

# 一般力学・解析力学



はじめに



# 目次

<b>第1章 ニュートンによる力学記述</b>	<b>1</b>
1.1 運動の記述	1
1.1.1 力学における物理量	1
1.1.2 典型的な運動	4
1.2 力の作用と運動方程式	8
1.2.1 ベクトルとしての力	8
1.2.2 ニュートンの運動の法則	10
1.3 力学的エネルギー	13
1.3.1 仕事と運動エネルギー	13
1.3.2 ポテンシャルエネルギー	16
1.3.3 力学的エネルギー保存則	18
1.4 運動量	20
1.4.1 力積と運動量	20
1.4.2 運動量保存則	22
<b>第2章 さまざまな運動の解析</b>	<b>27</b>
2.1 惑星の公転軌道	27
2.1.1 ケプラーの法則	27
2.1.2 離心率と軌道形状	30
2.1.3 有効ポテンシャル	32
2.2 ラザフォード散乱	34

2.2.1	荷電粒子の軌跡 . . . . .	35
2.2.2	微分散乱断面積 . . . . .	37
2.3	加速度運動と慣性力 . . . . .	40
2.3.1	ガリレイ変換 . . . . .	40
2.3.2	等加速度運動する座標系 . . . . .	41
2.4	回転する座標系 . . . . .	41
2.4.1	回転運動する系での運動方程式 . . . . .	42
2.4.2	遠心力とコリオリの力 . . . . .	44
2.4.3	フーコーの振り子 . . . . .	46
2.5	遠心力 . . . . .	49
2.6	束縛運動 . . . . .	51
2.6.1	束縛力と束縛条件 . . . . .	51
2.6.2	束縛と自由度 . . . . .	54
<b>第3章</b>	<b>剛体の運動</b>	<b>57</b>
3.1	質点系の力学 . . . . .	57
3.1.1	重心の運動方程式 . . . . .	57
3.1.2	運動量と運動エネルギー . . . . .	61
3.2	剛体運動の記述 . . . . .	63
3.2.1	自由度 . . . . .	63
3.2.2	回転運動 . . . . .	64
3.2.3	角運動量保存則 . . . . .	66
3.3	慣性モーメント . . . . .	70
3.3.1	慣性モーメントの導入 . . . . .	70
3.3.2	慣性モーメントの平行移動 . . . . .	72
3.3.3	斜面を転がる球 . . . . .	74
3.4	慣性乗積と慣性主軸 . . . . .	76

	7
3.4.1 慣性モーメントテンソル . . . . .	76
3.4.2 対角化と慣性主軸 . . . . .	77
3.5 オイラーの運動方程式 . . . . .	79
3.5.1 対称ゴマの運動 . . . . .	80
3.5.2 回転による運動エネルギー . . . . .	82
3.6 歳差運動 . . . . .	82
3.6.1 オイラー角 . . . . .	82
3.6.2 対称ゴマの運動 . . . . .	85
3.6.3 歳差運動 . . . . .	87
3.7 コマが倒れない理由 . . . . .	89
3.7.1 角運動量保存の観点 . . . . .	89
3.7.2 慣性力による観点 . . . . .	91
<b>第4章 一般化座標</b>	<b>97</b>
4.1 解析力学への動機づけ . . . . .	97
4.2 座標系と運動方程式 . . . . .	98
4.3 一般化力 . . . . .	102
4.4 一般化座標 . . . . .	105
4.5 ラグランジュの運動方程式 . . . . .	107
4.6 エネルギー保存則 . . . . .	113
4.7 回転運動とローレンツ力 . . . . .	114
4.7.1 回転運動する系からの観測 . . . . .	114
4.7.2 ローレンツ力 . . . . .	116
4.8 束縛運動 . . . . .	118
4.8.1 束縛条件と自由度 . . . . .	119
4.8.2 時間依存する束縛条件 . . . . .	119
4.9 散逸関数 . . . . .	125

<b>第5章 最小作用の原理</b>	<b>129</b>
5.1 オイラーの方程式 . . . . .	129
5.1.1 最小化問題の解法 . . . . .	129
5.1.2 オイラーの方程式の変形 . . . . .	130
5.2 ハミルトンの原理 . . . . .	137
5.2.1 ラグランジュの運動方程式 . . . . .	137
5.2.2 最小作用の原理 . . . . .	138
5.2.3 フェルマの原理 . . . . .	143
5.3 対称性と保存則 . . . . .	144
5.3.1 力学の対称性 . . . . .	144
5.3.2 ネーターの定理 . . . . .	147
5.3.3 時間発展とエネルギー . . . . .	151
<b>第6章 正準方程式</b>	<b>155</b>
6.1 循環座標 . . . . .	155
6.2 ハミルトンの正準方程式 . . . . .	157
6.2.1 ハミルトニアンの導入 . . . . .	157
6.2.2 ハミルトンの原理 . . . . .	158
6.3 位相空間における運動 . . . . .	161
6.3.1 運動の記述 . . . . .	161
6.3.2 リウビルの定理 . . . . .	163
6.4 ポアソン括弧式 . . . . .	165
6.4.1 括弧式の定義 . . . . .	166
6.4.2 点変換に対する不変性 . . . . .	168
6.5 正準変換 . . . . .	170
6.5.1 位相空間中の点変換 . . . . .	170
6.5.2 正準変換 I . . . . .	175

