

季節による太陽高度・日出/日没時刻の変化

初稿 2021年11月7日

第2稿 2024年8月14日

Tokieda Yukinobu

地球の自転軸は公転面から約 23.44° 傾いているので、季節が存在する。夏や冬といった季節の変化は、南中時の太陽高度が高く、昼間が長くなる時期や、その逆の条件となる時期を繰り返すことに起因する。本書では、季節ごとの太陽高度や昼間の長さを計算する。計算には、地球の自転軸の傾きと地球の公転軌道の離心率を考慮しなければならない。第1節で自転軸の傾きのみを考慮した円軌道モデルを基礎として定式化する。第2節で、公転軌道の離心率を考慮した楕円軌道モデルによって精度の高い計算を示す。

1 円軌道モデル

地球の自転軸が傾いていることに起因し、年間を通して南中時の太陽高度が変化する。それに伴い昼の長さも変化する。太陽の南中時刻は常に正午であると思われるかもしれないが、年間を通して南中時刻も変化する。本節では、地球が円軌道上を公転するモデルにおいて、太陽の南中時刻や、日出/日没時刻の変化を解析する。なお、厳密には地球の軌道はわずかに扁平した楕円であり、その影響は日出/日没時刻等に影響を与えている。楕円軌道における解析は次節で取り扱うことにし、本節は基礎として円軌道モデルを取り扱う。

1.1 南中時の太陽高度

北緯 θ の地点における南中時の太陽高度を計算しよう。計算には図1を考えるとよい。図は地心黄道座標で描かれている。その座標では、原点に地球を置き、地球から見た太陽が xy 平面上を公転する。ここでは春分点の方位を y 軸方向 (紙面の手前から奥に向かう方向) にとった。一方、地球の自転軸は y 軸に対して η だけ傾いているので、観測地点 P は、自転とともに平面 σ_θ 上を動く。

冬至の太陽の位置 S_- から ϕ だけ方位が変化した位置に太陽が存在する状態を考えよう。点 S の方位 θ は地球から見た太陽の位置である。例えば、春分の日には $\phi = \pi/2$ 、夏至の日

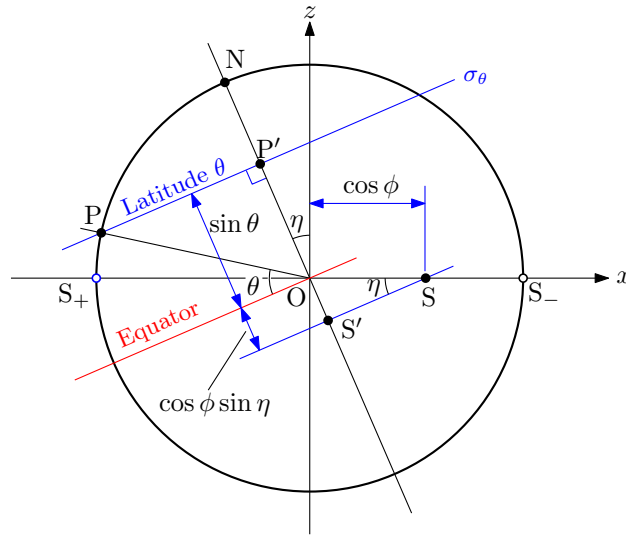


図 1: 南中高度定式化の概念図

には $\phi = \pi$ となる。点 S を固定した状態で、点 P を平面 σ_θ 上で回転させたときの点 S と点 P が最短距離をとるのが、太陽が南中する状態に相当する。最短距離を考えるには、点 S と点 P を自転軸周りに回転させ、経線が $x = 0$ を通過する位置に移して考えると簡単だ。移動前の太陽の位置 S は、 x 座標が $\cos \phi$ であるので、図に示すように、移動後の位置 S' は赤道よりも $\cos \phi \sin \eta$ だけ降りた場所に位置する。なお、観測点と赤道の距離は、回転に関わらず $\sin \theta$ である。したがって、観測点 P' と太陽 S' の最短距離は、角度として書くと、

$$\theta + \arcsin(\cos \phi \sin \eta),$$

となる。結果として、太陽の南中高度は ϕ の関数として、

$$\psi_m(\phi) = \frac{\pi}{2} - \theta - \arcsin(\cos \phi \sin \eta), \quad (1)$$

のように書くことができる。なお、変数 ϕ が 1 年における月日に相当する。当然であるが、春分と秋分の南中高度は $\pi/2 - \theta$ 、夏至では $\pi/2 - \theta + \eta$ 、冬至では $\pi/2 - \theta - \eta$ となる。

1.2 南中時刻のずれ

太陽の南中時刻は正午であるとは限らない。自転軸の傾きに起因し、日によって南中時刻は変動する。南中時刻が日によって変化することは、かつて人類が利用していた日時計に誤差が生じることを意味する事実である。本節では南中時刻の変動を定式化しよう。

南中時刻の変動を定式化するには、図 2 に示す地心黄道座標を用いて考察するのがよい。ここでも春分点を y 方向にとった。太陽 S が方位 ϕ に存在する時期の南中時刻について考

えよう。南中とは、観測点 P から見たとき、太陽が真南¹ に存在する現象である。その状

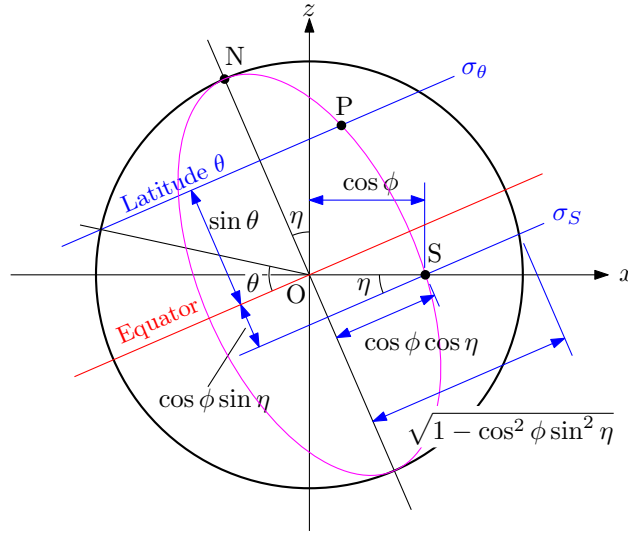


図 2: 南中時刻変動の定式方のための概念図

態が整っているときの太陽位置 S と観測位置 P の関係が図 2 に描いた状態だ。図に描かれた条件を簡単に言うと、自転軸を長軸とし、太陽位置 S を通る楕円の上に観測点 P が載っている状態である。その楕円は地球の経線に相当するので、太陽が観測点の真南にある条件を描いた図になっている。

南中時刻を特定するには、観測点 P が平面 σ_θ においてどの角度に存在しているかを調べればよい。それは、自転軸から点 P までの距離と、点 P の回転半径の比を調べればよい。その比は、自転軸と点 S の距離と点 S の回転半径の比と等しい。図に描いたように、自転軸と点 S の距離は $\cos \phi \cos \eta$ であり、点 S の回転半径は $\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}$ である。すなわち、計算すべき比は、

$$\frac{\text{自転軸と点 P の距離}}{\text{点 P の回転半径}} = \frac{\cos \phi \cos \eta}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}}, \quad (2)$$

である。それに対し、1 年を通して太陽の位置は xy 平面状を半径 1 の円軌道を動いているように見える。図の条件において、点 S は回転軸からの距離が $\cos \phi$ 、回転半径が 1 となっている。つまり、太陽位置に関する上記の比率に相当する値は $\cos \phi$ である。上に書いた比 (2) は $\cos \phi$ に等しいとは限らない。その違いが南中時刻のずれに対応する。南中時刻のずれは ϕ の関数として書くと、

$$t_m(\phi) = \left[\arccos \left(\frac{\cos \phi \cos \eta}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}} \right) - \phi \right] \cdot \frac{12 \text{ hours}}{\pi}, \quad (3)$$

¹北回歸線より南の地域では、太陽が真北に見える条件が本節の南中に相当する場合もある。

となる。その変動は、(3) が θ の依存性をもたないことから、観測点の緯度によらず、その幅で南中時刻が変動することを示唆する。

公式 (3) が描く曲線の形状をイメージするため、自転軸の傾き η が小さいという過程で逆余弦関数 (\arccos) を近似計算してみよう。その計算過程を書くと、

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos^2 \phi \cos \eta}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}} &= \cos \phi \cos \eta \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi \sin^2 \eta \right) \\
 &= \cos \phi \cos \eta + \frac{1}{2} \cos^3 \phi \cos \eta \sin^2 \eta \\
 &= \cos \phi \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \eta \right) + \frac{1}{2} \cos^3 \phi \sin^2 \eta \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \eta \right) \\
 &\simeq \cos \phi - \frac{1}{2} \cos^2 \eta \cos \phi (1 - \cos^2 \phi) \\
 &= \cos \phi - \frac{1}{2} \sin^2 \eta \cos \phi \sin^2 \phi \\
 &= \cos \phi - \frac{1}{4} \sin^2 \eta \sin \phi \sin 2\phi \\
 &= \cos \phi - \frac{\eta^2}{4} \sin \phi \sin 2\phi,
 \end{aligned}$$

のように変形できることがわかる。ここで、微小変化量 $\Delta\phi$ を与えたとき、余弦関数が、

$$\cos(\phi + \Delta\phi) = \cos \phi - \Delta\phi \sin \phi,$$

のように近似できることに注意すると、公式 (3) は、

$$t_m(\phi) \simeq \eta^2 \sin 2\phi \cdot \frac{3 \text{ hours}}{\pi}, \quad (4)$$

のように近似できる。この近似結果から、南中時刻のずれは1年を通して2回だけ上下を繰り返すことが推測できる。そのずれの最大値は $(3\eta^2/\pi)$ 時間、すなわち、9分36秒程度である。

