レンズの物理学

顕微鏡, 望遠鏡, カメラなどに利用されるレンズは光の屈折現象を利用した部品である。屈折現象を利用することによって, 像の拡大, 明るさの確保が可能になる。本書ではレンズの原理やその応用機器の基礎について説明する。

1　レンズの原理

レンズは光の屈折現象を利用して光を集める部品である。光の屈折現象はスネルの法則にしたがう。本節ではスネルの法則を紹介した後, レンズの基本原理について説明する。

1.1　スネルの法則

光が異なる媒質に入射されたとき, その媒質の境界線でスネルの法則にしたがい屈折する。スネルの法則は電磁気学の考察によって証明できるが, ここでは法則を紹介するだけでとどめておこう。

媒質 I と媒質 II の境界が zy 平面となるように座標軸が設定されている状況を考えよう。媒質 I と媒質 II の屈折率を, それぞれ, n_1 と n_2 とする。屈折率は媒質中での光の伝搬速度を与える係数であり, 媒質 I と媒質 II では, それぞれ, $c_1 = c/n_1$, $c_2 = c/n_2$ なる速度で光は伝搬する。なお, c は真空中での光の伝搬速度である。スネルの法則によると, 図 1 に示すように, 入射面と同一面内で光の反射と屈折が発生する。入射面とは, 媒質境界の法線ベクトルと入射する光の経路をともに含む平面を意味する。つまり, 図 1 では入射面が xz 平面である。光の入射方向と媒質境界の法線ベクトルとなす角を入射角と定義する。同様に, 反射角と屈折角も法線ベクトルとなす角によって定義する。入射角が θ_1 であれば, 反

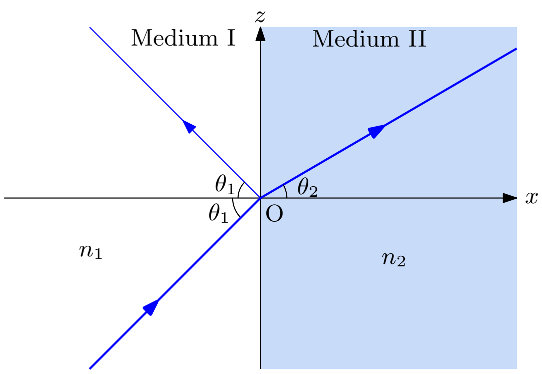

図 1: スネルの法則

射角は θ_1 となる。つまり, 反射角は入射角と等しい。一方, 屈折角 θ_2 は,

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \tag{1}$$

なる関係で決定される。この数式によると, 屈折率の大きな媒質に入ると屈折角は入射角より小さくなる。

フェルマの原理によると, 光の屈折は 2 点間を光が最小時間で到達できる経路である。その主張の正当性を検証してみよう。図 2 に示すように, 媒質 I 内部の点 A から媒質 II 内部の点 B への光の伝搬経路を考える。媒質 I と媒質 II の屈折率は, それぞれ, n_1 と n_2 である。点 A は媒質境界から x_1 の距離に, 点 B は媒質境界から x_2 の距離に存在する。さら

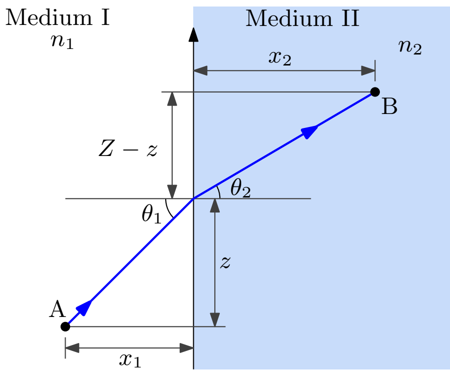

図 2: フェルマの原理の検証

に, 点 A と点 B の距離を媒質境界に沿って測ると Z であるとする。光が点 A から媒質境界に沿って距離 z の場所で媒質境界を横切るとする。媒質 I と媒質 II での光の伝搬速度が c/n_1, c/n_2 であることに注意すると, 点 A から点 B までの光の伝搬時間は,

$$t = \frac{n_1}{c}\sqrt{x_1^2 + z^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{x_2^2 + (Z-z)^2},$$