6.5.3	正準変換 II	177
6.5.4	ハミルトン・ヤコビの方程式	181
<b>第 7 章</b>	<b>複数質点の微小振動</b>	<b>185</b>
7.1	二重振り子	185
7.2	振動解析の数学処方	189
7.2.1	振動の定式化	189
7.2.2	永年方程式	191
7.2.3	基準振動の特定	193
7.3	微小振動の解析例	195
7.3.1	二酸化炭素分子	196
7.3.2	格子振動	201
7.3.3	連続体の振動	204
<b>第 8 章</b>	<b>電磁気現象の解析力学</b>	<b>209</b>
8.1	荷電粒子が受ける力	209
8.1.1	基本方程式	209
8.1.2	荷電粒子の運動	210
<b>第 9 章</b>	<b>他分野における解析力学の応用</b>	<b>215</b>
9.1	電磁気学	215
9.2	特殊相対性理論	215
9.2.1	物理量の変換	215
9.2.2	作用積分	217
9.3	量子力学	218

# 第1章 ニュートンによる力学記述

解析力学を取り扱う前に、力学をニュートンの記述によって取り扱おう。ニュートンの記述は、我々が観測する力学現象を数学を用いて忠実に取り扱うので、直感的に理解しやすい。本章で示すように、運動方程式と呼ばれる基本方程式がすべての力学現象を説明できるというのが、ニュートンの記述である。

## 1.1 運動の記述

力学を記述するには物体の運動を数学表現することが重要である。物体の運動は時間経過に伴う物体の位置の変化を調べればよい。本節では、物体の運動を記述するための数学表現を説明する。具体的には、物体の運動を表すには、位置、速度、加速度といった物理量を取り扱う。

### 1.1.1 力学における物理量

物体の運動を取り扱う際、運動の軌跡を時間の関数として記述する場合がある。その軌跡の関数を議論するには、物体の速度、さらには加速度といった物理量が重要である。

**位置** 物体の位置を表すには、座標系を設定し、その座標を読むのが確実である。例えば、地球上の位置を表すために北緯 35 度 40 分、東経 139 度 20 分のように、緯度と経度で場所を指定する。それが座標の一例である。

我々が生活する 3 次元空間では、横断方向、奥行方向、高さ方向のように三つの座標が位置特定に必要である。このように、互いに直交する座標軸による座標系は、デカルトによって提唱されたことから、カルテシアン (Cartesian<sup>1</sup>) 座標系と呼ばれる。カルテシアン座標系では、図 1.1 (a) のように、座標  $[x, y, z]$  を用いて 3 次元の位置を特定する。カルテシア

---

<sup>1</sup>カルテシアン座標系は、デカルト座標系とも呼ばれる。デカルト (Descartes) の冒頭の 3 文字 des はフランス語の不定冠詞 (英語の a と an) に相当するので省略し、人名を形容詞化する接尾辞-ian をつけると Cartesian になる。

ン座標系は、方眼紙のマス目が座標に例えられることから直感的に理解しやすい。座標の表現法は、他にも、円筒座標系、球面座標系などがあり、それらは運動の形態によって使い分けられる。

円筒座標系は、図 1.1 (b) に描くように、カルテシアン座標系の  $z$  軸を対称軸とする座標系である。対称軸からの距離を  $r$ 、カルテシアン座標系の  $x$  軸からの回転角を  $\theta$  とし、座標  $[r, \theta, z]$  で 3 次元の位置を特定する。円筒座標系とカルテシアン座標系は、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

のような関係で変換される。ある軸のまわりを回転する運動を記述するには円筒座標系を用いるのが便利である。

球座標系は、図 1.1 (c) に描くように、カルテシアン座標系の  $z$  軸を天頂方向とする球面における天頂角、方位角によって 3 次元の座標を特定する。天頂角は、カルテシアン座標系の  $z$  軸からの角度である。方位角はカルテシアン座標系の  $x$  軸からの回転角度である。さらに、原点からのユークリッド距離を座標成分として利用する。球面座標系の座標は、 $[r, \theta, \varphi]$  を用いる。これらの座標成分は、

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

によってカルテシアン座標系から変換される。ある特定の点に起因する力で支配される運動を記述するには球面座標系が便利である。

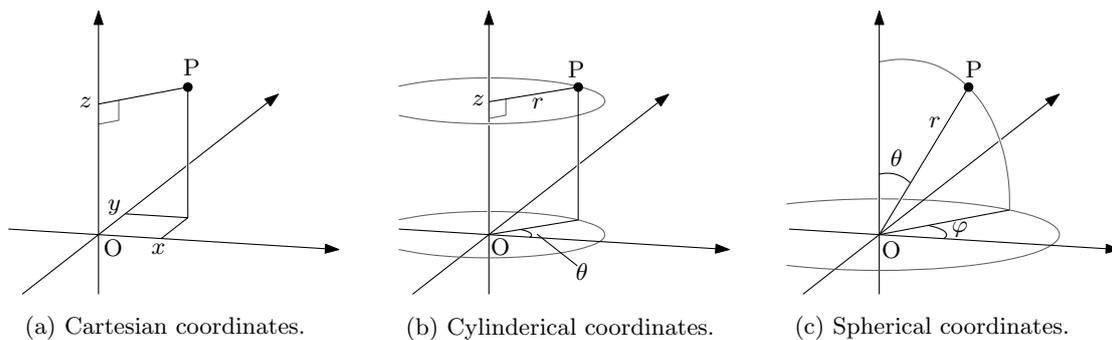


図 1.1: 三次元の座標系の例

位置を取り扱う際、3次元における三つの座標成分を書くよりも、それらをまとめて一つの記号  $\mathbf{r} (= [x, y, z])$  を用いる方が便利である。その記号はベクトルと呼ばれる。このベクトル  $\mathbf{r}$  は、原点から対象位置に向かうベクトルである。例えば、図 1.1 の例では  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  となるわけだ。このような位置ベクトルを書くと、位置に依存する関数が  $f(x, y, z)$  と書く代わりに  $f(\mathbf{r})$  のように書けるので便利だ。