公式 (3) によって東京の南中時刻を計算すると図3のように変動する。東京の経度 (東経 139.7°) が、日本標準時を決める明石の経度 (東経 135°) より 4.7° だけ東にずれているから南中時刻の平均は正午より 18分48秒だけ早い。先ほども述べたように、この変動は緯度 θ に依存しないので、地球上のどこでも南中時刻がこのように変動する。正確に公式 (3) を計算すると南中時刻の変動は前後にそれぞれ9分50秒程度の幅で変動する。変動幅の誤差が2.4%程度なので、上で見積もった (4) は南中時刻の変動を近似できているのだ。

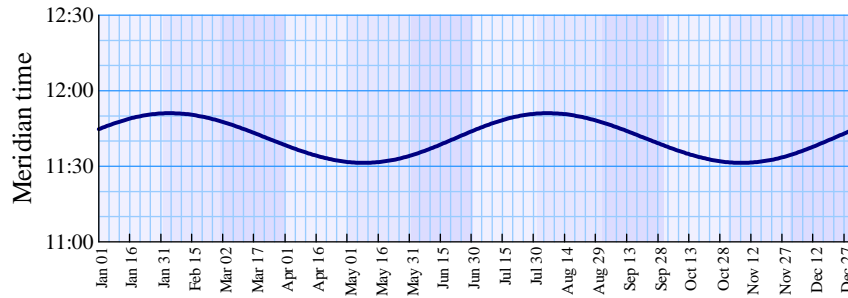


図 3: 東京における南中時刻の変動

1.3 日出/日没時刻と方位

本節では日出/日没の時刻と方位を計算しよう。計算のために図4のような地平座標を用いて考察すればよい。この図は名称のとおり地上から見た天球を用いた座標を用いる。観測者は天球の中心に立っていて、図の右が北、左が南、紙面の手前から奥に向かう方向が西となるように描いている。観測点の緯度が θ ならば、太陽は天頂から θ だけ傾斜した平面状を移動する。その平面は真南で最大高度となり、地平線と交わる方向が日出/日没の方向である。

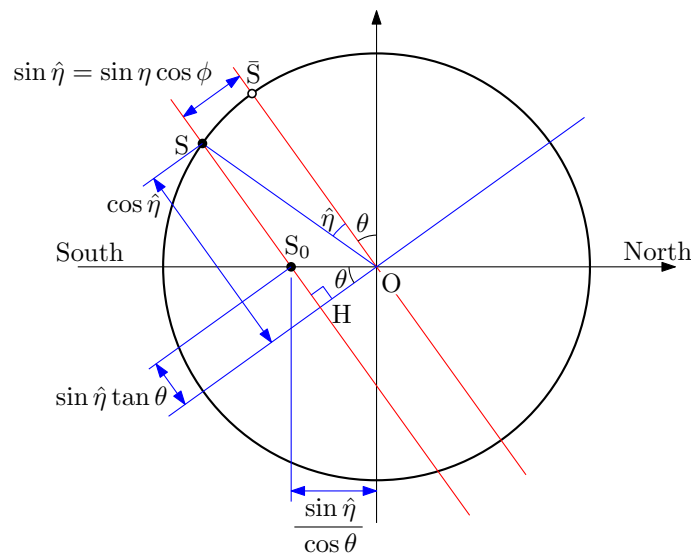


図 4: 日出/日没の時刻と方位

太陽は春分と秋分において、 $x = 0$ で地平線と交わる軌道を描く。ほかの時期には、太陽の移動経路は春分時の軌道から平行移動する。ここで、太陽の南中高度が $\theta - \hat{\eta}$ となる季節を考えよう。このとき、天球上の太陽は1日の間に半径 $\cos \hat{\eta}$ の円を描く。そのうち、昼間にあたるのは、図4に描いた断面において長さが $\cos \hat{\eta} - \sin \hat{\eta} \tan \theta$ にあたる部分であ

る。この場合、昼間の長さは、

$$T_d(\phi) = \left[\pi - 2 \arcsin \frac{\sin \hat{\eta} \tan \theta}{\cos \hat{\eta}} \right] \cdot \frac{12 \text{ hours}}{\pi},$$

となる。なお、南中高度を与える $\hat{\eta}$ は前節までに確認したように、 $\sin \hat{\eta} = \cos \phi \sin \eta$ であるので、昼間の長さは、

$$T_d(\phi) = \left[\pi - 2 \arcsin \frac{\cos \phi \sin \eta \tan \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}} \right] \cdot \frac{12 \text{ hours}}{\pi}, \quad (5)$$

のように書き換えることができる。この公式によると、東京の昼の長さは夏至で 14 時間 25 分、冬至で 9 時間 35 分となる。

これまでの結果を利用すれば、日出/日没時刻を定式化することができる。日の出時刻は、太陽の南中時刻から昼の長さの半分だけさかのぼった時刻である。一方、日没時刻は太陽の南中時刻から昼の長さの半分だけ経過した時刻である。その考えに基づいて計算すると、日出時刻 $t_r(\phi)$ と日没時刻 $t_s(\phi)$ は、

$$t_r(\phi) = \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\cos \phi \sin \eta \tan \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}} + \arccos \frac{\cos \phi \cos \eta}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}} - \phi \right] \cdot \frac{12 \text{ hr}}{\pi}, \quad (6)$$

$$t_s(\phi) = \left[\frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{\cos \phi \sin \eta \tan \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}} + \arccos \frac{\cos \phi \cos \eta}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi \sin^2 \eta}} - \phi \right] \cdot \frac{12 \text{ hr}}{\pi}, \quad (7)$$

のように計算することができる。改めて補足しておく、 ϕ は公転軌道において、冬至を基準 ($\phi = 0$) として測った地球の位置である。導出した公式にしたがって東京の日出時刻を計算すると図 5 のような曲線を描く。自転軸の傾きに起因する南中時刻の変動の影響で、日の出時刻の変化が非対称になっている。その非対象性のせいで、日出時刻が最も遅い

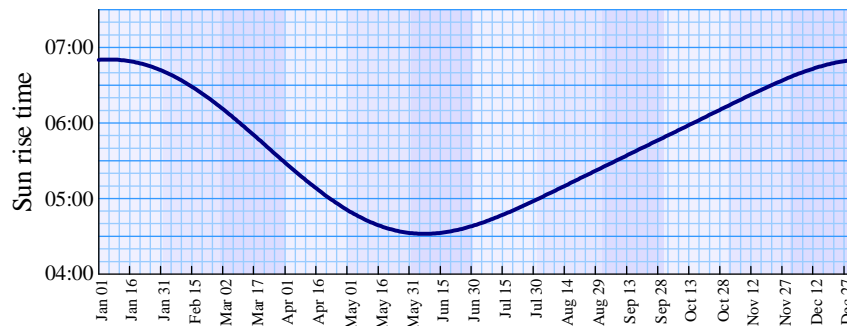


図 5: 円軌道モデルによる東京の日出時刻

のは冬至ではなく、その約 2 週間後の 1 月 2 日頃である。一方、日の出時刻が最も早いのは、夏至の約 2 週間前にあたる 6 月 5 日頃である。年間を通じて日の出時刻は、2 時間 20 分程度も変動していることになる。この変動の大きさは、高緯度の地域ではさらに顕著に

なる。北緯 45 度 (例えば稚内) では 3 時間 20 分程度, 北緯 60 度 (例えばヘルシンキ) では 6 時間 30 分程度も日出時刻が変動するのだ。

日没時刻は図 6 に示すように, 日の出時刻のパターンを逆にしたような特性を描く。日没が最も早いのは冬至より 2 週間早い 12 月 5 日頃であり, 日没が最も遅いのは夏至より 2 週間遅い 6 月 7 日頃である。当然であるが, 日没時刻の変動幅は日の出時刻の変動幅と

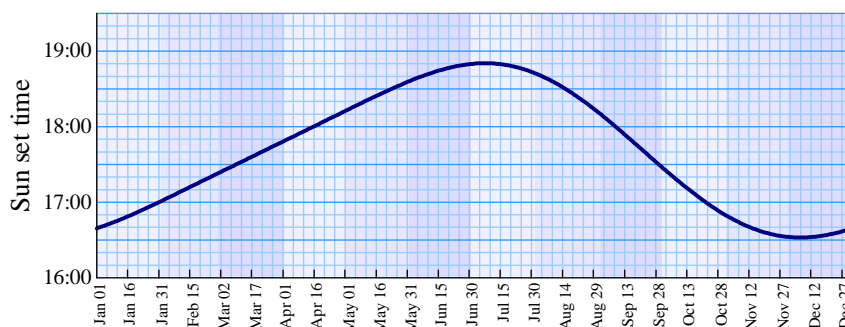


図 6: 円軌道モデルによる東京の日没時刻

同じである。実際には地球の軌道がわずかに扁平した楕円であるため, 本節で計算した日出/日没時刻は, 実際とは少し異なる。次節で楕円軌道モデルを用いて計算する際に, 精度の高い日出/日没の時刻を得ることができる。

日出/日没の太陽の方位について考察しよう。夏は北東から, 冬は南東から太陽が上るといのように, 年間を通じて日の出の方位が変化することを実感したことがあるだろう。その方位の変化を定式化する。図 4 の線分の長さ \overline{OS}_0 が日出/日没の方位に関する。具体的には, その長さが真東に対する日の出の方位の正弦関数 (sine) である。したがって, 日の出の方位角は,

$$\varphi_r(\phi) = -\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\sin \eta \cos \phi}{\cos \theta}, \quad (8)$$

となる。なお, この方位は真北をゼロとし, 西側を正にとった。日没の方位は日出の方位の符号を反転させればよい。

年間を通じて地球から見た太陽の方位 (春分点基準) ϕ が変化すると, 日出の方位 (8) は, 東を中心として北側と南側へ $\arcsin(\sin \eta / \cos \theta)$ の幅で変化する。例えば, 東京 (北緯 35.7°) では, 日の出の方位は真東を中心として $\pm 29.3^\circ$ も変化するのだ。

