

1 ケプラーの法則

ある一つの巨大な質量による重力の作用を受けて運動する物体の軌跡はケプラーの法則にしたがう。ケプラーの法則は、ケプラーがティコ・ブラーエの観測結果に基づいて、太陽を周回する火星の運動を推定した原理である。ケプラーの法則は、

楕円軌道の法則 惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する。

面積速度一定の法則 惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である。

調和の法則 惑星の公転周期の自乗は軌道長半径の3乗に比例する。

のように記述される。これらの法則は観測結果に基づく経験則であるが、ニュートン力学を用いると正しいことが証明される。本節ではケプラーの法則を証明する。

1.1 ケプラーの法則の導出

ケプラーの法則の証明にあたり、太陽のように重力の源となる巨大質量が原点に存在すると仮定する。その仮定の下で運動方程式を解くことによってケプラーの法則に含まれる三つの法則を正当化する。物体の運動が xy 平面上であるように座標を設定し、運動方程式を記述すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a_y,$$

となる。これらの方程式は、単位質量あたりに物体が作用を受ける重力を表現している。言い換えると、これらの方程式は重力によって生じる加速度を表現している。方程式の右辺に記述した $[a_x, a_y]$ は加速度ベクトルを表し、その大きさは万有引力の法則にしたがい GM/r^2 となるはずである。ここで、 G は万有引力定数、 M は重力源の質量、 r は物体と重力源の距離である。特に、 $r^2 = x^2 + y^2$ である。

重力源を原点に配置しているので、直交座標の代わりに極座標で運動方程式を書き換える方が便利である。運動方程式を書き換えるため、直交座標と極座標の関係を書くと、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (1)$$

のようになる。これらの数式を時間 t について2階微分すると、

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta, \quad (2)$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta, \quad (3)$$

が得られる。なお、変数の上に付したドット (\cdot) は時間微分を表す。ドットの数自分の階数に対応する。これらの数式は、 xy 平面内を運動する物体の加速度を2次元の極座標で表現している。上の数式は、それぞれ、 x 軸方向と y 軸方向の加速度である。これらの数式から、動径方向の加速度 a_r と接線方向の加速度 a_θ に変換すると、

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \quad (4)$$

が得られる。特に、接線方向の加速度 a_θ は、

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right),$$

のように書き換えることができる。ここで、加速度が必ず原点に向かう系、いわゆる中心力の系を対象にすると、 $a_\theta = 0$ が成立するので、

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0,$$

が成立する。この数式は面積速度一定の法則を意味する。この結果によると、重力による現象だけでなく、中心力の系ならば、必ず、面積速度一定の法則が成立するのだ。例えば、原点にバネの端を固定し、もう一方に物体を取り付けて振り回した場合の運動も面積速度が一定になる。今後の理論展開のため、

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = l, \quad (5)$$

としよう。この場合、面積速度は $l/2$ である。なお、数式を見るとわかるように、面積速度は角運動量と等価である。つまり、面積速度一定の法則は角運動量の保存則なのだ。

引き続き、原点に配置した重力源 M による重力について解析しよう。距離 r だけ隔てた物体に対し、重力源は $a_r = -GM/r^2$ の加速度を作用させるので、満たすべき微分方程式は、

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2},$$

である。この微分方程式に、(5) を代入すると、

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0,$$

のように t についての2階微分方程式が得られる。重力の作用で描く軌道を調べるため、この微分方程式を θ についての微分に書き換えてみよう。解析学の公式を用いると、2階微分 d^2r/dt^2 は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \\ &= -\frac{l^2}{r^2} \left[\frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} \right], \end{aligned}$$

のように変形される。この結果を適用すると、微分方程式は、

$$\frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2},$$

なる形で表現できる。実は、この微分方程式は、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2}, \quad (6)$$

のように簡略化できるので、容易に解くことができ、

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta}, \quad (7)$$

なる解をもつことがわかる。ここで、 $r_0 \equiv l^2/GM$ と e は定数である。特に、 $0 \leq e < 1$ であれば、この解は図1に示すように、原点を焦点とする楕円を描く。数式(7)が図のような楕円を表すことは次項で解説することにするとして、それによって楕円軌道の法則が証明できたことになる。解の一般性を追求するのであれば、(7)の分母は任意の定数 θ_0 を用いて $\cos(\theta - \theta_0)$ と書くべきであるが、 $\theta = 0$ で物体が重力源に最も近づくように積分定数を選んだと解釈すればよい。

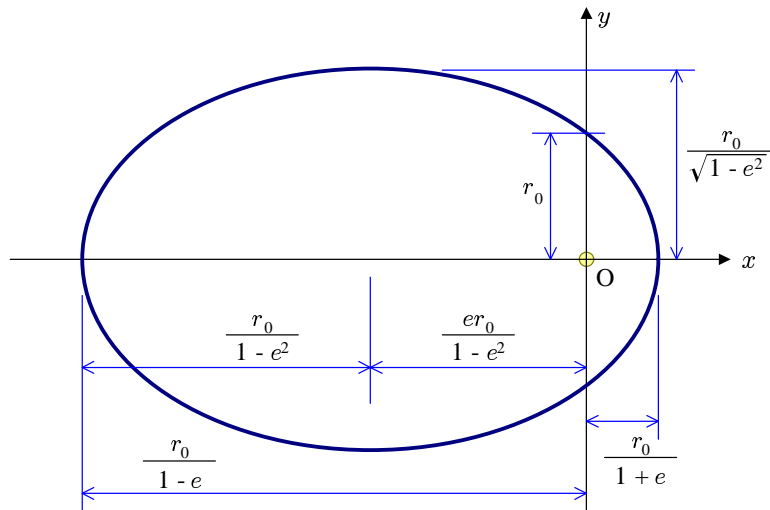


図 1: 原点に位置する重力源を周回する楕円軌道 ($0 \leq e < 1$)

図1に示すように、 e は重力源が楕円の中心からどれくらいずれているかを表す。その理由で e は離心率と呼ばれる。例えば、円軌道の場合、 $e = 0$ であるので重力源は円の中心である。物体が描く楕円軌道は、長半径が $r_0/(1 - e^2)$ 、短半径が $r_0/\sqrt{1 - e^2}$ である。つまり、楕円軌道に囲まれた領域の面積は、 $\pi r_0^2/(1 - e^2)^{3/2}$ である。ここで、面積速度が

$l/2 = \sqrt{GM r_0}/2$ であることに注意すると、物体が楕円軌道を周回する周期が、

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r_m^{3/2}, \quad (8)$$

であることが導かれる。なお、 r_m は軌道の長半径、すなわち、 $r_m \equiv r_0/(1-e^2)$ である。この結果は、周期の自乗が軌道長半径の3乗に比例するという、調和の法則である。

1.2 離心率と軌道の形状

離心率が $0 \leq e < 1$ であるとき、重力の作用を受けた物体は楕円軌道を描く。その中でも、特に、 $e = 0$ のときは円軌道となる。離心率は $e \geq 1$ となっても、重力の作用を受けて運動する物体の軌道を記述できる。 $e > 1$ のとき軌道は双曲線となり、 $e = 1$ のとき軌道は放物線となる。

微分方程式の解として導かれた $r = r_0/(1 - e \cos \theta)$ について、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いると、導出過程に多少煩雑な計算が必要になるが、

$$\frac{(1 - e^2)^2}{r_0^2} \left(x + \frac{er_0}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{1 - e^2}{r_0^2} y^2 = 1, \quad (9)$$

のように x と y の関係が記述できる。この数式は、 $0 \leq e < 1$ の条件で楕円を表す。得られた数式によると、長半径が $r_0/(1 - e^2)$ 、短半径が $r/\sqrt{1 - e^2}$ の楕円である。また、その楕円は、焦点の一つが重力源が存在する原点 O と一致するのだ。物体が楕円軌道を描くことは次のように解釈すればよい。重力源から大きく離れているとき (例えば $\theta = \pi$ のとき)、物体の速度は重力を振り切ることができず、重力源に向かって落下する。落下する過程で物体は加速される。十分に重力源に近づいたとき (例えば、 $\theta = 0$ のとき)、物体の速度は重力に打ち勝ち、重力源との距離を広げる。しかし、脱出速度に達していないため、再び、重力に捕らえられ落下する。この運動を繰り返し、楕円軌道を描くのだ。

離心率が $e > 1$ の場合、数式の意味が異なる。なぜなら、 $0 \leq e < 1$ のとき $1 - e^2 > 0$ であるのに対し、 $e > 1$ のとき $1 - e^2 < 0$ であるからである。この違いに注目すると、 $e > 1$ の条件では、

$$\frac{(e^2 - 1)^2}{r_0^2} \left(x - \frac{er_0}{e^2 - 1} \right)^2 - \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2 = 1, \quad (10)$$

と書いた方がわかりやすいだろう。この数式は双曲線を表す。数式の右辺がゼロになる条件で得られる数式:

$$(e^2 - 1) \left(x - \frac{er_0}{e^2 - 1} \right) = \pm \sqrt{e^2 - 1} y$$

は双曲線の接線である。この接線の数式は、 $r = r_0/(1 + e \cos \theta)$ において $\cos \theta = -1/e$ の条件で r が無限大になる事実と合致する。双曲線軌道を描く物体は、重力源の近傍を通過