**速度** 運動する物体は時間経過とともに位置が変化する。その位置の変化率は速度と呼ばれる。速度は時間軸における位置の変化率である。つまり、移動によって生じた変位を移動に要した時間で除すれば、その物体の平均速度が得られる。実質的に、その時間を長くすれば細かい精度が得られるだろうが、ここでは数学的観点で速度を考える。

速度は単位時間当たりの位置の変化率である。例えば、5秒間に50mだけ移動する物体は、10m/sの速度で運動していることになる。とはいえ、物体は加速/減速する場合もある。上の例のように、5秒も時間が経過すると速度が変化しているかもしれない。瞬時的な速度を得るためには、十分短い時間で速度を計測しなければならない。十分短い時間 $\Delta t$ における位置の変化が $\Delta x$ だとすると、速度は $\Delta x/\Delta t$ である。ここで、平均速度を計算するための対象時間 $\Delta t$ を極限まで短く、すなわち、 $\Delta t$ とすると、微分の定義式:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

となるのだから、速度 $v$ は位置 $x$ の時間についての導関数である。位置は単に $x$ 座標だけでなく、カルテシアン座標系なら、 $y$ や $z$ 座標があるので、一般的に位置を表す表記として位置ベクトル $\mathbf{r}$ を用いると、速度ベクトルは、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.1)$$

のように書くことができる。ここで、 $d\mathbf{r}/dt$ は微分におけるライプニッツの記法、 $\dot{\mathbf{r}}$ はニュートンの記法である。ライプニッツの記法は演算子 $d/dt$ が $t$ についての常微分を与える。この演算子について、 $t$ を別の記号に置き換えると、任意変数による微分演算子を記述することができる。一方、ニュートンの記法 $\dot{\mathbf{r}}$ は時間についての微分に特化した記法である。数学記述が簡単であるのでニュートン記法も頻繁に利用される。本書は必要に応じて、ライプニッツ記法とニュートン記法の双方を用いる。

カルテシアン座標系 $\mathbf{r} = [x, y, z]$ の場合、速度ベクトル $\mathbf{v}$ は、座標成分ごとに時間について微分し、得られた導関数を成分としたベクトルである。すなわち、

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}],$$

である。しかし、円筒座標や球面座標で速度ベクトルを表現するには、このような単純な計算にならないことは後に説明する。

**加速度** 物体の運動速度が一定でない場合、その物体は加速度をもつという。加速度は単位時間あたりの速度の変化である。速度の定義を応用すると、加速度は速度の時間微分であるということだ。すなわち、加速度 $\mathbf{a}$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \\ &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

のように、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を時間  $t$  で2階微分して得られる2階の導関数である。この数式の第1行目はライプニッツ記法、第2行目はニュートン記法で書いている。後に例を示すが、加速度ベクトル  $\mathbf{a}$  は速度ベクトル  $\mathbf{v}$  と平行とは限らない。

### 1.1.2 典型的な運動

前項で定義したように、変位を時間について微分すると、速度・加速度が得られる。本項では、典型的な運動について変位を数式で表現し、時間微分することによって速度・加速度を記述していこう。

**等速直線運動** 物体は力の作用を受けなければ、一定の速度で運動を続ける。この性質は後に説明する慣性の法則である。つまり、速度  $\mathbf{v}$  が定数であり、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t,$$

なる数式で書けるわけだ。なお、 $\mathbf{r}_0$  は  $t = 0$  の時点で物体が存在する位置である。数学的には、 $\mathbf{v}$  を  $t$  について積分した際の積分定数である。一方、 $\mathbf{v}$  が定数であるので、それを時間  $t$  について微分した導関数がゼロになるため、加速度は  $\mathbf{a} = 0$  である。

この運動では、物体の軌跡は直線を描くため、**等速直線運動** と呼ばれる。常に同じ速さで、直線を描くことがその名称の由来である。物理学では、速度が単なる速さだけでなく向きを含む物理量であるため、等速直線運動の代わりに**等速度運動** と呼ぶこともある。この名称は、等速度が直線運動になることを意味しているからだ。

**等加速度運動** 一定の加速度  $\mathbf{a}$  によって運動する物体の速度と位置は、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2,$$

によって特定できる。これらの数式は、 $\mathbf{v}$  が  $\mathbf{a}$  を積分し、 $\mathbf{r}$  が  $\mathbf{v}$  を積分することによってられた。なお、 $\mathbf{v}_0$  と  $\mathbf{r}_0$  は積分定数であり、それぞれ、 $t = 0$  における速度と位置を表す初期値である。