2 楕円軌道モデル

前節で計算した太陽高度や日出/日没の時刻は、現実の観測と比べるとあまり精度がよくない。その理由は、地球がわずかに扁平した楕円軌道を描くからだ。本節では地球が楕円軌道を描くことを考慮し、前節の計算よりもさらに精度よく太陽高度や日出/日没の時刻を計算する。なお、本節の計算は、前節のような公式を用いる代わりに計算機シミュレーションによって実施する。

2.1 地球の公転軌道

地球の公転軌道はわずかに扁平した楕円である。楕円軌道を描くことに起因し、太陽の見かけの位置が円軌道の場合からずれが生じる。そのような理由から、日出/日没時刻を計算するために楕円軌道を考慮することが必要になる。本節では、楕円軌道を定式化し、地球の楕円軌道のパラメータを取り上げ、楕円軌道を描く惑星の位置を計算する方法を説明する。

2.1.1 軌道パラメータ

ケプラーの法則によると、恒星を周回する天体(惑星など)は恒星が焦点となるような楕円軌道を描く(図7)。楕円軌道の形状を特定するパラメータとして**軌道長半径**(semi-major axis)と**離心率**(eccentricity)が用いられる。軌道長半径は楕円軌道の長軸の半分の長さである。離心率は楕円の中心に対する焦点のずれを表すパラメータである。図7に示すように、軌道長半径が a 、離心率が e の楕円軌道であれば、焦点(恒星の位置)は楕円の中心から ea だけずれた位置に存在する。このとき、**軌道短半径**(semi-minor axis)は $\sqrt{1-e^2}a$ である。次項で紹介するように地球軌道の離心率は0.0167という小さな値である。太陽系の惑星の中では水星軌道の離心率が最も大きく、0.2056という値である。

太陽系において、楕円軌道を公転する天体が最も太陽に近づく位置は**近日点**(perihelion)と呼ばれる。一方、最も太陽から離れる位置は**遠日点**(aphelion)と呼ばれる。太陽から近日点までの距離は $(1-e)a$ であり、遠日点までの距離は $(1+e)a$ となる。また、図7に描いたように、太陽から見たとき近日点と θ の角度をなす位置Pに存在するとき、太陽から惑星までの距離は、

$$r = \frac{(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

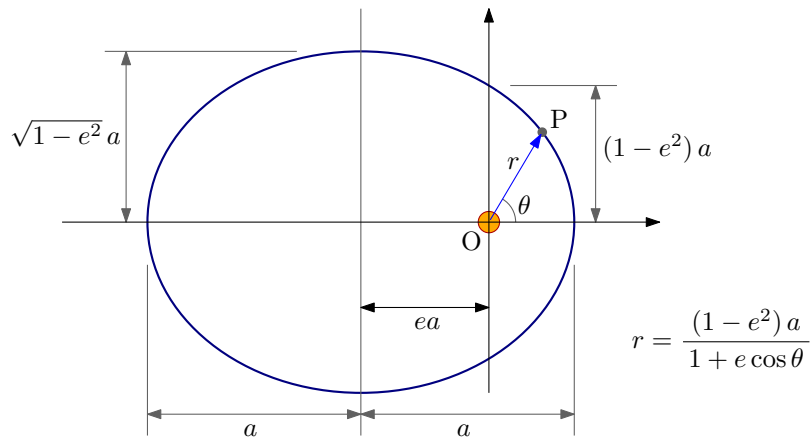


図 7: 離心率と楕円軌道の形状

となる。この公式は、ニュートンの運動方程式から導き出される厳密解である。いうまでもなく、 $\theta = 0$ を代入すると近日点までの距離が、 $\theta = \pi$ を代入すると遠日点までの距離が算出される。

地球の公転軌道 計算に地球の公転軌道を考慮するため、地球の公転軌道に関するパラメータを列挙する。地球の公転を記述するうえで、宇宙空間の方位を定義する必要がある。基準となる方位は**春分点** (equinox) である。春分点は、3月に発生する地球の中心から太陽の中心を結ぶ線分が地球の赤道を通過する瞬間、すなわち、春分において、地球から見た太陽の方角である。その方位をゼロとする。春分において、太陽から見ると地球は方位 180° に位置する。そのように定められた方位によって表 1 に示すパラメータが表現されている。

表 1: 地球の公転・自転に関するパラメータ

項目	値
軌道長半径	1.496×10^{11} m
離心率	0.01671022
近日点離角	102.985°
太陽年	365.242189 days
自転軸傾斜角	23.44°

表 1 について説明しよう。地球軌道の離心率は非常に小さい。この離心率では、軌道長半径と軌道短半径の違いは、わずか 0.014% 程度であり、ほぼ円軌道に近い。しかし、軌道長半径が約 1.5 億 km という大きさであるので、近日点と遠日点における太陽と地球の距

離は約 500 万 km も異なる。近日点離角とは、太陽から見たときの近日点の方位である。その方位は春分点を基準にした方位である。なお、地球の自転軸は方位 90° 方向に向かって、 23.44° だけ傾斜している。方位 90° に地球が存在するとき、冬至というわけだ。太陽年は、地球から見たときに太陽が同じ方位に戻ってくる周期である。それが厳密な 1 年の長さである。なお、表に記載した day は、ちょうど 24 時間に相当する時間である。太陽年が小数部をもつので、1 年を 365 日とすると、長年でその誤差が積算するためうるう年を設けて誤差を補正している。また、太陽年が日 (day) 単位で書かれていることから、地球の自転周期を逆算することができる。具体的には、太陽年を T_s とするならば、自転周期は $T_s/(1 + T_s)$ となる。これは 23 時間 56 分 4.0905 秒に相当する。

表 1 に記載したパラメータを用いて、春分、秋分などの季節のタイミングを計算すると図 8 のようになる。なお、図は離心率をかなり誇張して描いた。この計算をするにあたり、

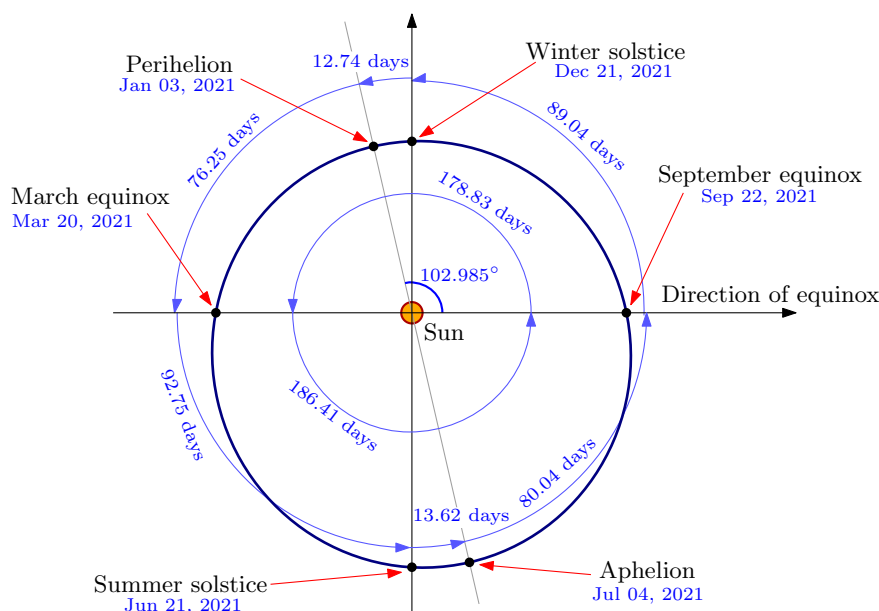


図 8: 地球の公転軌道と各季節のタイミング

冬至 (winter solstice) が 12 月 21 という初期条件を与え、ケプラーの法則を解いた。地球が近日点を通過するのは 2021 年では 1 月 3 日である。北半球の冬に地球が最も太陽に近づくというのは面白い。逆に、地球が遠日点を通過するのは 7 月 4 日と計算された。この計算によって、注目する点は二つある。第一に、春分と秋分間の時間だ。冬至を挟んでの時間は図に示すように 178.83 日であり、夏至を挟んでの時間は 186.41 日である。北半球の季節でいうなら、夏が冬より 1 週間程度長いことになる。地球がわずかに楕円軌道を描くことによって、1 週間もの違いが現れるのだ。第二に、冬至から近日点までの時間と、夏至から遠日点までの時間の違いである。前者は 12.74 日であり、後者は 13.62 日である。太陽から見た離角はともに 12.985° であるが、遠い方が実際の移動距離が長くなる。しか

も、遠方は公転速度が遅くなるので、同じ離角を通過するにも遠日点付近の方が長い時間を要するのだ。その違いは、近日点と遠日点で24時間経過したときの太陽の見かけの位置の変化が異なるということだ。つまり、わずかな離心率による楕円軌道が、年間を通して南中時刻の変化の要因になっている。それが、円軌道モデルが実際の日出/日没の時刻計算で誤差をもっていた理由である。

2.1.2 ケプラーの法則の解法

楕円軌道を描いて公転する天体の位置はケプラーの法則を解くことによって算出される。ケプラーの法則とは、主天体(太陽)の周りを公転する天体(惑星)の運動に関する法則であり、次の3つの法則で構成される。

楕円軌道の法則 惑星は、太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する。

面積速度一定の法則 惑星は、太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積が一定であるように運動する。

調和の法則 惑星の公転周期の2乗は、軌道長半径の3乗に比例する。

ケプラーの法則は元来、天体観測から導き出された法則であるが、ニュートンの運動方程式によって厳密に証明できる。天体の位置を計算するには、楕円軌道の法則と、面積速度一定の法則を利用する。

