

フレネルの関係式の証明

二つの媒質の境界で光は、反射と屈折の現象を起こす。特に、屈折はスネルの法則にしたがい、媒質に依存する角度でその経路を変化させる。光が電磁波であるので、光の反射や屈折の現象は電磁気学で説明できる。本書は電磁気学を利用して光の反射と屈折の現象を説明し、屈折と反射によるエネルギーの配分を計算する。

1 マクスウェルの方程式と電磁波

電磁波を記述するマクスウェルの方程式によって電磁波の存在が明らかになる。存在だけでなく、電磁波が電場と磁場を伴い、エネルギーを運ぶこともマクスウェルの方式から得られるのだ。本節では、マクスウェルの方程式を用いて電磁波の性質を説明する。

1.1 電磁波の存在

電磁場は電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} によって表現される。一般的な媒質の中では、電束密度 \mathbf{D} と磁束密度 \mathbf{B} を加えると、場の記述に便利である。それらの物理量は、マクスウェルの方程式:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1d)$$

によって関係づけられる。電束密度と磁束密度は、等方性の媒質では $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ と $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ のように記述できる。ただし、 ϵ は誘電率、 μ は透磁率と呼ばれる物質依存の定数である。また、第2式の \mathbf{j} は電流密度、 ρ は電荷密度である。

マクスウェルの方程式の第1式はガウスの法則であり、電荷の周囲に電場が形成されることを表現している。第2式は、アンペールの法則であり、電流の周囲に磁場が周回することが表現される。この数式の左辺第2項は、変位電流と呼ばれる。第3式は磁束密度保存の法則であり、磁場に単極(モノポール)が存在しないことを表現している。第4式はファラデーの法則であり、磁場が変化すると周囲に起電力が生じることを表現している。

導出過程を省略するが、マクスウェルの方程式を変形することによって、

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (2b)$$

なる2階の微分方程式が得られる。なお、電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} はともにゼロとした。得られた微分方程式は波動方程式と呼ばれる。この方程式から、電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} が速度 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ で伝搬することがわかる。真空の誘電率と透磁率を用いてその伝搬速度を計算すると、

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s},$$

が得られる。この速度は真空中での光の伝搬速度である。この事実によって、マクスウェルは光が電磁場の一つの形態であることに気づいたのだ。

1.2 エネルギーの伝搬

マクスウェルの方程式から、電磁波の存在を意味する波動方程式が得られたのと同様に、電磁波がエネルギーを伝搬することも導かれる。導出過程を省略するが、マクスウェルの方程式から、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) = 0, \quad (3)$$

が得られるのだ。この数式の左辺第2項は、電磁場のエネルギー密度の時間微分である。この方程式の意味を考えるには、

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

との類似性を見るとよいだろう。この方程式は電荷の流れの方程式である。この方程式は、電流密度の変化率が電流密度に等しいことを表している。もう少しわかりやすく言うと、電流によって電荷が運ばれる。電荷が運ばれることによって、同一地点の電荷密度が変化するのだ。

電荷密度と電球密度のこのアナロジーから(3)を解釈すると、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は電磁場のエネルギーの流れの密度であると考えられる。エネルギーの流れの密度とは、単位時間あたりに単位面積を通過するエネルギーである。エネルギーの流れを表現するベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ はポインティングベクトルと呼ばれる。ポインティングベクトルは、エネルギー流れの方向を向き、その大きさが単位時間あたりに単位面積を通過するエネルギーに等しい。エネルギー流れとは、電磁波の伝搬方向である。ポインティングベクトルが $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ であることから、電磁波の伝搬方向は電場や磁場とは直交することがわかる。

電磁波が z 軸方向に伝搬することを考えよう。空間全体にわたって、 z 軸方向に伝搬する電磁波で満たされている場合を想定すると、その電磁波は波面が xy 平面に平行である平面波を形成するはずだ。すると、波動関数は x と y の依存性をもたない。つまり、波動関数は z と時刻 t の関数となる。その理由で電場を、

$$\mathbf{E} = E e^{i(-kz + \omega t)} \mathbf{e}_x,$$

で表すことにする。ここで、 \mathbf{e}_x は x 軸方向の単位ベクトルである。先ほど示したように、電場が伝搬方向と直交することから、その一例として x 軸方向としたわけだ。想定した電場は、角周波数 ω の正弦波である。また、 k は波数であり、 $k \equiv \omega/c$ で定義される。この電場にマクスウェルの方程式を適用して磁場を特定しよう。具体的には、ファラデーの法則を利用すればよい。そのために電場の回転を計算すると、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -ikE e^{i(-kz+i\omega t)} \mathbf{e}_y,$$

が得られる。ファラデーの法則によると、電場の回転が $-d\mathbf{B}/dt$ と等しいので、磁束密度:

$$\mathbf{B} = \frac{E}{c} e^{i(-kz+i\omega t)} \mathbf{e}_y,$$

が導出される。この結果によると、磁束密度は大きさが E/c であり、電場と直交している。この結果は波動関数が正弦波の場合に限られると思うかもしれない。しかし、フーリエ変換によると任意の関数は異なる周波数の正弦波の重ね合わせである。角周波数の成分が、上で導いた性質をもつので、結局、重ね合わせである任意関数の磁束密度も、大きさが電場の $1/c$ 倍であり、電場と直交するのだ。ここでは、真空を想定したが、等方性の媒質中でも同様である。一般の媒質では、電磁波の伝搬速度が $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ であるので、

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{\varepsilon\mu} |\mathbf{E}|,$$

が成立するはずだ。等方性媒質で、 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ が成立することに注意すると、

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|,$$

であることが導かれる。さらに、電場と磁場が直交することに注意すると、ポインティングベクトルの大きさは、

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}^2, \quad (4)$$

となる。電磁場のエネルギー密度が $\varepsilon\mathbf{E}^2$ であることを考えると、 $|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|$ は単位時間あたりに単位面積を通過するエネルギーに等しい。

1.3 偏光

前項で示したように、電場は電磁波の伝搬方向に直交する。例えば、伝搬方向が z 軸方向であるとき、電場は xy 平面を自由にとることができるはずだ。前項で挙げたように、電場が x 軸方向に限定されるのは特殊な例である。その例のように、電場が特定の方向に限定される状態の電磁波は直線偏光と呼ばれる。

太陽光線のような自然光は偏光がない。偏光がない状態とは、あらゆる方向に直線偏光した電磁波がランダムに重ね合わされている状態である。しかも、その重ね合わせが時々刻々と変化すると考えればよい。

マクスウェルの上程式から導かれる波動方程式によると、 z 軸方向に伝搬する電磁波に伴う電場は、 x 軸方向と y 軸方向に互いに独立な波動関数を設定することができる。例えば、

$$E_x = E \cos(\omega t + \phi_x) \quad E_y = E \cos(\omega t + \phi_y)$$

のように同一振幅、同一周波数の正弦波で x 軸方向と y 軸方向で個別の関数を与えてみよう。ここで、 ϕ_x と ϕ_y は定数である。これら定数の選択によって、図1に示すように、合成される電場ベクトルの特徴が変わるのだ。例えば、 $\phi_x = \phi_y$ 、すなわち、両者が同一位相のとき、電場は x 軸から 45° の方向に直線的に振動する。いわゆる直線偏光である。また、 $\phi_x = \phi_y + \pi/2$ のように、 x 軸成分が $\pi/2$ だけ位相が進んでいる場合、電場は時間経過とともに円を描く。位相の関係が $\phi_x = \phi_y - \pi/2$ のときも電場は円を描くが、逆方向に回転するのだ。他の位相関係では、電場は時間経過とともに楕円を描く。しかも、 ϕ_1 と ϕ_2 の関

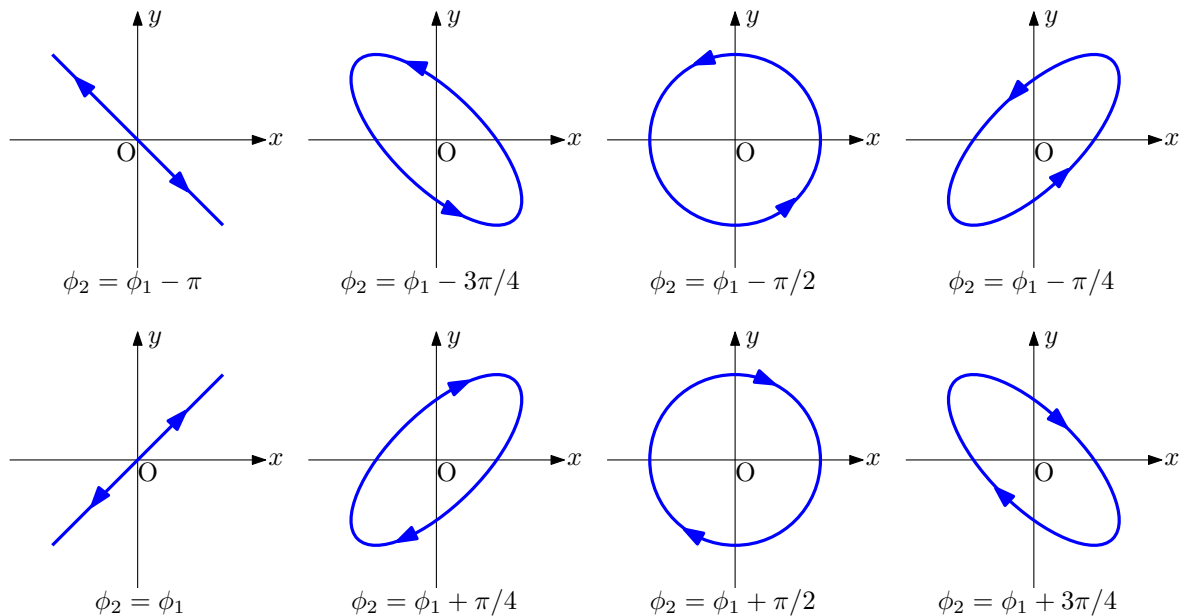


図 1: 電場が描く形状

係によって、時間経過とともに電場が描く方向が右回りか左回りかが決まるのだ。電場ベクトルが描く図形に応じて、偏光の種類は、直線偏光、円偏光、楕円偏光のように分類される。それらの偏光は、同一振幅で互いに直交する直線偏光した電場を二つ合成すれば得られるということだ。図1では、 x 軸方向と y 軸方向の直線偏光に限定したので得られる楕円偏光の長軸が x 軸と 45° の方向に限られている。しかし、方向を限定せず、互いに直交した二つの直線偏光を合成すれば、任意の偏光が得られるのだ。

後に議論する反射や屈折の現象は、偏光によって振る舞いが異なる。反射や屈折の議論で扱うということは、媒質の境界線との幾何学的な関係で偏光を分類すると便利である。その意味で、直線偏光は s 偏光と p 偏光に分類される。これらの偏光を区別するには、図2に示すような入射面 (plane of incidence) を設定する。入射面とは、媒質の境界面に垂直であり、入射電磁波の経路を含む平面である。図では、媒質の境界に垂直に立てた円板と

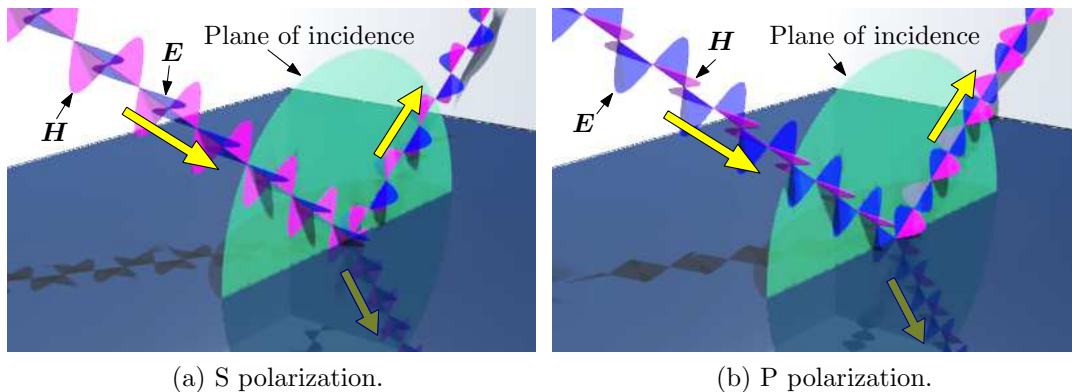


図 2: 直線偏光の種類

して描いている。そのうち, s 偏光は図 2 (a) に示すように, 電場が入射面と垂直である偏光状態である。この場合, 磁場が入射面と平行になる。一方, p 偏光は図 2 (b) に示すように, 電場が入射面と平行である偏光状態である。この場合, 磁場が入射面と垂直である。媒質が大地や水面を想定するとき, 電磁波工学の分野では, s 偏光と p 偏光は, それぞれ, 水平偏波, 垂直偏波と呼ばれる。偏光の名称は取り扱う分野によって様々な方言があるようだ。偏光の名称のバリエーションは表 1 に示すように, 分野ごとに多様な名称で呼ばれている。分野によって, 入射面を基準にしている名称と, 媒質境界を基準にしているものが

表 1: 偏光の名称のバリエーション

電場が入射面に垂直	電場が入射面に平行
TE 波 (transverse electric)	TM 波 (transverse magnetic)
H 波 (磁場 H が入射面に平行)	E 波 (電場 E が入射面に平行)
水平偏波 (媒質境界に対して水平)	垂直偏波 (媒質境界に対して垂直)
直交偏波 (入射面と直交)	平行偏波 (入射面に平行)
s 偏光 (senkrecht; ドイツ語で「垂直」)	p 偏光 (parallel; ドイツ語で「平行」)
σ 偏光 (s 波と同様)	π 偏光 (p 波と同様)

ある。TE 波/TM 波が入射面に垂直な成分で名称が定まっているのに対し, H 波/E 波の基準は入射面に平行な成分である。他の例を見ても, 分野によって名称の基準がまちまちである。

2 電磁波の反射と屈折

電磁気学に基づいて反射と屈折を解析しよう。その結果として, 電磁波の反射や屈折の方向, さらに, 反射, 屈折される電磁波のエネルギーの配分も計算できる。それらの計算するには, マクスウェルの方程式から媒質境界で満たすべき境界条件を導出する。導出した境界条件を用いて計算すれば電磁波の反射や屈折が解析できるのだ。

2.1 境界条件

媒質境界において電磁波が満たすべき境界条件は、マクスウェルの方程式から容易に導出することができる。結果を先に述べると、媒質境界面において、電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} は法線成分が媒質境界面で連続となる。電束密度 \mathbf{D} と磁束密度 \mathbf{B} は、接線成分が媒質境界面で連続となる。

電束密度と磁束密度が媒質境界で必要とする条件を導出しよう。マクスウェル方程式のうち、電束密度と磁束密度の保存則：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

に注目する。媒質の境界を含む体積 V を考え、その体積における積分を記述すると、

$$\int_{S=\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV, \quad \int_{S=\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

なる数式が得られる。第1式と第2式の左辺の積分にはガウスの積分定理を用いた。ここで、記号 ∂V は体積 V の表面積を意味する。この積分領域として、図3に示すように、媒質1と媒質2の内部に底面をもつ柱体を考えよう。柱体の高さをゼロに近づけると体積がゼロに近づくので、積分公式の第1式の右辺がゼロに近づくはずだ。しかも、柱体の側面積もゼロに近づくので、左辺は柱体の底面における積分以外はゼロになるのだ。柱体の上

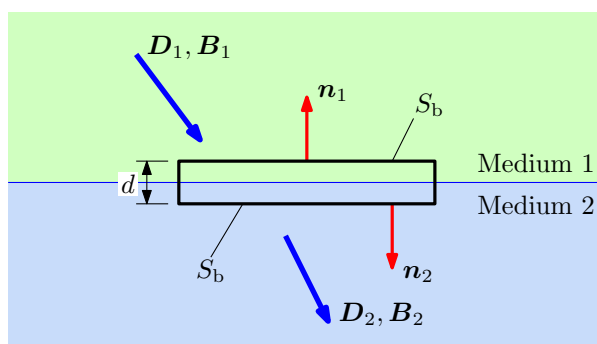


図 3: 法線方向の境界条件

底と下底の面積をともに S_b としよう。この面積が十分に小さければ、積分領域で電束密度と磁束密度は一定と考えてよい。媒質1における電束密度と磁束密度を \mathbf{D}_1 と \mathbf{B}_1 とし、媒質2では \mathbf{D}_2 と \mathbf{B}_2 とする。そのとき、第1式と第2式は、

$$S_b (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2) = 0,$$

$$S_b (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2) = 0,$$

のように記述できる。なお、 \mathbf{n}_1 と \mathbf{n}_2 は、それぞれ、媒質1と媒質2における底面の単位法線ベクトルである。これらの法線ベクトルが互いに逆方向を向いていることに注意し、 $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ と書くことにすると、

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}, \quad (5)$$

が得られる。これが電束密度と磁束密度に関する境界条件である。それらの物理量は、媒質境界において、法線成分が連続となる。

電場と磁場の境界条件は、アンペールの法則とファラデーの法則に注目すればよい。それらの方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

なる形式で記述される。媒質 1 と媒質 2 を通過する単純閉曲線を設定し、その閉曲線の内部で面積分をすると、上記の方程式は、

$$\int_{C=\partial S} \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} ds + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS,$$

$$\int_{C=\partial S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} ds + \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

のように書き換えられる。なお、 C が設定した単純閉曲線、 S が C で囲まれた領域である。さらに、 \mathbf{t} は閉曲線 C の単位接線ベクトル、 \mathbf{n} は領域 S の単位法線ベクトルである。ここで、閉曲線 C を図 4 に示すように、媒質 1 と媒質 2 の内部に底面をもつ長方形とする。この長方形の高さを限りなくゼロに近づけていく。すると、領域 S の面積がゼロに近づく