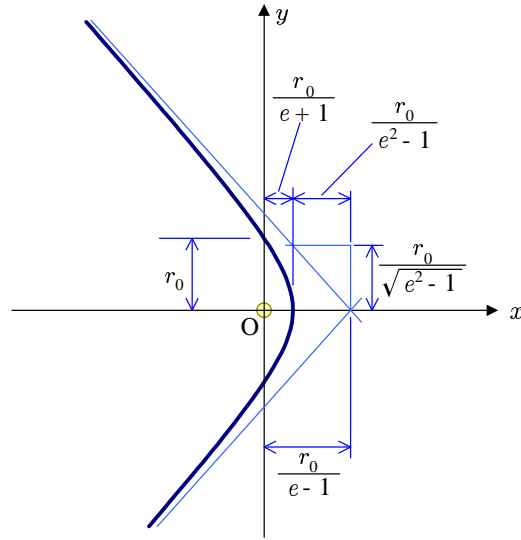


図 2: 離心率 $e > 1$ に対応する双曲線軌道

するときに脱出速度を超える速度で運動しているため、重力を振り切り無限遠に逃れていく。例えば、太陽系外から飛来した物体は、太陽の重力に捕捉され落下したとしても、大部分はこのような双曲線軌道を描いて太陽系外に脱出するのだ。太陽系に落下する実際の天体の場合、太陽から遠ざかる過程で、ごく稀に木星の重力に補足された結果軌道が変化し、再び太陽の重力に捕捉されることがある。そのような珍しい例の一つが、著しく大きな離心率で楕円軌道を描くハレー彗星である。

離心率が $e = 1$ の場合、数式の形が大きく異なる。なぜなら、上の数式に $e = 1$ を代入すると、両辺がともにゼロになるからだ。そのような特別な場合について、例えば、(10) に対して $e \rightarrow 1$ の極限をとればよい。数式(10)の右辺を左辺に移行し、計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{(e^2 - 1)^2}{r_0^2} \left(x - \frac{er_0}{e^2 - 1} \right)^2 - \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2 - 1 \\ &= e^2 \left(1 - \frac{(e^2 - 1)x}{er_0} \right)^2 - \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2 - 1 \\ &= (e^2 - 1) \left(1 - \frac{2x}{er_0} - \frac{y^2}{r_0^2} \right), \end{aligned}$$

のように変形できる。この数式は、当然、ゼロに等しい。離心率 e が 1 に近づいていけば、

$$y^2 = -2r_0 \left(x - \frac{r_0}{2} \right), \quad (11)$$

が成立する。この導出過程は、厳密に $e = 1$ である場合に適用できないが、実は、厳密に $e = 1$ のとき同一の関係が成立する。なぜなら、 $x = \cos \theta / (1 + \cos \theta)$, $y = \sin \theta / (1 + \cos \theta)$

から、同一の結果が導かれるからである。したがって、離心率が1のとき、物体の軌道は放物線である。しかも、その放物線は、焦点が重力源の位置と一致する。物理的に、離心率が

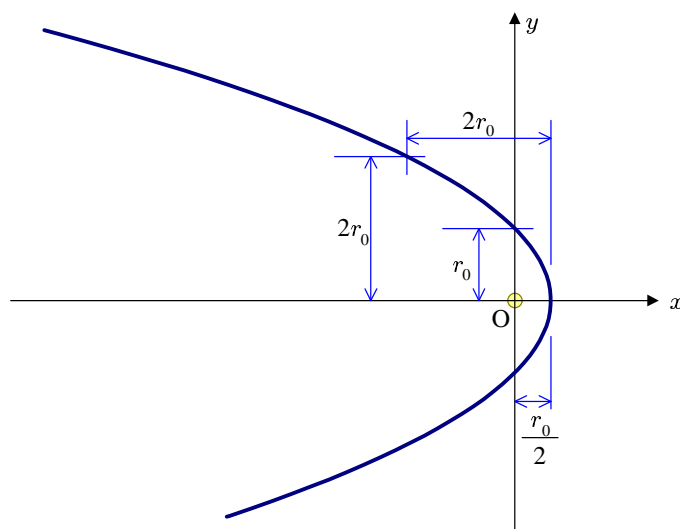


図 3: 離心率 $e = 1$ に対応する放物線軌道

1である天体は、無限遠で平衡状態を保って静止していた天体である。それが何らかの原因で平衡状態が外れ、太陽の重力に捕捉されて落下した場合、放物線軌道を描く。双曲線軌道と同様に、この場合も太陽の重力を振り切り、無限遠に逃げていくのだ。放物線軌道を描く天体の例は彗星である。彗星は、太陽から約1光年離れたオールトの雲を漂っている。漂っている天体が重力の平衡状態から外れて落下し、太陽に近づいたときに彗星として観測される。大部分の天体が放物線軌道を描いて再びオールトの雲に戻っていく一方、前に説明したように、稀に木星の重力によって軌道を曲げられた結果、太陽の重力に再びつかまり、楕円軌道で太陽を周回する彗星も存在する。さらに稀なケースとして、1994年に木星に衝突したシューメーカー・レヴィ彗星である。シューメーカー・レヴィ彗星は1917年に土星に接近した際に、太陽に引き戻される軌道に移り、1960年頃に木星に捕獲され、木星を周回していたようだ。

1.3 有効ポテンシャル

重力ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和は、エネルギー保存則にしたがい保存される。重力源の周囲の軌道を運動する物体の運動エネルギーを動径方向と接線方向の運動エネルギーに分離し、接線方向の運動エネルギーと重力ポテンシャルを加算して得られた和は有効ポテンシャルと呼ばれ、物体が楕円軌道を描くメカニズムを説明するのに有

効である。

重力場における有効ポテンシャルを導入しよう。原点に存在する重力源の周囲を運動する物体の単位質量あたりのエネルギーの総和は、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r}, \quad (12)$$

となる。面積速度一定の法則から、 $r^2 d\theta/dt = l$ が成立することを利用すると、エネルギーの総和は、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}, \quad (13)$$

のように書き換えられる。当然、 l は定数である。この数式に着目し、

$$V(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}, \quad (14)$$

なる関数を定義しよう。すると、単位質量あたりのエネルギーは、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V(r), \quad (15)$$

なる形で記述できるわけだ。この数式は、重力の影響を受ける物体の全エネルギーであるので、当然、保存量である。関数 $V(r)$ が重力ポテンシャルと接線方向の運動エネルギーの和であるが、数式 (15) が運動エネルギーとポテンシャルの和のように見えるので、 $V(r)$ は有効ポテンシャルと呼ばれる。

有効ポテンシャルを距離 r の関数としてプロットすると図 4 に示す曲線を描く。グラフに記載している c は光速である。グラフの横軸をわざわざ c^2 で正規化している理由は、単にディメンジョンを一致させるためである。正規化のための分母が非常に大きな値であるので、正規化された値が 10^8 オーダである大きな値になっている。例えば、重力源の質量として太陽の質量 $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg を仮定すると、グラフ横軸の目盛り 1 個は距離 1 億 4770 万 km に相当する。つまり、横軸の目盛り 1 個は、ほぼ太陽と地球の距離に相当する。有効ポテンシャルには接線方向の運動エネルギーが含まれているので、角運動量 l に依存して有効ポテンシャルの形状が変化する。角運動量がゼロであれば、有効ポテンシャルは $-GM/r$ となり、原点に近づくほど低下する。この事実は、接線方向に速度をもたない物体は、重力源に衝突するまで重力源に向かって落下することを意味する。一方、 $l > 0$ であれば有効ポテンシャルは $r = 0$ の近傍で大きくなる。この事実は、接線方向の速度をもつ物体は、重力源に向かって落下したとしても、重力源の近傍でポテンシャル障壁に跳ね返され、重力源から遠方に運動の方向を変えることを意味する。

エネルギーが有効ポテンシャルの極小値であるならば、重力源と物体の距離は安定し、一定値となる。その安定状態は、言いかえると、物体が円軌道を描くことを意味する。安

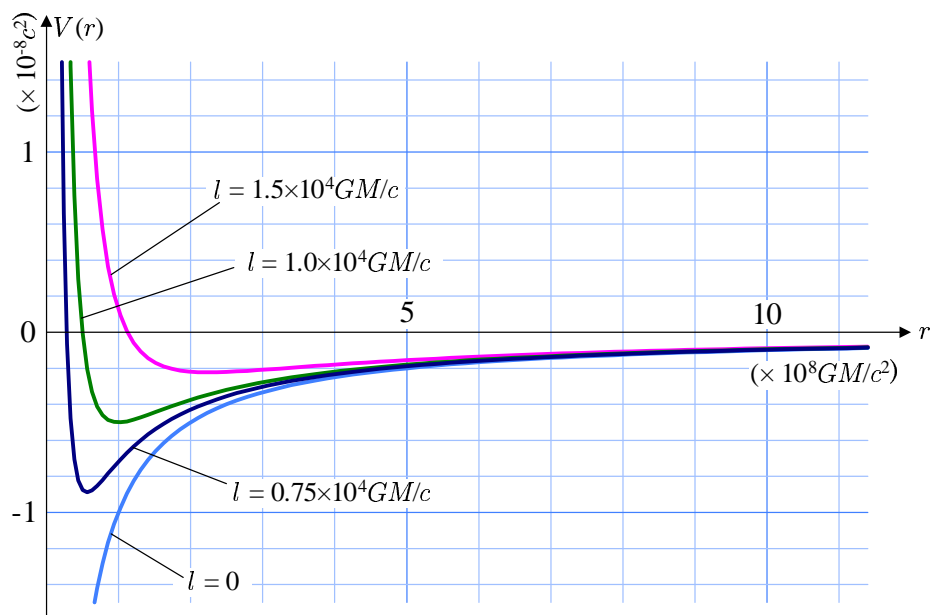


図 4: 角運動量と有効ポテンシャル

定状態に対応する距離は、有効ポテンシャル $V(r)$ の r についての導関数がゼロになる条件、すなわち、

$$r = \frac{l^2}{GM},$$

である。この数式が安定した円軌道の半径を与えるのだ。ここで、軌道を周回する物体の速度を v と仮定すると、 $l = rv$ だから、円軌道の半径を与える数式は、 $r = r^2 v^2 / GM$ のように書き換えられるので、円軌道を周回する物体の速度は、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad (16)$$