位置ベクトルをカルテシアン座標  $\mathbf{r} = [x, y, z]$  とし、それに対応する速度ベクトルを  $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]$  とする。簡単のため、加速度ベクトルと速度ベクトルが  $x$  軸方向に向いている、すなわち、 $\mathbf{a} = [a, 0, 0]$ 、 $\mathbf{v} = [v, 0, 0]$  とすると、

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2,$$

と記述できる。これらの数式から、

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0),$$

なる関係式が導出できる。この数式は後に紹介するエネルギー保存則に対応する数式である。これらの数式を使うと、停止状態から  $5 \text{ m/s}^2$  の一定加速度で加速する自動車が距離  $400 \text{ m}$  を通過する時間が約  $12.65$  秒であることがわかる。しかも、 $400 \text{ m}$  を通過するとき、自動車は  $63.2 \text{ m/s}$  ( $= 228 \text{ km/h}$ ) まで加速されている。

**放物線運動** 地表の近くでは、あらゆる物体に一定の加速度  $g$  ( $\simeq 9.8 \text{ m/s}^2$ ) がかかるように重力が鉛直下方に作用する。その理由で  $g$  は重力加速度と呼ばれる。水平方向には重力が作用しないため、空中に放り出された物体の運動は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g,$$

なる微分方程式で記述できる。ここで、水平方向を  $x$ 、鉛直上方を  $z$  とした。これらの方程式を 2 回だけ  $t$  について積分すると、

$$x = v_0 t \cos \theta, \quad z = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2,$$

が得られる。ここで、 $t = 0$  のとき物体が位置  $[x, z] = [0, 0]$  において、水平から角度  $\theta$  をなす上方に速さ  $v_0$  で投げ出されたものとして積分定数を決定した。これらの数式から  $t$  を消去すると、

$$z = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \left( x - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g},$$

が得られる。この数式は、空中に放り出された物体が描く軌跡を表している。この軌跡は、 $z$  が  $x$  の 2 次関数として表現されている。いわゆる、放物線である。地表近くの一様重力の場合 ( $g = -9.8 \text{ m/s}^2$ ) において物体を  $\theta = 60^\circ$  の角度で  $v_0 = 25 \text{ m/s}$  の初速度で打ち出したときの軌跡を図 1.2 に示す。打ち出された時刻を  $t = 0$  とすると、物体は  $t = 2.2 \text{ s}$  に最高点に達し、 $t = 4.4 \text{ s}$  に地面に到達する。放物線という名称は空中に放り出された物体が描く軌跡であることに由来している。物体が、地上  $z = 0$  に到達する位置を水平座標  $x_1$  で表現すると、

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g},$$

であることが上の方程式から容易にわかる。図 1.2 の例では  $x_1 = 55.2 \text{ m}$  となる。得られた公式によると、 $x_1$  が最大となる角度は  $\theta = \pi/4$ 、すなわち、角度  $45^\circ$  である。

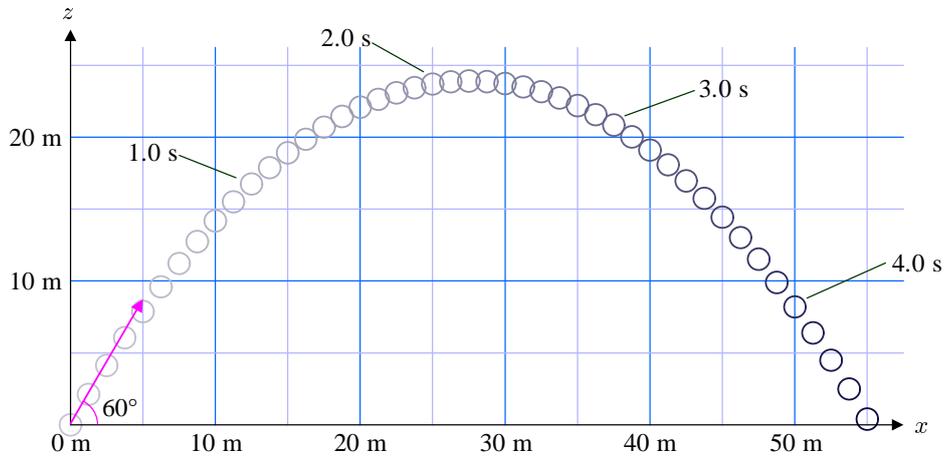


図 1.2: 一様な重力の場における放物線運動 ( $v_0 = 25 \text{ m/s}$ )

**等速円運動** 物体が半径  $A$  の円周上を一定の角速度  $\omega$  で運動する状況を考えよう。物体の速さは一定であるが、円周上を運動するという事は、時間の経過とともに向きが変わるということだ。つまり、速度は変化をしているので加速度が生じていることになる。その加速度を図によって表現すると、図 1.3 を考えればよい。物体の速さは常に  $v = A\omega$  である。微小時間  $\Delta t$  だけ経過すると、運動方向は  $\omega\Delta t$  の角度だけ回転するはずだ。図に示したように、その微小時間を隔てて、速度ベクトルは運動方向と直交する方向に  $v\omega\Delta t = A\omega^2\Delta t$  だけ速度差が生じているはずだ。したがって、単位時間あたりに生じる速度差、すなわち、加速度は  $a = v\omega = A\omega^2 = v^2/A$  となる。