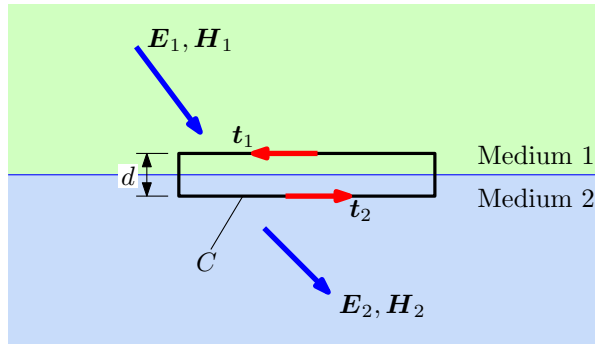


図 4: 接線方向の境界条件

ので、領域 S にわたる面積分はゼロになる。さらに、長方形の側辺での線積分もゼロになる。長方形 C の底辺の長さを L としよう。この長さが十分に小さければ、積分経路において電場と磁場がほぼ一定とみなしてもよい。したがって、積分は、

$$L(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t}_2) = 0,$$

$$L(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2) = 0,$$

のように記述できる。なお、 \mathbf{t}_1 と \mathbf{t}_2 は、それぞれ、媒質 1 と媒質 2 における底辺の単位接線ベクトルである。これらの接線ベクトルが互いに逆方向を向いていることに注意し、 $\mathbf{t} \equiv \mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_2$ と書くことにすると、

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}, \quad (6)$$

が得られる。これが電場と磁場に関する境界条件である。それらの物理量は、媒質境界において、接線成分が連続となる。

境界条件を導出する過程では電場と電束密度、磁場と磁束密度を異なる物理量であるかのように取り扱ったが、等方性の媒質では $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ が成立する。そのため、等方性媒質における境界条件は次のようになる。

- 電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} は、媒質境界で接線成分が連続である。
- 電場に誘電率を乗じた積 $\epsilon \mathbf{E}$ は、媒質境界で法線成分が連続である。
- 磁場に透磁率を乗じた積 $\mu \mathbf{H}$ は、媒質境界で法線成分が連続である。

2.2 反射と屈折の方向

光が電磁波であることから、電磁波の反射や屈折はホイヘンスの原理にしたがう。ホイヘンスの原理を適用した結果、入射角と同一の反射角で反射が発生し、スネルの法則で規定される屈折角に屈折が発生する。

電磁波の波動関数を考えよう。波動関数は電場、または、磁場を表現する関数だと思えばよい。波動関数を取り扱うため、電磁波の波数ベクトル \mathbf{k} と角周波数 ω を想定する。波数ベクトルは波数 $k \equiv 2\pi/\lambda$ (λ は波長) を長さとするベクトルであり、電磁波の伝搬方向を向いている。角周波数は、単位時間あたりに波動関数の位相回転を表す量である。波数ベクトル \mathbf{k} と角周波数 ω が与えられると、空間中の位置 \mathbf{x} 、時刻 t における電磁波の波動関数は、

$$f(\mathbf{x}, t) = A e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)},$$

となる。なお、原点において時刻 $t = 0$ で位相がゼロになるように都合よく時刻 t が設定されている。この数式では、正弦関数の代わりに虚数指数をもつ指数関数で波動関数を記述した。正弦関数を用いてもよいのだが、指数関数で記述すると、後に三角関数の加法定理などを気にせずに計算できるので便利である。

媒質境界が $z = 0$ にあり、 $z \geq 0$ の空間を媒質 1 が、 $z < 0$ の空間を媒質 2 が満たしているとする。入射光が xz 平面に平行で、かつ、入射角 θ_i で媒質 1 から入射する場合を考えよう。この入射波を受けて、媒質境界では反射と屈折が発生するが、どの方向に電磁波が伝搬するか現時点でわからないので、反射方向と屈折方向を図 5 のように設定しよう。反射方向は z 軸正の方向からの天頂角 θ_r と、 x 軸からの円周角 ϕ_r で表そう。屈折方向は z 軸負の方向からの天頂角 θ_t と、 x 軸からの円周角 ϕ_t で表そう。さらに、波数と角周波数は、入射波、反射波、屈折波でそれぞれ、 k_i と ω_i , k_r と ω_r , k_t と ω_t としておこう。その設定のもとで、入射波、反射波、屈折波の波数ベクトルは、

$$\mathbf{k}_i = [k_i \sin \theta_i, 0, -k_i \cos \theta_i],$$

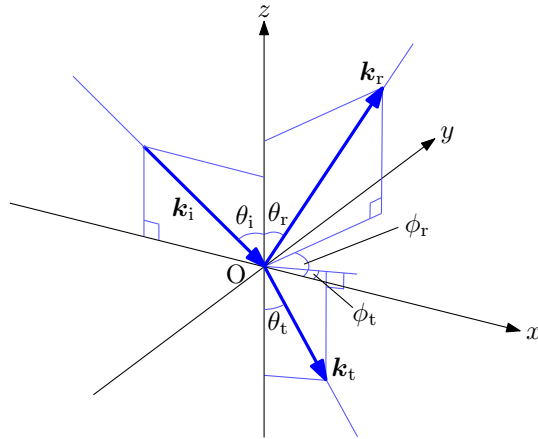


図 5: 入射波, 反射波, 屈折波の設定

$$\mathbf{k}_r = [k_r \sin \theta_r \cos \phi_r, k_r \sin \theta_r \sin \phi_r, k_r \cos \theta_r],$$

$$\mathbf{k}_t = [k_t \sin \theta_t \cos \phi_t, k_t \sin \theta_t \sin \phi_t, -k_t \cos \theta_t],$$

となるはずだ。これらの波数ベクトルを波動方程式の式に代入すると, 入射波, 反射波, 屈折波の波動関数:

$$f_i(\mathbf{x}, t) = A_i e^{i(-k_i x \sin \theta_i + k_i z \cos \theta_i + \omega_i t)},$$

$$f_r(\mathbf{x}, t) = A_r e^{i(-k_r x \sin \theta_r \cos \phi_r - k_r y \sin \theta_r \sin \phi_r - k_r z \cos \theta_r + \omega_r t)},$$

$$f_t(\mathbf{x}, t) = A_t e^{i(-k_t x \sin \theta_t \cos \phi_t - k_t y \sin \theta_t \sin \phi_t + k_t z \cos \theta_t + \omega_t t)},$$

が得られる。指数関数がいささかにぎやかになったようだ。これで反射方向や屈折方向が定まるのか疑問に思えるかもしれない。ここで, 媒質境界で指数, つまり, 位相が連続であるという条件を設けよう。すると,

$$\begin{aligned} -k_i x \sin \theta_i + \omega_i t &= -k_r x \sin \theta_r \cos \phi_r - k_r y \sin \theta_r \sin \phi_r + \omega_r t \\ &= -k_t x \sin \theta_t \cos \phi_t - k_t y \sin \theta_t \sin \phi_t + \omega_t t, \end{aligned}$$

なる方程式が抽出できる。ところで本当に媒質境界で位相が連続と決めてつけていいのだろうか? 心配無用である。実は, 振幅 A_i, A_r, A_t は複素数であることを想定している。その複素振幅によって, 入射波, 反射波, 屈折波の間で位相が変化することを許容している。上記の等式を条件とすることで, 媒質境界での, 入射波, 反射波, 屈折波の位相の関係に場所や時間による依存性を禁止している。任意の x, y, t について上記等式が成立することから,

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t, \tag{7a}$$

$$\phi_r = \phi_t = 0, \tag{7b}$$

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t, \tag{7c}$$

が得られる。第1式は、入射波、反射波、屈折波のすべてが同一周波数であることを意味している。第2式は、反射波と屈折波が、入射波と同一平面上を伝播することを意味する。第3式についてはもう少し考察が必要である。入射波、反射波、屈折波の波数は、それぞれ、

$$k_i = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_r = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_t = \frac{\omega}{c_2},$$

と書くことができる。ただし、 c_1 と c_2 は、それぞれ、媒質1と媒質2における電磁波の伝搬速度である。入射波と反射波はともに媒質1を伝搬するので、伝搬速度はともに c_1 を用いている。つまり、入射波と反射波の波数は等しく、 $k_i = k_r$ が成立する。また、波数の代わりに媒質中の電磁波の伝搬速度を用いると、

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (8)$$

なる関係が得られる。得られた関係式の第1式が反射の法則であり、入射角と同一の反射角で電磁波が反射することを意味している。第2式は、スネルの法則である。多くのテキストでは、媒質中の電磁波の伝搬速度と真空中の伝搬速度の比 $n_1 \equiv c/c_1$, $n_2 \equiv c/c_2$ を屈折率と定義し、スネルの法則は、

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (9)$$

なる関係式で記述される。上で定義したように、屈折率が大きい媒質では電磁波の伝搬速度が小さくなるので、それに相当して透過角度 θ_t が小さくなるように電磁波は屈折する。

2.3 電場に対する反射と屈折の関係

媒質境界で電磁波が反射と屈折するという事は、エネルギー保存則を考えると、ある定められた比率で、反射と屈折にエネルギー分配されているはずだ。本項ではその分配比を計算する準備として、電場の反射と透過について考察する。電磁波の反射と屈折は、s偏光とp偏光で異なるので、本項では順を追って計算する。

前項で反射と屈折が入射面と同一面であることを示した。さらに、反射角が入射角と等しく、屈折角はスネルの法則で規定されることを示した。その結果を受けて、本項では入射、反射、屈折はすべて xz 平面上に限定し、入射角と反射角を θ_1 , 屈折角を θ_2 と記述する。

S 偏光 図6に示すように、電場が y 軸に平行な場合を考えよう。媒質境界が $z = 0$ であり、電磁波の伝搬が xz 平面に平行なので、この状況設定はs偏光である。図に示すように、入射波、反射波、屈折波には、それぞれ、添え字 i, r, t を付しておいた。図の設定を見ながら、波数ベクトルを書き下すと、

$$\mathbf{k}_i = [k_1 \sin \theta_1, 0, -k_1 \cos \theta_1], \quad (10a)$$

$$\mathbf{k}_r = [k_1 \sin \theta_1, 0, k_1 \cos \theta_1], \quad (10b)$$

$$\mathbf{k}_t = [k_2 \sin \theta_2, 0, -k_2 \cos \theta_2], \quad (10c)$$

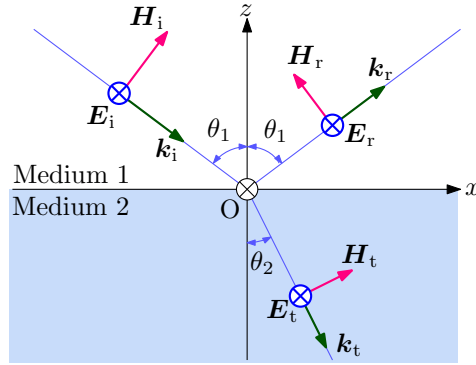


図 6: S 偏光における電磁波の反射と屈折

となるはずだ。電場は y 軸方向の成分しかもたないので、

$$\mathbf{E}_i = [0, E_i, 0], \quad (11a)$$

$$\mathbf{E}_r = [0, E_r, 0], \quad (11b)$$

$$\mathbf{E}_t = [0, E_t, 0], \quad (11c)$$

と書くしかないだろう。これらの数式では波動関数を表す $e^{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)}$ を省略している。数式の中に明示的に書かれていないが、 $e^{i(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)}$ の因子が隠されていると思って以降の数式を追っていただきたい。磁場についてはマクスウェルの方程式を用いて、電場を用いて表記しよう。そのためには、ファラデーの法則:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,$$

を用いればよい。まず、電場の回転を計算すると、

$$\nabla \times \mathbf{E}_i = [-ik_1 E_i \cos \theta_1, 0, -ik_1 E_i \sin \theta_1],$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_r = [-ik_1 E_r \cos \theta_1, 0, ik_1 E_r \sin \theta_1],$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_t = [-ik_2 E_t \cos \theta_2, 0, -ik_2 E_t \sin \theta_2],$$

が得られる。この計算を実行する際に、因子 $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ が隠れていることに注意した。続いて、因子 $e^{i\omega t}$ が隠れているのことに注意すれば、 $\partial \mathbf{H} / \partial t = i\omega \mathbf{H}$ となる。したがって、磁場は、

$$\mathbf{H}_i = \sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} [E_i \cos \theta_1, 0, E_i \sin \theta_1],$$

$$\mathbf{H}_r = \sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} [E_r \cos \theta_1, 0, -E_r \sin \theta_1],$$

$$\mathbf{H}_t = \sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} [E_t \cos \theta_2, 0, E_t \sin \theta_1],$$

であることが導かれる。計算されたベクトルの向きは図6と合致しているはずだ。なお、この計算において、 $k_1 = \omega / c_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ 、 $k_2 = \omega / c_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ であることを利用した。準備が整ったところで、電場と磁場に境界条件を適用しよう。既に考察したように、媒質

境界で、電場と磁場は接線成分が連続であり、電束密度と磁束密度は法線成分が連続である。これを数式として表現すると、

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_i \cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_t, \quad (12a)$$

$$E_i + E_r = E_t, \quad (12b)$$

$$\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} E_i \sin \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} E_r \sin \theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} E_t \sin \theta_2,$$

が得られる。これらの数式は、順に x , y , z に関する境界条件となっている。それらの数式は、順に、磁場、電場、磁束密度の境界条件であるともいえる。第3式にスネルの法則を適用すると、第2式と第3式は同一の数式であることがわかる。すなわち、境界条件で得られる独立な数式は第1式と第2式の二つである。これらの数式から、

$$E_r^{(s)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 - \mu_1 n_2 \cos \theta_2}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2} E_i, \quad (13a)$$

$$E_t^{(s)} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2} E_i, \quad (13b)$$

が得られる。この数式には、s 偏波を表すため右肩に添え字 (s) を付しておいた。第1式を得るには、(12b) を (12a) に代入して E_t を消去し、屈折率の関係:

$$n_1 = \frac{c}{c_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad n_2 = \frac{c}{c_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

を利用した。得られた第1式を (12b) に代入すればただちに第2式が得られる。入射電場に対する反射電場と透過電場の比 $r^{(s)} \equiv E_r^{(s)}/E_i^{(s)}$ と $t^{(s)} \equiv E_t^{(s)}/E_i^{(s)}$ を定義しよう。特に媒質1から媒質2へ入射した電磁波を表すため、添え字 12 を付加して記述すると、

$$r_{12}^{(s)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 - \mu_1 n_2 \cos \theta_2}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2}, \quad (14a)$$

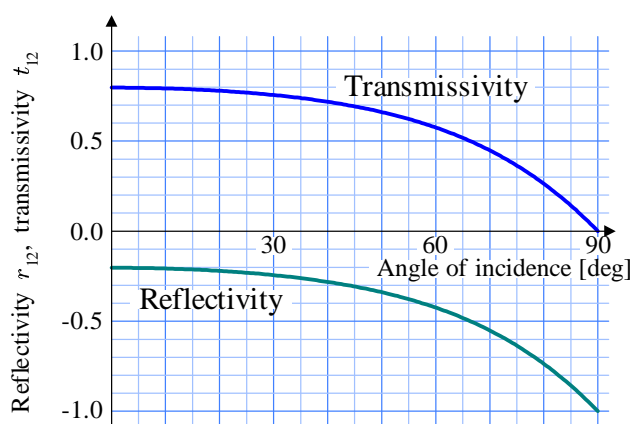
$$t_{12}^{(s)} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2}, \quad (14b)$$

が得られる。これらの数値は、それぞれ、**振幅反射率**と**振幅透過率**と呼ばれる。単なる反射率や屈折率でなく、振幅が前置されているのは、エネルギーに関する反射などと区別するためだ。

振幅反射率や振幅透過率は、入射電場に対する振幅だけでなく、位相の関係も表している。数式 (14b) によると、振幅透過率は入射電場に正の実数を乗じた値となっている。これは、透過電場が常に入射電場と同一位相であることを意味する。一方、反射電場は状況が異なる。それは、 $\mu_2 n_1 \cos \theta_1 < \mu_1 n_2 \cos \theta_2$ の場合があるということだ。その場合、振幅反射率が負の実数であるので、入射波との間に 180° の位相差が生じるのだ。その現象は入射角に依存せず、媒質に依存するだけである。この位相反転は波動物理における固定端反

射に相当する。一方、 $\mu_2 n_1 \cos \theta_1 > \mu_1 n_2 \cos \theta_2$ であれば、自由端反射に相当し、入射電場と反射電場の位相が一致する。

例として、真空から比誘電率 2.28 (屈折率 1.51) の石英ガラスに s 偏光の可視光線を入射したときの電場の反射率と透過率を計算した結果を図 7 に示す。この例は固定端反射にあたり、反射率は負の値である。また、入射角が大きくなると、反射率が増加し、透過率が減



媒質 1: 真空, 媒質 2: 石英ガラス $\epsilon_r = 2.28$

図 7: S 偏光の可視光線の振幅反射率と振幅透過率

少することがこの計算によって確認できる。この計算結果は、横方向からガラスを見ると横方向の景色がガラスに映りこみやすいという経験則と合致する。

P 偏光 図 8 に示すように、電場が xz 平面に平行な場合を考えよう。媒質境界が $z = 0$ であり、電磁波の伝搬が xz 平面に平行なので、この状況設定は p 偏光である。図に示すように、入射波、反射波、屈折波には、それぞれ、添え字 i, r, t を付しておいた。電場ベクトルの