面積速度一定の法則に関して、惑星のように公転する天体が描く面積とは図9に示す面積 S を考えればよい。この図は原点 O を太陽とする天体の公転軌道を太い曲線で描いている。この軌道は原点 O を焦点の1つとする楕円軌道であり、長半径を1としている。離心率を e としたとき、太陽の位置は楕円軌道の中心から e だけずれた位置にあり、楕円の短半径は $\sqrt{1-e^2}$ となる。天体が反時計回りに公転していると仮定し、現在位置を P とする。近日点を A としたとき、天体が描く面積 S とは楕円軌道における扇形 OAP の面積である。面積速度一定の法則とは、面積 S が時間経過に対して一定の比率で増加するように天体が運動するという意味である。

天体の位置を表すには、太陽からみた近日点との離角(真近点角) ϕ よりも図9に示す離心近点角 $\hat{\phi}$ を用いるほうが便利である。図に示すように、楕円軌道の長軸の midpoint が中心とし、近日点と遠日点で楕円軌道に接するような円を描く。その円軌道は、楕円軌道を短軸方向に $(1-e^2)^{-1/2}$ 倍だけ引き伸ばした形状である。天体の現在位置 P を短軸方向に引き

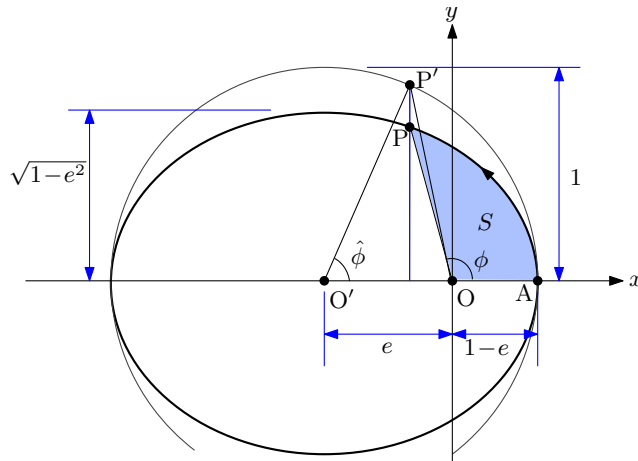


図 9: 公転する天体が描く面積

伸ばした位置を点 P' としよう。長軸の中心 O' からみた点 P' の近日点との離角を離心近日角 $\hat{\phi}$ と定義するのだ。このとき、扇形 $O'AP'$ の面積は $\hat{\phi}/2$ である。三角形 $O'OP'$ の面積が $e \sin \hat{\phi}/2$ であるので、領域 OAP' の面積は $\hat{\phi} - e \sin \hat{\phi}$ である。よって、天体が描く面積 S は、 $S = (\hat{\phi} - e \sin \hat{\phi})/2$ なる関係を満たす。したがって、単位時間あたりの面積増加率 (面積速度) を $\omega/2$ とすれば、面積速度一定の法則は、

$$\hat{\phi} - e \sin \hat{\phi} = \omega t, \quad (9)$$

なる数式で表される。この方程式を ϕ について解けば、惑星の位置を計算できる。実際の天体軌道計算において、この方程式はニュートン法などの数値解法によって解けばよい。

2.1.3 公転速度の変化

地球がわずかな扁平率をもつ楕円軌道で公転しているため、面積速度一定の法則によって地球から見た太陽の黄経は一定の変化率でなく、季節に依存した変化率で推移する。その変化率は、地球が近日点を通過する 1 月付近で大きくなり、遠日点を通過する 7 月付近で小さくなる。

面積速度一定の法則 $r^2 \dot{\theta} = \text{const}$ から考察を始めよう。なお、 r は太陽から地球の距離、 θ は太陽から見た地球の黄経であり、近日点を $\theta = 0$ となるように定義されている。そのとき、距離 r は、

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta},$$

である。この r の数式表現に基づいて面積速度一定の法則を書き換えると、

$$\dot{\theta}(\theta) = A(1 + e \cos \theta)^2,$$

となる。ここで、 A は定数である。典型的な値を書くと、

$$\dot{\theta}(0) = A(1 + e)^2, \quad \dot{\theta}(\pi/2) = A, \quad \dot{\theta}(\pi) = A(1 - e)^2,$$

が得られる。この数式によると、近日点での黄経の変化率は遠日点のとの比率で、

$$\frac{\dot{\theta}(0)}{\dot{\theta}(\pi)} = \frac{(1 + e)^2}{(1 - e)^2},$$

となる。地球の軌道の離心率が $e = 0.0167$ なので、上記の比率は 1.0691 となる。太陽から見た地球の黄経は、角度を 180° 反転させると、地球から見た太陽の黄経となるので、地球から見た太陽の黄経の推移は、近日点では遠日点よりも約 6.9% だけ速いということだ。

地球の公転軌道に関してケプラーの法則を解き、1日あたりの地球から見た太陽の黄経の変化率を計算すると図 10 のような曲線が得られる。黄経の変化率は 1 年の平均で

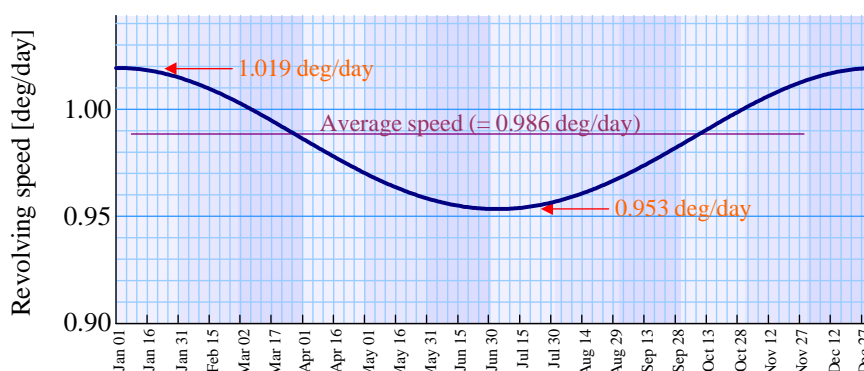


図 10: 地球から見た太陽の黄経の 1 日当たりの変化率

$0.986^\circ/\text{day}$ だが、近日点付近で $1.019^\circ/\text{day}$ 、遠日点付近で $0.953^\circ/\text{day}$ 程度のように変動する。最大値と最小値の比率は、約 1.069 であり、上で書いた見積もりが一致する。

このわずかなずれが、積み重なることによって南中時刻が変動することになる。グラフに描いているように、1 年を通して、太陽の黄経は 24 時間で 0.986° だけ進む。実際に、24 時間でこの角度だけ黄経が進めば、南中した 24 時間後に、太陽は再び南中するのだが、図 10 によると 1 月上旬に太陽の黄経は 24 時間で 1.019° も進むのだ。つまり、24 時間で太陽は厳密に南中することなく、さらに 0.033° だけ先にいる。太陽が南中するには、地球の時点はその差を取り戻す必要があり、約 8 秒の時間を要するのだ。つまり、1 月上旬で太陽の南中時刻は日ごとに 8 秒ずつ遅れていくことになる。

日ごとに積もっていった角度の差異をプロットすると図 11 に示す曲線を描く。このグラフは、円軌道モデルに相当する $0.986^\circ/\text{day}$ で太陽の黄道が推移する場合を基準とし、実際の黄道の推移が基準とずれている様子を描いている。グラフは 2022 年 1 月 1 日の午前 9

時における太陽黄経を基準に、実際の太陽黄経と円軌道モデルによる黄経との差をプロットしている。実際の黄経の進みが早い場合を正としてプロットした。円軌道モデルとの

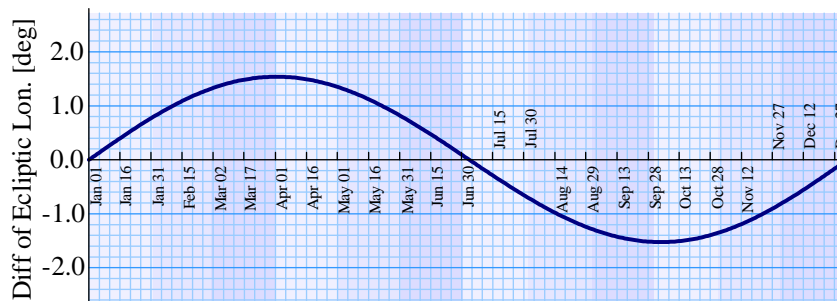


図 11: 地球から見た太陽の黄経の円軌道モデルとの差 (2022 年の想定)

黄経差は、図 11 によると 4 月 1 日で最大値 $+1.54^\circ$ となり、10 月 3 日に最小値 -1.54° をなる値をとる。

円軌道モデルとの黄経の差異は、太陽の南中時刻の変動として現れる。古代の社会においては太陽の位置で時刻を決めていたかもしれないが、現代では一定の尺度で時間が定義されている。円軌道モデルであれば、現代の時間の尺度でも、一定の変化率で太陽の黄経が推移するのだが、現実の楕円軌道ではずれが生じるということだ。図 11 によると、地球から見た太陽の黄経は最大で 1.54° もずれるのだ。このずれによって、太陽の南中時刻が変動する。例えば、日本の標準時の位置である明石では、太陽が正午に南中することになっているが、地球がわずかに扁平した楕円軌道を描くため、正午の太陽の位置が真南より 1.54° だけずれた位置に見えることになる。例えば、4 月 1 日では 1.54° だけ東側にいることになるので、正確に南中するのは 1.54° の角度に相当する時間だけ遅れて 12 時 6 分 10 秒となる。このように、地球が楕円軌道を公転することによって南中時刻が変動するのだ。実際の南中時刻は、既に議論したように、地軸の加賀向きの影響も含まれる。地軸の傾きを考慮した南中時刻の変動を次項で解析することにしよう。