となる。この伝搬時間が最小となる条件は $\mathrm{d}t/\mathrm{d}z = 0$ である。その条件にしたがって方程式を書くと,

$$n_1 \frac{z}{\sqrt{x_1^2 + z^2}} = n_2 \frac{Z-z}{\sqrt{x_2^2 + (Z-z)^2}},$$

が得られる。図 2 を見ると,

$$\sin\theta_1 = \frac{z}{\sqrt{x_1^2 + z^2}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{Z-z}{\sqrt{x_2^2 + (Z-z)^2}},$$

であることが明らかなので, 伝搬時間を最小とする条件は $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ と等価である。したがって, スネルの法則による光の屈折は, 2 点間を最短時間で結ぶ経路にしたがう。

媒質の境界面が基準面から角度 φ だけ傾いている場合を考えよう。図 3 に示すように, 境界線の法線ベクトルが x 軸と角度 φ をなすと仮定する。このとき, 媒質 I の内部において x 軸と θ_1 をなす方向から入射する光の屈折を調べよう。媒質境界が傾いているので, 媒

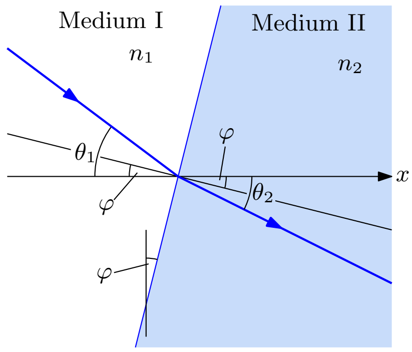

図 3: 傾いた面への光の入射

質 II への入射角は $\theta_1 - \varphi$ となる。一方, 屈折後の光の伝搬方向を x 軸と角度 θ_2 をなす方向とすれば, 屈折角は $\theta_2 - \varphi$ となる。したがって, このような傾いた境界におけるスネルの法則は,

$$n_1 \sin(\theta_1 - \varphi) = n_2 \sin(\theta_2 - \varphi), \tag{2}$$

のように記述できる。とくに, 境界の傾き φ, 入射方向 θ_1 と屈折方向 θ_2 が十分に小さい場合,

$$n_1\,(\theta_1 - \varphi) \simeq n_2\,(\theta_2 - \varphi), \tag{3}$$

なる近似が成立する。

1.2 薄い球面レンズ

表面が球面になるように磨かれたレンズによる光の屈折を調べてみよう。ただし, 簡単のため, 光の屈折による経路変化に比べレンズの厚さが無視できるような薄いレンズを想定する。

図 4 に示すように, 屈折率 n_1 の媒質 I の中に屈折率 n_2 の媒質 II でつくられたレンズを置いた場合を考えよう。レンズの左端は曲率半径 R_1 の球面, 右端は曲率半径 R_2 の球面であるとする。それらの曲率半径は, 図において, 左に凸となる条件で正の値をとるとする。すなわち, 右に凸の形状であれば曲率半径は負の値となる。また, 平面であれば曲率半径は無限大とすればよい。

レンズ中央を通る軸が x 軸となるように座標を設定する。その軸から z だけ離れた場所に, x 軸と角度 θ_1 をなす方向から到来する光線を考える。その光線がレンズによって屈折する様子を解析してみよう。なお, 簡単のため, 光線の到来方向や屈折後の伝搬方向は十分に小さく, 近似式 (3) で計算できるものとする。光線がレンズに当たる場所はレンズ中