となる。この速度は第1宇宙速度と呼ばれる速度である。例えば、地球の質量 $M = 5.972 \times 10^{24}$ kg と、半径 $r = 6.671 \times 10^3$ km (地球の半径 + 300 km) の条件で計算すると、 $v = 7.73$ km/s が得られる。この速度は 300 km の高度の円軌道を周回する人工衛星の速度である。

有効ポテンシャルは重力源を周回する軌道を考える上で便利である。有効ポテンシャルを、運動する物体についてのエネルギー保存則とともに考えるのだ。エネルギー保存則によると、有効ポテンシャルと動径方向の運動エネルギーの和は一定である。これは模式的には、図5 (a) のように示される。この図は、横軸が重力源と物体の距離、縦軸が物体のエネルギーの総和を表している。エネルギーの総和とは、重力の有効ポテンシャルと動径方向の運動エネルギーの和である。イメージとして、物体は有効ポテンシャルの谷を上り下りすることで距離 r の増減を繰り返す。これが、楕円軌道における重力源との距離の変化である。

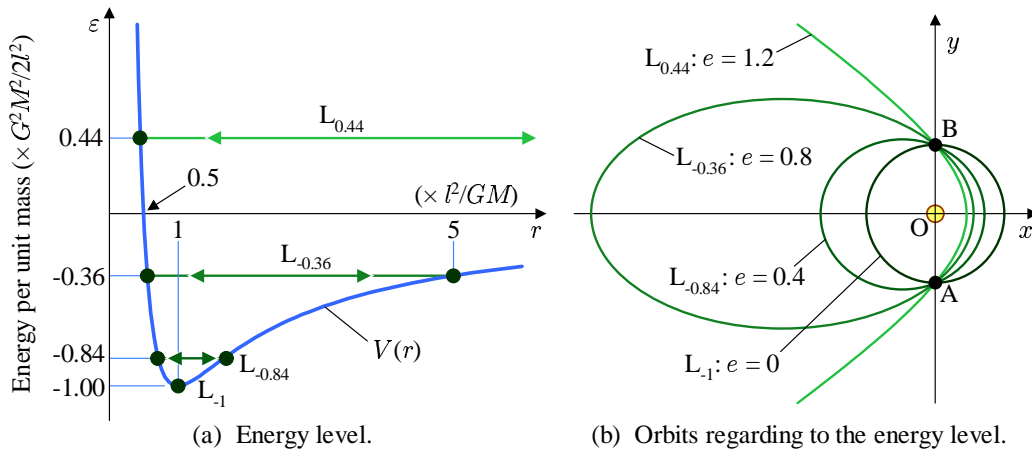


図 5: 有効ポテンシャルと軌道の関係

例えば, 単位質量あたりの角運動量を l としたとき, エネルギーの総和が $-0.84G^2M^2/l^2$ であれば, 物体は離心率 0.4 の楕円軌道を描く (図 5 (b))。ここで, $r_0 = -l^2/GM$ とすると, 近点距離は $0.714r_0$, 遠点距離は $1.67r_0$ となる。なお, r_0 は真近点角が $\pm\pi/2$ となる点 A と点 B における物体と重力源の距離である。その定義から, r_0 は保存量である角運動量 l によりのみ依存する。角運動量 l を保ったままエネルギーの総和を $-0.36G^2M^2/l^2$ に変化させると, 軌道は離心率 0.8 の楕円を描く。さらに, エネルギーを増加させ, $\epsilon > 0$ とすれば, 軌道は双曲線となり, いったん重力源から離れると二度と戻ってこなくなる。なお, 角運動量を一定にしてエネルギーを変化させるには, 動径方向に外力を与えることで実現できる。図 5 (b) は, 真近点角が $-\pi/2$ となる点 A で重力源 O に向かって短時間に大きなインパルスを与えた場合を想定して描いた。その力の作用として軌道の離心率が変化するのである。

1.4 離心率の決定

重力の有効ポテンシャルは, 軌道の離心率の決定にも利用できる。短期間の観測によって, 天体の角運動量とエネルギーの総和がわかれば, 天体の軌道をすべて観測しなくても離心率が決定できるのだ。

原点に存在する重力源の作用を受ける天体のエネルギーの総和は, 有効ポテンシャルと動径方向の運動エネルギーの和であり,

$$\epsilon = V(r) + \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2,$$

なる数式で記述できる。有効ポテンシャルが、

$$V(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r},$$

であることに注意し、近点と遠点で動径方向の速度がゼロであることを利用すると、方程式:

$$\varepsilon = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r},$$

の解が近点距離と遠点距離を与えることが予想できる。この方程式は r についての2次方程式であり、

$$r = -\frac{GM}{2\varepsilon} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{-2\varepsilon l^2}{G^2 M^2}} \right), \quad (17)$$

なる解をもつ。この解は負の値に見えるかもしれないが、そうではない。楕円軌道を描く条件として $\varepsilon < 0$ であるので、解 r は正になる。解に含まれる複合のうち、正符号は遠点距離、負符号は近点距離に対応する。この結果は、離心率が、

$$e = \sqrt{1 - \frac{-2\varepsilon l^2}{G^2 M^2}}, \quad (18)$$

なる数式で記述できることを示唆している。この数式は、エネルギーの総和と角運動量がわかれば天体の離心率が決定できることを意味する。エネルギー総和は、天体の速度と重力源までの距離が観測できれば決定できる。角運動量は、重力源から見た天体の方位が単位時間にどれくらい変化するかを観測すれば決定できる。つまり、エネルギーの総和も角運動量も天体の軌道をすべて観測しなくても決定できる。したがって、離心率は天体の軌道をすべて観測しなくても決定できるのだ。その例は冥王星の軌道である。冥王星は1930年にトンボーによって発見されてから、まだ、公転周期を経過していない。なにしろ、冥王星の公転周期は248年にもなるのだから。にも関わらず、離心率を含め、軌道の形状が明らかになっているのだ。

動径方向の速度成分がゼロのとき、すなわち、近点、または、遠点を仮定し、 $l = rv$ 、 $\varepsilon = -GM/r + v^2/2$ を (18) に代入して離心率について方程式を解けば、

$$e = 1 - \frac{rv^2}{GM}, \quad \frac{rv^2}{GM} - 1,$$

のように二つの解が得られる。第1の解は遠点、第2の解は近点の半径と速度を用いた数式である。これらの解のうち、近点の物理量を用いた数式のみを取り上げると、

$$e = \frac{r_p}{GM} v_p^2 - 1, \quad (19)$$

が得られる。ここで、 r_p と v_p は、近点 (perihelion) における重力源までの距離と速度である。この数式を v_p について解くと、

$$v_p = \sqrt{(1+e) \frac{GM}{r_p}}, \quad (20)$$

が得られる。この結果から、軌道の離心率と近点における物体の速度に簡単な関係があることがわかる。特に、離心率が $e = 0$ は円軌道を表す。それに対し、 $e = 1$ は放物線軌道の場合であり、このとき、近点における速度は $e = 0$ に比べ $\sqrt{2}$ 倍になっている。放物線軌道を描く場合、物体の速度は無限遠でゼロになる。その条件は、近点における物体の速度が重力源の重力を振り切る最低速度である。その最低速度は脱出速度と呼ばれる。つまり、脱出速度は円軌道の周回速度の $\sqrt{2}$ 倍である。例えば、地表面から地球の重力を振り切る脱出速度は 11.2 km/s である。

1.5 軌道計算

ある任意の時刻における天体の位置を計算する (軌道計算) には、面積速度一定の法則を利用する。軌道計算は、離心率 e が、 $e < 1$ のとき、 $e > 1$ のとき、 $e = 1$ のときで異なる。それらについて個別に軌道計算を説明する。

1.5.1 離心率が 1 未満の場合

離心率が $e < 1$ のとき、軌道は楕円軌道を描く。これまでに示した数式では、重力源を原点とし、重力源と近点を結ぶ直線から測った角度 φ によって天体の位置を表していた。その角度 φ は、軌道計算の分野で**真近点角**と呼ばれる。軌道計算には、その代わりに**離心近点角** ϕ を用いると便利である。離心近点角を用いると、天体の位置 $[x, y]$ は、

$$x = \frac{r_0}{1 - e^2} \cos \phi, \quad y = \frac{r_0}{\sqrt{1 - e^2}} \sin \phi,$$

となる。離心近点角 ϕ がゼロから任意の ϕ となるまでに重力源と天体がかき分ける面積は、図の面積は $S = S_{xy} - S_{\Delta}$ となる。そのうち、 S_{xy} は、

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \int_{x(\phi)}^0 y \, dx = -\frac{r_0^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \int_{\phi}^0 \sin^2 \phi \, d\phi \\ &= \frac{r_0^2}{2(1 - e^2)^{3/2}} \int_0^{\phi} (1 - \cos 2\phi) \, d\phi \\ &= \frac{r_0^2}{2(1 - e^2)^{3/2}} \left(\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right), \end{aligned}$$