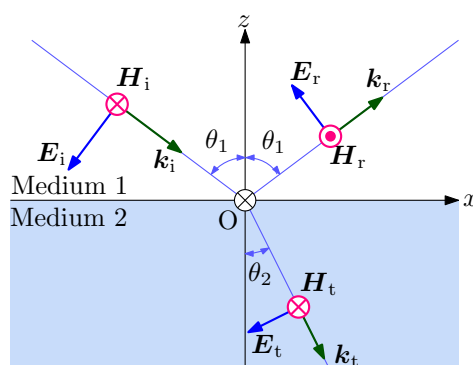


図 8: P 偏光における電磁波の反射と屈折

向きをどの方向に設定するか迷うところであるが、図のように、入射角 $\theta_i = 0$ のとき入射電場と反射電場が同一方向を向くように設定した。計算手順は s 偏光と同様である。波数ベクトルは s 偏光のときと同様に、図を見ながら書き下すと、

$$\mathbf{k}_i = [k_1 \sin \theta_1, 0, -k_1 \cos \theta_1],$$

$$\mathbf{k}_r = [k_1 \sin \theta_1, 0, k_1 \cos \theta_1],$$

$$\mathbf{k}_t = [k_2 \sin \theta_2, 0, -k_2 \cos \theta_2],$$

のようになる。P 偏光の場合、磁場が y 軸に平行となるので磁場を基準に計算する方がいささか楽なのだが、電場を基準に計算する姿勢を崩さずにいこう。図 8 を見ながら電場ベクトルを書くと、

$$\mathbf{E}_i = [-E_i \cos \theta_1, 0, -E_i \sin \theta_1], \quad (15a)$$

$$\mathbf{E}_r = [-E_r \cos \theta_1, 0, E_r \sin \theta_1], \quad (15b)$$

$$\mathbf{E}_t = [-E_t \cos \theta_2, 0, -E_t \sin \theta_2], \quad (15c)$$

が得られる。当然、ここでも波動関数を表す $e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)}$ を省略している。さらに、ファラデーの法則を用いて磁場を得よう。手順は p 偏光と同一なので、途中計算を省略して結果を書くと、磁場は、

$$\mathbf{H}_i = \sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} [0, E_i, 0],$$

$$\mathbf{H}_r = -\sqrt{\varepsilon_1 / \mu_1} [0, E_r, 0],$$

$$\mathbf{H}_t = \sqrt{\varepsilon_2 / \mu_2} [0, E_t, 0],$$

なる形になる。計算されたベクトルの向きは図 8 と合致している。引き続き、電場と磁場に境界条件を適用しよう。再び述べておくと、媒質境界で、電場と磁場は接線成分が連続であり、電束密度と磁束密度は法線成分が連続である。これを数式として表現すると、

$$-E_i \cos \theta_1 - E_r \cos \theta_1 = E_t \cos \theta_2, \quad (16a)$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_t, \quad (16b)$$

$$-\varepsilon_1 E_i \sin \theta_1 + \varepsilon_1 E_r \sin \theta_1 = -\varepsilon_2 E_t \sin \theta_2,$$

が得られる。これらの数式は、順に x, y, z に関する境界条件となっている。これらの数式は、順に、電場、磁場、電束密度の境界条件であるともいえる。第 3 式にスネルの法則を適用すると、第 2 式と第 3 式は同一の数式であることがわかる。すなわち、境界条件で得られる独立な数式は第 1 式と第 2 式の二つである。これらの数式から、

$$E_r^{(p)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 - \mu_1 n_2 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 + \mu_1 n_2 \cos \theta_1} E_i^{(p)}, \quad (17a)$$

$$E_t^{(p)} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 + \mu_1 n_2 \cos \theta_1} E_i^{(p)}, \quad (17b)$$

が得られる。なお、電場の右肩に p 偏光を意味する添え字 (p) を付しておいた。第 1 式を得るには、(12b) を (12a) に代入して E_t を消去し、屈折率と誘電率・透磁率との関係を利用した。得られた第 1 式を (16b) に代入すればただちに第 2 式が得られる。

ここでも、電場の振幅に対して $r^{(p)} \equiv E_r^{(p)}/E_i^{(p)}$ と $t^{(p)} \equiv E_t^{(p)}/E_i^{(p)}$ で振幅反射率と振幅透過率を定義しよう。このように定義された反射率と透過率は、

$$r_{12}^{(p)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 - \mu_1 n_2 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 + \mu_1 n_2 \cos \theta_1}, \quad (18a)$$

$$t_{12}^{(p)} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 + \mu_1 n_2 \cos \theta_1}, \quad (18b)$$

となる。P 偏光の場合も s 偏光と同様に、(18a) と (18b) から位相の関係もわかる。透過電場は、振幅透過率が正の実数であるため、入射電場と同一位相である。反射電場は、s 偏光とは異なり、入射電場と同一位相になる場合と、 180° 反転する場合がある。ここで、 $\mu_2 n_1 < \mu_1 n_2$ である場合を考えよう。振幅反射率の分母が常に正の実数であるのに対し、分子は角度によって正の実数になるときと負の実数になるときがある。具体的には、小さい入射角で分子が負に、大きい入射角で分子が正になるのだ。固定端反射で位相が 180° 反転する現象と結びつけるにはある解釈が必要となるので、それは後に解説することにして次の話題に進もう。

導出した結果として、s 偏光と p 偏光における振幅反射率と振幅透過率をまとめて書くと、

$$r_{12}^{(s)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 - \mu_1 n_2 \cos \theta_2}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2}, \quad t_{12}^{(s)} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2}, \quad (19)$$

$$r_{12}^{(p)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 - \mu_1 n_2 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 + \mu_1 n_2 \cos \theta_1}, \quad t_{12}^{(p)} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 + \mu_1 n_2 \cos \theta_1}, \quad (20)$$

が得られる。可視光のような高周波領域で電磁波を透過する媒質は、 $\mu_1, \mu_2 \simeq \mu_0$ であるので、高周波領域では、振幅反射率と振幅透過率は簡略化することができる。簡略化した結果を示すと、

$$r_{12}^{(s)} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad t_{12}^{(s)} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (21)$$

$$r_{12}^{(p)} = -\frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}, \quad t_{12}^{(p)} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (22)$$

となる。このうち、(21) の導出は容易である。(19) について、 $\mu_1 = \mu_2$ とおき、分母と分子に $\sin \theta_2$ を乗じ、スネルの法則 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ を適用すれば、(21) の二つの数式が得られる。一方、(22) は、容易に導出できるとは言い難い。先ほど説明した (21) と同じ手順で、

$$r_{12}^{(p)} = -\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2}, \quad t_{12}^{(p)} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2},$$

が得られる。上に示した結果を得るには、もう 1 ステップ必要である。この中間結果の第 1 式の分子を計算すると、

$$\begin{aligned} \text{Numerator} &= \sin \theta_1 \cos \theta_1 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) - \sin \theta_2 \cos \theta_2 (\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) \\ &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) - \cos \theta_1 \sin \theta_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2), \end{aligned}$$

が得られる。分母も同様の手順によって、

$$\text{Denominator} = \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

が得られる。この分子と分母を上にした中間結果に代入すると、(22) が導出できるのである。数式(21)と(22)は簡単な形態に落ち着いているが、 $\theta_1 = 0$ のとき注意が必要である。そのとき、 $\theta_2 = 0$ になるので、(21)と(22)の分母がゼロとなるのだ。同時に分子もゼロとなるので、 $\theta \rightarrow 0$ とした極限で評価すべきである。極限をとった結果を示すと、

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow 0} r_{12}^{(s)} = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \quad \lim_{\theta_1 \rightarrow 0} t_{12}^{(s)} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2},$$

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow 0} r_r^{(p)} = -\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \quad \lim_{\theta_1 \rightarrow 0} t_{12}^{(p)} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2},$$

となる。この結果を見ると、先ほど s 偏光のときに言及した固定端/自由端の意味合いが明確になる。この結果によると、s 偏光と p 偏光の双方において、媒質の屈折率が $n_2 > n_1$ のとき固定端反射となることがわかるのだ。電磁波にとっては屈折率が大きいほど固い物質ということなのかもしれない。

数式(21)と(22)にはもう一つ注意すべき点がある。S 偏光と p 偏光では、反射特性の振る舞いに違いがあるのだ。屈折率が $n_2 > n_1$ を満たす場合を考えよう。S 偏光では入射角が 0° から 90° まで一貫して反射波の位相が 180° 反転する。一方、s 偏光では入射角が小さいときに反射波の位相が 180° 反転するが、入射角が大きくなると位相反転が起きない。位相反転が起きるかどうかの境界では、電場の反射係数がゼロになるのだ。ゼロになる条件は、厳密には、

$$\mu_2 n_1 \cos \theta_2 - \mu_1 n_2 \cos \theta_1 = 0, \quad (23)$$

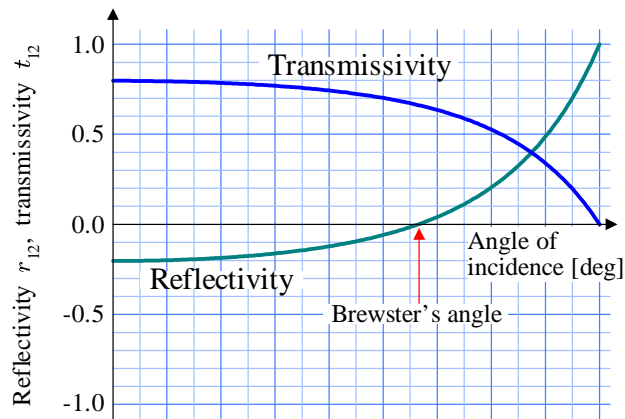
を満たすときである。透磁率が物質に依存しない ($\mu_1 = \mu_2$) 前提での簡略式によると、入射角と屈折角が $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ の関係を満たすとき、(22) の分母が無限大になり、電場の反射係数がゼロになる。この条件を満たす入射角はブリュースター角と呼ばれる。ブリュースター角は簡略式において、条件 $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ を満たす角度である。これを幾何学的な表現すると、「反射角と屈折角が直角をなすとき、p 偏光では反射が発生しない」ということだ。

簡略式におけるブリュースター角の条件 $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ は、スネルの法則 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ を用いると、

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad (24)$$

のように書き換えられる。ここで、ブリュースター角を θ_B とおいた。水(屈折率 1.33)の場合、ブリュースター角は 53.12° 、石英ガラス(屈折率 1.51)の場合、 56.49° である。数式(24)によると、 $n_2 < n_1$ のときもブリュースター角が存在する。空气中(または真空中)に向かって水中の光源から光を照射する場合、ブリュースター角は 36.88° となる。

例として、真空から屈折率 1.51 の石英ガラスに可視光を入射したときの振幅反射率と振幅透過率を計算した結果を図 9 に示す。反射率がゼロになるブリュースター角が存在する



媒質 1: 真空, 媒質 2: 石英ガラス ($\epsilon_r = 2.28$)

図 9: P 偏光の可視光の振幅反射率と振幅透過率

ことが、このグラフから確認できる。ブリュースター角を挟み、振幅反射率が負から正へと変化している。さらに、s 偏光と同様に、入射角が大きくなると反射率の絶対値が大きくなり、透過率が小さくなる。

ブリュースター角の解釈 あくまでも筆者の私見なのだが、ブリュースター角の存在は固定端/自由端反射に関係しているのではないかと仮定する。仮に、ブリュースター角が存在せず、p 偏光でも固定端反射が一貫して位相反転したとする。入射角が小さいとき、電場が入射波と反射波で逆方向を向いているのだから、幾何学的に見ても位相反転していると解釈できるだろう。しかし、入射角が 90° 付近まで大きくなったらどうだ？ 数学的には位相反転していることになっているものの、図を見ると、反射波の電場の向きが入射波とほぼ同じではないか。つまり、幾何学的には位相反転していないのである。しかし、現実には、ブリュースター角を境にして電場反射係数の符号が入れ替わるのだ。その効果として、 90° 付近の大きな入射角でも反射波の電場が入射波と逆向きになるのだ。固定端反射/自由端反射として現象を見たときに、入射角が大きくても小さくても、幾何学的に位相反転の現象が成立するのである。いうならば、ブリュースター角は入射角を小さい/大きいに分ける境界となる角度である。なお、s 偏光にブリュースター角が存在しないのは、数学的な位相反転と幾何学的な位相反転が常に合致するからである。

2.4 エネルギー反射率とエネルギー透過率

電場の振幅反射率と振幅透過率を得ることができたので、反射と透過でエネルギーが配分される比率を計算しよう。計算結果として満たすべきは、エネルギー保存則があるので、反射と屈折のエネルギーの和が入射エネルギーに等しいことである。

エネルギーを見積もるために有用な物理量はポインティングベクトルである。前節で説明したようにポインティングベクトルは単位時間に単位面積を通過するエネルギーを長さ

にもつベクトルである。前節で示したように、ポインティングベクトルの長さは、

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E}^2,$$

で計算できる。この数式を見ると、前項で導出した数式を自乗し、各媒質について $\sqrt{\varepsilon/\mu}$ を乗じればエネルギーの比較ができそうだ。しかし、もう一つ考慮することがある。ある幅をもった電磁波のビームが媒質境界で屈折した状態を図 10 に示した。図に描いたように、入射波と屈折波ではビームの太さが変化しているのだ。その太さの変化は、入射に比べ $\cos \theta_1 / \cos \theta_2$ 倍になっている。この図のように、 $n_2 > n_1$ では屈折によってビームが太

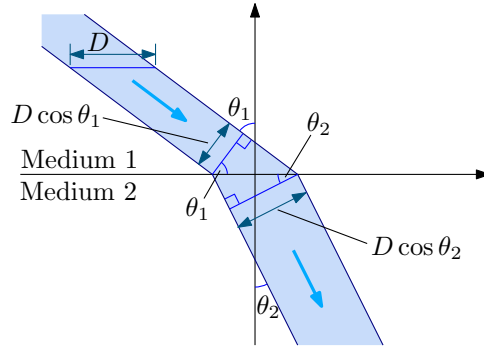


図 10: 屈折するビームの幅の変化

くなっているのだ。ポインティングベクトルが示す数値は、エネルギーを広がった領域に拡散した値を示しているわけだ。したがって、特定の電磁波のビームを議論するのであれば、ポインティングベクトルの大きさに $\cos \theta_1 / \cos \theta_2$ を乗じてビームの太さを補正しなければならない。

S 偏光と p 偏光の双方について、媒質での誘電率と透磁率の違いに注意し、図 10 に示したビームの幅の補正を含め、単位時間を通してエネルギーの入射、反射、屈折の関係を算出しよう。媒質 1 から媒質 2 への入射に対するエネルギー反射率とエネルギー透過率として、 R_{12} と T_{12} なる記号を用いよう。エネルギー反射率は単純に $R_{12} = r_{12}^2$ で計算できる。エネルギー透過率は媒質の違いと、入射角と屈折角の補正が必要であり、 $\mu_2 n_1 / \cos \theta_1 = \mu_1 n_2 t_{12}^2 / \cos \theta_2$ によって計算できる。その結果として、

$$R_{12}^{(s)} = \frac{(\mu_2 n_1 \cos \theta_1 - \mu_1 n_2 \cos \theta_2)^2}{(\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2)^2}, \quad T_{12}^{(s)} = \frac{4\mu_1 \mu_2 n_1 n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2)^2}, \quad (25a)$$

$$R_{12}^{(p)} = \frac{(\mu_2 n_1 \cos \theta_2 - \mu_1 n_2 \cos \theta_1)^2}{(\mu_1 n_2 \cos \theta_1 + \mu_2 n_1 \cos \theta_2)^2}, \quad T_{12}^{(p)} = \frac{4\mu_1 \mu_2 n_1 n_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(\mu_1 n_2 \cos \theta_1 + \mu_2 n_1 \cos \theta_2)^2}, \quad (25b)$$

が得られる。ここで、エネルギー反射率とエネルギー透過率には、偏光を明記するため (s) と (p) なる添え字を右肩に付記しておいた。当然だが、得られた結果は、 $R_{12}^{(s)} + T_{12}^{(s)} = 1$ と $R_{12}^{(p)} + T_{12}^{(p)} = 1$ の関係をどちらも満足している。つまり、エネルギー保存則から逸脱しなかった。その意味で、とりあえず安心である。

エネルギー反射率とエネルギー透過率には相反性がある。言い換えると、媒質1から媒質2に入射した電磁波と、媒質2から媒質1に入射した電磁波は、エネルギー反射率、エネルギー透過率が互いに等しいのである。その相反性は、エネルギー反射率とエネルギー透過率が、

$$R_{12} = r_{12}^2 = -r_{21}r_{21}, \quad T_{12} = t_{12}t_{21},$$

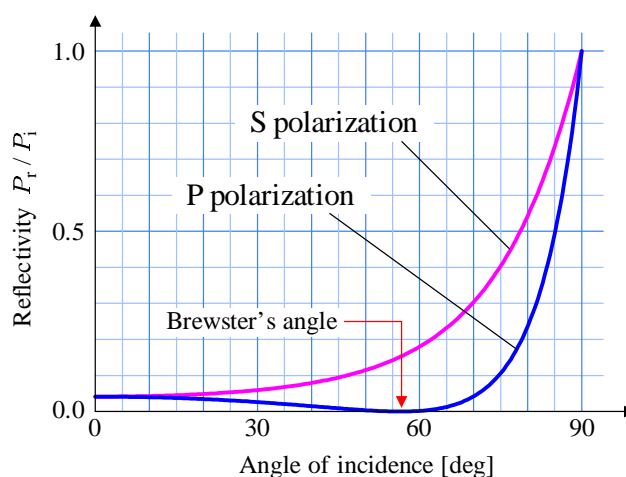
のように書けることから説明できる。ここで、 r_{21} と t_{21} は媒質2から媒質1へ入射した電磁波の振幅反射率と振幅透過率である。偏光を表す右肩添え字を省略したのは、s偏光とp偏光の双方でこの関係が成立するからだ。なお、媒質1から媒質2への入射は、入射角が θ_1 であり、屈折角が θ_2 であるとする。そのとき、媒質2から媒質1への入射は、入射角が θ_2 、屈折角が θ_1 であるとした。添え字1と2を交換すると、 $R_{21} = R_{12}$ と $T_{12} = T_{21}$ が成立する。これが相反性である。