2.2 南中時刻の変化

前項で楕円軌道が南中時刻を変動させることを説明した。地球の軌道が 0.0167 程度の離心率をもつため、地球から見た太陽の黄経が一定の変化率で推移せず、推移にむらが生じるため、南中時刻が前後にそれぞれ 6 分 10 秒の幅で変動するわけだ。ところが、南中時刻の変動は楕円軌道だけが要因ではなく、地軸が傾いていることも要因である。地軸の傾きによる南中時刻の変動は、既に円軌道モデルでも考察した。地球は 23.44° だけ地軸が書いた向いている。その傾きで、南中時刻が前後でそれぞれ 9 分 50 秒の幅で変動する。

実際の南中時刻の変動は、楕円軌道に起因する変動と地軸の傾きに起因する変動の重ね合わせである。一例として東京の南中時刻の変動を計算すると、図 12 に示す曲線が得られる。楕円軌道に起因する変動は1年で1周期、一方、地軸の傾きに起因する変動は1年に2周期である。楕円軌道に起因する変動で、年の前半で南中軸は遅い時間帯であり、後半に南中時刻は早い時間谷シフトする。その上に地軸の傾きに起因する2周期の変動が乗っている。その結果として、東京の南中時刻は30分程度も変動する。南中時刻が最も早い

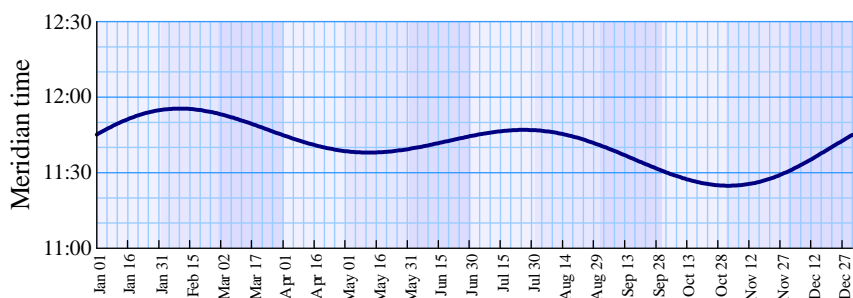


図 12: 楕円軌道モデルによる東京の南中時刻の変化

のは11月上旬で11時25分であり、最も遅いのは2月中旬で11時56分である。南中時刻の変動の幅は、実は、緯度には依存しない。なぜなら、南中時刻の変動の二つの要因が、どちらも緯度に依存しないからだ。楕円軌道に起因する変動は、地球の中心からみた太陽の中心の黄経に依存するため、観測点の緯度に依存しない。地軸の傾きに起因する変動については、円軌道モデルで考察したように観測点の緯度の依存性が含まれない。したがって、南中時刻の変動の幅は、地球上のどの観測点でも同じである。例えば、赤道上であっても南中時刻は1年をとおして30分程度の変動があるわけだ。

南中時刻が変化するので、毎日12時に太陽を観測すると、その位置は興味深い曲線を描く。計算して描いてみると、図 13 のように8の字特性を示す。この図は、南側の天球をモルワイデ図法で描いている。得られた8の字特性は上下対象ではなく、北半球の夏に対応する部分が小さくなっている。その非対称性は、地球が楕円軌道を描き、夏の期間が遠日点にあたるため公転速度が遅くなっているからだ。この図によると、12時に太陽が見える方位は年間を通じて20°程度変化する。人類がかつて太陽の影の方位を時計として利用していたことを考えると、図 13 に示した太陽方位の変化は1時間程度の不正確さをもたらす大きさである。

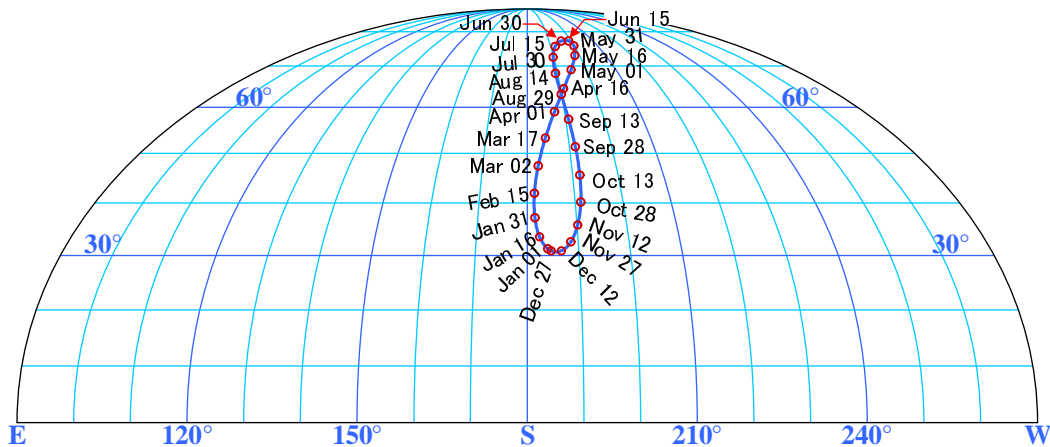


図 13: 楕円軌道モデルによる東京での 12 時の太陽の位置

2.3 日出/日没の時刻の変動

地球の軌道がわずかに扁平した楕円軌道であるので、日出/日没時刻は円軌道モデルからずれが生じる。そのずれの主要因要因は南中時刻のずれである。一日の太陽の動きは、円軌道モデルで考察した第 1.3 項が、ほぼそのまま成り立つ。おおまかな計算でよいのであれば、南中時刻を楕円軌道モデルで計算し、円軌道モデルで計算した昼間の時間を用いて、日出/日没時刻が算出できる。

前段落で、大まかな計算であれば、昼間の長さは円軌道モデルでよいと述べた。おおまかにとは、分単位での計算精度と考えればよい。第 2.1.3 目で述べたように、地球が楕円軌道を描くため 1 年を通して地球から見た太陽の黄経の変化率が変動する。その変動のため、連続した日の南中時刻が厳密に 24 時間にならない。第 1.3 項で述べたように、連続した日の南中時刻は 24 時間から 8 秒程度ずれることがある。したがって、秒単位で日出/日没時刻を特定するには、厳密に、ケプラーの法則を解き、自転する地球上の観測点と太陽の位置関係を計算する必要がある。観測値を東京として、そのように計算した日出と日没の時刻を図 14 と図 15 にプロットする。

図 14 には、日出の時刻と、日出より前の薄明の時間帯を描いている。薄明としては、市民薄明、航海薄明、天文薄明の 3 段階で分類されるうち、日常的に薄明ると認知できる市民薄明のみを扱った。薄明については、次項で考察することにする。観測値が東京の場合、最も日の出が早いのは 6 月 10 日頃で、3 時 50 分頃に空が明るくなり始め、4 時 25 分頃に日出を迎える。一方、もっとも日出が遅いのは 1 月 10 日頃であり、6 時 20 分に空が明るくなり始め 6 時 50 分に日出を迎える。

図 15 には、上と同様に、日没時刻と薄明の時間帯を描いている。観測値が東京の場合、

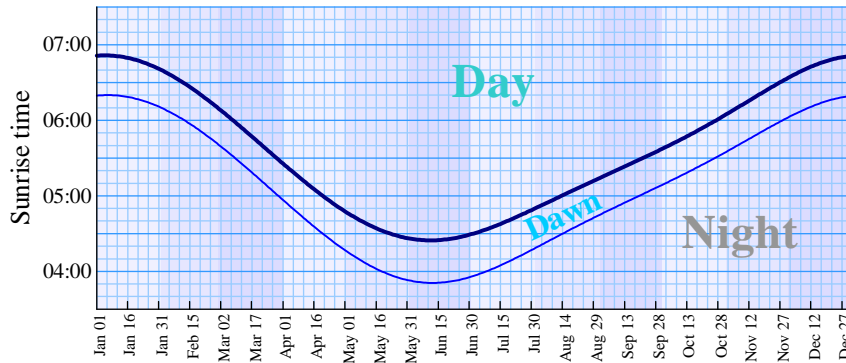


図 14: 楕円軌道モデルによる東京の日出時刻

最も日没時刻が早いのは11月30日付近で、16時28分に日没を迎え、17時あたりまで空が薄明るい状態である。一方、最も日没時刻が遅いのは、6月30日付近で、19時に日没を迎え、19時35分くらいまで空が薄明るい状態である。ここで計算された薄明の時間は、日没後の約30分間であり、日常的な感覚と大差はないだろう。

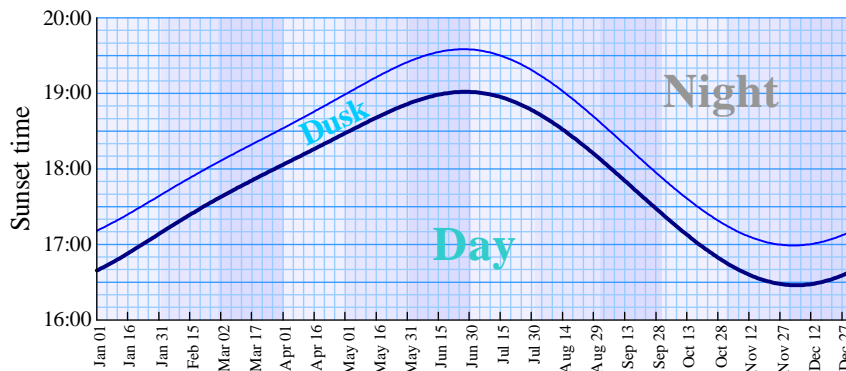


図 15: 楕円軌道モデルによる東京の日没時刻

南中時刻の変動を考察した際に、正午の太陽の位置を1年を通じてプロットすると8の字を描くことを示した。同様に、日の出付近の時間帯での太陽の位置をプロットすると図16のようになる。ここでは午前7時の東の空をモルワイデ図法で描いて、太陽の位置をプロットした。正午と同様に8の字を描くが、反時計回りに傾いている。地平線付近での8の字の縦方向は、観測値の緯度と一致角度まで倒れ込む。ヘルシンキやアンカレッジのような高緯度では、地平線付近でもほとんど傾かないが、シンガポールのような低緯度では、地平線付近で8の字はほぼ横倒しになっている。