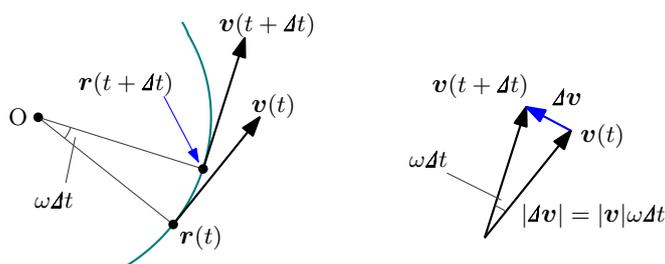
特定した加速度を数学的に検証してみよう。運動が  $xy$  平面上となるように座標をとり、原点を中心とする円軌道を描くとすると、

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \sin \omega t,$$

である。これらの数式を微分すると、

$$\begin{aligned} v_x &= -A\omega \sin \omega t, & v_y &= A\omega \cos \omega t, \\ a_x &= -A\omega^2 \cos \omega t, & a_y &= -A\omega^2 \sin \omega t, \end{aligned} \tag{1.3}$$

が得られる。得られた導関数から、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$  が導かれるので、速度ベクトルと加速度ベクトルが直交していることがわかる。さらに、 $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$  となる。物体が原点を中心とする半径  $A$  の円周を運動するので、 $|\mathbf{r}| = A$  である。したがって、 $a = |\mathbf{a}| = A\omega^2$  となるので、図 1.3 を利用して特定した加速度と一致する。等速円運動の事例から、一つの知見が得られる。それは、速度と直交する加速度は物体の速さを変えないが、運動の向きを変えするという事実だ。



(a) Trajectory of circular motion. (b) Change of velocity vector.

図 1.3: 等速円運動における速度ベクトルの変化

**単振動** 等速円運動における物体の軌跡を, 図 1.4 に示すように 1 次元に投影すると, 単振動と呼ばれる運動が現れる。等速円運動が  $xy$  平面上の運動だとすると, 物体の位置  $[x, y]$  は時刻  $t$  の関数である。例えば, その  $x$  成分のみを取り出せば単振動にあたる物体の軌跡ということだ。すなわち,

$$x = A \cos \omega t,$$

が単振動となる物体の位置だ。この数式のように, 単振動では 1 次元で運動し, その位置は時間経過に対して正弦関数で表現できる。単振動は加速度を有する運動である。その性質を調べるため, 変位  $x$  を時刻  $t$  について微分すると,

$$v = -A\omega \sin \omega t, \quad a = -A\omega^2 \cos \omega t,$$

が得られる。当然だが, 速度も加速度も正弦関数で表現されている。速度は, 変位が  $x = 0$  で最大となる。一方,  $x = 0$  において加速度は  $a = 0$  となる。興味深いことに, 単振動で

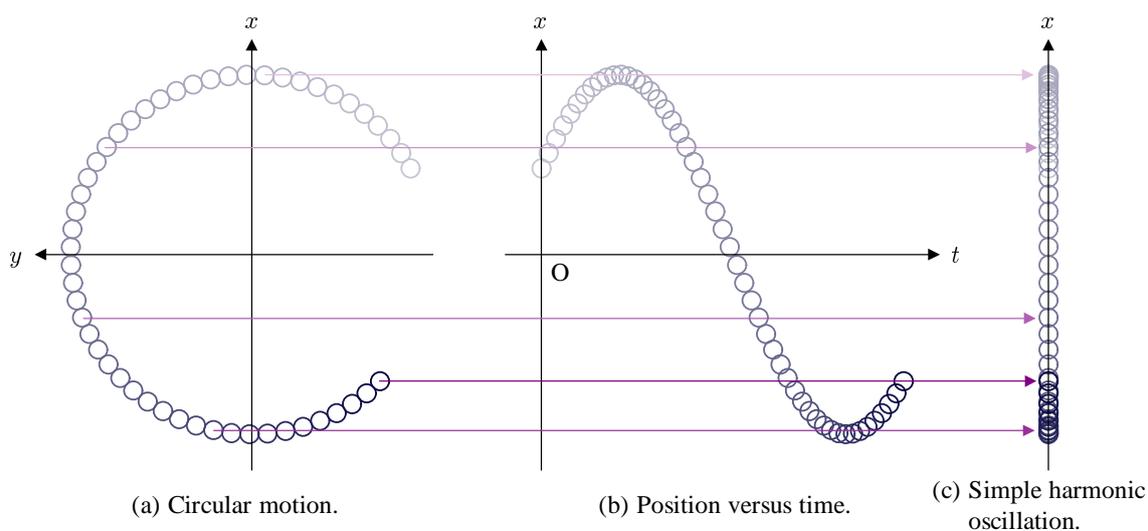


図 1.4: 等速円運動から単振動への投影

は加速度が  $a = -\omega^2 x$  のように, 加速度が中立点からの変位に比例する。中立点から大き

くずれるほど、大きな加速度で中立点に戻そうとする力がはたらく。後に説明する運動方程式によると、加速度に物体に質量を乗じると力になるので、 $F = -kx$ なる関係が成立するはずだ。ここで、 $k \equiv m\omega^2$ とおいた。この力の公式は、バネ定数  $k$  におけるフックの法則である。つまり、単振動は理想的なバネに取り付けられた物体の運動モデルである。

## 1.2 力の作用と運動方程式

前節では運動の軌跡を記述するために、速度や加速度を導入した。本節では、加速度を発生させる要因として力を説明する。ニュートン力学では、位置の2階微分が力に起因するとの考えをとっている。物体の運動を解析するには、力を見極めることが重要である。