エネルギー分配を与える(25b)と(25b)は、可視光の周波数領域に限定するならば、電磁波を透過する物質の透磁率が真空の透磁率とほぼ等しいことを利用し、 $\mu_1 = \mu_2$ の条件のもとで、

$$R_{12}^{(s)} = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}, \quad T_{12}^{(s)} = \frac{4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (26)$$

$$R_{12}^{(p)} = \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)}, \quad T_{12}^{(p)} = \frac{4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (27)$$

のように簡略化することができる。例として、真空から屈折率1.51の石英ガラスへ電磁波を入射したときのエネルギー反射率を図11に示す。この図にはs偏光とp偏光のエネルギー反射率を描いている。確かに、p偏光では反射率がゼロになるブリュースター角が存在する。



媒質1: 真空, 媒質2: 石英ガラス $\epsilon_r = 2.28$

図 11: 石英ガラスに入射した可視光エネルギー反射率

在する。しかも、ブリュースター角だけでなく、全体にわたってp偏光の方がs偏光より反射率が小さい。カメラに偏光フィルタを装備して反射によるギラつきを抑えることがで

きるのは、この原理を利用しているのだ。例えば、ガラス越しに景色を撮影する場合、ガラス反射で移りこむ周囲の不要な景色を、p 偏光のみを通すフィルタで抑えることができるのだ。

2.5 有限厚の媒質の反射と透過

これまでの解析は、無限に広がる媒質を二つ接合させた状態の電磁波の反射と屈折を議論した。無限に広がる媒質が二つある状況は非現実と思えるかもしれないが、大気中から海や深い水槽に入射する光を考えればよい。本項では、ガラス板を透過する光への応用を考慮し、有限厚の媒質における電磁波の反射と屈折を議論しよう。

本節で解析する媒質は、図 12 のように、第 2 層に厚さ $2D$ の媒質を挟み、第 1 層と第 3 層が無限に広がる媒質で構成されるとする。第 1 層と第 3 層の誘電率と透磁率を ε_1 と μ_1 とし、第 2 層の誘電率と透磁率を ε_2 と μ_2 とする。このような媒質構造は、これまでに取り扱った構造とどのような違いが現れるだろうか？ 媒質の境界で反射が起きるはずだから、第 2 層の厚さと電磁波の波長の関係が特性に影響することが期待できるだろう。そのような理由で、有限厚の媒質に関する解析では電磁波の周波数を意識する必要がありそうだ。入射する電磁波の角周波数を ω としよう。電磁波の周波数は反射や屈折によって変化しないのだから、媒質 1 と媒質 2 における波数 k_1 と k_2 は、

$$k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \omega, \quad k_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \omega,$$

となる。これは、真空中での波数 k が $k = \omega/c$ となることからの類推から明らかである。三層構造であっても、当然、s 偏光と p 偏光で特性が異なるので、個別に解析することしよう。

S 偏光 有限厚の媒質に電磁波を入射した状況を解析するには、図 12 のように電場と磁場を設定すればよい。各物理量には、入射、反射、透過を意味する添え字 i, r, t を付加した。それだけでなく、第 2 層への透過と、第 2 層内での反射を意味する添え字 s, u を加えた。媒質の境界が $z = \pm D$ の 2 箇所が存在するので、境界条件が前項よりも多くなる。図 12 を見ながらベクトルの向きに注意して境界条件を書き出そう。まず、 $z = D$ における境界条件は、

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_1 (E_i e^{ik_1 D \cos \theta_1} - E_r e^{-ik_1 D \cos \theta_1}) \\ = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_2 (-E_s e^{ik_2 D \cos \theta_2} + E_u e^{-ik_2 D \cos \theta_2}), \end{aligned} \quad (28a)$$

$$E_i e^{ik_1 D \cos \theta_1} + E_r e^{-ik_1 D \cos \theta_1} = E_s e^{-ik_2 D \cos \theta_2} + E_u e^{ik_2 D \cos \theta_2}, \quad (28b)$$

となる。これらの数式は、それぞれ、 x 軸方向と y 軸方向の境界条件である。当然、 z 軸方向の境界条件も存在するが、 y 軸方向の境界条件と同一の数式となるので省略した。一方、

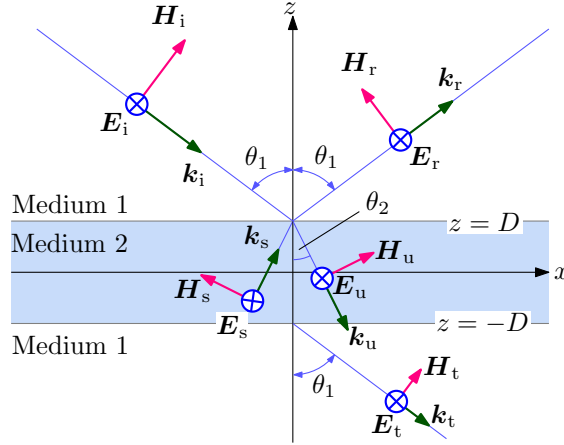


図 12: S 偏光における電磁波の反射と屈折

$z = -D$ における境界条件は,

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_2 \left(-E_s e^{ik_2 D \cos \theta_2} + E_u e^{-ik_2 D \cos \theta_2} \right) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_t \cos \theta_1 e^{-ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (28c)$$

$$E_s e^{ik_2 D \cos \theta_2} + E_u e^{-ik_2 D \cos \theta_2} = E_t e^{-ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (28d)$$

である。これらの数式も、それぞれ、 x 軸方向と y 軸方向の境界条件である。やはり、 z 軸方向は、 y 軸方向の境界条件と同一の数式となるので省略した。

上に記述した境界条件を解くのは手間がかかるが難しくはないので、導出過程を省略する。解を計算するには、二つの中間的な数値:

$$A^{(s)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 \cos \theta_2}{\mu_1 n_2 \cos \theta_2 - \mu_2 n_1 \cos \theta_1}, \quad B^{(s)} = \frac{A^{(s)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2} - e^{-2ik_2 D \cos \theta_2}}{A^{(s)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2} + e^{-2ik_2 D \cos \theta_2}}, \quad (29)$$

を計算しておくとも便利である。これらの中間的な数値 $A^{(s)}$ と $B^{(s)}$ を用いると、三層構造の媒質における電場は,

$$E_r^{(s)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 - \mu_1 n_2 B^{(s)} \cos \theta_2}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 B^{(s)} \cos \theta_2} E_i^{(s)} e^{2ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (30a)$$

$$E_s^{(s)} = \frac{E_i^{(s)} e^{ik_1 D \cos \theta_1} + E_r^{(s)} e^{-ik_1 D \cos \theta_1}}{A^{(s)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2} + e^{-2ik_2 D \cos \theta_2}} e^{-ik_2 D \cos \theta_2}, \quad (30b)$$

$$E_u^{(s)} = A^{(s)} E_s^{(s)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2}, \quad (30c)$$

$$E_t^{(s)} = \left(E_s^{(s)} e^{ik_2 D \cos \theta_2} + E_u^{(s)} e^{-ik_2 D \cos \theta_2} \right) e^{ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (30d)$$

となる。計算した物理量には、s 偏光を明示するため右肩に添え字 (s) を付加しておいた。ここに示した解は、 $E_r^{(s)}$ から順に計算していけば $E_t^{(s)}$ まで計算できるように書かれている。いきなり $E_t^{(s)}$ を計算できるように数式を作ることも可能であるが、数式がもっと複雑になるはずだ。計算をすることが目的であれば、このような数式の記述でもよいだろう。

続いて、振幅反射率、振幅透過率を定義しよう。上で計算した物理量を用いて、 $r^{(s)} \equiv E_r^{(s)}/E_i^{(s)}$ 、 $s^{(s)} \equiv E_s^{(s)}/E_i^{(s)}$ 、 $u^{(s)} \equiv E_u^{(s)}/E_i^{(s)}$ 、 $t^{(s)} \equiv E_t^{(s)}/E_i^{(s)}$ を定義する。それらのうち、 $r^{(s)}$ と $t^{(s)}$ が、それぞれ、振幅反射率と振幅透過率である。上に記述した計算結果から、

$$r^{(s)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 - \mu_1 n_2 B^{(s)} \cos \theta_2}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 n_2 B^{(s)} \cos \theta_2} e^{2ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (31a)$$

$$s^{(s)} = \frac{e^{ik_1 D \cos \theta_1} + r^{(s)} e^{-ik_1 D \cos \theta_1}}{A^{(s)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2} + e^{-2ik_2 D \cos \theta_2}} e^{-ik_2 D \cos \theta_2}, \quad (31b)$$

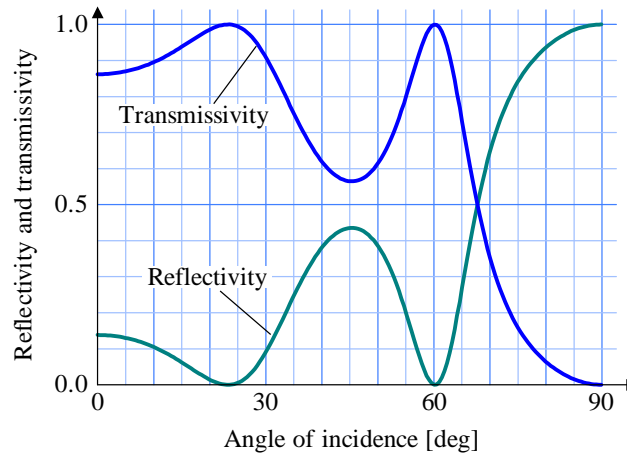
$$u^{(s)} = A^{(s)} s^{(s)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2}, \quad (31c)$$

$$t^{(s)} = \left(s^{(s)} e^{ik_2 D \cos \theta_2} + u^{(s)} e^{-ik_2 D \cos \theta_2} \right) e^{ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (31d)$$

が容易に導かれるはずだ。エネルギー反射率とエネルギー透過率は容易に計算できる。今回の場合、どちらも媒質1であるし、最終的な透過角は入射角 θ_1 に等しいので、反射率と透過率は単純に、

$$R^{(s)} = (r^{(s)})^2, \quad T^{(s)} = (t^{(s)})^2,$$

で計算できる。得られた数式の計算例として、80 GHz の電磁波を厚さ 10 mm のポリカーボネートに入射した場合を示そう。ポリカーボネートの比誘電率は $\epsilon_r = 3.0$ である。エネルギー反射率とエネルギー透過率を計算し、グラフに描いたのが図 13 である。このグラ



周波数 80 GHz , 厚さ 10 mm , 比誘電率 3.0

図 13: 有限の厚さをもつ媒質への s 偏光のエネルギー反射率と透過率

フによると反射率と透過率の和は1になっている。これはエネルギー保存則から当然成立すべき規則性である。実は、現実的なポリカーボネートは 10 mm の厚さでは、媒質によるエネルギー吸収を無視できないのでエネルギー反射率とエネルギー透過率の和は1より小さくなる。しかし、現時点ではあえてエネルギー吸収を無視して計算した。

有限の厚さをもつ媒質への電磁波の入射において、反射率は大きさが無限の媒質への入射と異なる特徴を示す。図 13 からわかるように、反射率がゼロになる入射角が存在する。

二層構造ではこのような現象は現れなかった。この現象は媒質の厚さと入射する電磁波の波長の関係で発生するのだ。これも後の項で説明する。

P 偏光 電場が電磁波の入射面と一致する p 偏光についても同様に解析することが可能だ。電場と磁場は図 14 のように設定すればよい。ここでも、入射、反射、透過などを区別するための添え字を付加した。付加した添え字は s 偏光と同一である。P 偏光の場合、反射波にあたる \mathbf{E}_r と \mathbf{E}_s の向きの設定には迷うが、入射角がゼロのときに \mathbf{E}_i と向きが一致するように設定した。設定したベクトルを特定するには、媒質境界 $z = \pm D$ で境界条件を

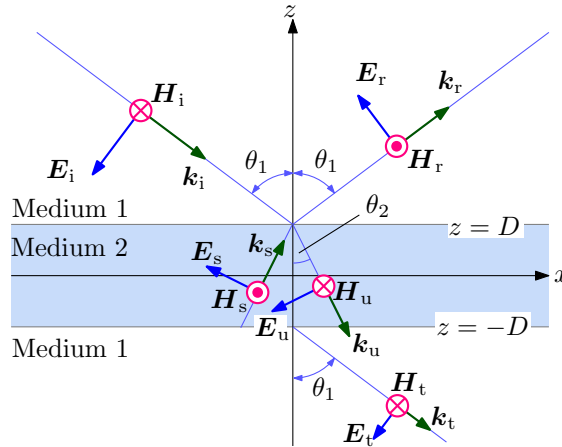


図 14: P 偏光における電磁波の反射と屈折

満たすように決定すればよい。図 14 を見ながら境界条件を書き出そう。境界 $z = D$ での境界条件は、

$$\cos \theta_1 \left(-E_i e^{ik_1 D \cos \theta_1} - E_r e^{-ik_1 D \cos \theta_1} \right) = \cos \theta_2 \left(-E_s e^{-ik_2 D \cos \theta_2} - E_u e^{ik_2 D \cos \theta_2} \right), \quad (32a)$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \left(E_i e^{ik_1 D \cos \theta_1} - E_r e^{-ik_1 D \cos \theta_1} \right) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \left(-E_s e^{-ik_2 D \cos \theta_2} + E_u e^{ik_2 D \cos \theta_2} \right), \quad (32b)$$

である。第 1 式と第 2 式は、それぞれ、 x 軸方向と y 軸方向の境界条件である。ここで、 z 軸方向の境界条件を書いていないのが気になるかもしれない。実は、 z 軸方向の境界条件を書いて数式変形すると y 軸方向の境界条件と一致するので省略したのだ。続いて、境界 $z = -D$ の境界条件を書くと、

$$\cos \theta_2 \left(-E_s e^{ik_2 D \cos \theta_2} - E_u e^{-ik_2 D \cos \theta_2} \right) = -E_t \cos \theta_1 e^{-ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (32c)$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \left(-E_s e^{ik_2 D \cos \theta_2} + E_u e^{-ik_2 D \cos \theta_2} \right) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_t e^{-ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (32d)$$

となる。これらもそれぞれ、 x 軸方向と y 軸方向の境界条件である。上と同様に、 z 軸方向の境界条件は、 y 軸方向の境界条件と一致するので省略した。

S 偏光と同様に、境界条件を解くのは手間がかかるが難しくはないので、導出過程を省略する。解を計算するには、ここでもやはり、二つの中間的な数値:

$$A^{(p)} = \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_1 + \mu_2 n_1 \cos \theta_2}{\mu_1 n_2 \cos \theta_1 - \mu_2 n_1 \cos \theta_2}, \quad B^{(p)} = \frac{A^{(p)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2} + e^{-2ik_2 D \cos \theta_2}}{A^{(p)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2} - e^{-2ik_2 D \cos \theta_2}}, \quad (33)$$

を計算しておくると便利である。これらの中間的な数値 A と B を用いると、厚さ $2D$ の媒質に電磁波を入射したときの電場が計算できる。電場の代わりに、振幅反射率 $r^{(p)}$ と振幅透過率 $t^{(s)}$ を計算する数式を記述すると、

$$r^{(p)} = \frac{\mu_2 n_1 B^{(p)} \cos \theta_2 - \mu_1 n_2 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 B^{(p)} \cos \theta_2 + \mu_1 n_2 \cos \theta_1} e^{2ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (34a)$$

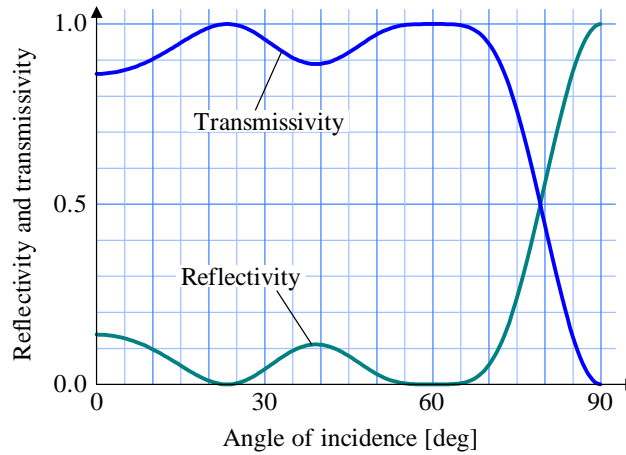
$$s^{(p)} = \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \frac{e^{ik_1 D \cos \theta_1} - r^{(p)} e^{-ik_1 D \cos \theta_1}}{A^{(p)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2} - e^{-2ik_2 D \cos \theta_2}} e^{-ik_2 D \cos \theta_2}, \quad (34b)$$

$$u^{(p)} = A^{(p)} s^{(p)} e^{2ik_2 D \cos \theta_2}, \quad (34c)$$

$$t^{(p)} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \left(-s^{(p)} e^{ik_2 D \cos \theta_2} + u^{(p)} e^{-ik_2 D \cos \theta_2} \right) e^{ik_1 D \cos \theta_1}, \quad (34d)$$