描かれた8の字のうち、最も南側に位置するのは冬至にあたる12月22日付近、最も北に位置するのは夏至にあたる6月22日付近である。それに対し、最も低高度に位置するのは11月30日付近で、最も高い高度に位置するのは6月10日付近である。これらは日出が

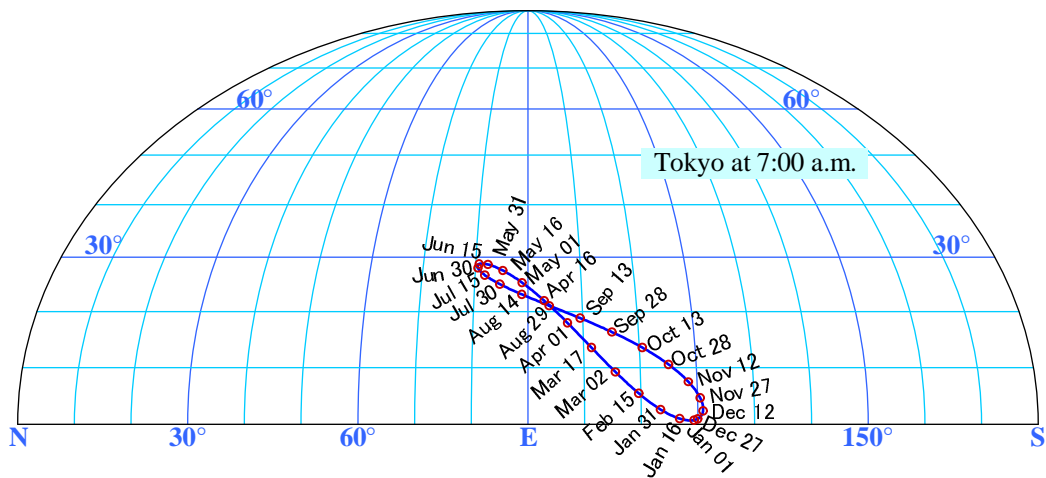


図 16: 楕円軌道モデルによる東京での午前7時の太陽の位置

遅い時期と早い時期に相当する。1月10日の日の出が6時50分あたりなので、その時期に太陽は地平線に近い位置に見える。それに対し、6月10日の太陽は、午前7時の時点で約30°の高度に見える。その高度は、12月の南中高度と同程度である。そのとき、太陽が見える方角は真東より10度だけ北にずれた位置である。なお、その時期に太陽は真東より約29°だけ北にずれた位置で日出となる。

3 計算における注意点

本節では日出/日没時刻の計算に関する注意点を挙げておく。注意点としては、地平線付近での大気による光の屈折(大気差)、日出前や日没後の薄明るい時間帯について説明する。本節の最後では、球面三角法による太陽高度の計算について解説する。

3.1 大気差

地球の周囲には大気の層があり、屈折率が1.0003であるので、地平線すれすれで入射する太陽光線はわずかに内側に屈折する。大気の層で屈折する太陽光線を模式的に描くと図17のように曲線を描く。この図ではわかりやすさのため、大気厚さや屈折率を誇張して描いている。描かれた光線のうち、最も下の光線が観測点Pに対して水平方向(仰角0°)で観測される光である。大気の層で屈折するので、その光は地平線よりも低い角度から入射した光である。大気的外部における入射方向が、観測される光の見かけの角度との間でなす角度は大気差(atmospheric refraction)と呼ばれる。図に示すように、大気差は低い仰角ほ

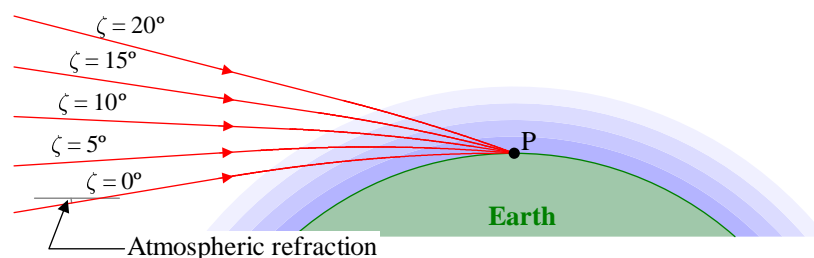


図 17: 大気差の模式図

ど大きくなる。実際の大気差は表 2 に記載する値となる。太陽や月を対象にするならば、高い高度ではあまり気にしないでもよいが、他の天体の厳密な位置を扱う場合や、太陽や月であっても地平線付近では無視をすることはできない。例えば、地平線をすれすれで見

表 2: 大気差の概略値

視高度	大気差	視高度	大気差
0°	0.5731°	15°	0.0592°
1°	0.4044°	20°	0.0439°
2°	0.3033°	30°	0.0278°
3°	0.2386°	45°	0.0161°
5°	0.1633°	60°	0.0092°
10°	0.0881°	80°	0.0028°

える光は 0.57231° もの大気で見えていることになる。この量は太陽や月の視直径よりわずかに大きい。端的に言うと、大気差を無視すると計算される日出時刻は現実よりも 2 分以上も遅い時刻となる。

地表付近の大気の屈折率は 1.0003 であり、上空では大気が希薄になるので屈折率が 1 に近づく。屈折率の自乗が大気の比誘電率であり、比誘電率が気圧に比例するモデルで光の屈折角をシミュレーションすると図 18 に示す結果が得られる。そのシミュレーション結果は、表 2 の数値とほぼ同じ値である。なお、高さ z における気圧は、 $p(z) = p_0 e^{-Mgz/RT}$ なる簡易的なモデルにしたがうものした。

第 1 節で定式化した日出/日没時刻は大気差を含めずに太陽の中心が地平線すれすれで見える条件で計算した結果である。日出/日没の時刻を正しく計算するためには、太陽の視半だけ高度を下げ、さらに、大気差だけ高度を下げた位置に太陽が来る時刻を計算する。つまり、第 1 節よりも 0.84° だけ低い高度について時刻を計算することになるので、3 分 20 秒程度も計算値がずれることになる。

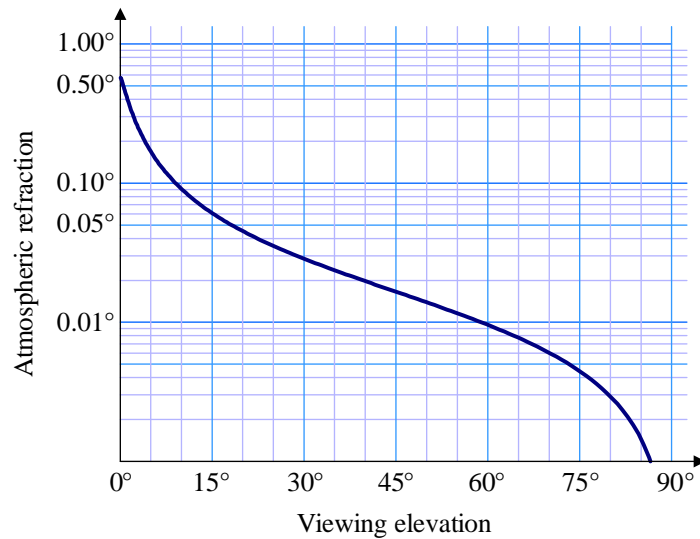


図 18: 大気差のシミュレーション結果

3.2 薄明

日出前の約 30 分間, または, 日没後の約 30 分間, 空が薄明るい時間帯がある。そのような時間帯を計算することを考えよう。空が薄明るい状態は薄明と呼ばれ, 薄明の時間帯も科学的に定義されている。定義されている薄明は 3 段階も存在し, 市民薄明, 航海薄明, 天文薄明のように分類される。市民薄明は太陽高度が -6° 以内であり, 薄暗い中で周囲の構造物の形状が視認できる状態である。航海薄明は太陽高度が -12° 以内であり, 海面と空の境界線 (水平線) が視認できる状態である。天文薄明は太陽高度が -18° 以内であり, 周囲の光がない状態で天文薄明より先で 6 等星が視認できる状態になる。既に前節で計算した際に, 市民薄明を考慮したわけだ。

薄明が発生するメカニズムは, 直進する太陽光が地球の影に隠れた状況であっても, 大気中の分子で反射された光が観測者の目に届くことである。その現象を図 19 に示す単純なモデルで考えてみよう。地球の半径を R とし, その上に厚さ d の大気をまとっている。本来, 大気は上に行くほど希薄になっていくのだが, ここでは, 厚さ d の大気は均一の密度であるとする。大気に入射された光の一部は, 地表にあたることなく, 大気の上端に達する。大気の上層で, 大部分は透過して宇宙空間に逃げるが, わずかに上層で反射して大気中を伝搬する。点 Q で地表すれすれを通過する太陽光線を考えよう。その光線は地表を通過し, 大気上端の点 R で反射し, 再び, 地表に近づく。大気上端で鏡面反射した光は地表の点 P に対して接するように迫ってくる。その光は, 点 P にいる観測者から見ると水平線すれすれに見える。その光が, 大気中で反射した光のうち最も長い経路を経た光である。つまり, それが薄明の限界であると考ええる。そのとき, 地球の中心から光の接点 Q と観測