となる。一方、 S_{Δ} は、

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{y}{2} \left(x - \frac{er_0}{2 - e^2} \right) = \frac{r_0^2}{2(1 - e^2)^{3/2}} (e \sin \phi - \sin \phi \cos \phi) \\ &= \frac{r_0^2}{2(1 - e^2)^{3/2}} \left(e \sin \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right), \end{aligned}$$

となる。したがって、面積 S は、

$$S = \frac{r_0^2}{2(1-e^2)^{3/2}}(\phi - e \sin \phi), \quad (21)$$

となる。前節で導出した近点速度と離心率の関係から、保存量である面積速度は、 $r_p v_p / 2 = \sqrt{GM r_0} / 2$ であるので、上記方程式は、

$$\phi - e \sin \phi = \sqrt{\frac{(1-e^2)^3 GM}{r_0^3}} t, \quad (22)$$

のように書き換えることができる。この数式に用いた r_0 の代わりに近点距離 r_p を用いると、

$$\phi - e \sin \phi = \sqrt{\frac{(1-e)^3 GM}{r_p^3}} t, \quad (23)$$

となる。また、軌道長半径 r_m を用いると、

$$\phi - e \sin \phi = \sqrt{\frac{GM}{r_m^3}} t, \quad (24)$$

のように書き換えることができる。方程式 (22) から () はすべて同一の方程式であり、その右辺は角度を表す無次元量である。その無次元量は**平均近点角**と呼ばれる。これらの方程式は、解析的に解くことができないので、ニュートン法などの数値解法を用いて解く。

1.5.2 離心率が 1 を超える場合

離心率が 1 を超える場合、軌道は双曲線となり、天体は近点を迎えた後、無限遠に逃れていく。その場合、その天体に公転周期は存在しないが、面積速度一定の法則を利用すれば、指定された時刻における位置を予測することができる。その軌道計算は、楕円軌道と同様に考えればよい。双曲線軌道においても、真近点角 φ の代わりに、パラメータ η を用い、天体の位置を、

$$x = \frac{r_0}{e^2 - 1} \cosh \eta, \quad y = \frac{r_0}{\sqrt{e^2 - 1}} \sinh \eta,$$

と書くと便利である。

図***に示す面積 S_{xy} は、

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \int_{r_0/\sqrt{e^2-1}}^{x(\eta)} y \, dx = \frac{r_0^2}{(e^2 - 1)^{3/2}} \int_0^\eta \sinh^2 \eta \, d\eta \\ &= \frac{r_0^2}{2(e^2 - 1)^{3/2}} \int_0^\eta (\cosh 2\eta - 1) \, d\eta \\ &= \frac{r_0^2}{2(e^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2\eta - \eta \right), \end{aligned}$$

のように計算される。一方, 面積 S_{Δ} は,

$$S_{\Delta} = \frac{y}{2} \left(x - \frac{er_0}{e^2 - 1} \right) = \frac{r_0^2}{2(e^2 - 1)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \sinh 2\eta - e \sinh \eta \right),$$

のように計算される。したがって, 重力源と天体を結ぶ線分が描く面積 S は,

$$S = \frac{r_0^2}{2(e^2 - 1)^{3/2}} (e \sinh \eta - \eta),$$

となる。楕円軌道の場合と同様に, 近点速度と離心率の関係から得られる面積速度 $r_p v_p / 2 = \sqrt{GM r_0} / 2$ を利用し,

$$e \sinh \eta - \eta = \sqrt{\frac{(e^2 - 1)^3 GM}{r_0^3}} t, \quad (25)$$

が得られる。この方程式は近点距離 r_p を用いて,

$$e \sinh \eta - \eta = \sqrt{\frac{(e - 1)^3 GM}{r_p^3}} t, \quad (26)$$

のように書き換えることができる。この方程式も解析的に解くことができないため, ニュートン法などの数値解法によって解けばよい。

1.5.3 離心率が1に等しい場合

離心率が厳密に1に等しい状況はあり得ないかもしれないが, その場合, 天体の軌道は放物線を描く。双曲線軌道と同様, 近点を通過した天体は無限遠に逃れるため, 公転周期は存在しない。しかし, 面積速度一定の法則を利用すれば指定した時刻における天体の位置を予想できる。

図***に示す座標を用いれば, 天体の位置 $[x, y]$ は,

$$x = \frac{y^2}{2r_0},$$

なる関係にしたがう。このとき, 重力源の位置は $[x, y] = [r_0/2, 0]$ である。座標 y を, 面積を評価するパラメータとして使用すると, 重力源と天体を結ぶ線分が描く面積 S は,

$$S = \frac{y}{2} \left(\frac{y^2}{2r_0} + \frac{r_0}{2} \right) - \frac{y^3}{6r_0} = \frac{1}{12r_0} (y^3 + 3r_0^2 y),$$

となる。これまでと同様に, 面積速度が $r_p v_p / 2 = \sqrt{GM r_0} / 2$ であることを利用すると,

$$y^3 + 3r_0^2 y = 6\sqrt{GM r_0^3} t, \quad (27)$$

なる方程式が得られる。放物線軌道を描く場合, $r_0 = 2r_p$ が成立することを利用すると, 上の方程式は,

$$y^3 + 12r_p y = \sqrt{288GM r_p} t, \quad (28)$$

のように書き換えられる。この方程式は, y についての3次方程式であるが, 必ず, 実数解を一つしかもたない。この方程式は解析解を計算することが可能であるが, ニュートン法のような数値解法を用いてもよい。

2 相対論的重力

重力源が小さい半径内に収まり, その密度が著しく大きくいとき, 重力源の近傍ではニュートン力学では記述できず, 一般相対性理論が必要になる。一般相対性理論によると, 重力は質量だけでなく, 電荷や角運動量にも依存する。本節では, 最も簡単なモデルとして, 電荷と角運動量を含まない球対象な重力場を取り扱う。

2.1 重力場での運動方程式

一般相対性理論によると, 重力場は湾曲した時空である。歪んでいない平坦な時空では, 時空の微小変位 dx, dy, dz, dt が与えられたとき, その変位の大きさ ds が,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

で定義される。座標 $[x, y, z, t]$ は座標系の選び方によって様々な値をとることができるが, 大きさ ds は座標の選び方に依存しない。言いかえると, 微小の大きさ ds は物体の運動に対する固有の値である。特に, 光の運動については常に $ds = 0$ となる。この条件を用いると, ds の定義式は,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2,$$

のように書き換えられる。この数式は, 慣性系における光速不変の原理を表現している。光速不変の原理とは, 慣性系に存在するどのような観測者から見ても光速は c に等しい。

重力源が原点に局在し, 電荷も角運動量も存在しなければ, 球対象な重力場が形成される。重力場によって時空が歪み, 時空の微小変位 dx, dy, dz, dt に対応する微小距離 ds は上記の量とは異なる。その微小距離 ds は,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

となる。この線素の記述について、空間座標の記述に球面座標系 $[r, \theta, \varphi]$ を用いた。具体的には、 r が原点からの距離、 θ が天頂角、 φ が方位角である。ここで、座標系に依存しない線素 ds について、 $ds^2 \equiv -c^2 d\tau^2$ によって τ を定義しよう。詳細な説明を省略するが、新たに定義された τ は物体に固定した時計の読みを表す。言い換えると、 τ は座標系に依存せず、物体の運動によって決まる時計の読みであることから、固有時間と呼ばれる。固有時間を用いて、線素を書き換えると、

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (29)$$

となる。重力が存在しない時空、いわゆるミンコフスキー時空では、線素が $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ と比較すると、時間 t と半径 r に関する計量が時空の歪みを反映していることがわかる。

重力場における物体の軌跡を解析するため、物体の運動が $\theta = \pi/2$ に限定されるよう座標を設定しよう。その条件で、歪んだ時空における物体の運動方程式は、

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{mr^{-2}}{1-2m/r} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{mc^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (30a)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0, \quad (30b)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{2mcr^{-2}}{1-2m/r} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0, \quad (30c)$$

のように記述される。このうち、第2式と第3式を積分すると、

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = l, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mu}{1-2m/r}, \quad (31)$$

が得られる。ここで、積分定数 l と μ は、それぞれ、角運動量、エネルギーに関する物理量である。一方、シュワルツシルトの線素は、

$$c^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2, \quad (32)$$

のように書き換えることができる。ここで、座標系は運動が $\theta = \pi/2$ の面であるように設定した。つまり、天頂角 θ が一定であるので $d\theta = 0$ とした。シュワルツシルトの線素から導かれた (32) に (31) を代入すると、

$$\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 = \frac{2m}{r^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{2mc^2}{l^2 r} + \frac{(\mu^2 - 1)c^2}{l^2}, \quad (33)$$

なる微分方程式が得られる。この微分方程式は、 $1/r \equiv 2u/m$ なる置き換えを適用すれば、

$$(u')^2 = 4u^3 - u^2 + \frac{m^2 c^2}{l^2} u + \frac{(\mu^2 - 1)m^2 c^2}{4l^2}, \quad (34)$$

のように書き換えられる。この微分方程式において、プライム (') は φ についての導関数を意味する。この微分方程式は初等関数の範疇では解くことができない。この楕円関数の解は、ヤコビの楕円関数の一つである sn 関数 (エスエヌ関数) を用いて記述することができる。その sn 関数は、 $\text{sn}(x; k)$ のように変数 x と媒介変数 k をとり、図 6 に示すように歪んだ正弦波のような曲線を描く周期関数である。特に、媒介変数 k は楕円関数の母数と呼ばれる。図に示すように、 -1 から 1 の範囲で振動するのは正弦波と共通の性質であるが、