### 1.2.1 ベクトルとしての力

力は物体の運動に影響を与える。単なる大きさだけでなく、方向という属性をもっているため力はベクトルである。特定の物体に複数の力が作用すれば、その物体は、それらの力の総和によって運動に影響される。力の総和は、ベクトルの加算である。逆に、特定の力が複数の方向に影響を与える場合もある。その場合、力を成分分解することによって力の影響を調べることができる。

**力の合成** 二つの力によって合成された力は、ベクトル和であるため、平行四辺形の作図によって特定できる。図 1.5 に示すように、合成する二つの力が平行四辺形の隣り合う辺であるように作図すれば、その平行四辺形の対角線が合力である。力  $F_1$  と  $F_2$  が角度  $\theta$  をなす場合、合力  $F$  は、

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta,$$

によって計算できる。言うまでもなく、二つの力が同一の方向を向いているとき、すなわち、 $\theta = 0$  のとき、合力は最大  $F = F_1 + F_2$  となる。最小は、二つの力が反対側を向いてい

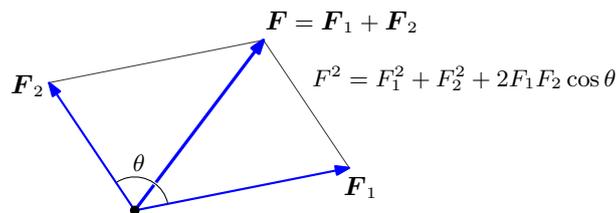


図 1.5: 力の合成

るとき, すなわち,  $\theta = \pi$  のとき,  $F = F_1 - F_2$  となる。力はベクトルであるので,  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}$  のようなベクトル表記を用いれば, 単純にベクトル和:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

として合力を記述することができる。これらのベクトルをカルテシアン座標系において成分表示すると,

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}, \quad F_y = F_{1y} + F_{2y}, \quad F_z = F_{1z} + F_{2z},$$

のように, 各成分が単純和で表される。このような単純和になるのはカルテシアン座標だからであり, 他の座標系ではこのようになるとは限らない。

**力の分解** 物体の運動を考えると, 力を分解すると便利ことがある。力を分解する際, 合力が平行四辺形の対角線になることを利用すればよい。

例として, 図 1.6 に示すように, 斜度  $\theta$  の斜面上に物体を載せたときを考えよう。物体には重力  $mg$  が鉛直下方に作用する。とはいえ, 物体は鉛直下方に運動せず, 斜面上に沿って下方に滑ることになる。その現象は次のように考えればよい。重力は斜面を押しえつける力と斜面を滑ろうとする力に分解できる。斜面を押しえつける力は  $mg \cos \theta$  であり, 斜面を滑ろうとする力は  $mg \sin \theta$  である。斜面を押しえつける力に対抗して, 斜面は力  $N$  で物体

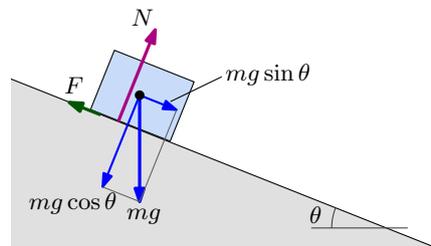


図 1.6: 斜面上に載せた物体に作用する力

を押し返す。力  $N$  は垂直抗力と呼ばれ,  $N = mg \sin \theta$  を満たすため, 物体は斜面上に潜り込むことはない。一方, 物体が斜面下方に向かって力  $mg \sin \theta$  の作用を受けると, 物体は斜面上方に向かって摩擦力  $F$  の作用を受ける。斜面下方に向かう力が小さければ  $F = mg \sin \theta$  を満たす。その場合, 物体は斜面上で静止する。摩擦力  $F$  は斜面と物体の材質に依存し, とり得る上限が存在する。斜面下方に向かう力  $mg \sin \theta$  が, その上限を超えると, 物体は斜面を滑って加速しながら下る。

## 1.2.2 ニュートンの運動の法則

ニュートンの理論における運動の法則は、慣性の法則、運動方程式、作用反作用の原理の三つである。それらの法則は、物体に作用する力が物体の運動にどのように影響するかの指針を示している。その法則から物体の運動が決定されるわけだ。

**慣性の法則** 物体は力を受けなければ現状の速度を維持する。つまり、静止している物体は静止状態を維持するし、運動している物体は等速直線運動を維持する。電車や飛行機に乗っているときに慣性の法則を実感することができる。いや、慣性の法則がゆえに実感がないかもしれない。巡航速度 900 km/h の航空機で飲み物の機内サービスを受けるとき、地上で静止しているときと同様に飲み物がコップに注がれる。これが慣性の法則だ。

**運動方程式** 物体に生じる加速度  $\mathbf{a}$  は、物体に作用する力  $\mathbf{F}$  に比例し、物体の質量  $m$  に反比例する。すなわち、それらの間には  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  が成立する。この数式が運動方程式である。運動方程式によると、質量が大きな物体は加速しづらいということだ。

**作用反作用の法則** 二つの物体 1 と 2 の間に、互いに力が作用するとき、物体 1 から物体 2 に作用する力  $\mathbf{F}_{12}$  と  $\mathbf{F}_{21}$  は、大きさが等しく、逆向きである。すなわち、 $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$  が成立する。作用反作用の法則は、直接物体を押す場合に成立するだけでなく、万有引力のような遠隔力に対しても成立する。