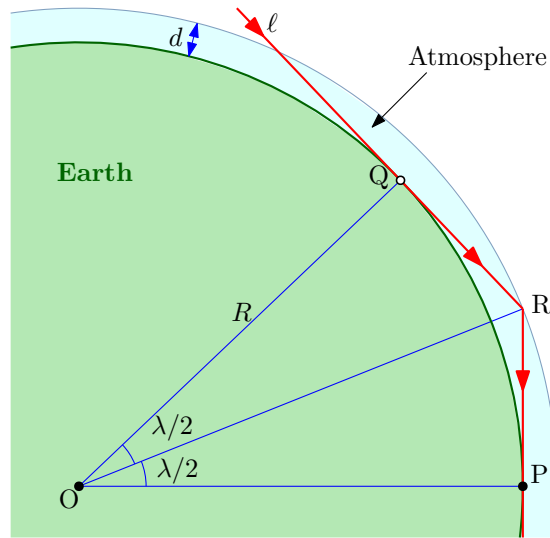


図 19: 薄明の発生原理

点Pを見込む角度 λ は容易に特定することができる。図中の三角形OARは直角三角形であり、 $\overline{OP} = R$ 、 $\overline{OR} = R + d$ である。したがって、

$$\lambda = 2 \arccos \frac{R}{R + d}, \quad (10)$$

が得られる。地球の半径 $R=6378$ kmと大気の有効厚 $d = 8.54$ kmを代入すると、ただちに $\lambda = 5.93^\circ$ が得られる。これより、市民薄明は大気で1回反射して見える太陽光線によってつくられる薄明であると解釈できる。それに対し、航海薄明は大気で2回まで反射して見える太陽光線に起因し、天文薄明は2回まで反射して見える太陽光線に起因すると解釈できる。

太陽高度が -6° 以内で市民薄明が起きるという事実から、日没後の東京で市民薄明が終わりかけているならば、その時点で岡山で日没であるということだ。岡山で地平線すれすれに見える太陽の光が滋賀県上空の大気の上端で反射し、東京の地平線すれすれでかすかに見えていることを想像すると面白い。

3.3 日出/日没時刻への影響

既に述べたように、大気差を考慮するだけで、日出/日没時刻の計算に2分程度の差異が現れる。ましてや、太陽の視半径を考慮すると、合計で3分20秒もの差異が生じる。本稿ではその影響を定量的にとらえ、考察してみよう。

第1節での考察では、太陽の中心が地平線（高度ゼロ）と交わる時刻として日出/日没時刻を計算した。しかし、太陽は 0.266° もの視直径をもち、地平線付近で 0.57° もの大気差を含む。したがって、日出/日没時刻の特定には、太陽の中心が -0.84° のような負の高度となる時刻を特定しなければならない。大気差や薄明を考慮した日出/日没時刻の特定には図20を利用すればよい。この図は、第1節で用いた図に、地平線より俯角 λ にあたる直線が追加されている。春分/秋分において、南中高度 \bar{S} を通る直線 $\bar{\ell}$ が太陽の経路である。それに対し、対象となる季節において、南中高度 S をとる直線 ℓ が、その季節での太陽

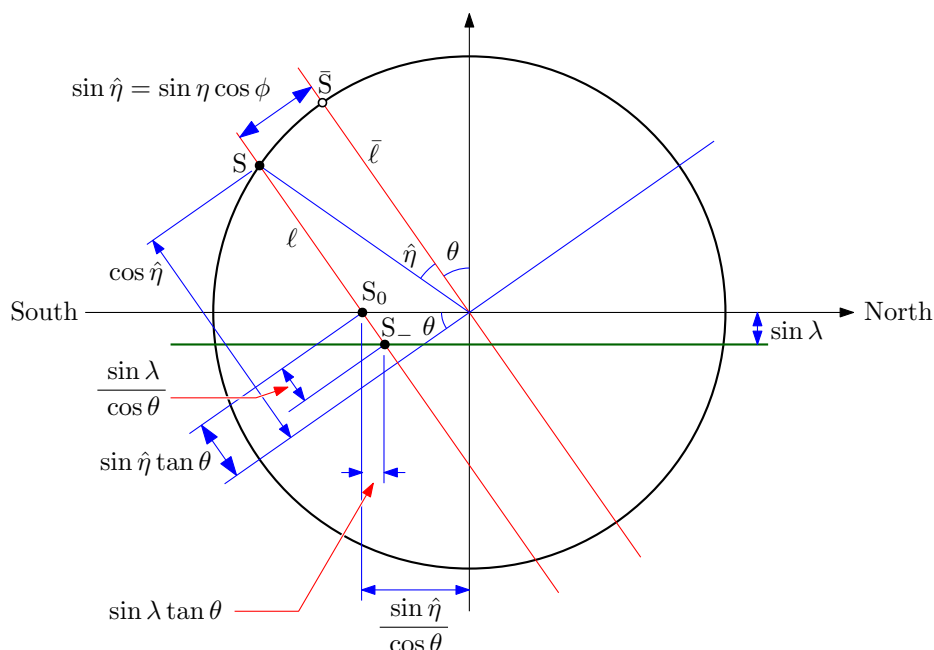


図 20: 大気差や薄明を考慮した日出/日没の計算のための補助図

の経路だ。第1節での単純なモデルでは日出の位置を S_0 と考えたが、ここでは大気差を考慮すると、地平面より俯角 λ だけ下に位置する平面と太陽経路の交点 S_- が日出/日没の位置となる。太陽経路の長さ（断面図上の）は、それに相当する $\sin \lambda / \cos \theta$ だけ修正されることになる。その結果、昼間の長さは、

$$T_d(\phi) = \left[\pi - 2 \arcsin \frac{\sin \eta \cos \phi \sin \theta - \sin \lambda}{\cos \theta \sqrt{1 - \sin^2 \eta \cos^2 \phi}} \right] \cdot \frac{12 \text{ hours}}{\pi}, \quad (11)$$

によって計算されるわけだ。パラメータ λ としては、大気差を考慮した日出/日没時刻を計算するには $\lambda = 0.84^\circ$ を、市民薄明の限界を計算するには $\lambda = 6.0^\circ$ を代入すればよい。

日本で生活している経験から、市民薄明は日出前の30分間、日没後の30分間というのが一般的な感覚だろう。しかし、薄明時間帯の長さは緯度や季節によって異なる。上で導出した公式によると、 $\cos \theta$ が小さくなる高緯度ほど薄明の時間帯が長くなる。また、春分や秋分よりも $\cos \phi$ （の絶対値）が大きくなる夏至や冬至も薄明の時間が長くなる。それを

示すため、東京、ロンドン、ヘルシンキでの昼間の時間を計算した。その結果は表3に記載するとおりだ。単純モデルと太陽視半径のみを考慮した結果は、計算の過程を示すだけであり、実際の現象として観測されることはない。それに対し、大気差まで考慮したモデルが地球上で観測される昼の長さを表す。確かに、表に示す計算結果としても、東京より

表 3: 昼間の長さ

35.7°N 139.7°E 東京	単純モデル	太陽視半径	大気差	incl. 市民薄明
冬至	09:34:47	09:37:42	09:44:14	10:41:07
春分/秋分	12:00:00	12:02:34	12:08:17	12:59:10
夏至	14:25:13	14:28:10	14:34:45	15:34:54
51.5°N 000.1°W ロンドン	単純モデル	太陽視半径	大気差	incl. 市民薄明
冬至	07:35:46	07:40:46	07:49:40	09:10:11
春分/秋分	12:00:00	12:03:21	12:10:48	13:17:20
夏至	16:24:14	16:28:36	16:38:25	18:13:49
60.3°N 025.0°E ヘルシンキ	単純モデル	太陽視半径	大気差	incl. 市民薄明
冬至	05:24:12	15:31:11	05:46:20	07:43:52
春分/秋分	12:00:00	12:04:12	12:13:34	13:37:26
夏至	18:35:48	18:42:55	18:59:16	22:55:22

も高緯度にあるロンドンやヘルシンキの方が太陽視半径と大気差の影響が大きい。また、春分/秋分よりも冬至や夏至の方が影響が大きい。ヘルシンキのように白夜に近い地域では、薄明の時間帯も長くなる。ヘルシンキでは大気差の影響を含めると昼間の長さは約19時間だが、市民薄明を含めると約23時間になる。つまり、薄明の時間帯が約4時間もあるのだ。

実際の日出/日没時刻を特定するには、楕円軌道モデルを使ったうえで、観測地における標準時との関係も考慮し、南中時刻を特定することが必要だ。南中時刻が特定できれば昼の長さの半分を南中時刻から引けば日の出時刻が特定でき、昼の長さの半分を南中時刻に加算すれば日没時刻が特定できる。その手順にしたがって日出/日没の時刻を計算すると、表4に記載する時刻が得られた。南中時刻は地球が離心率0.0167の楕円軌道を公転することを前提に、ケプラーの方程式を解いて特定した時刻である。その時刻に上記の手順を用いて日出/日没の時刻を計算したわけだ。なお、現実感を出すため、ロンドンとヘルシンキには現地の習慣にしたがい夏時間を適用して時刻を記述した。すでに述べたように、薄明の時間帯は春分や秋分に比べると冬至や夏至の方が長く、また、高緯度で長いことが確

認できる。ヘルシンキは北緯 60.3° なので、北極圏に達していないが、薄明まで含めると、深夜でも薄明るい状態にあることがわかる。太陽高度が -6.0° 以内という市民薄明の定義

表 4: 南中時刻と日出/日没時刻 (2022 年)

35.7°N 139.7°E 東京	薄明始	日出	南中	日没	薄明終
春分	05:18:32	05:43:59	11:48:07	17:52:14	18:17:42
夏至	03:55:34	04:25:39	11:43:01	19:00:23	19:30:28
秋分	05:03:50	05:29:17	11:33:25	17:37:33	18:03:00
冬至	06:19:39	06:48:05	11:40:12	16:32:19	17:00:45
51.5°N 000.1°W ロンドン	薄明始	日出	南中	日没	薄明終
春分	05:29:01	06:02:27	12:07:41	18:12:55	18:46:21
夏至*	03:55:41	04:43:23	13:02:35	21:21:47	22:09:29
秋分*	06:13:46	06:47:12	12:52:26	18:57:40	19:31:06
冬至	07:24:26	08:04:41	11:59:31	15:54:21	16:34:36
60.3°N 025.0°E ヘルシンキ	薄明始	日出	南中	日没	薄明終
春分	04:58:24	05:40:33	11:47:20	17:53:30	18:36:03
夏至*	01:14:26	02:52:29	12:42:07	22:31:45	23:59:50
秋分*	05:53:01	06:34:57	12:41:44	18:48:31	19:30:27
冬至	07:47:04	08:55:50	11:39:00	14:22:10	15:28:56