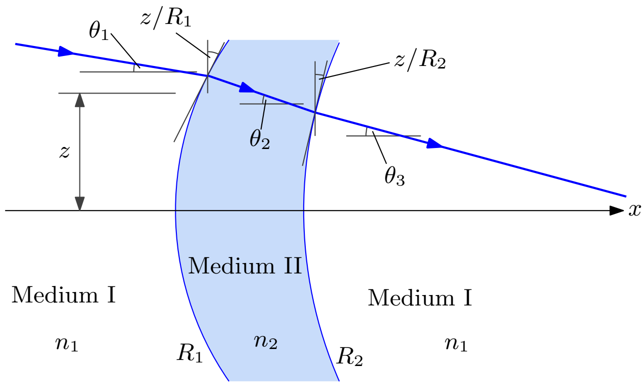

図 4: 薄いレンズによる光の屈折

心から z だけ隔てているため, レンズの接面は角度 z/R_1 だけ傾いている。近似式 (3) によると, 屈折の前後の伝搬方向 θ_1 と θ_2 は,

$$n_2\left(\theta_2 - \frac{z}{R_1}\right) = n_1\left(\theta_1 - \frac{z}{R_1}\right),$$

なる関係で結ばれる。レンズの右端から媒質 I に出た後の伝搬方向を θ_3 とすると, 同様に,

$$n_1\left(\theta_3 - \frac{z}{R_2}\right) = n_2\left(\theta_2 - \frac{z}{R_2}\right),$$

が成立するはずだ。なお, レンズが十分に薄く, 媒質 I に抜ける場所も x 軸から距離 z を保ったままとした。そのような仮定のもとで, レンズの左右端におけるスネルの法則から θ_2 を消去すると,

$$\theta_3 = \theta_1 + \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)z, \tag{4}$$

が得られる。この数式の中で, R_1 と R_2 の逆数の差が因数として含まれる。その因数が重要である。なぜなら, R_1 と R_2 の大小関係によって符号が入れ替わるからだ。その符号についての意味は後に明らかになる。

レンズを配置した場所を $x = 0$ としよう。ここでは, レンズの厚さを無視するのでレンズの左端も右端も $x = 0$ である。光線が x 軸と角度 θ_1 をなす方向から到来し, x 軸から z_1 だけ離れた地点でレンズでによって屈折し, x 軸と θ_3 をなす方向に伝搬した場合, 光線の軌跡は,

$$z = \begin{cases} z_1 - \theta_1 x & \text{if } x < 0, \\ z_1 - \theta_3 x & \text{if } x \geq 0, \end{cases}$$

となるはずだ[1]。ここで, レンズに到来する光線は遠方の 1 点から照射されているとしよう。その照射源の位置を $x = -L_0$, $z = H_0$ とすると, 光線の到来方向は,

$$\theta_1 = -\frac{H_0 - z_1}{L}{}_0,$$

[1] 依然と, 伝搬方向 θ_1 と θ_3 が十分に小さい前提での近似式を用いている。

である。薄いレンズにおけるスネルの法則 (4) を用いて, レンズを透過した後の伝搬方向 θ_3 を計算すると,

$$\theta_3 = \frac{H_0}{L} + \left[\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{L_0}\right] z_1,$$

が得られる。得られた到来方向を用いて, 透過後の光線の軌跡を数式で表現すると,

$$\begin{aligned} z = z_1 - \theta_3 x &= z_1 - \frac{H_0}{L}x - \left[\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{L_0}\right] z_1 x \\ &= -\frac{H_0}{L}x - \left\{\left[\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{L_0}\right] x + 1\right\} z_1, \end{aligned}$$

が導かれる。この数式から興味深い事実がわかる。その事実とは,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L_0} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

を満たす x において, z から z_1 の依存性が消えることだ。言い換えると, レンズで屈折した光が, ある地点で特定の点に集結するのだ。この条件を満たす解を $x = L_1$ とおき,

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \tag{5}$$

なる数式によって f を定義すると,

$$\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} = \frac{1}{f}, \tag{6}$$