ニュートンより前、ガリレイが湾曲した斜面において次のような法則を見つけている。落下した物体は最下点を通過して最初と同じ高さまで上がる。最下点を通過した後、水平面が持続すれば、その物体は停止することなく、一定の速度で運動を続ける。この法則は、慣性の法則に類似している。しいて言うなら、ガリレイの法則は、一様な重力の中で斜面に沿って運動する物体の法則であり、ニュートンの法則は重力の有無にかかわらない一般的な運動の法則である。さらに、ガリレイより前、物体は力の作用を受けなければ停止すると考えられていた。移動する物体が動力を加えなければ、いずれ停止するという日常の経験に基づく知識だったからだ。しかし、動力を絶ってすぐに停止するのではなく、徐々に速度が低下して停止に至るのだ。その間に、摩擦力が物体を減速させる力として作用しているのだ。ニュートンはその事実を見抜き、慣性の法則を提唱した。

運動方程式は重さと質量を区別した概念である。重さは地球の重力によって物体が地球に引きつけられる力である。その力が大きいとき、我々は重いと表現する。一方、質量は物体を加速する際の抵抗である。物体を加速度  $\mathbf{a}$  で加速するのに必要な力は  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  というわけだ。この法則は、地上であっても、無重力の宇宙空間であっても同じだ。質量が

大きな物体は加速しづらいのだ。なお、既に紹介したように、加速度ベクトルは位置ベクトルの2階微分であるので、運動方程式は、

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (1.4)$$

のように記述できる。なお、この数式はライプニッツ記法だ。ニュートン記法では  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$  と書く。いずれにしても、この方程式を解くことによって、あらゆる物体の運動が特定できる。

作用反作用の法則は見落としがちだが、重要な法則である。斜面の例で述べたように、重力の作用を受けている物体が斜面に潜り込まずに斜面を滑るのは斜面から反作用を受けているからだ。その反作用がなければ、運動方程式によって、物体には鉛直下方に加速度が生じ、斜面に潜り込んでしまう。反作用があるため、力が釣り合い、斜面に潜り込まず、しかも、斜面から浮き上がることもない。

運動方程式  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$  は非常に単純な2階の微分方程式であるが、物体に作用する力  $\mathbf{F}$  を設定すれば、物体の運動を解析することができる。典型的な運動について運動方程式を記述し、運動を解析してみよう。運動方程式から具体的な運動の様子がわかるはずだ。

**一様な重力場** 地表の近くでは質量  $m$  の物体に、鉛直下方に重力  $mg$  が作用する。前にも定義したが、 $g$  は重力加速度である。このとき、質量  $m$  の物体における運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg,$$

となる。ここで、座標  $z$  は鉛直上方となるように設定した。容易にわかるように、この運動方程式は  $d^2 x/dt^2 = d^2 y/dt^2 = 0$  と  $d^2 z/dt^2 = -g$  のように書き換えることができる。つまり、質量に関わらず、地球の重力によって必ず加速度  $g$  が鉛直下方にはたらくのだ。この事実は、ガリレイが重い鉄球も軽い鉄球も同時に落下するという実験で実証<sup>2</sup> している。一方、水平方向には加速度がない。この運動方程式を解くと、

$$x = v_{0x}t, \quad z = x_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

が得られる。なお、微分方程式を解くにあたり、強制的に  $y = 0$  とした。つまり、運動を  $xz$  平面に限定した。言うまでもなく、得られた座標は放物線を描く。

**バネの運動** バネに質量  $m$  の物体を取り付けて振動させたときの運動を考えよう。バネは中立点からの距離に比例した復元力がはたらく。中立点からの距離を  $x$  としたとき、復

<sup>2</sup>ピサの斜塔から鉄球を落下させたという話があるが、それは真実ではない。実際、斜面を転がして落下の同時性を示したようだ。

元力が  $-kx$  であるとする。比例係数  $k$  はバネ定数と呼ばれ、バネの復元力の強さを表す。固いばねでは  $k$  が大きくなる。そのとき、運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

となる。この運動方程式を、 $d^2x/dt^2 = -kx/m$  と書き換え、第 1.1.2 項にて導出した単振動の数式と見比べると、角速度  $\omega = \sqrt{k/m}$  の単振動に対応することがわかる。つまり、この運動方程式の解は、

$$x = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right),$$

である。ここで、 $A$  と  $\phi$  は積分定数である。この解によると、バネ定数  $k$  が大きいほど振動が速く、質量  $m$  が大きいほど振動が遅い。バネの振動は時間経過に対し、正弦関数を描き、その周期は、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

となる。つまり、振動の周期は振幅に依存せず一定である。

**万有引力の法則** 惑星が太陽を公転するのは、質量をもつ物体が重力源になっているからである。ニュートンはその思想のもとで万有引力の法則として、重力を定式化した。万有引力の法則によると、二つの物体の間にはたらく重力は、二つの物体の質量の積に比例し、物体間の距離の自乗に反比例する。すなわち、重力の大きさは、