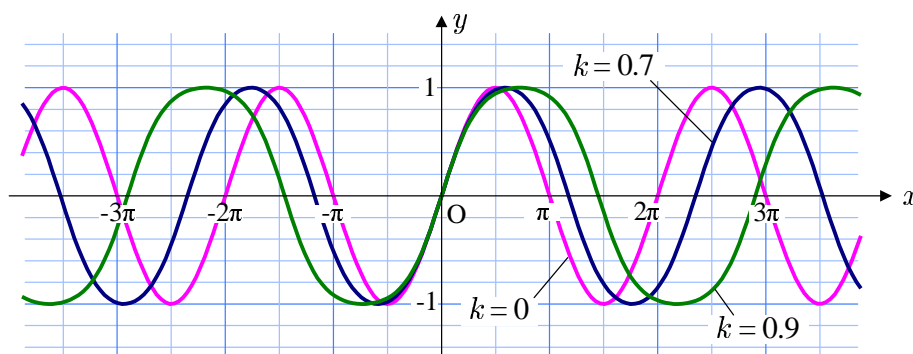


図 6: ヤコビの楕円関数 $\text{sn}(x; k)$

その周期が母数 k の増加とともに長くなる。さらに、 $k = 0$ のとき、sn 関数は正弦関数と一致し、 $\text{sn}(x, 0) = \sin x$ であるが、 k の増加とともに正弦波からの歪みが大きくなる。

微分方程式の解に話を戻そう。微分方程式が $(u')^2 = 4(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$ のように因数分解できるとき、微分方程式の解は、

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \text{sn}^2(\sqrt{u_3 - u_1} \varphi; k), \quad (35)$$

となるのだ。ここで、 u_1, u_2, u_3 は実数であり、 $u_1 < u_2 < u_3$ であるとする。実は、これらの値が実数であることは、物体は安定した軌道を描くことを意味する。安定軌道については、後に有効ポテンシャルを説明する際に述べる。また、楕円関数の母数は、

$$k = \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}},$$

で与えられる。得られた解に対して、 $r = m/2u$ を用いて記号を戻せば重力源を周回する軌道が得られる。一例として、 $l = 5mc$ 、 $\mu = 0.98$ のときの軌道を図 7 に示す。図 7 (a) が重力源からの距離 r の方位角 φ に対する依存性である。距離 r は周期関数であるが、周期が 2π より大きい。そのため、図 7 (b) に示すように、物体は常に同じ場所を通過せず、周回するたびに方位角が反時計回りに移動する。図に記載したように、この例では近点を迎える周期が 424.6° である。つまり、軌道を 1 周期するたびに近点が 64.6° だけ前進するのだ。このような目につく近点移動は重力源に著しく接近しなければ発生しえない。この例

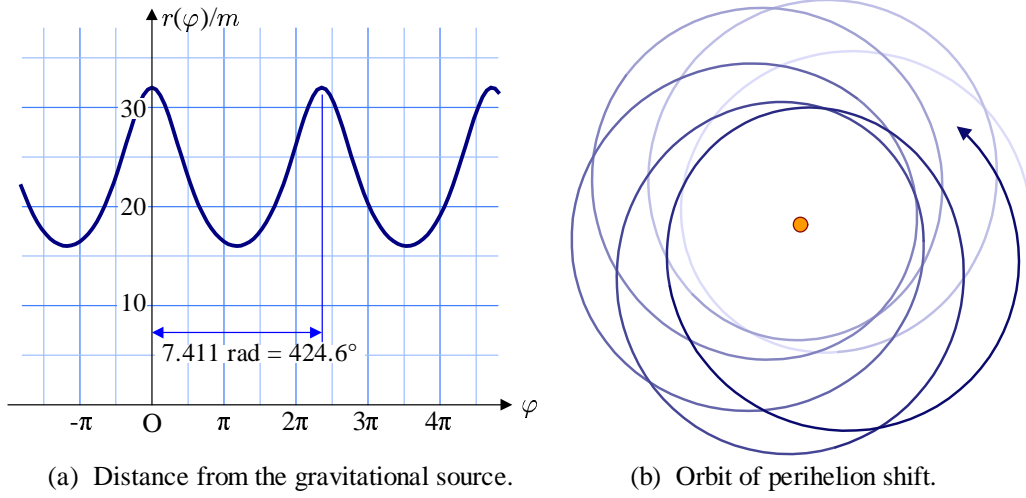


図 7: 点対称重力場での軌道 ($l = 5mc$, $\mu = 0.98$)

では, 近点距離が $16m$ である。重力源が太陽であるなら, その中心から 23.7 km まで接近しなければならない。その距離は太陽自身の半径より小さいので, そのような接近は不可能である。つまり, このような大きな近点移動は太陽系で観測することはできない。

太陽系の惑星で発生する近点移動は非常に小さい。太陽を周回する惑星で最も近点移動が大きいのは水星であり, 100 年あたりにわずか 43 秒程度の小さな角度だけ近点移動する。非常に小さい近点移動を近似的に計算する手法を導出しておこう。微分方程式 (33) を φ について微分すると,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3m}{r^2} - \frac{1}{r} + \frac{mc^2}{l^2}, \quad (36)$$

なる 2 階微分方程式が得られる。この微分方程式のうち, 右辺の第 1 項は相対論的効果を表す。右辺の第 1 項がゼロであるとき, すなわち, 非相対論的な解は,

$$\frac{1}{r} = \frac{mc^2}{l^2} (1 + e \cos \varphi),$$

である。ここで, e は積分定数であるが, 物理的には軌道の離心率を表す。弱い相対論的効果があるときの解を,

$$\frac{1}{r} = \frac{mc^2 (1 + \alpha)}{l^2} [1 + e \cos(1 + \beta)\varphi],$$

であるとしよう。この数式を微分方程式 (36) に代入して, α と β を決定すればよい。決定にあたり, e, α, β は 1 より十分に小さいとする。その条件で代入すると,

$$\begin{aligned} & -\frac{mc^2}{l^2} (1 + \alpha)(1 + 2\beta)e \cos(1 + \beta)\varphi \\ & = \frac{3m^2 c^4}{l^4} (1 + 2\alpha)[1 + 2e \cos(1 + \beta)\varphi] \end{aligned}$$

$$-\frac{mc^2}{l^2}(1+\alpha)[1+e\cos(1+\beta)\varphi] + \frac{mc^2}{l^2},$$

なる等式が得られる。この等式において、互いに対応する項の係数を比較することによって、

$$\alpha \simeq \frac{3m^2c^2}{l^2}, \quad \beta \simeq -\frac{3m^2c^2}{l^2},$$

が特定できる。つまり、弱い重力場において、離心率が小さい軌道は、

$$\frac{1}{r} \simeq \frac{mc^2}{l^2} \left(1 + \frac{3m^2c^2}{l^2}\right) \left[1 + e \cos\left(1 - \frac{3m^2c^2}{l^2}\right) \varphi\right],$$

のように近似的に書くことができる。この近似解の余弦関数の変数に因数 $1 - 3m^2c^2/l^2$ が付随しているため、 $1/r$ の変化は、 φ について 2π より大きな周期をもつことになる。その周期を $2\pi + \Delta\varphi$ と書くことにすれば、

$$\Delta\varphi \simeq \frac{6\pi m^2c^2}{l^2},$$

が得られる。この角度が重力源を1回転するたびに生じる近点のずれを与える。さらに、軌道長半径 r_m 用いて、 $l^2 = mc^2 r_m(1 - e^2)$ であることに注意すれば、

$$\Delta\varphi \simeq \frac{6\pi m}{r_m(1 - e^2)}, \quad (37)$$

のように書き換えられる。得られた近似式に、太陽の重力半径 $m = 1476$ m、水星の軌道長半径 $r_m = 5.791 \times 10^{10}$ m、水星の軌道離心率 $e = 0.2056$ を代入すると、水星は太陽を公転する1周期あたり、 $\Delta\varphi \simeq 5.017 \times 10^{-7}$ rad だけ近点が移動することがわかる。その移動量は非常に小さい値である。これを100年あたりの移動量に換算すると、約43秒の角度となる。これは観測で分かっている値とほぼ一致する。

2.1.1 有効ポテンシャル

ニュートン力学と同様に、物体のエネルギーを動径方向の運動エネルギーと有効ポテンシャルに分解すると、軌道の性質がわかりやすい。相対論的な重力場では、線素から導かれる不変量:

$$c^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,$$

に着目すればよい。前に示したように、 $r^2(d\varphi/d\tau) = l$, $dt/d\tau = \mu/(1 - 2m/r)$ であるので、上の数式は、

$$\frac{(\mu^2 - 1)c^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{mc^2}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{ml^2}{r^3}, \quad (38)$$

なる形に書き換えられる。得られた数式の左辺は、定数であるので保存量である。右辺の第1項が運動エネルギーに対応し、第2項以降が有効ポテンシャルだ。つまり、相対論的な有効ポテンシャルは、

$$V(r) = -\frac{mc^2}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{ml^2}{r^3}, \quad (39)$$

となるのだ。有効ポテンシャルのうち、第1項と第2項はニュートン力学と共通である。すなわち、第3項が相対論的效果を意図している。第3項があるため、図8に示すように、非相対論的な有効ポテンシャルと異なる性質をもっている。非相対論的には重力源の近傍で有効ポテンシャルが無限に上昇するのに対し、相対論的には有効ポテンシャルの上昇が途中で折り返し、無限に下降するのである。グラフから明らかなように、有効ポテンシャル