となる。なお、p 偏光であることを明示するため、反射率や透過率の右肩に添え字 (p) を付加しておいた。ここに示した解は、 $r^{(p)}$ から順に計算をしていけば $t^{(p)}$ まで計算できるように書かれている。当然であるが、エネルギー反射率とエネルギー透過率は、それぞれ、 $R^{(p)} = |r^{(p)}|^2$ と $T^{(p)} = |t^{(p)}|^2$ によって計算できる。

S 偏光と同様に、計算例として、80 GHz の電磁波を厚さ 10 mm のポリカーボネートに入射した場合を示そう。ポリカーボネートの比誘電率は $\epsilon_r = 3.0$ である。エネルギー反射率と透過率を計算し、グラフに描いたのが図 15 である。当然であるが、エネルギー反射率と



周波数 80 GHz, 厚さ 10 mm, 比誘電率 3.0

図 15: 有限の厚さをもつ媒質への p 偏光のエネルギー反射率と透過率

透過率の和は 1 になっている。前に述べたように、現実の媒質はエネルギーを吸収するので反射率と透過率の和は 1 より小さくなるはずだ。

P 偏光においても、s 偏光と同様、反射率がゼロになる入射角が存在する。二層構造でも p 偏光は、ブリュースター角で反射率がゼロになるのだが、この例ではブリュースター角以外で反射率がゼロになっている。なお、比誘電率 $\epsilon_r = 3.0$ の場合、ブリュースター角は $\theta_1 = 60^\circ$ である。確かに、それ以外の角度で反射率がゼロになっていることが図 15 からわかるはずだ。

2.6 反射が存在しない角度

前項で確認したように、有限の厚みをもつ媒質に電磁波を入射したとき、s 偏光も p 偏光も反射がゼロになる条件が存在することが判明した。反射がゼロになる条件は、媒質内部の波長と媒質の厚さの関係で決まる。そのことを本項で示す。

反射電場がゼロとなる条件は、(31a) と (34a) の分母がゼロとなるように方程式をつくれれば得られる。それらの分母はいささか異なることから、s 偏光と p 偏光では異なる方程式になることが予想される。振幅反射率の分母がゼロになるように方程式をつくと、

$$(\mu_2^2 n_1^2 \cos^2 \theta_1 - \mu_1^2 n_2^2 \cos^2 \theta_2) \sin(2k_2 D \cos \theta_2) = 0 \quad \text{for s-polarization,}$$

$$(\mu_2^2 n_1^2 \cos^2 \theta_2 - \mu_1^2 n_2^2 \cos^2 \theta_1) \sin(2k_2 D \cos \theta_2) = 0 \quad \text{for p-polarization,}$$

が得られる。確かに、s 偏光と p 偏光で方程式が異なるが、第 1 因数がわずかに違うだけである。スネルの法則に注意すると、 $n_1 < n_2$ であれば $\cos \theta_1 < \cos \theta_2$ であるので、s 偏光における第 1 因子は、

$$\mu_2^2 n_1^2 \cos^2 \theta_1 - \mu_1^2 n_2^2 \cos^2 \theta_2 < 0,$$

を確実に満たすので、 E_r の分母がゼロとなるには、

$$2k_2 D \cos \theta_2 = m\pi,$$

でなければならない。ここで、 m は任意の整数である。つまり、 E_r の分母がゼロとなる条件は複数存在するということだ。

一方、p 偏光の場合、第 2 因数だけでなく第 1 因数もゼロになる条件が存在する。第 1 因数がゼロとなる条件は、

$$\mu_2 n_1 \cos \theta_2 - \mu_1 n_2 \cos \theta_1 = 0,$$

のように書き換えてもよい。この条件は、(24) と同じではないか。つまり、この方程式はブリュースター角を与えているのだ。つまり、有限の厚さの媒質の境界面でもブリュースター角が存在する。ブリュースター角は媒質の誘電率と透磁率のみに依存し、厚さには依存しない。さらに、第 2 因子がゼロになる条件は s 偏光と同様に $2k_2 D \cos \theta_2 = m\pi$ である。

媒質 2 の内部での電磁波の波長を λ_2 とおいて第 2 因子がゼロになる条件を書き換えてみよう。波数 k_2 との間に $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ が成立するので、

$$2D \cos \theta_2 = \frac{m\lambda_2}{2}, \quad (35)$$

が得られる。この数式は、媒質の厚さ $2D$ と $\cos \theta_2$ の積が半波長の整数倍であるとき偏光に関係なく電磁波を反射しないことを意味する。それを幾何学的に表現すると図 16 のようになる。この図は媒質の表面上の点 P で反射する光線 R_P が、いったん媒質内に入り外部との境界上の点 O で反射する光線 R_O と干渉する様子を描いている。これらの光線は独立した光線でなく、平面波として伝搬する電磁波の伝搬を描いているものとする。異なる

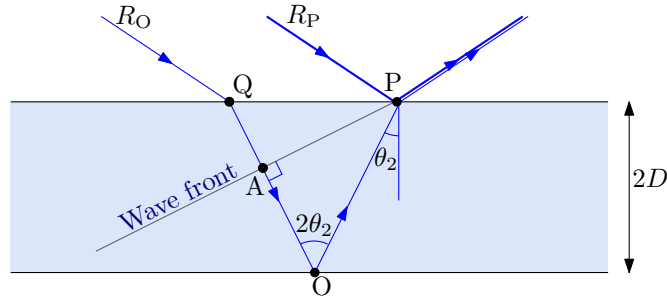


図 16: 媒質境界における反射波の干渉

る光線との位相を比較するには、波面 (wave front) を考えるとよい。波面は光線と垂直方向に広がる面である。厚さ $2D$ の媒質の屈折率が外部の媒質より屈折率が大いとする、光線 R_P が点 P で反射する直線の位相は、点 P から波面をたどった交点 A における光線 R_O の位相と等しいはずだ。光線 R_P は反射とともに位相が π だけ回転し、光線 R_O は経路 \overline{AOP} に相当して位相が回転する。つまり、反射における二つの光線との位相差は、

$$\frac{2\pi \overline{AOP}}{\lambda_2} - \pi,$$

となるはずだ。図 16 から読み取れるように、 $\overline{QP} = 4D \tan \theta_2$ であるので、 $\overline{QA} = 4D \tan \theta_2 \sin \theta_2$ であり、したがって、

$$\begin{aligned} \overline{AOP} &= \frac{4D}{\cos \theta_2} - 4D \tan \theta_2 \sin \theta_2 \\ &= \frac{4D}{\cos \theta_2} (1 - \sin^2 \theta_2) = 4D \cos \theta_2, \end{aligned}$$

となる。この経路差から、反射における光線 R_O と R_P の位相差は、 $2\pi \cdot 4D \cos \theta_2 / \lambda - \pi$ となる。干渉するこれら二つの光線が打ち消し合うには、位相差が π の奇数倍でなければならない。すなわち、

$$2\pi \frac{4D \cos \theta_2}{\lambda_2} - \pi = (2m - 1) \pi,$$

が条件である。この数式を整理すると、やはり、(35) が得られる。これで反射波がゼロになる条件の意味がわかった。媒質境界で反射する電磁波どうしが干渉することによって反射が打ち消されるため反射率がゼロになるのだ。この条件は分子結晶に X 線を照射したときのブラッグの反射条件と同一である。

媒質の外壁での反射波と、媒質の内部の反射が透過して戻ってきた波とが 180° の位相差がある条件で反射率がゼロになることがこれまでの解析でわかった。とはいえ、都合よく

反射率がゼロになるのだろうか？ 反射率がゼロになるというのは、媒質の外壁で反射する波と、媒質内部で反射して戻ってくる波が同一振幅であるということだ。既に導出したように、電場反射率が入射角に依存して変化するのに、外壁での反射と内部で反射して戻ってくる波とが同一振幅である状態を保証できるのか？

全段落で書いた疑問点を無限に広がる媒質を二つ接したときの電場反射率と電場透過率によって説明しよう。媒質1から媒質2に照射した電磁波の電場反射率と電場透過率を、それぞれ、 r_{12} と t_{12} とする。逆に、媒質2から媒質1へ照射した電磁波については、 r_{21} と t_{21} とする。ここで一つ注意すべきことがある。それは、媒質内部で反射して戻ってくる波とは、1回だけ反射した波とは限らない。図17に示すように、媒質2の内部で何度も反射した波の重ね合わせである。入射電場の振幅を1としたとき、媒質の外壁で反射する電場の振幅は r_{12} である。媒質2の内部で反射して戻ってきた電場の振幅は、反射回数が1回

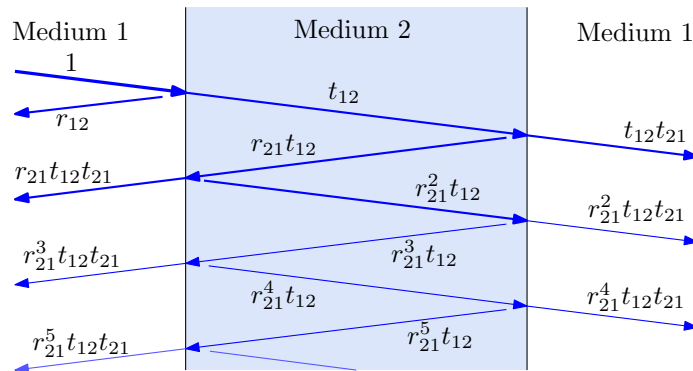


図 17: 媒質2の内部で繰り返し反射する電磁波の強度

で $r_{21}t_{12}t_{21}$, 2回で $r_{21}^2t_{12}t_{21}$, 3回に対して $r_{21}^3t_{12}t_{21}$ となる。媒質2の内部で反射して戻ってきた電場の振幅は、初項が $r_{21}t_{12}t_{21}$ であり、反射回数の増加とともに公比 r_{21}^2 で減少する等比数列である。したがって、反射波の総和は、

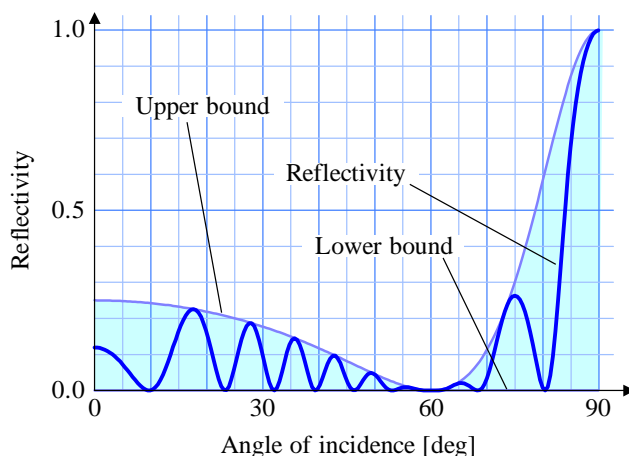
$$r_{\min} = r_{12} + r_{21}t_{12}t_{21} \sum_{m=0}^{\infty} r_{21}^{2m} = r_{12} + \frac{r_{21}t_{12}t_{21}}{1 - r_{21}^2} = r_{12} \left(1 - \frac{t_{12}t_{21}}{1 - r_{21}^2} \right),$$

となる。この数式の右辺を得るには、 $r_{12} = -r_{21}$ を利用した。この関係式は s 偏光でも p 偏光でも成立する。さらに、偏波に関係なく $t_{12}t_{21} = 1 - r_{12}^2$ が成立するので、上の式はゼロに等しい。上の数式は、媒質内を反射する電磁波が同位相で重ね合わされる条件で計算されているので、同位相で重ね合っていれば、反射波の総和は、必ず、ゼロになる。つまり、 $r_{\min} = 0$ である。

媒質内部で1回反射するたびに位相が 180° 反転する場合、すなわち、媒質の厚さが4分の1波長の半奇整数倍のとき、電場反射率は最も大きくなる。その場合の電場反射率も計算しておこう。媒質2の内部で1回反射して戻ってきたとき反射波の振幅は $-r_{12}^2t_{12}t_{21}$ となる。さらに反射回数が1回増加するたびに振幅は $-r_{12}^2$ の比で減少する。したがって、

$$r_{\max} = r_{12} \left(1 + \frac{t_{12}t_{21}}{1 + r_{21}^2} \right),$$

となる。これらの計算結果をグラフに描いて確認しよう。図 18 に示すように、反射率は媒質を通過する行程と波長との関係で変動する。その変動の上限 (upper bound) と変動の下限 (lower bound) は、上に記載した r_{\max} と r_{\min} で計算される。計算された上限と下限



周波数 80 GHz, 比誘電率 3.0, 厚さ 50 mm

図 18: エネルギー反射率の包絡線

は、正しく反射率の包絡線を形成していることがグラフによって確認できる。その上限値と下限値は、二つ媒質の境界における反射率と透過率、および、媒質内で反射を繰り返す間の位相変化によって計算されている。その計算結果が、有限の厚さをもつ媒質での反射率の上限と下限を正しく計算できているのだ。つまり、媒質境界での反射と透過は、双方の媒質の誘電率と透磁率で決まる。媒質 2 に透過した電磁波は部分的に媒質 2 の内部で反射を繰り返す。観測される反射波や透過波は、媒質 2 の内部で異なる回数だけ反射を繰り返した波の重ね合わせとなる。当然、反射を繰り返すたびに位相が回転し、その位相回転に応じて重ね合わされた反射波や透過波は強め合い、または、弱め合いが起きる。その結果、反射率や透過率の角度依存性は、角度に対して変動するのだ。

無反射の角度の例 周波数 80 GHz の電磁波が、真空から厚さ 10 mm のポリカーボネートに入射したとき、反射がゼロになる入射角を計算しよう。ポリカーボネートの比誘電率は 3.0, 比透磁率は 1.0 とする。このとき、(35) は、

$$\cos \theta_2 = 0.1082m,$$

のように計算できる。この関係式を満たす m は、 $\cos \theta_2 \leq 1$ であることから、 m は 0 から 9 までの整数であるはずだ。この余弦関数を正弦関数に変換し、スネルの法則を用いて $\sin \theta_1$ を計算すると、

$$\sin \theta_1 = 0.3952, 0.8678,$$

の二つだけが意味のある値である。これらは、 $m = 9, 8$ に対応している。この数値の逆正弦関数を計算すると、 $\theta_1 = 23.3^\circ, 60.3^\circ$ が得られる。これらが反射がなくなる入射角である。

シャボン玉が7色に見える理由 これまでに議論してきた内容でシャボン玉が7色に見える理由が説明できる。石鹼水できたシャボン玉に色がついているわけではない。色がついて見えるのは、石鹼水の膜厚と波長の関係がなす効果である。その原理を図19に示す。この図には、光の3原色である赤(R) 緑(G) 青(B)の反射率をプロットした。媒質は、石鹼水の薄膜であり、屈折率を1.34、膜厚を $5\mu\text{m}$ とした。色が異なれば光の波長が異なるので、

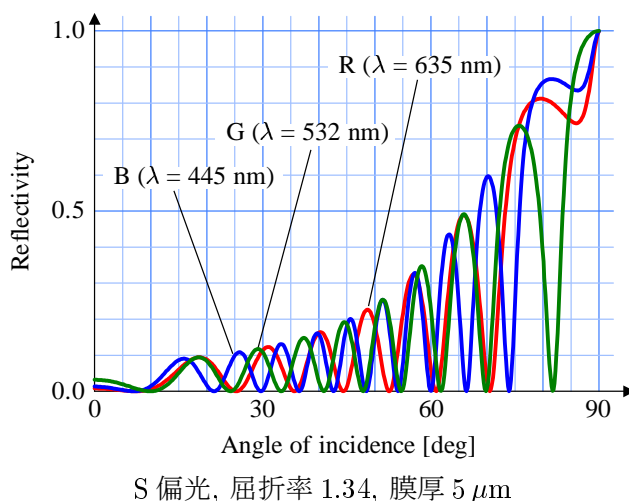


図 19: 石鹼水の薄膜における3原色の反射率の角度依存性

図のように反射率が大きくなる角度が異なる。とくに、入射角 30° 付近ではRGBの極大値が分散しているのが見えるだろう。逆に、 57° から 58° ではRGBの極大値が重なり合っているのが見えるので、その周辺の角度では白っぽく輝いて見えるはずだ。水に浮いた油が7色に見えるのも同じ原理である。

2.7 媒質によるエネルギー吸収

一般的な媒質はエネルギーを吸収するのだが、これまでの議論では、エネルギーの反射率と透過率の和が1となり、媒質によるエネルギー吸収が数式に現れなかった。本項では、媒質によるエネルギー吸収を議論する。

これまで電磁波の入射を受けた媒質の内部に電流が発生しないことを想定していた。実は、その想定のためエネルギー吸収が数式に現れなかったのである。マクスウェルの方程式において、アンペールの法則を書き出してみると、

$$\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j},$$

となる。ここで、内部に発生する電流が小さいのであれば、その電流密度 \mathbf{j} は、 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ のように電場に比例することが経験則でわかっている。その経験則はオームの法則と呼ばれる。なお、 σ は電気伝導率と呼ばれる比例係数である。角周波数 ω の電磁波についてアン

ペールの法則を書き換えると,

$$\nabla \times \mathbf{H} - i\omega\epsilon \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E},$$

となる。右辺を移項すると, アンペールの法則は,

$$\nabla \times \mathbf{H} - i\omega \left(\epsilon - i\frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (36)$$

のような形で書ける。ここで,

$$\hat{\epsilon} \equiv \epsilon - i\frac{\sigma}{\omega},$$

なる複素誘電率を定義すれば, アンペールの法則があたかも,

$$\nabla \times \mathbf{H} - \hat{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0,$$

