってエネルギーを失う事実があるので, その第ゼロ成分は電子放射の電力と関係があるはずである。それを確かめてみよう。第ゼロ成分 K^0 を $\sqrt{1 - \beta^2} c$ 倍して時間 t について積分すると,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \beta^2} c K^0 dt = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{(\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}})}{(1 - \beta^2)^2} + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1 - \beta^2)^3} \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left\{ \left[\frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{(1-\beta^2)^2} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\dot{v}^2}{(1-\beta^2)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3} \right] dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3} dt \right\} \\
&= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \left\{ \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1-\beta^2)^2} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{\beta}^2(1-\beta^2) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{(1-\beta^2)^3} dt \right\} \\
&= \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \left\{ \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1-\beta^2)^2} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1-\beta^2)^3} dt \right\}
\end{aligned}$$

が得られる。時刻 t_0 と t_1 における速度 \mathbf{v} が等しければ、この数式の第1項はゼロとなる。また、積分期間の長さ $t_1 - t_0$ に比べて速度の差 $\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{v}(t_0)$ が小さくても、第1項が無視できる。残された第2項はラーモアの放射電力を時間について積分した結果と等しい。