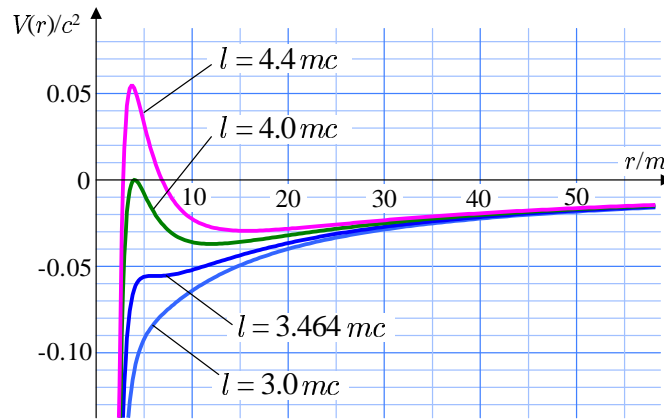


図 8: 相対論的な有効ポテンシャル

の r についての導関数は 2 箇所でゼロになる。その場所は、

$$r = \frac{l^2}{2mc^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12m^2c^2}{l^2}} \right), \quad (40)$$

である。複号のうち、負符号は有効ポテンシャルが極大の場所であり、正符号は極小の場所に対応する。どちらの場所でも、物体が円軌道を描くことが可能であるが、有効ポテンシャルが極大となるのは不安定軌道である。それに対し、有効ポテンシャルが極小となっている条件では安定軌道を描く。ところが、(40)によると安定軌道が無条件に存在するわけではない。その数式から容易にわかるように、安定円軌道が存在する条件は $l \geq \sqrt{12}mc$ ($= 3.464mc$) である。特に、 $l = \sqrt{12}mc$ のとき、安定円軌道の半径は最小となり、

$$r = 6m,$$

となる。この半径より小さい円軌道は実現不可能である。最小の安定円軌道 $r = 6m$ は、安定とはいふものの、図8の $l = 3.464mc$ によると、有効ポテンシャルにほとんど谷がな

いため、実際は不安定軌道である。つまり、 $l = 3.464mc$ では、わずかな摂動によって円軌道から外れ、重力源に落下してしまうはずだ。

数式 (40) で決定される安定円軌道と不安定円軌道をグラフに描くと図??のようになる。既に述べたように、 $l < \sqrt{12}mc$ のとき、安定円軌道も不安定円軌道も存在しない。角運動

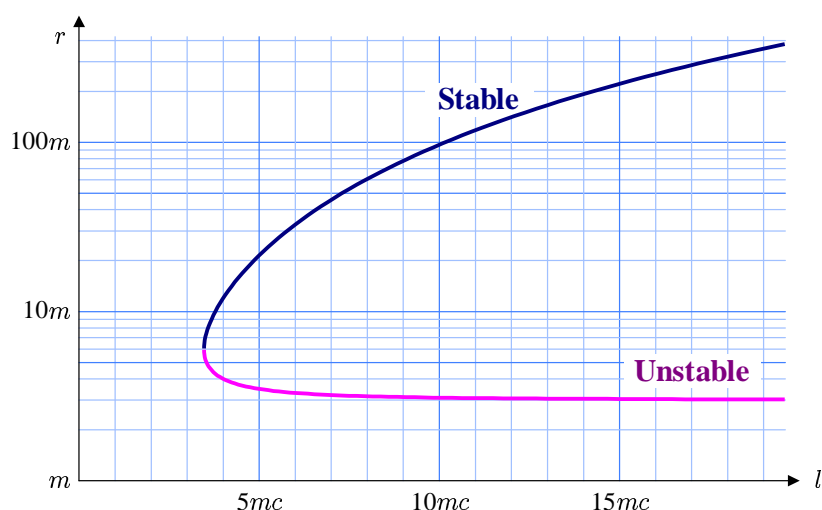


図 9: 安定円軌道と不安定円軌道の半径

量に相当する l が $l = \sqrt{12}mc$ であるとき、安定円軌道の半径と不安定円軌道の半径がともに $6mc$ で一致する。安定円軌道は、 l の増加とともに増加し、 l が十分に大きければ l^2 に比例するようになる。一方、不安定円軌道は l とともに減少し、 $3m$ に近づいていく。

例として、図 8 を参照しながら $l = 4.4mc$ の軌道を考えてみよう。この場合、有効ポテンシャルは $r \simeq 15.65m$ で極小値 $-0.0294c^2$ をとる。また、 $r \simeq 3.7155m$ で極大値 $0.05461c^2$ をとる。これらの情報から、保存量 ε が $-0.0294c^2 \leq \varepsilon < 0$ のとき、ポテンシャル障壁に挟まれ、物体は重力源に近づいたり遠ざかったりを繰り返す。非相対論では楕円軌道に相当するのだが、相対論的には近点移動しながら重力源を周回する軌道を描く。そのような軌道は束縛軌道と呼ばれる。続いて、束縛軌道とならない条件を考えよう。保存量 ε が $0 \leq \varepsilon < 0.05461c^2$ の条件で、物体は重力源に接近したとしても、ポテンシャル障壁で跳ね返され、無限遠に飛んでいく。その運動は、非相対論では放物線軌道、もしくは、双曲線軌道に相当する。その例を図 10 (a) と (b) に示す。保存量 ε が極大値 $0.05461c^2$ に近づくと、重力源からの距離は $3.7115m$ に近づき、重力を振り切るまでに重力源を周回する。特に、(b) の場合、重力を振り切るまでに重力源を 2 回転している。さらに、保存量 ε が大きくなり、 $\varepsilon > 0.0546c^2$ のとき、重力源に接近した物体はポテンシャル障壁を超えてしまう。この例は、図 10 (c) に示す。ポテンシャル障壁を乗り越えて超える条件では、図のように、重力源を 3 回転ほど回った後、重力源に飲み込まれる。

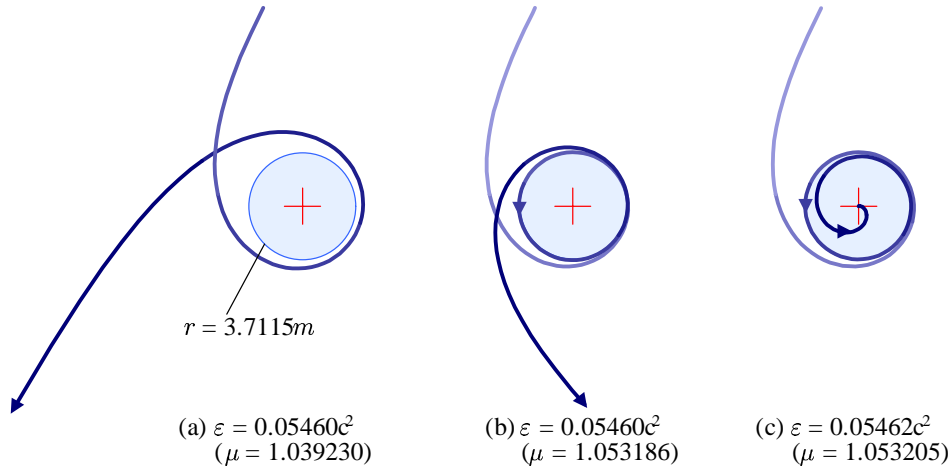


図 10: 重力源の近傍を通過する物体の軌跡 ($l = 4.4mc$)

前項で説明した楕円関数による解は、物体の運動を規定する微分方程式 (34) が、 $(u')^2 = 4(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$ のように実数 u_1, u_2, u_3 を用いて因数分解できることを前提にしている。しかし、ポテンシャル障壁を超え、重力源に飲み込まれる場合、微分方程式 (34) は想定されるように因数分解できない。その場合の解法は次項で紹介する。

2.1.2 ポテンシャル障壁を超える場合

重力源の近傍に存在するポテンシャル障壁を超える場合、運動を規定する微分方程式 (34) は、実数関数の意味で $(u')^2 = 4(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$ のように因数分解できない。言いかえると、 $(u')^2 = 0$ が 1 個の実数解と 2 個の複素数解をもつのだ。その場合の解法を紹介する。

微分方程式について、 $(u')^2 = p(u)$ とおこう。関数 $p(u)$ は u についての 3 次の多項式であり、実数解が 1 個だけ存在すると仮定する。その実数解を α とすると、

$$p(u) = a(u - \alpha)p_2(u),$$

と記述できることを想定するのだ。ここで、 $p_2(u)$ は u についての 2 次式、すなわち、 $p_2(u) = u^2 + bu + c$ である。なお、 $p_2(u)$ は実数解をもたないので、 $b^2 - 4c < 0$ が成立する。その想定の下で、

$$\beta = \sqrt{p_2(\alpha)}, \quad x_1 = \alpha + \beta, \quad x_2 = \alpha - \beta, \quad (41)$$

を定義する。この記号を用いて積分変数 u を、

$$u = \frac{x_1 + x_2 y}{1 + y}, \quad (42)$$

によって新たな積分変数 y に変換する。この変換を用いると、

$$du = -\frac{2\beta dy}{(1+y)^2}, \quad \sqrt{p(u)} = \frac{\sqrt{a\beta(1-y^2)[p_2(x_1) + p_2(x_2)y^2]}}{(1+y)^2},$$

が得られる。したがって、微分方程式 $(u')^2 = p(u)$ は、

$$(y')^2 = \frac{a[p_2(x_1) + p_2(x_2)]}{4\beta} \cdot (1-y^2) \left[\frac{p_2(x_1)}{p_2(x_1) + p_2(x_2)} + \frac{p_2(x_2)}{p_2(x_1) + p_2(x_2)} y^2 \right],$$