なる関係式が得られる。また, 光線の集結点と x 軸の距離を H_1 とすると,

$$\frac{H_0}{L_0} = \frac{H_1}{L_0}, \tag{7}$$

が成立する。つまり, 光線の集結点は, 光源からレンズの中央を結ぶ直線の延長線上に存在する。これらの数式で記述される現象は, 図 5 に描くように, 光源 A から放射された複数の光線がレンズを透過し, 点 B で集結することに相当する。この図はカメラの撮影原理

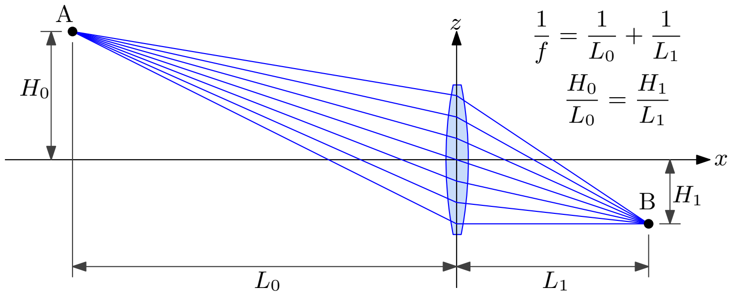

図 5: レンズによる光線の集結

と考えてもよい。距離 L_0 がレンズから被写体までの距離である。レンズをせり出し, レ

ンズと撮像素子の距離が L_1 になったとき, ピントが合った状態になっている。ピントを合わせる操作において, レンズの位置が変化するのは, 条件 (6) を満たすようにレンズと撮像素子の距離を調整しているのだ。その数式によると, ある特定のレンズ (f が一定) において, L_0 が小さいとき L_1 を小さくしなければならない。具体的には, 近くの物体を撮影する際には, レンズをせり出し L_1 を大きくすることでピントを合わせているのだ。なお, 被写体が無限遠 ($L_0 \to \infty$) の場合, $L_1 \to f$ となる。つまり, 前に定義した f は平行光線を集結されるために必要な距離であり, **焦点距離**と呼ばれる。

前にレンズの曲率半径 R_1 と R_2 の大小関係が重要であることを述べた。具体的には, $R_1 < R_2$ のとき $f > 0$ となり, 平行光線が有限距離で集結する。そのようなレンズは, レンズ中央から外側にいくほどレンズが薄くなり, 凸レンズと呼ばれる。一方, $R_1 > R_2$ のとき $f < 0$ となり, 平行光線はレンズを透過すると広がってしまい, 集結しない。そのようなレンズは, レンズ中央よりも外側の方が厚くなり, 凹レンズと呼ばれる。

2　望遠鏡の原理

レンズを 2 枚組み合わせると視野角を変換できる。視野角が小さい物体について, レンズを 2 枚組み合わせ視野角を拡大すると, その物体が近くにあるように見える。これが望遠鏡の原理である。望遠鏡の基本構成として, 本節ではケプラー式とガリレオ式を紹介する。

2.1　ケプラー式望遠鏡

ケプラー式望遠鏡は, 凸レンズを 2 枚組み合わせて構成される望遠鏡である。前節でレンズの結像について説明したので, 望遠鏡の原理図を示すことは容易である。

簡単のため, 対象物は望遠鏡の大きさに比べ十分遠方であり, 対象物からの光線は平行であるとしよう。望遠鏡は対物レンズと接眼レンズを 1 枚ずつ組み合わせた構造とする。対物レンズと接眼レンズの焦点距離を, それぞれ, f_1 と f_2 とする。前節での結果を利用すると, 対物レンズを通過した平行光線は距離 f_1 で一転に集結し, それ以降は拡散していく。その拡散していく光線を接眼レンズで屈折させ, 平行光線にすることを考える。これも前節の結果を応用すればわかるように, 集結点から f_2 の距離に対物レンズを配置すれば対物レンズを透過した光は平行光線となるはずだ。つまり, 対物レンズと接眼レンズの距離は $f_1 + f_2$ としすればよい。