であるかのように解析してもよいだろう。つまり, 電気伝導率 σ が大きいほど誘電率 $\hat{\epsilon}$ の虚部は大きくなる。このとき, 電磁波の波数:

$$\hat{k} = \sqrt{\hat{\epsilon}\mu\omega},$$

は複素数となる。複素数の波数を $\hat{k} \equiv k - i\rho$ と書いてみよう。このとき, z 軸方向に伝搬する電磁波 $f(z) = e^{-ikz}$ は,

$$f(z) = e^{-\rho z} e^{-ikz},$$

のように計算できる。この数式によると, 電磁波が $1/\rho$ だけ進行すると振幅が $1/e$ 倍に減衰するのだ。言い換えると, 真空中から媒質に入った電磁波は減衰し, 深さ $1/\rho$ で振幅が $1/e$ 倍に減衰する。その深さ $1/\rho$ は**表皮深さ**と呼ばれる。

温度 20°C のもとで, 銅の電気伝導率が $64.5 \times 10^6 \text{ S/m}$, アルミニウムの電気伝導率が $40.0 \times 10^6 \text{ S/m}$ となるように, 金属は電気伝導率が大きい。そのような大きな電気伝導率では, 表皮深さが小さな値となる。金属では $\sigma \gg \epsilon\omega$ が成立するので, 電磁波の波数は,

$$\hat{k} = \sqrt{-i\mu\sigma\omega \left(1 + i\frac{\epsilon\omega}{\sigma} \right)} \simeq \sqrt{-i\mu\sigma\omega} = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} - i\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}},$$

となる。表皮深さは, 複素波数の虚部の逆数であるので,

$$\delta_m = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}, \quad (37)$$

となる。周波数 80 GHz の電磁波に対し, 銅の表皮深さは $0.222 \mu\text{m}$, アルミニウムでは $0.281 \mu\text{m}$ のように計算できる。金属の表面でかなり急激に電磁波が減衰する。例えば, 市販のアルミ箔 (厚さ $12 \mu\text{m}$) を 80 GHz の電磁波が通り抜けたとき, 振幅は 10^{-19} 倍にまで減衰している。これは完全の遮断されたといってもよい減衰率だ。アルミ箔で包んだ食材が電子レンジで暖まらないのはそのような理由による。

プラスチックのような絶縁体を考えよう。電気伝導率が十分小さく、 $\sigma/\varepsilon\omega \ll 1$ が成立するならば、波数は、

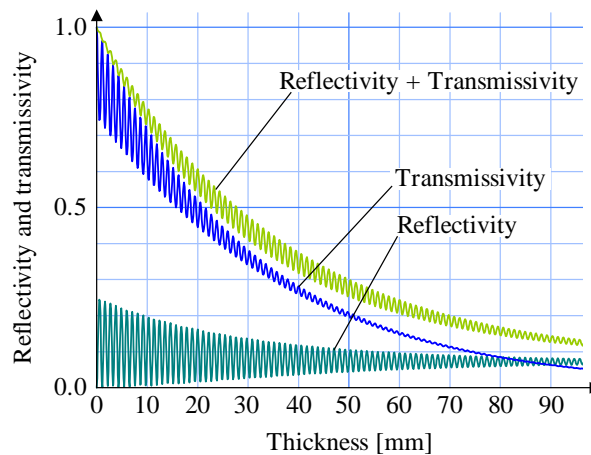
$$\hat{k} \simeq \sqrt{\varepsilon\mu} \left(\omega - i \frac{\sigma}{2\varepsilon} \right),$$

のように近似できる。この数式を見ると、複素波数の虚部は周波数に依存せず物質ごとに定められた定数であるように見えるが、誘電体の場合、 σ に周波数依存性があるので定数ではない。むしろ、複素誘電率の虚部と実部の比 $\sigma/\varepsilon\omega$ を誘電正接¹ と呼ばれるパラメータで表現ことが多い。誘電正接も媒質によって特性が異なるが、 σ に比べると周波数依存性がかなり小さい。とはいえ、誘電正接は周波数の増加とともに大きくなる傾向がある。誘電正接は $\tan \delta$ という記号で記述される。具体的に、誘電正接は $\tan \delta \equiv \sigma/\varepsilon\omega$ で定義される。誘電正接が十分に小さければ、複素波数は、

$$\hat{k} \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 - \frac{\tan \delta}{2} \right),$$

のように近似できる。なお、 λ は媒質内部での波長である。この数式から容易にわかるように、誘電正接が小さな媒質では、表皮深さが $\lambda/\pi \tan \delta$ で計算できる。例えば、比誘電率 3.0、誘電正接 0.01 のポリカーボネートの表皮深さは約 68.9 mm である。

例として、ポリカーボネートに垂直入射した 80 GHz の電磁波の反射率と透過率を図 20 に示す。図中に記載したように、誘電正接は 0.01 とした。グラフの横軸にポリカーボネートの厚さをとった。厚さの増加とともに、反射率と透過率の双方が上下を繰り返している



P 偏光, 周波数 80 GHz, 比誘電率 $3.0 \cdot (1 - 0.01i)$

図 20: ポリカーボネートに垂直入射した電磁波の減衰

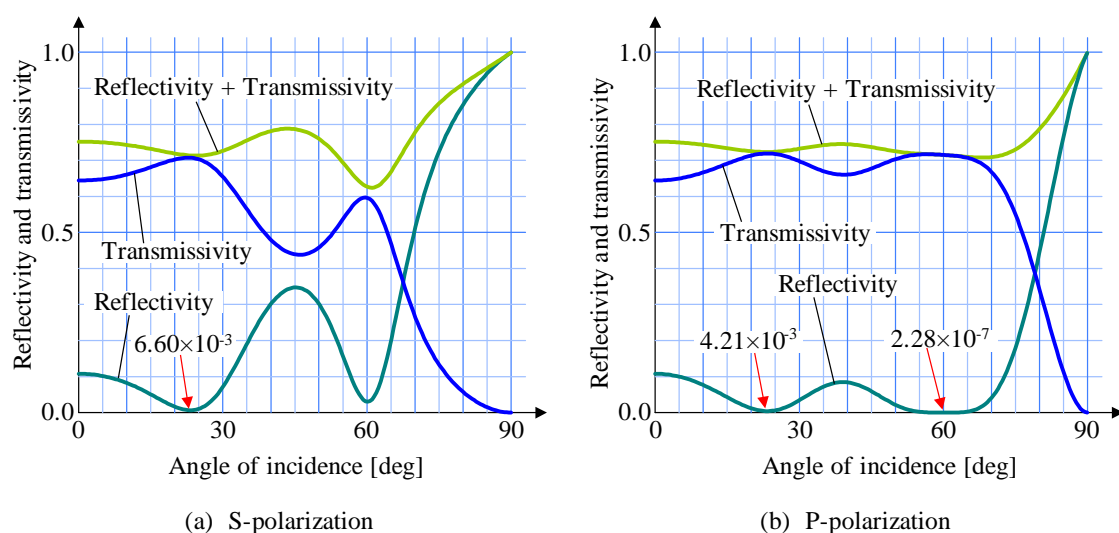
のは、媒質の厚さと波長の関係で決まる特性である。その特性については既に前項で議論した。ポリカーボネート内部での波長は 2.16 mm であるので、この特性は 1.08 mm 周期で上下を繰り返している。図 20 には、反射率と透過率の和も示しておいた。その和が 1 で

¹誘電正接は、本来、寄生抵抗によるコンデンサの電力消費を表す指標として、リアクタンスに対する寄生抵抗の比率で定義される。

ないのは、媒質内部でエネルギーが吸収されていることを意味する。このグラフが示すエネルギー吸収は、全段落の最後で比誘電率が 3.0 で誘電正接が 0.01 のポリカーボネートの表皮深さが 68.9 mm であると述べたこととよく対応している。表皮深さは電場の振幅が $1/e$ に減衰する深さである。エネルギーは電場の振幅の自乗に比例するので、エネルギーが $1/e$ ($= 36.8\%$) に減衰するのは表皮深さの半分の深さである。グラフを見ると、確かに厚さ 35 mm で反射率と透過率の和が 0.38 程度になっている。

図 20 を見るとわかるように、反射率が波長と媒質の厚さの関係で変動するが、誘電正接がゼロでない媒質では反射率がゼロになる条件が存在しなくなる。その事実は、数学的な理由と物理的な理由による二つの説明が可能である。数学的な説明はこうだ。反射率がゼロになる条件を与える方程式は誘電率が複素数であっても同一である。方程式の係数が複素数になったことで、解が複素数になる。我々が観測する実数の厚さや、実数の角度では方程式の解とはならず、反射率がゼロにできなくなったのだ。次に物理的な説明をしよう。既に解析したように、反射率がゼロとなるのは、 $1 - |r_{12}|^2 = t_{12}r_{21}$ が成立することが条件となっている。その条件は反射と透過によるエネルギー保存に対応する。媒質内部でエネルギーが吸収されるのなら、媒質内で反射を繰り返した電場の振幅が、媒質の外壁で 1 回だけ反射した電場を相殺する十分な振幅が得られない。そのため、反射率がゼロにできなくなったのだ。

一例によってその事実を示そう。周波数 80 GHz の s 偏光を厚さ 10 mm のポリカーボネートに入射したときの反射率と透過率を図 21 (a) に示す。このグラフに示すように、反射率がゼロになる角度が存在しなくなっている。入射角が大きくなると、反射率が大きくなるため、媒質内部に吸収されるエネルギーが減少し、反射率と透過率の和が 1 に近づく。



周波数 80 GHz, 媒質の厚さ 10 mm, 比誘電率 $3.0 \cdot (1 - 0.01i)$

図 21: ポリカーボネートに入射した電磁波の反射率と透過率

P 偏光についても同様である。周波数 80 GHz の p 偏光を厚さ 10 mm のポリカーボネー

トに入射したときの反射率と透過率を図 21 に示す。P 偏光は s 偏光に比べ、反射率が小さいのでグラフから読み取りにくいですが、反射率がゼロになる角度が存在しなくなっている。P 偏光ではブリュースター角で反射がゼロとなっていたが、厳密に調べるとブリュースター角で反射率がゼロでなくなっている。ただし、この例では反射率が 2.28×10^{-7} という非常に小さい値であるが。ブリュースター角で反射がゼロでなくなる理由は、先ほど述べた理由と同じである。方程式の係数が複素数になるので解が複素数となり、実数の角度の範疇では反射率をゼロにできないからである。

2.8 変動の中心

損失のない媒質において、有限の厚さをもつ媒質の反射率と透過率が、無限に広がる媒質の境界での反射率と透過率から計算できることを示した。本項では、損失のある媒質、すなわち、複素誘電率にゼロでない虚部を伴う媒質でも無限に広がる媒質の反射率と透過率から計算できることを示そう。

媒質 1 から媒質 2 へ入射した電磁波の電場反射率と電場透過率を、それぞれ、 r_{12} と t_{12} であるとする。逆に、媒質 2 から媒質 1 へ入射した電磁波については r_{21} と t_{21} であるとする。さらに、電磁波が媒質を片道だけ通過する間に電場の振幅が a 倍に減衰すると仮定する。そのとき、反射を繰り返す電場の振幅は図 22 のように変化する。入射側に戻って

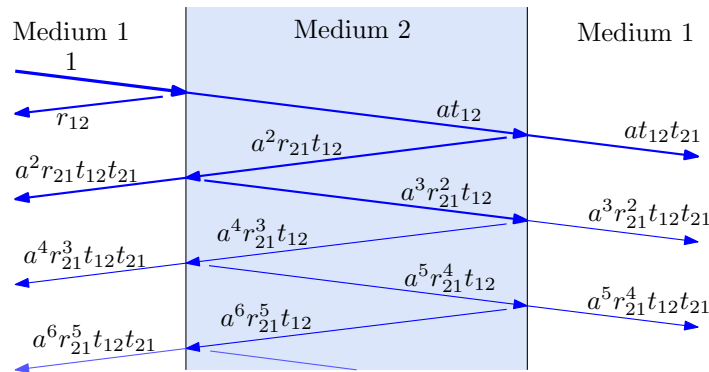


図 22: 損失のある媒質で反射を繰り返す電磁波

くる反射電場の振幅は、反射回数が増加に対して等比数列になっている。電場反射率には $r_{21} = -r_{12}$ が成立するので、媒質 2 の内部で複数回にわたって反射する電場がすべて同位相になっているとき電場の振幅は最小値となる。最終的な電場反射率を計算すると、

$$r_{\min} = r_{12} - a^2 r_{12} t_{12} t_{21} \sum_{m=0}^{\infty} a^{2m} r_{12}^{2m} = r_{12} \left(1 - \frac{a^2 t_{12} t_{21}}{1 - a^2 r_{12}^2} \right),$$

となる。繰り返し反射する電場が、往復するたびに逆位相となれば、合成される電場の振幅は最大値となる。それに対応する電場反射率を計算すると、

$$r_{\max} = r_{12} \left(1 + \frac{a^2 t_{12} t_{21}}{1 + a^2 r_{12}^2} \right),$$

となる。一方、透過率も反射回数の増加とともに等比数列となっているので、合成される電場の透過率は、

$$t_{\min} = \frac{at_{12}t_{21}}{1 + a^2r_{12}^2}, \quad t_{\max} = \frac{at_{12}t_{21}}{1 - a^2r_{12}^2},$$

のように計算される。電場反射率と透過率は、絶対値の自乗によってエネルギー反射率と透過率に変換される。具体的に書くのであれば、

$$R_{\min} = \left| r_{12} \left(1 - \frac{a^2t_{12}t_{21}}{1 - a^2r_{12}^2} \right) \right|^2, \quad R_{\max} = \left| r_{12} \left(1 + \frac{a^2t_{12}t_{21}}{1 + a^2r_{12}^2} \right) \right|^2, \quad (38)$$

$$T_{\min} = \left| \frac{at_{12}t_{21}}{1 + a^2r_{12}^2} \right|^2, \quad T_{\max} = \left| \frac{at_{12}t_{21}}{1 - a^2r_{12}^2} \right|^2, \quad (39)$$

となる。

これまでに反射率と透過率の最大値と最小値を計算したわけだが、平均的にはどのくらいの値になるだろう。最大値は最小値を与えたのは、反射回数の増加に対し、電場が同位相、または、逆位相で合成されることが条件となっていた。平均的な状況とは、合成される電場の位相が無関係といえるほど無秩序になっている場合ではないだろうか。その状況では、電場の振幅を加算する代わりに、雑音の評価と同様に電力を加算するのが適切である。そこで、媒質 1 から媒質 2 へ入射する電磁波のエネルギー反射率と透過率を R_{12} と T_{21} とする。エネルギー反射率と透過率は相反性が成立し、入射方向を媒質 2 から媒質 1 に逆転しても反射率と透過率は等しい。数式を用いると、

$$R_{21} = R_{12}, \quad T_{21} = T_{12},$$

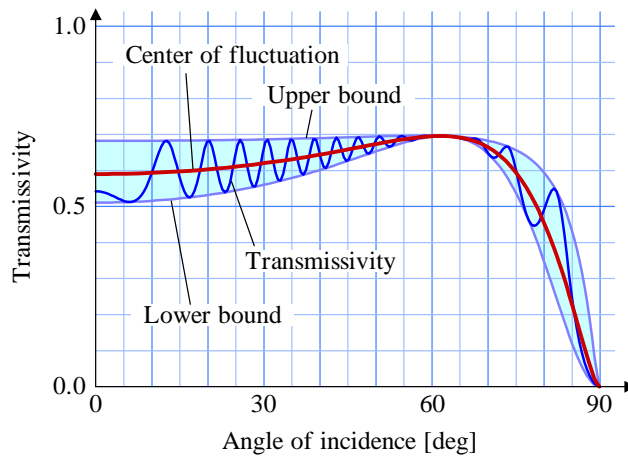
が成立するのだ。また、媒質 2 の内壁から反対側の内壁まで電磁波が進行する間に、電力は a^2 倍に減衰しているはずだ。導出は電場反射率の導出と同様であるので解説しないで結果のみを示すと、

$$R_{\text{avrg}} = R_{12} \left(1 - \frac{a^4T_{12}^2}{1 - a^4R_{12}^2} \right), \quad T_{\text{avrg}} = \frac{a^2T_{12}^2}{1 - a^4R_{12}^2}, \quad (40)$$

となる。なお、平均的な振る舞いを表すので、average を簡略化した avrg を右下に付記しておいた。導出した公式の正当性を示すため、例として、厚さ 100 mm の石英ガラスに 80 GHz の電磁波を入射したときのエネルギー透過率を図 23 に示す。最大値 (upper bound) と最小値 (lower bound) は正しく計算できているようだ。波長と行程の関係から決まる変動の包絡線を、計算した最大値と最小値で的確に捕らえているようである。さらに、平均的な状況を意図した計算結果 (center of fluctuation) も変動の中央を正確に這っていく曲線を描いている。

2.9 多層媒質での反射と透過

第 2.5 節での議論を応用すると、多層媒質における電磁波の反射と透過が解析できる。事実、第 2.5 節で取り扱った問題は、媒質の両側の真空 (あるいは空気) も媒質と考えれば、



周波数 80 GHz, 比誘電率 $3.8 \cdot (1 - 0.001i)$, 厚さ 100 mm

図 23: 石英ガラスに入射した s 偏光の透過率

3層構造の問題であったわけだ。その問題における反射と透過の解は、二つの境界 $z = \pm D$ で連立方程式を構成することによって計算できた。しかも、その解法は、 $z = -D$ の境界で方程式を解いた後、その結果を用いて $z = D$ で方程式を解き、透過側から入射側へ遡りながら解を得ていた。その3層媒質の手法は、多層媒質に応用できる。