なる微分方程式に変換される。この微分方程式は、ヤコビの楕円関数における微分方程式であり、積分変数 y が φ の関数であるならば、その解は、

$$y = \text{cn} \left(\sqrt{\frac{a[p_2(x_1) + p_2(x_2)]}{4\beta}} \varphi; k \right), \quad (43)$$

のように記述できる。ここで、 cn はヤコビの楕円関数 sn 関数に対する補助関数であり、 k は楕円関数の母数である。母数 k は、

$$k = \sqrt{\frac{p_2(x_2)}{p_2(x_1) + p_2(x_2)}}, \quad (44)$$

で計算できる。ポテンシャル障壁をかすめるように超える物体では、母数 k は 1 に近い値となる。母数 k が 1 に極めて近くなると、物体が重力源に飲み込まれるまでに、重力源を周回し、長い経路を運動する。

微分方程式 $(u')^2 = p(u)$ について、 $p(u)$ が 1 個の実数解と 2 個の複素数解をもつとき、微分方程式の解を次の手順で計算できる。

1. 方程式 $p(u) = 0$ の実数解 α を計算する。解の計算には、カルダノの公式のような解析的な公式、または、ニュートン法のような数値的な公式などを用いることができる。
2. 解 α を用いて、 $p(u) = a(x - \alpha)p_2(u)$ のように因数分解する。具体的には、 $p_2(u) = u^2 + bu + c$ の展開係数 b と c を計算する。
3. 因数分解の結果を利用し、(41) を計算することによって β, x_1, x_2 を得る。
4. 楕円関数の母数 k を (44) を用いて計算した後、(43) によって y を計算する。
5. 変数変換 (42) を用い、積分変数 y から u に戻す。

前項で示した物体の軌跡のうち、ポテンシャル障壁を超えて重力源に飲み込まれる解は、上記のアルゴリズムによって計算した。

2.2 光の軌跡

相対論的な重力場は湾曲した空間を取り扱うリーマン幾何学によって記述される。重力場が湾曲した空間とするアイデアは、重力と慣性力の等価原理により、光が重力場で湾曲

した軌跡を描くと推察されたからである。重力場では、一般の物体と同様に、光も測地線の軌跡にしたがい、湾曲した軌跡を描くのだ。

重力場における光の軌跡は、一般の物体と同一の測地線の方程式によって規定される。とはいえ、測地線の方程式 (30a) からは、固有時間 τ についての微分を含むので注意が必要である。光の測地線においては、 $d\tau = 0$ となるので τ についての微分が定義できないのだ。しかし、実際のところ心配は無用である。理由の説明を省略するが、リーマン幾何学によると、測地線の方程式で登場する微分は τ についての微分である必要がないのだ。実は、 $\tau = a\lambda + b$ のような 1 次式で τ に変換できるパラメータ λ で微分してもよいのである。甚だしくは、 $d\tau = 0$ ならば、 $a = 0$ とすれば λ は自由に選べる。とりあえず、光が進む先で λ が単調増加するようにパラメータを任意に選ぶものとする。その物理的な意味は特に規定しないが、光がたどるべき測地線は、

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} - \frac{mr^{-2}}{1-2m/r} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 - \frac{mc^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0, \quad (45a)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0, \quad (45b)$$

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{2mcr^{-2}}{1-2m/r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0, \quad (45c)$$

なる方程式で記述できるはずだ。これらの数式は、一般の物体の測地線の方程式の τ を λ に置き換えただけである。一般の物体と同一の方程式であるので、解法も同様である。上の第 2 式と第 3 式を積分することによって、

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = l, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\mu}{1-2m/r}, \quad (46)$$

が得られることも一般の物体と同様である。一方、光の固有時間が $d\tau = 0$ であることから、線素から得られる方程式は、

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0, \quad (47)$$

となる。積分値を、この方程式に代入すると、

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\mu^2 c^2}{l^2} r^4 - r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 0,$$

が得られる。この方程式は、光の軌跡を記述する方程式である。質量がある物体と同様、この方程式は $1/r$ に関する微分方程式に書き換えた方が見通しがよく、

$$\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 = \frac{\mu^2 c^2}{l^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2m}{r^3}, \quad (48)$$

なる形に変形できる。いうまでもなく、右辺の第3項が相対論効果を与える。その相対論効果がゼロであれば、解は $1/r = (\mu c/l) \cos \varphi$ となる。その解は、重力源から $\mu c/l$ の距離を通る直線である。つまり、非相対論的には、光は重力の影響を受けずに直進する。しかし、相対論効果が無視できない場合には光の軌跡は湾曲する。そこで、 $1/r \equiv 2u/m$ のように置き換えると、微分方程式 (49) は、

$$(u')^2 = 4u^3 - u^2 + \frac{\mu^2 m^2 c^2}{4l^2}, \quad (49)$$

のように書き換えられる。この微分方程式の解は、質量がある物体と同様、楕円関数で記述できる。その解の例として、光の軌跡は図 11 に示す曲線を描く。図に示したように、 l と μ は独立したパラメータでなく、二つのパラメータの比 $l/\mu c$ を唯一のパラメータとして取り扱うべきである。そのように解釈するのは、(49) から明らかである。例えば、 μ が 2 倍になったとしても、 l も 2 倍になれば同一の微分方程式になるからだ。パラメータ $l/\mu c$

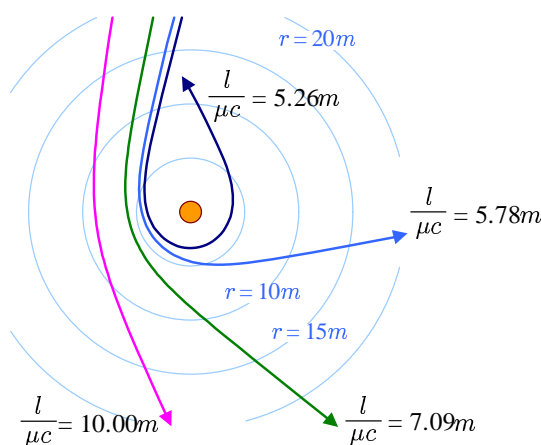


図 11: 重力源の近傍を通過する光の軌跡

は長さの次元をもち、物理的な意味を見いだせる量である。その物理的な意味については、後に解説する。話を戻し、非相対論において直進するはずの光は、重力源の近傍を通過する際に湾曲することがこの図からわかる。特に、重力源から $5m$ 以内の距離まで近づくと、その軌跡は 90° 以上も曲がるのだ。さらに近傍を通過する光は、遠方に逃れる前に重力源を周回することもある。そのような極端な軌跡については後の項で紹介する。

パラメータ $l/\mu c$ の解釈 原点に重力源が存在し、図 12 に示すように、物体が $y = r_0$ を x 軸に平行に発射された光を考えよう。重力場のもとで光は湾曲するが、非相対論では直進すると解釈される。非相対論的な直進する光の軌跡を極座標 $[r, \varphi]$ で表現すると、

$$\varphi = \arcsin \frac{r_0}{r},$$

なる数式で記述できるはずだ。この数式の両辺を微分すると、

$$d\varphi = \frac{r_0}{\sqrt{1 - r_0^2/r^2}} d\left(\frac{1}{r}\right),$$

が成立する。この数式を変形すると、

$$\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2},$$

なる微分方程式が得られる。得られた微分方程式が、(49)と異なり r の -3 次の項が含まれないのは非相対論に基づく光の軌跡だからである。そのことを考慮すると、上に記述し

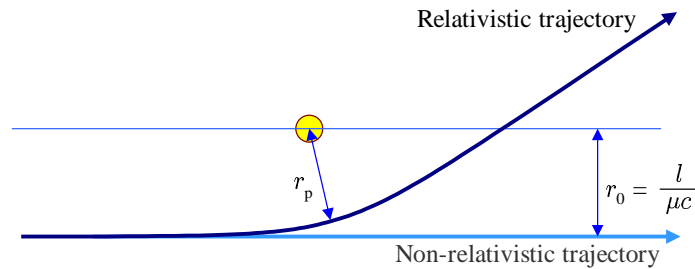


図 12: パラメータ $l/\mu c$ の解釈

た微分方程式は (49) と定数項と r の -2 次の項が一致するはずだ。したがって、定数項に注目すると、

$$r_0 = \frac{l}{\mu c}, \quad (50)$$

が得られる。これでパラメータ $l/\mu c$ の意味がはっきりした。このパラメータは、光が無尽遠から発射されたと仮定した場合の光の発射位置を意味する。具体的には、図 12 に描いた状態を想像すればよい。または、非相対論を想定した場合の、光の軌跡 (直線) と重力源の距離であると解釈することもできる。

2.2.1 弱い重力場での近似

前項で確認できたように、重力源の近傍で光の軌跡は大きく湾曲する。重力場から離ればその湾曲は小さくなる。当然、このような現象は太陽のそばをかすめる光についても発生する現象であるが、その効果が小さすぎて目立たないだけである。本項では、弱い重力場における光の湾曲を評価する。

点対称な重力場における光の軌跡は微分方程式 (49) によって規定される。その微分方程式をもう 1 回微分すると、

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{3m}{r^2}, \quad (51)$$

が得られる。この方程式の右辺の第2項が相対論効果を与えるのだ。その第2項がゼロであれば、非相対論的な微分方程式であり、 $1/r = \cos \varphi / r_0$ が解となる。ただし、 r_0 は積分定数である。右辺の第2項に非相対論的な解を代入して得られる微分方程式:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r_0^2} \cos^2 \varphi,$$