前節で学んだように, 光線か集結する位置は, レンズの中央を通る光線の経路上に存在する。レンズが十分に薄ければ, その中央を通る光線は屈折の影響を受けず, ほぼ一直線上を伝搬する。その知識を活用すると, 対物レンズを透過する前に θ_1 の到来方向は, 接眼レンズを透過すると $-(f_1/f_2)\,\theta_1$ の方向に伝搬することがわかる。つまり, 2 倍のレンズを透過すると, 視角が f_1/f_2 倍に変化し, 像が反転していることになる。その視角の変化率

f_1/f_2 が望遠鏡の拡大率 (倍率) となる。例えば, 焦点距離 800 mm の対物レンズと焦点距離 8 mm の接眼レンズを組み合わせた望遠鏡は拡大率 100 倍の望遠鏡となる。

対象物が近くに存在する場合, 対物レンズに到来する光は平行光線でなく, 拡散光線である。その場合, 対物レンズを通過した後に集結する位置は, 焦点距離よりも奥になる。その距離の延長に相当する量だけ対物レンズの位置を変えなければ接眼レンズを透過した光を平行光線にはできない。そのように接眼レンズの距離を調整する操作がピント調節の操作である。

2.2 ガリレイ式望遠鏡

ガリレオ式望遠鏡は, 接眼レンズに凹レンズを用いた望遠鏡である。このタイプの望遠鏡は, ガリレイが発明し, 木星の衛星観測に用いた。

3 分解能

収差がない理想的なレンズがあったとしても, 凸レンズによって集められた光は厳密に 1 点に集結することはなく, ある程度の広がりをもつ領域に集められる。その領域の大きさはスポット径と呼ばれる。スポット径があるため, 顕微鏡や望遠鏡の倍率を上げたとしても鮮明さが無限に向上するわけではない。

3.1 スポット径

光が波であることを利用し, 波動関数を重ね合わせることによってスポット径を評価しよう。波動関数の重ね合わせる考えはホイヘンスの原理に基づく。また, 結像位置では, レンズを透過してきた光が同位相で重なる事実を利用する。

半径 R のレンズを中心が x 軸と一致するように配置する。計算を簡単に実行するため, 多少, トリッキーな座標設定をする。レンズを透過した光は原点 O で結像するように座標を設定する。原点 O からレンズの外周まで距離を L, レンズ中心と外周を見込む視角を θ_{m} とする。観測点は $[0, y, z]$ である。原点からレンズを臨み x 軸となす角を θ, x 軸周りの回転角 φ を設定する。この φ は, y 軸に平行な方向を $\varphi = 0$ と定めておこう。この座標設定のもと, 到来方向 $[\theta, \varphi]$ で立体角 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ を通過する電磁波の合成を考える。その波動関数は,

$$E(\theta, \varphi)\,\mathrm{d}\Omega = \tilde{E}_0(\theta, \varphi)\,e^{i(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\omega t)}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

を想定するのが妥当である。ここで, $\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル, ω は角周波数である。また, $\boldsymbol{x}$ は観測点の位置ベクトル ($\boldsymbol{x} = [0, y, z]$), t は観測時刻である。数式の右辺にみられる指数関

数は平面波を表す。特に, 時刻の依存性を考えないものとし, $t=0$ に限定すると,

$$E(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\varOmega = \tilde{E}_0(\theta,\varphi)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

と書くことができる。なお, 波動関数を $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ のように書いたことによって, 原点での位相が必ずゼロになる。これは, 結像点においてあらゆる方向からの波が同位相で重ね合わされることを記述するのに好都合である。さらに, $\tilde{E}_0(\theta,\varphi)$ は到来方向に依存する振幅重みである。四方八方から均等に押し寄せる波であれば $\tilde{E}_0(\theta,\varphi)$ は定数となるのだが, x 軸方向に伝搬する平面波がレンズに入射することを仮定するならば,

$$\tilde{E}_0(\theta,\varphi) = E_0\cos\theta,$$

とすべきである。ただし, E_0 は定数である。さらに, 波動関数の位相に関する要素 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ を計算しておこう。方角 $[\theta,\varphi]$ から到来する波動関数の波数ベクトルは,

$$\boldsymbol{k} = [k\cos\theta,\ k\sin\theta\cos\varphi,\ k\sin\theta\sin\varphi],$$