多層媒質の一例として、図 24 に示す6層構造における電磁波の反射と透過を考えよう。その構造のうち、第0層と第5層は半無限の厚さをもつ誘電体であるとする。第 n 層と第 $n + 1$ 層の境界は $x = x_n$ であるとする。第 n 層は誘電率 ϵ_n 、透磁率 ν_n の誘電体で満たされ、透過波の波動関数が $E_n e^{-ik_n \cdot x}$ 、反射波の波動関数が $\hat{E}_n e^{ik_n \cdot x}$ であるとする。ただし、

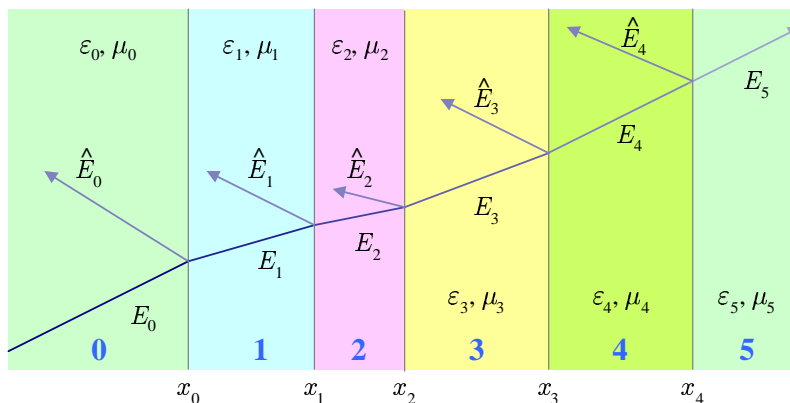


図 24: 多層媒質への電磁波の入射と反射

最終層は半無限の厚さをもつため、反射波 \hat{E}_5 が存在しない。解放としては、最終層における透過波の波動関数の複素振幅を 1 とする。図 24 の例では、 $E_5 = 1$ とするのだ。その条件にて、境界 x_4 における境界条件から透過波の振幅 E_4 と反射波の振幅 \hat{E}_4 が決定される。既に第 2.5 節で導出したように、境界条件は、法線成分と接線成分に関する二つの方程式で構成されるため、二つの未知数 E_4 と \hat{E}_4 の決定が可能だ。続いて、境界 x_3 における境界

条件によって E_3 と \hat{E}_3 が決定される。同様に、入射側へ向かって遡っていけば、 E_0 と \hat{E}_0 まで決定できる。大部分の問題としては、入射波の振幅が既知であり、透過波は未知数であるはずであるので、算出された解をすべて、 E_0 で正規化することによって、最終的な解が得られる。

多層媒質における透過・反射の解は、上で説明したように、特定の境界面における境界条件によって得ることができる。第 n 層と第 $n+1$ 層の境界における境界条件は、図 25 のように電場と磁場を設定することによって解くことができる。この図は、第 2.5 項を参考

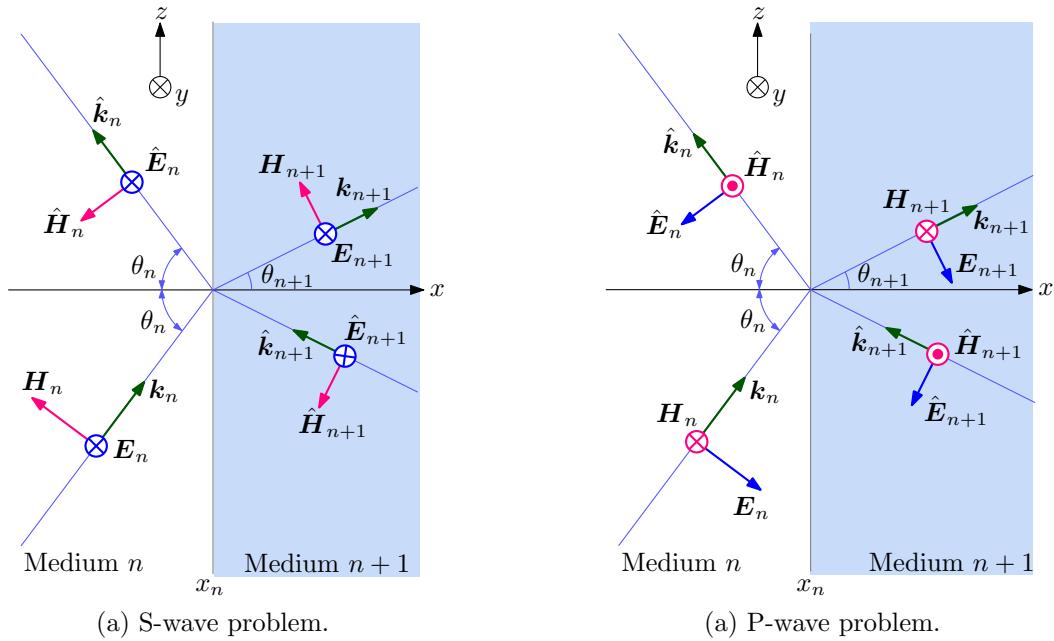


図 25: 第 n 層と第 $n+1$ 層の間の境界条件の設定

にして描かれている。条件設定として、媒質の境界は yz 平面に平行な面であり、媒質の深さ方向が x 軸方向になるように、さらに、電磁波の透過・反射が xz 平面上になるように座標軸が設定されている。境界条件と解は、s 偏光と p 偏光で異なるため、個別に解説する。

S 偏光 この偏光は、図 25 (a) に示すように、電場が電磁波の入射・透過・反射が存在する面に直交する偏波である。そのため、電場が y 軸の正を向くように設定している。この場合の境界条件は、

$$E_n e^{-ik_n x_n \cos \theta_n} + E_{n+1} e^{ik_n x_n \cos \theta_n} = \hat{E}_n e^{-ik_{n+1} x_n \cos \theta_{n+1}} + \hat{E}_{n+1} e^{ik_{n+1} x_n \cos \theta_{n+1}}, \quad (41a)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\mu_n}} \cos \theta_n \left(E_n e^{-ik_n x_n \cos \theta_n} - E_{n+1} e^{ik_n x_n \cos \theta_n} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{n+1}}{\mu_{n+1}}} \cos \theta_{n+1} \left(\hat{E}_n e^{-ik_{n+1} x_n \cos \theta_{n+1}} - \hat{E}_{n+1} e^{ik_{n+1} x_n \cos \theta_{n+1}} \right), \end{aligned} \quad (41b)$$

なる二つの方程式で記述される。第 1 式が接線方向、第 2 式が法線方向の境界条件である。既に述べたように、これらの境界条件を解く際、 E_{n+1} と \hat{E}_{n+1} は特定済みである。境界条

件の解として,

$$E_n = \left(A \hat{E}_n e^{-ik_{n+1}x_n \cos \theta_{n+1}} + B \hat{E}_{n+1} e^{ik_{n+1}x_n \cos \theta_{n+1}} \right) e^{ik_n x_n \cos \theta_n}, \quad (42a)$$

$$\hat{E}_n = \left(B E_n e^{-ik_{n+1}x_n \cos \theta_{n+1}} + A \hat{E}_{n+1} e^{ik_{n+1}x_n \cos \theta_{n+1}} \right) e^{-ik_n x_n \cos \theta_n}, \quad (42b)$$

が得られる。ただし,

$$A = \frac{n_n \mu_{n+1} \cos \theta_n + n_{n+1} \mu_n \cos \theta_{n+1}}{2n_n \mu_{n+1} \cos \theta_n}, \quad B = \frac{n_n \mu_{n+1} \cos \theta_n - n_{n+1} \mu_n \cos \theta_{n+1}}{2n_n \mu_{n+1} \cos \theta_n},$$

である。なお, 記号が重複しているが, n_n は第 n 層の媒質の屈折率である。つまり, 真空中の光速を c とすると, $n_n = \sqrt{\varepsilon_n \mu_n} c$ である。

P 偏光 この偏光は, 図 25 (b) に示すように, 電場が電磁波の入射・透過・反射が存在する面に平行となる偏波である。そのため, 電場が xz 平面に平行であり, 必ず, z 軸方向の負方向の向くように設定している。この場合の境界条件は,

$$\begin{aligned} \cos \theta_n \left(E_n e^{-ik_n x_n \cos \theta_n} + \hat{E}_n e^{ik_n x_n \cos \theta_n} \right) \\ = \cos \theta_{n+1} \left(E_{n+1} e^{-ik_{n+1} x_n \cos \theta_{n+1}} + \hat{E}_{n+1} e^{ik_{n+1} x_n \cos \theta_{n+1}} \right), \end{aligned} \quad (43a)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\mu_n}} \left(E_n e^{-ik_n x_n \cos \theta_n} - \hat{E}_n e^{ik_n x_n \cos \theta_n} \right) \\ = \sqrt{\frac{\varepsilon_{n+1}}{\mu_{n+1}}} \left(E_{n+1} e^{-ik_{n+1} x_n \cos \theta_{n+1}} - \hat{E}_{n+1} e^{ik_{n+1} x_n \cos \theta_{n+1}} \right), \end{aligned} \quad (43b)$$

なる二つの方程式で記述される。第 1 式が接線方向, 第 2 式が法線方向の境界条件である。既に述べたように, これらの境界条件を解く際, E_{n+1} と \hat{E}_{n+1} は特定済みである。境界条件の解として,

$$E_n = \left(A E_{n+1} e^{-ik_{n+1}x_n \cos \theta_{n+1}} + B \hat{E}_{n+1} e^{ik_{n+1}x_n \cos \theta_{n+1}} \right) e^{ik_n x_n \cos \theta_n}, \quad (44a)$$

$$\hat{E}_n = \left(B E_{n+1} e^{-ik_{n+1}x_n \cos \theta_{n+1}} + A \hat{E}_{n+1} e^{ik_{n+1}x_n \cos \theta_{n+1}} \right) e^{-ik_n x_n \cos \theta_n}, \quad (44b)$$

が得られる。ただし,

$$A = \frac{n_n \mu_{n+1} \cos \theta_{n+1} + n_{n+1} \mu_n \cos \theta_n}{2n_n \mu_{n+1} \cos \theta_n}, \quad B = \frac{n_n \mu_{n+1} \cos \theta_{n+1} - n_{n+1} \mu_n \cos \theta_n}{2n_n \mu_{n+1} \cos \theta_n},$$

である。なお, 記号が重複しているが, n_n は第 n 層の媒質の屈折率である。つまり, 真空中の光速を c とすると, $n_n = \sqrt{\varepsilon_n \mu_n} c$ である。

3 臨界角と全反射

前節でフレネルの関係式を導出した際に, あえて, ある現象には言及しなかった。屈折率が大きい媒質から小さい媒質へ入射された光は, 入射角がある角度より大きくなると他方の媒質に透過することができず, すべてのエネルギーが反射波となる。

3.1 全反射

スネルの法則によると、屈折率 n_1 の媒質から n_2 の媒質へ入射された光の周射角 θ_1 と θ_2 の関係は、 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ の関係を満たす。空気中から水中へのように $n_1 < n_2$ である場合、 $\theta_1 > \theta_2$ となるので特に問題は生じなかった。しかし、 $n_1 > n_2$ の場合、厄介な状態に陥ることがある。その厄介な状態とは、入射角が $\theta_1 > n_2/n_1$ となる場合である。そのとき、屈折角の正弦関数が $\sin \theta_2 > 1$ というあり得ない値になるのだ。

屈折角の正弦関数があり得ない値になっていても構わずに計算してみよう。屈折角 θ_2 の余弦関数は、

$$\cos \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_1} = \pm i \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_1 - 1},$$

のように虚数となる。平方根として成立するのは、上の数式のようにプラスとマイナスが考えられるので、ここでは謙虚に複合を用いておこう。正弦関数が 1 より大きく、余弦関数が虚数になるので $\sin \theta_2 \equiv \cosh \vartheta_2$, $\cos \theta_2 \equiv \pm i \sinh \vartheta_2$ のように定義してみよう。ここで、 ϑ_2 は便宜的に用いる記号であり、物理的に特別な意味をもたない。

電場反射率は s 偏光と p 偏光で異なるので、二つの偏光における振幅反射率を並べてみて考えよう。振幅反射率は、

$$r_{12}^{(s)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 \mp i \mu_1 n_2 \sinh \vartheta_2}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 \pm i \mu_1 n_2 \sinh \vartheta_2} \quad \text{for s-polarization,}$$

$$r_{12}^{(p)} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 \mp i \mu_1 n_2 \sinh \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_2 \pm i \mu_1 n_2 \sinh \theta_1}, \quad \text{for p-polarization}$$

である。これらの数式に登場する二種類の複合 \pm と \mp に関して、複合同順である。前節で計算したように、エネルギー反射率は電場反射率の自乗である。しかし、電場反射率が複素数の場合、単純に自乗すればよいのではない。複素数の絶対値を自乗するのである。つまり、エネルギー反射率は、

$$R_{12}^{(s)} = |r_{12}^{(s)}|^2 = 1, \quad R_{12}^{(p)} = |r_{12}^{(p)}|^2 = 1,$$

となるのだ。これは、すべてのエネルギーが反射され、媒質 2 に伝搬しないことを意味する。そのような現象は**全反射**と呼ばれる。また、全反射が起き始める入射角、すなわち、 $\sin \theta_1 = n_2/n_1$ を満たす入射角 θ_1 は、**臨界角**と呼ばれる。

全反射が発生するという事は、エネルギー透過率はゼロでなければならない。二種類の偏光のうち、s 偏光に注目すると、振幅透過率は形式的に、

$$t_{12} = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_1}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 \pm i \mu_1 n_2 \sinh \vartheta_2}, \quad t_{21} = \frac{2i\mu_1 n_2 \sinh \vartheta}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 \pm i \mu_1 n_2 \sinh \vartheta_2}, \quad (45)$$

と書くことができる。振幅透過率 t_{21} は振幅透過率 t_{12} の分子は実数、 t_{21} の分子は純虚数である。このことから t_{12} と t_{21} は $\pi/2$ の位相差があることがわかる。前節では、エネルギー

透過率が $T_{21} = t_{12}t_{21}$ としていたが、それは二つの振幅透過率がともに実数であることが前提である。複素数を導入したのは、位相関係を表現するためである。例えば、

$$\tilde{t}_{12} = \sqrt{2}|t_{12}|\cos(\omega t + \alpha), \quad \tilde{t}_{21} = \sqrt{2}|t_{21}|\cos(\omega t + \beta),$$

とおいてみよう。あえて定義するならば、 \tilde{t}_{12} と \tilde{t}_{21} は振幅透過率の瞬時値である。エネルギー透過率が $\tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21}$ の平均値と考えるのである。平均値を計算すると、

$$\begin{aligned} T_{12} &= \langle \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} 2|t_{12}||t_{21}|\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) dt \\ &= \frac{1}{\pi}|t_{12}||t_{21}|\int_0^{2\pi} (\cos\xi\cos\alpha - \sin\xi\sin\alpha)(\cos\xi\cos\beta - \sin\xi\sin\beta) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}|t_{12}||t_{21}|\int_0^{2\pi} \left[\cos\alpha\cos\beta\cos^2\xi + \sin\alpha\sin\beta\sin^2\xi \right. \\ &\quad \left. - (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\sin\xi\cos\xi \right] d\xi \\ &= |t_{12}||t_{21}|\cos(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

となるように、互いの振幅の積の2分の1に、さらに、 $\cos(\beta - \alpha)$ を乗じた積が得られる。瞬時値 \tilde{t}_{12} や \tilde{t}_{21} の代用としてフェーザ t_{12} と t_{21} を取り扱うわけである。この例であれば、フェーザは $t_{12} \equiv |t_{12}|e^{i\alpha}$, $t_{21} \equiv |t_{21}|e^{i\beta}$ と定義される。このフェーザからエネルギー透過率の平均値を得るならば、

$$T_{12} = \text{Re}(t_{12}^*t_{21}), \quad (46)$$

を計算すればよい。ただし、演算子 Re は複素数の実部を与え、右肩のアスタリスク (*) は複素共役を与える。このエネルギー透過率の定義に基づくと、振幅反射率が (45) で与えられる場合、エネルギー反射率はゼロとなる。なお、透過率との対比のため、エネルギー反射率を、

$$R_{12} = -\text{Re}(r_{12}^*r_{21}), \quad (47)$$

と書いてもよい。先ほど、エネルギー反射率を計算するには、 r_{12} を単に自乗するのではなく、複素絶対値の自乗を計算すると述べたのは、フェーザに関する理論があつてのことなのだ。全反射の例として、石英ガラスの内部を伝搬する可視光が、真空に脱出することを想定し、エネルギー反射率とエネルギー透過率を計算してみた。その計算結果を図 26 に示す。石英ガラスの屈折率は 1.5 ($\epsilon_r = 2.28$) であるので、臨界角は 41.5° である。S 偏光も p 偏光も臨界角付近で、反射率が急激に変化し、臨界角を超える入射角では全反射になることが図に表されている。グラフをみると、臨界角で反射率や透過率の曲線は直角に折れている。それほど、反射率や透過率が急激に変化するのだ。さらに、p 偏光ではブリュースター角が存在する。ブリュースター角で反射率がゼロになるため、臨界角までの反射率の変動が s 偏光に比べて急峻である。

全反射を簡単に実現できるだろうか？ 全反射は屈折率が大きい媒質から小さい媒質への電磁波の入射によって発生する。つまり、石英ガラスから真空へという入射方向である。ガラス内に電磁波源を配置するのは現実的とは思えない。しかし、ガラス内に電磁波源を