* 現地の慣習にしたがい、夏時間の適用による時刻を記載している。

にしたがい、市民薄明以上の光度が 24 時間にわたって確保される状態までを白夜とみなすのであれば、白夜の限界は緯度 60.56° となる。ヘルシンキはその限界のかなり近い緯度である。具体的に、ヘルシンキは夏至において、薄明に入らない夜の時間帯が 1 時間 15 分だけ存在するが、北に 30 km 移動するだけで、どの深夜帯でさえも市民薄明に入る地域になるのだ。高緯度の値域は、わずかな緯度の差で薄明の時間帯に大きな違いが現れるので、非常に興味深い。

3.4 天球上の角度計算

指定時刻の太陽高度や方位の計算には球面三角法を用いる。球面三角法とは、球面上に描かれた三つの大円で囲まれる三角形に関する法則であり、正弦定理や余弦定理などが含まれる。ここでは、球面三角法を紹介し、実際の太陽高度や方位の計算手法を説明する。

3.4.1 球面三角法

球面上に3点を取り、それらを最短コースで結んでつくられる図形は球面三角形と呼ばれる。当然であるが、球面三角形の各辺は大円の一部である。球面三角形の辺の長さや角度には、平面上の幾何学と同様に正弦定理と余弦定理がある。ここでは、太陽高度や方位の計算には球面余弦定理を使用する。

図 21 に示すように、球面に描かれた三角形 ABC を考えよう。ここで、頂点 A, B, C に対応する三角形の内角を、単純に、 A, B, C とする。それらの頂点と向かい合う辺の長さを、それぞれ、 a, b, c とする。ここで考える球体の半径を 1 としておく。すると、球面三角

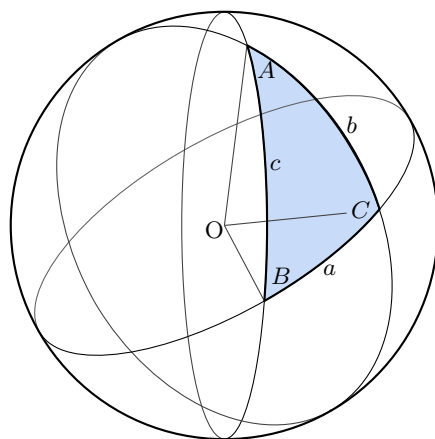


図 21: 球面に描かれた三角形

形の辺の長さ a, b, c は球の中心から直線を見込んだ角度とも考えることができる。球面の余弦定理は、

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,\end{aligned}\tag{12}$$

のように表される。太陽高度や方位の計算に使用するのは、この公式だけである。球面三角法の典型的な使用例は、球面上の2点間の距離と進路の計算である。例えば、地球上の地点 B から地点 C に移動する場合、北極点を A とすると、 c が点 B の緯度に相当する。正確には、 $90^\circ -$ 点 B の北緯である。同様に、 b は地点 C の緯度に相当する。さらに、 A は地点 B と地点 C の経度差である。その設定において、公式 (12) の第 1 式を利用すれば、地球の中心から BC を見込む角度 a が特定できるのだ。実際の経路長に変換するには、角度 a に地球の半径を乗じればよい。一方、地点 B から地点 C に向かう針路は角 B を特定すればよい。真北に対する角度を与え、その方向に望む距離だけ移動すれば地点 C に到達でき

るという考えだ。角 B の特定には、公式 (12 の第 2 式) を利用し、

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$

を計算すればよい。ここで、 a はさきほど計算した距離を代入するわけだ。そのような操作によって、地球上の遠くの目的地に向かうための距離や針路が決定できる。球面三角法は、中世のイスラム圏でメッカの方向を特定するために発展した。

3.4.2 太陽高度と方位の計算

太陽高度と方位の計算には、前項で紹介した球面三角法を利用する。その計算には、以下に説明する 3 段階の手順を実行すればよい。前提として、地心黄経座標を使って記述することに注意しておく。黄経座標は、春分点を方位ゼロとするように座標が設定されている。春分点は、春分の時点で地球から見た太陽の方向である。逆に、春分の時点で太陽から見ると地球は黄経 π ($= 180^\circ$) に位置する。

手順 1: 太陽の位置 ここでは、地球から見た太陽の方向を計算する。そのために、ケプラーの法則を解き、太陽から見た地球の位置を計算する。地球の公転周期が自転周期の整数倍になっていないので、そのずれを考慮して計算することが必要である。具体的には、グリニッジ標準時で毎年 1 月 1 日の 0 時での地球の位置は定数とならないということだ。どの時点でもよいので、例えばグリニッジ標準時の 2000 年 1 月 1 日 0 時を起点とし、その時点からの経過時間で地球の位置を計算するのがよい。地球の公転周期が 365.242189 日なので、うるう年の処理をしても誤差がついてくるのでカレンダーの日付を周期とせず、公転周期を周期に計算した方がよい。地球の位置が算出できれば、立場を入れ替えるだけで地球から見た太陽の位置に変換できる。率直に言うと、太陽から見た地球の黄経に 180° を加算すれば地球から見た太陽の位置になる。

手順 2: 地球自転の影響での観測点の位置 この順では、指定した時刻に地球上の観測点が地心黄経座標のどこに位置するのかを計算する。前のステップが地球の公転に依存した計算であり、本ステップは地球の自転に依存した計算である。留意することは地球の自転軸は公転の影響を受けず、常に一定の方向を向いている個体である。具体的には、地球の地軸は黄経 90° の方向に角度 23.44° だけ傾いている。この手順でも、カレンダーの日付に同期させず、2000 年 1 月 1 日のグリニッジ標準時の 0 時のような基準時点で経度 0° が向いている方向を初期値とし、自転周期 23 時間 56 分 4 秒をつかって任意時刻に対する自転

角を計算する。その自転角だけ自転したときの観測地点の位置を地心黄経座標で表現するのだ。

指定時刻の観測地点の地心黄経座標で表現するには、前項で紹介した球面三角法について、点 A を地心黄経座標の天頂、点 B を自転軸の北極点と考える。その場合、角度 c が地軸の傾き 23.44° だ。その思想では、角度 B が自転角 (+初期値)、 c が観測点の緯度 (天頂角表現) である。北極点側から見ると、地球は反時計回りに自転しているため、角度 B は時間の経過とともに減少することに注意が必要だ。この計算には、球面三角法の余弦定理を、

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$$
$$\cos A = \frac{\cos c - \cos b \cos c}{\sin a \sin c},$$

なる形で利用する。計算された b が地心黄経座標における天頂角、 A が春分点を基準とした方位を与える。この手順で計算された b と A は、観測点における (地平座標の) 天頂の方向を与える。

手順 3: 観測地点と太陽位置の位置関係 計算された観測地点 (の黄経座標) は観測点における天頂を表すので、観測地点と太陽位置の位置関係で、観測点から見た太陽の位置がわかる。前項で用いた球面三角形では、点 A が地心黄道座標における天頂、点 B が観測位置、点 C が太陽の位置と考えればよい。観測地点も太陽の位置も既に地心黄道座標解表電で来ているので、図中の b, c, A は既知の状態だ。この手順において球面三角法で計算される a が地心地平座標における太陽の天頂角となる。角度 B が太陽の方位に相当するのだが、もう 1 ステップ必要だ。その 1 ステップとは、球面三角法で自転軸の北極点の位置を確認しておくことだ。北極点の位置は地心黄道座標では、方位 90° 、天頂角 23.44° だった。その位置を、観測点から見た方位を計算しておくのだ。その方向が真北の方向となる。つまり、観測点から見た太陽位置と北極点の角度差によって方位がわかるのだ。

上記の手順は、実際に前節で日出/日没時刻を計算の際、および、太陽位置の 8 の字特性を描く際に実行した。日出/日没時刻は太陽が地平線すれすれで見える時刻を特定する。そのためには、大気差を考慮し、太陽高度が 0.84° となる時刻を探すわけだ。もう少し正確にいうと、太陽の天頂角が 90.84° となる時刻を探す。薄明の限界についても同様であり、太陽の天頂高度が 96° となる時刻を探したわけだ。

ケプラーの法則を解くことによって楕円軌道に起因する南中時刻の変動を反映し、大気差に基づく見かけの太陽位置を考慮すると、日出/日没の時刻を高精度に計算することができる。実際の観測データと照らし合わせてみると、その精度に感動することだろう。

4 まとめ

簡易的な円軌道モデルから始め、楕円軌道や大気差による影響までを含め、日出/日没時刻の計算方法を紹介した。大まかな傾向をつかむだけならば円軌道モデルでも十分だろう。円軌道モデルならば、計算は比較的簡単である。詳細な時刻の特定や、南中時刻の変動を評価する場合、楕円軌道モデルが必要になる。楕円軌道モデルを使うには、ケプラーの法則を解き、観測地点と太陽位置の関係を計算する必要があるが、その計算をすれば高精度で日出/日没時刻が特定できる。

楕円軌道モデルで解説したように、近日点と遠日点で太陽の黄経の変化率が変わるため、楕円軌道が南中時刻の変化をもたらす。地球の離心率は0.0167だが、火星は0.934のように大きな離心率をもつ。そのため、火星ではさらに大きな南中時刻の変動がある。本書での解説を参考に火星の日出/日没時刻を計算すると、地球以上にドラマチックな変動を見せることだろう。