である。波数ベクトルと位置ベクトルの内積は,

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = k\,(y\sin\theta\cos\varphi + z\sin\theta\sin\varphi),$$

である。計算する波動関数は x 軸について軸対称であるから, $y=r$, $z=0$ としても一般性を失わないので,

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = kr\sin\theta\cos\varphi,$$

としておこう。これまでの考察に基づいて観測される波動関数を書くと,

$$E(0,r,0) = E_0\int_0^{\theta_\mathrm{m}}\int_0^{2\pi} e^{-ikr\sin\theta\cos\varphi}\ \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

となる。この積分を実行するにあたり, ベッセル関数の積分表示:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ix\sin\varphi}\ \mathrm{d}\varphi,$$

に注意すると,

$$E(0,r,0) = 2\pi E_0\int_0^{\theta_\mathrm{m}} J_0(kr\sin\theta)\ \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

のようにベッセル関数を含む式に変形される。ここで, $\xi\equiv\sin\theta$ なる置き換えを適用すると, 観測される波動関数は,

$$\begin{aligned}E(0,r,0) &= 2\pi E_0\int_0^{\sin\theta_\mathrm{m}} J_0(kr\xi)\,\xi\,\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{2\pi E_0}{kr}\Big[J_1(kr\xi)\Big]_0^{\sin\theta_\mathrm{m}} = \frac{\lambda E_0}{r}J_1\!\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\theta_\mathrm{m}\right),\end{aligned}$$

のように数式変形できる。なお, 第 2 行目への数式変形にはベッセル関数の漸化式:

$$x^n J_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n J_n(x),$$

を利用した。さらに, 右辺を得るため, 波数が $k = 2\pi/\lambda$ であることから λ に関する式に書き換えた。改めて結果を書くと,

$$E(0, r, 0) = \frac{\lambda E_0}{r} J_1\left(\frac{2\pi r}{\lambda} \sin\theta_{\mathrm{m}}\right), \tag{8}$$

となる。第 1 種ベッセル関数 $J_1(x)$ の零点は $x = 3.8317$ であり, 最大値から零点に対応する半径 r までがレンズによって集められたスポットの半径 (スポット径) であると考えると, スポット径 δ は,

$$\delta = \frac{0.6098\lambda}{\sin\theta_{\mathrm{m}}}, \tag{9}$$

で与えられる。この結果によると, 収差がない理想的なレンズであっても, レンズで集められた光は波長と同じくらいの大きさの半径にわたって光が分散していることになる。スポット径は, レンズを用いた装置で識別できる大きさの限界を与える。どんなに倍率を上げても, 二つの物体の距離がスポット径 δ より小さい場合, その二つの像を分解することができないのだ。

3.2 角度分解能

スポット径は, 望遠鏡のような遠くを観測する機器の分解能を規定する。望遠鏡の場合, どれくらいの角度まで分解できるかを表すため, 角度分解能という指標を用いる。

角度分解能は, 前項で算出したスポット径から得ることができる。スポット径の数式 (9) の分母と分子に観測点とレンズまでの距離 L を乗じると,

$$\delta = \frac{0.6098\lambda L}{L\sin\theta_{\mathrm{m}}} = \frac{0.6098\lambda L}{R} = \frac{1.2197\lambda L}{D},$$

が得らえれる。ここで, $R\ (= L\sin\theta_{\mathrm{m}})$ はレンズの半径, D はその 2 倍, すなわち, レンズの直径である。この数式の両辺に $1/L$ を乗じて得られた量:

$$\varDelta\theta = \frac{1.2197\lambda}{D}, \tag{10}$$

が角度分解能である。この角度分解能は, レンズ中心からスポット径を見込んだ角度である。すなわち, この角度より隔たりが小さい二つの物体は, 結像した光が互いのスポット径の範囲内で重なるため, 分解ができないのである。