が、弱い重力場において近似的に成立する微分方程式である。この微分方程式は、非斉次の微分方程式であるので、特解を求め、斉次の微分方程式の解 $1/r = \cos \varphi / r_0$ に加算すれば一般解が得られる。したがって、微分方程式 (51) の一般解は、

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi}{r_0} + \frac{2m}{r_0^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right), \quad (52)$$

となる。この解をさらに (51) の右辺の第2項に代入すると、さらに高次の解が得られるのだが、解 (52) を用いて考察しよう。

得られた解 (52) に注目し、光が無遠に存在する方位 φ を算出しよう。そのような方位を算出するには、解 (52) を $\cos \varphi$ についての2次方程式:

$$\frac{m}{r_0^2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{r_0} \cos \varphi - \frac{2m}{r_0} + \frac{1}{r} = 0,$$

とみなせばよい。無限遠の条件 $1/r = 0$ で2次方程式を解くと、

$$\cos \varphi = \frac{r_0}{2m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8m^2}{r_0^2}} \right) \simeq -\frac{2m}{r_0},$$

が得られる。ここで、 $r_0 \gg m$ とした。この結果を用いて、光の入射方位 φ_{app} と通過方位 φ_{rec} は、

$$\varphi_{\text{app}} = -\frac{\pi}{2} - \frac{2m}{r_0}, \quad \varphi_{\text{rec}} = \frac{\pi}{2} + \frac{2m}{r_0},$$

となる。その光の軌跡は図 13 に示す曲線を描く。大域的にみると、光の軌跡は重力場の近傍で折れるように見えるだろう。その折れ曲がる角度 $\Delta\varphi$ は、

$$\Delta\varphi = \frac{4m}{r_0}, \quad (53)$$

となる。例えば、 r_0 に太陽の半径、 m に太陽の重力半径を代入すると、 $\Delta\varphi = 1.75''$ となる。その計算結果は、太陽の近傍を通過する光が 1.75 秒の角度だけ曲がることを意味している。その結果は、1919 年にエディントン卿による皆既日食観測の際に検証され、一般相対性理論の検証の一例となった。

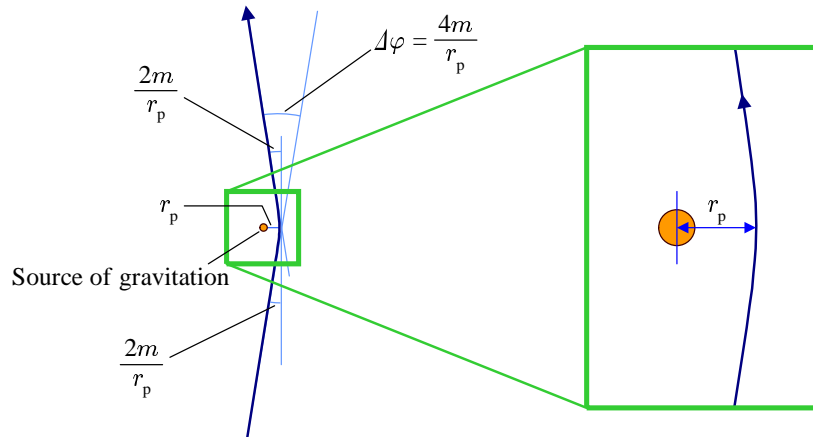


図 13: 弱い重力場における光の湾曲

非相対論との比較 弱い重力場における光の軌跡の湾曲は双曲線軌道に見えるかもしれない。双曲線軌道は非相対論において、大きな速度で重力源をかすめる物体が描く軌跡である。非相対論において光速 c で重力源をかすめる物体の湾曲角を計算してみよう。非相対論における双曲線運動を示した図 2 によると、湾曲角は、

$$\Delta\varphi \simeq \frac{2}{\sqrt{e^2 - 1}},$$

のように近似できる。ここで、物体の速度が非常に大きいので離心率は $e \gg 1$ であることを仮定した。さらに、非相対論における離心率についての関係式:

$$e = 1 - \frac{r_p v_p^2}{m c^2},$$

に注目しよう。この関係式に $v_p = c$ を代入すると、

$$e^2 - 1 = \frac{r_p^2}{m^2} - \frac{2r_p}{m} \simeq \frac{r_p^2}{m^2},$$

が得られる。したがって、非相対論的に予想される光の軌跡の湾曲角は、

$$\Delta\varphi \simeq \frac{2m}{r_p},$$

となる。この湾曲角は、相対論的に予想される光の軌跡の湾曲角のちょうど半分である。言い換えると、一般相対性理論に基づく実際の光の軌跡の湾曲は、弱い重力場において、非相対論的な予想の 2 倍になる。

2.2.2 有効ポテンシャル

質量がある物体の軌道の形状が有効ポテンシャルで決まるように、光の軌跡を調べるために有効ポテンシャルの考え方は有用である。質量がゼロでない一般の物体と同様に、光

の有効ポテンシャルもエネルギー障壁を構成する。そのエネルギー障壁を超えるかどうかで光の軌跡が分類できるのだ。その振る舞いを項で検証する。

光の有効ポテンシャルも、一般の物体と同様に、線素を変形することによって得ることができる。光の線素を変形すると、

$$\frac{\mu^2 c^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{ml^2}{r^3},$$

なる関係式が得られる。この数式の左辺 $\varepsilon \equiv \mu^2 c^2 / 2$ は保存される量であり、右辺の第2項以降:

$$V(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{ml^2}{r^3}, \quad (54)$$

が有効ポテンシャルであると考えべきである。この有効ポテンシャルは、積分定数 l が変わると大きさが変わるが、形状を変えない。図 14 に示すように、有効ポテンシャルは、 $r < 3m$ で単調増加、 $r > 3m$ で単調減少の関数である。この関数は、質量がゼロでない一



図 14: 光の有効ポテンシャル

般の物体と異なり、谷が存在しない。一般の物体が描く束縛軌道が、有効ポテンシャルの谷に挟まれて成立することを思い出すと、光の軌跡は束縛軌道を描くことがないことがわかる。

有効ポテンシャルは、 $r = 3m$ にポテンシャル障壁の極大値があり、その障壁の高さが $l^2/54m^2$ である。保存量 ε がその障壁を超えなければ、光はポテンシャル障壁で跳ね返され、無限遠に逃れる。一方、ポテンシャル障壁を超えた光は重力源に落ちていくのだ。保存量 ε がエネルギー障壁の高さと等しければ、不安定であるが、重力源から $r = 3m$ の距離で円軌道を描く。保存量が $\varepsilon = \mu^2 c^2 / c$ であることから、光が円軌道を描くための条件は、

$$r_0 = \frac{l}{\mu c} = 3\sqrt{3}m,$$

であることがわかる。つまり、重力源から $3\sqrt{3}m$ だけ離れた場所を、直線コースを想定して狙って光を発射すると、その光は重力源を周回する円軌道に合流する。とはいえ、その円軌道は不安定軌道であり、厳密に点対称な重力源はあり得ないので、光に重力源を周回する円軌道を描かさせるのは不可能である。

光の軌跡のパラメータとなる r_0 が $3\sqrt{3}m$ に近い値であれば、図 15 に示すように、光は重力源を周回する。その光は、ポテンシャル障壁とほぼ同じ高さのエネルギーをもつことに相当する。図 15 (b) は、ポテンシャル障壁よりわずかに低く、重力源を 1 回転した後、光は無限遠に逃れている。一方、図 15 (c) はポテンシャル障壁をかするように超える例であ

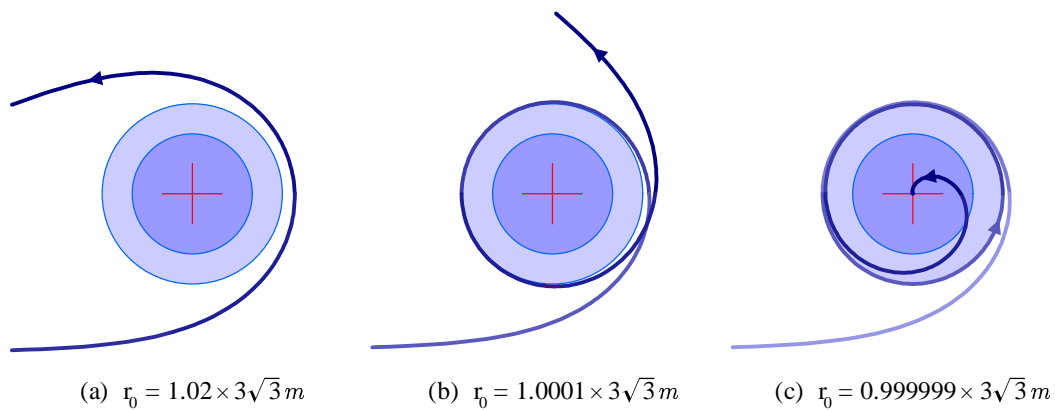


図 15: 重力源を周回する光の軌跡

る。光はポテンシャル障壁をかすめる際に、重力源を 2 回転し、重力源に飲み込まれる。このように、ポテンシャル障壁を超えてしまうと、光といえども重力を振り切ることができない。すでに述べたように、有効ポテンシャルの障壁は $r = 3m$ に存在するので、外部から入射された光は、いったん $3m$ より内側に入ってしまうと、必ず、重力源に飲み込まれるのだ。