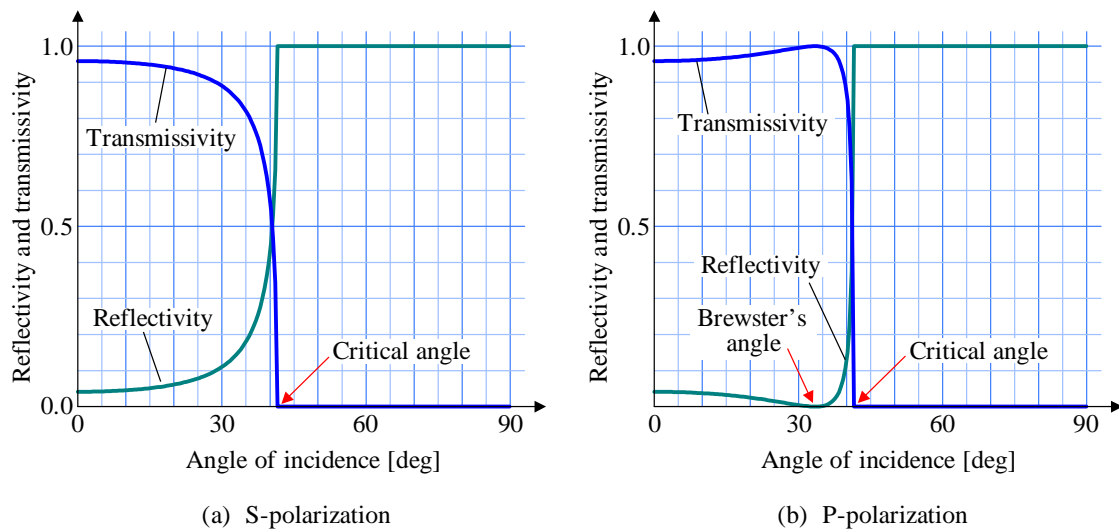


図 26: 石英ガラスから脱出する可視光のエネルギー反射率と透過率

配置しなくても全反射を発生できる。図 27 のように断面が直角二等辺三角形であるプリズム (直角プリズム) を用意しよう。三つの角のうち角 A が直角である。外部光源から辺 BC に垂直に光を入射させたとき、一部は反射し、残りはプリズムの内部に直進する。内部に入った光は、辺 BC に対して入射角 45° をなす。その角度が石英ガラスの臨界角 41.5° より大きいので、プリズム内に入射した光は辺 BC 上で全反射する。石英ガラスの臨界角は意外と小さいのだ。だから、このような簡単な設定で全反射が実現できるのだ。外部から見ると透明ガラスであるが、ガラス内を伝搬する光にとって、辺 BC は鏡になっているのだ。

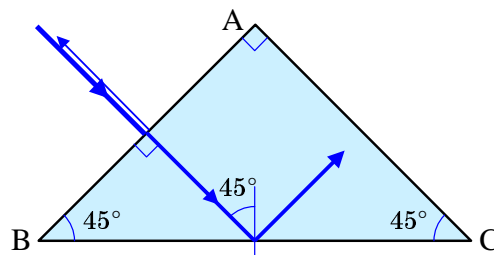


図 27: 石英ガラスの直角プリズムを用いた全反射

3.2 エバネセント光

入射角が大きく、媒質境界で全反射が発生しているとき、もう一方の媒質には、電磁波のエネルギーが滲み出し、滞留している。そのようなエネルギーの滞留は**エバネセント光**と呼ばれる。本項ではエバネセント光を数式によって解析しよう。

媒質 1 から媒質 2 へ入射した電磁波が全反射するとき、既に議論したように、屈折角

の余弦関数は $\cos \theta_2 = \pm i \sinh \vartheta_2$ のように純虚数となる。電磁波が xz 平面に平行な方向に伝搬し、 z の正の方向から負の方向へ入射し、屈折角が θ_2 になっている。そのとき、媒質 2 における電場は $E(\mathbf{r}) = E_t e^{ik_2(-x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2) + \omega t}$ である。ここで、 $\sin \theta_2 = \cosh \vartheta_2$ 、 $\cos \theta_2 = \pm i \sinh \vartheta_2$ を代入すると、

$$E(\mathbf{r}) = E_t e^{\mp k_2 z \sinh \vartheta_2} e^{-ik_2 x \cosh \vartheta_2 + \omega t},$$

となる。議論している条件設定で、電磁波は z の正から負に向かって入射するので、電場の振幅に因数 $e^{-k_2 z \sinh \vartheta_2}$ は電磁波の進行方向に向かって振幅が指数関数的に増加することを意味する。これでは物理的にまずい。物理的に意味があるのは、

$$E(\mathbf{r}) = E_t e^{k_2 z \sinh \vartheta_2} e^{-ik_2 x \cosh \vartheta_2 + i\omega t}, \quad (48)$$

でなければならないのだ。これは電磁波の進行方向に向かって振幅が指数関数的に減衰することを意味する。これを満たすには、

$$\cos \theta_2 = -i \sinh \vartheta_2,$$

のように複合のうち、負の符号を採用すべきことがわかる。得られた電場について、 z に関する因数 $e^{k_2 z \sinh \vartheta_2}$ が電場の減衰を表している。減衰の速さは入射角に依存するが、 $\sinh \vartheta_2 = 0.26$ の例を考えよう。この例は、前項で扱った石英ガラスのプリズムを用いて 45° で電磁波を入射したとき、真空中に脱出する透過角を表している。その例では、境界から波長だけ潜った位置 ($z = -\lambda_2$) で、減衰因子は $e^{-0.26 \cdot 2\pi} \simeq 0.195$ となる。波長程度の深さで電場が急激に減衰することがわかるだろう。しかし、全反射が発生しているといえども、境界から波長程度の深さに電磁場が滲み出しているのである。このように、媒質境界から非常に浅い場所のみエネルギーが残留しているので、束の間の光という意味で**エバネッセント光**と呼ばれる。

エネルギーの流れを調べるため、ポインティングベクトルを評価しよう。複素波動関数を用いた場合、周波数に比べ十分長い時間にわたるポインティングベクトルの平均は $\mathbf{S} = \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H})$ で計算される。磁場 \mathbf{H} は角周波数 ω の電磁波について成立するように変形されたファラデーの法則 $\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = 0$ を用いるとよい。S 偏光の場合、電場を $\mathbf{E} = e_y E$ とおいて計算すればよい。複素波動関数に拡張したファラデーの法則から、

$$\mathbf{H} = -ie_x \frac{k_2}{\omega\mu_2} E \sinh \vartheta_2 + e_z \frac{k_2}{\omega\mu_2} E \cosh \vartheta_2,$$

が得られる。この結果を用いてポインティングベクトルを計算すると、

$$\mathbf{S} = e_x \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} |E|^2 \cosh \vartheta_2, \quad (49)$$

が得られる。導出過程を省略するが、p 偏光について計算をしても、同一のポインティングベクトルが得られる。この結果から、媒質 1 から入射された電磁波が媒質 2 との境界で全

反射するとき、媒質2でポインティングベクトルは x 軸方向に向かっているので、エネルギーは x 軸に平行に流れるように見えるかもしれない。しかし、ポインティングベクトルは、あくまでも、流れの密度を表すにすぎない。媒質1から流れてくるエネルギーの量は、既に述べたように角度補正をしなければならない。全反射が発生している場合、透過角が $\pi/2$ となるので、角度補正したエネルギーの流れはゼロとなるはずだ。エバネッセント光をイメージとして描くと図28のようになる。この図は、石英ガラスに入射したレーザー光が、真空中に脱出する際に全反射を起こしている様子を表現している。レーザー光は細いビー

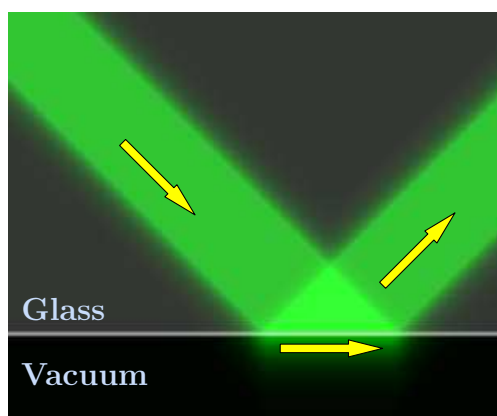


図 28: エバネッセント光の模式図

ムであるが、そのビームの内部では光が平面波とみなせるので、これまでに導出した数式が適用できるだろう。媒質境界で全反射を起こし、境界の極近傍で真空側では電磁場がエバネッセント光として滲み出している。と書いてはみたが、エバネッセント光は波長程度の深さで減衰してしまうので、この図のような観測は不可能である。この図はあくまでもイメージである。

エバネッセント光について不思議なことがある。先ほどポインティングベクトルを計算した際、図28に描いたように、エバネッセント光が境界にそってエネルギーを伝搬していることである。しかし、図28に描いたように有限幅のビームによるエバネッセント光の場合、境界に沿ったエネルギー伝搬が無限に続くとは考えにくい。その疑問に関して、このように考えてはどうだろう。エバネッセント光は、反射に転じるまでの中間形態であり、絶えず、エバネッセント光は媒質1に移動すると反射波に変換されるのではないか？ これは筆者の私見であるが、そのように考えると次項で紹介する現象を説明できるはずだ。

3.3 電磁波のトンネル効果

前項の最後でエバネッセント光が伝搬される電磁波に変換されるという筆者の私見を述べた。その解釈が正しければ、エバネッセント光が残留している場所に同じ媒質を平行に配置し、エバネッセント光を伝搬する電磁波に変換できる。その現象は、もともと伝搬できない領域に物質波を伝搬できる量子トンネル効果に類似している。実は、エバネッセント

光を伝搬する電磁波に変換することは可能である。本項では、その現象について議論する。

石英ガラスでできたプリズムの内部に可視光を入射し、伝搬する可視光が臨界角より大きな入射角でプリズムの境界に進行したとき、可視光は外部に出ることなく、全反射を起こす。しかし、前項で述べたように、プリズムの外部の極近傍にエバネッセント光がまとわりついている。図 29 のように、エバネッセント光が残留している極近傍に石英ガラスを配置すると、図に示すように、電磁波の伝搬が復活するのではないか。当然、ガラスを互

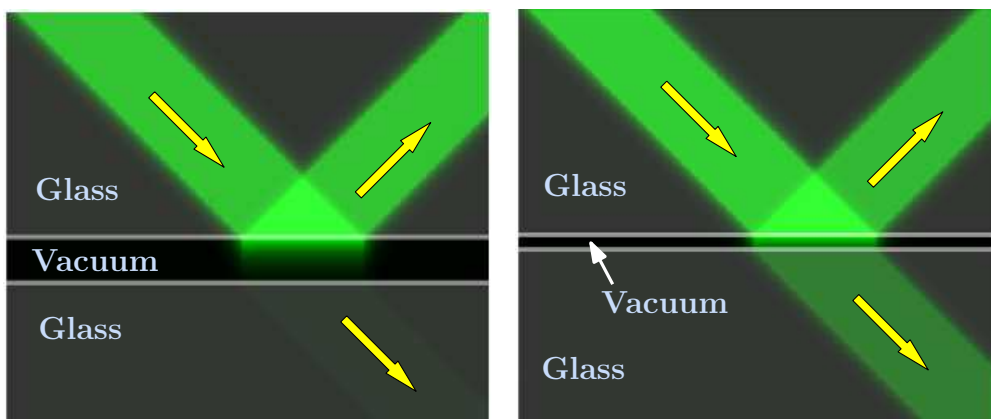
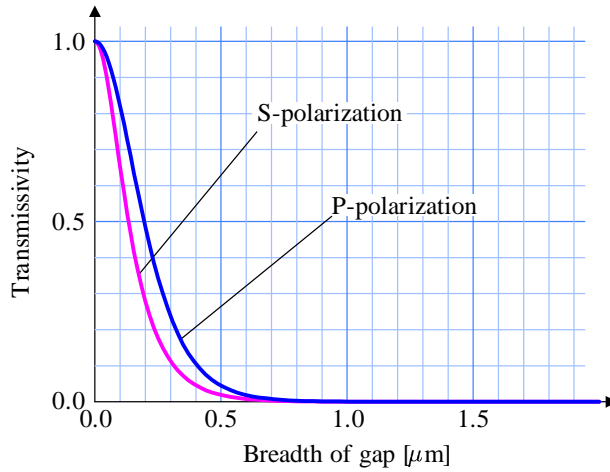


図 29: エバネッセント光による電磁波の伝達

いに近づけると復活する電磁波が増加し、エネルギー保存則のため、反射光の強度が弱くなるだろう。その推測が正しいことを計算機によって検証してみよう。

エバネッセント光が伝搬する電磁波に変換できることは、既に導出した公式を用いてエネルギー透過率を計算すれば検証できる。既に、有限の幅をもった媒質を通過する電磁波について考察をした。そのとき、媒質 1 を真空、媒質 2 を有限の幅をもつ媒質として計算した。ここでは、媒質 1 を真空以外の媒質、媒質 2 を有限の幅をもつ真空として計算するのだ。一例として、石英ガラスのプリズムに緑色の光線 (真空中の波長 532 nm) を間隙を超えて伝搬させたときのエネルギー透過率を図 30 に示す。媒質境界への入射角が 45° であるので、全反射となるはずだが、間隙の幅が小さければエネルギーが間隙を隔てたプリズムに可視光が伝搬することがわかる。とはいえ、間隙の幅が $0.5 \mu\text{m}$ を超えると、5%未満のエネルギーしか間隙を超えられない。この現象は、量子トンネル効果に類似している。量子力学を学習したことのある読者なら、この現象がトンネル効果を導く井戸型ポテンシャルの方程式と類似していることに気づいていることだろう。さらに、s 偏光と p 偏光を比較した場合、図 30 に示すように、p 偏光の方がエネルギー透過率が高い。前に述べたように、p 偏光の方が反射率が小さいからである。

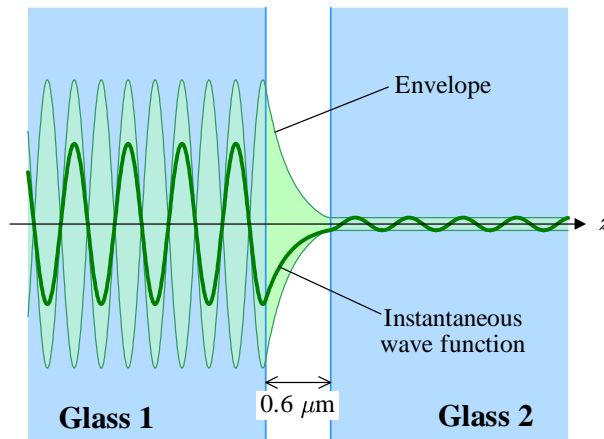
エバネッセント光によって、間隙を隔てて伝搬する電磁波の波動関数を計算してみよう。媒質は石英ガラスであるとし、石英ガラスの間に $0.6 \mu\text{m} = 600 \text{ nm}$ の間隙が存在する。条件として、s 偏光した緑色の光線 (真空中で $\lambda = 532 \text{ nm}$)、媒質から真空への入射角 45° としよう。その入射角では全反射が発生するが、間隙にはエバネッセント光が漂っている。その条件で、媒質境界に垂直な直線上で電場をプロットすると図 31 のようになる。図中の濃



波長 532 nm, 入射角 45°, 媒質の比誘電率 $\epsilon_r = 2.28$

図 30: 媒質間隙を超えて伝搬する可視光の透過率

い曲線はある時刻における波動関数である。薄い曲線は波動関数の包絡線である。別の時



媒質: 石英ガラス ($\epsilon_r = 2.28$), 入射角 45°, 真空中の波長 532 nm

図 31: エバネッセント光で間隙を超えて伝搬する光の波動関数

刻で見ると, 波動関数は包絡線の内部で変動しているはずだ。また, 左側 (Glass 1) で包絡線が波打っているのは, 入射波と反射波が干渉して定在波が存在することを意味する。このグラフを得るには, (31a) から (31d) を用いて計算すればよい。計算される電場はフェーザ表示であり, 位相情報を表現した複素数である。間隙の幅を $2D$ とすると, 具体的な波動関数 $E(\mathbf{r}, t)$ は,

$$E(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} E_i^{(s)} e^{i(-k_1 x \sin \theta_1 + k_1 z \cos \theta_1 + \omega t)} + E_r^{(s)} e^{i(-k_1 x \sin \theta_1 - k_1 z \cos \theta_1 + \omega t)} & \text{if } z > D, \\ E_s^{(s)} e^{i(-k_2 x \sin \theta_2 - k_2 z \cos \theta_2 + \omega t)} + E_u^{(s)} e^{i(-k_2 x \sin \theta_2 + k_2 z \cos \theta_2 + \omega t)} & \text{if } -D < z \leq D, \\ E_t^{(s)} e^{i(-k_1 x \sin \theta_1 + k_1 z \cos \theta_1 + \omega t)} & \text{if } z \leq -D, \end{cases}$$

で計算できる。ただし、 $E_i^{(s)}$ は入射波のフェーズであり、他のフェーズは、

$$E_r^{(r)} = r^{(s)} E_i^{(s)}, \quad E_s^{(r)} = s^{(s)} E_i^{(s)}, \quad E_u^{(r)} = u^{(s)} E_i^{(s)}, \quad E_t^{(r)} = t^{(s)} E_i^{(s)},$$

で与えられる。図 31 の作成に関して、は z 軸上の電場をプロットするため、 $x = 0, y = 0, t = 0$ を代入して計算した。