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (1.5)$$

となる。ここで、比例係数  $G$  は万有引力定数と呼ばれ、 $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$  である。例えば、地表で重力加速度が  $g$  であることから、 $r$  を地球の半径、 $M$  を地球の質量とすると、

$$g = \frac{GM}{r^2},$$

が成立するはずだ。実際に、 $r = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$ 、 $M = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$  を代入すると、確かに、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  が得られる<sup>3</sup>。

人工衛星の周回速度を計算してみよう。簡単のため、人工衛星は高度 400 km で円軌道を描くとする。前に調べたように、等速円運動するためには、中心に向かって加速度が生じる。つまり、中心に向かって物体を引っ張る力、すなわち、向心力が必要だ。その向心力が地球による重力であるなら、人工衛星は円軌道を描く。人工衛星の周回速度を  $v$  とすると、円運動の加速度が  $v^2/r$  であることから、向心力は  $mv^2/r$  であるはずだ。したがって、

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r},$$

<sup>3</sup>本当は、地球の質量が重力加速度から計算されるのかもしれないが、ここでは気にしないでもらいたい。

が人工衛星の速度を決める方程式だ。速度  $v$  について解くと、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

が得られる。高度 400 km なので  $r = 6.771 \times 10^6$  m とすると、 $v = 7.67$  km/s が得られる。この速さで運動させれば、人工衛星は円軌道を描いて地球を周回する。この速さは、わずか 92 分で地球を 1 周してしまう速さだ。

## 1.3 力学的エネルギー

本節ではエネルギーという物理量を導入する。後に定義するように、エネルギーは、他の物体に力を与えて力をするのできる量を表す。エネルギーという物理量は、直接的に測定することができないのだが、エネルギーの概念によって物理学の取り扱いが容易になるという、解析手法としての側面がある。

### 1.3.1 仕事と運動エネルギー

物体に力を作用して動かしたとき、その力と距離の積を**仕事**という物理量として定義する。例えば、10 N の力で物体を 3 m だけ動かしたとき、30 J の仕事をしたと表現する。新たな単位 J はジュールと読み、N · m の意味である。

与える力と運動方向が一致しない場合を考えよう。物体が固い平面上に載っていて、それを水平面から下方  $\theta$  の角度に、力  $F$  で押す場合がその例だ。水平方向に  $x$ 、鉛直上方に  $y$  をとると、力の  $x$  成分と  $y$  成分は、それぞれ、 $F_x = F \cos \theta$ 、 $F_y = F \sin \theta$  となる。既に第 1.2.1 項で説明したように、力は複数のベクトルの和として考えることができる。つまり、物体に  $x$  方向に  $F \cos \theta$  が、 $y$  方向に  $-F \sin \theta$  の二つの力が作用していると考えることができる。そのうち、 $x$  方向の力は物体を  $x$  だけ移動させることができるので  $F x \cos \theta$  の仕事をした。一方、 $y$  方向の力は物体を移動させていないので、ゼロの仕事をした、と解釈するのだ。したがって、物体に与えた外力がした仕事は、

$$W = F x \cos \theta + 0 = F x \cos \theta,$$

となるわけだ。この計算過程からわかるように、外力を  $\mathbf{F}$ 、物体が移動した変位を  $\mathbf{x}$  のようにベクトルで書くと、外力がする仕事は、

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x},$$

のようにベクトルの内積で表現できる。この数式が、外力が物体に対して実行する仕事である。一方、物体も外力に対して仕事をしている。なぜなら、作用反作用の法則によって、物体は外力に  $-\mathbf{F}$  を作用させるはずだからだ。つまり、物体は外力に対して、 $-\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = -W$  の仕事をしているわけだ。つまり、外力が物体に対して次項する仕事は、物体が外力に対して実行する仕事と符号を反転した関係にある。この関係は後にエネルギーを考える際に重要である。

外力が物体に作用した結果として物体が任意の経路を描く場合の力を考えてみよう。力を受けた物体は、点 A から点 B に図 1.7 に示す経路をとるとする。その経路を無数の直線的な微小経路  $\Delta \mathbf{r}$  に分割すると、その微小経路で外力が物体に与える仕事は  $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$  となる。その微小仕事を点 A から点 B に沿って加算すればよい。その結果、仕事  $W$  は、

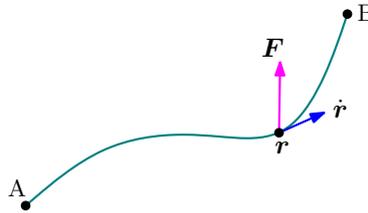


図 1.7: 物体に与えた力と運動経路

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.6)$$

のように積分で表現できる。このように表現すれば、力  $\mathbf{F}$  は定数でなく、位置  $\mathbf{r}$  の関数であってもよい。後に証明するように、このような積分で与えられる  $W$  は、両端 A と B での運動状態に依存し、途中の経路に依存しない。

これまでに説明した仕事には時間が含まれていない。言い換えると、仕事を与えるのにどれくらいの時間を要したかということは問題になっていないのだ。とはいえ、単位時間あたりに与える仕事を議論することは重要だ。なぜなら、単位時間あたりに与える仕事とは、その外力の瞬発力を示す尺度になるからだ。そこで、単位時間あたりに外部に与える仕事を、

$$P = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (1.7)$$

のように定義する。新たに定義された  $P$  は、**仕事率**と呼ばれる。仕事率を表現する際の単位は、定義にしたがうと J/s であるが、慣習として W (ワット) という単位で表現する。例えば、10 秒かけて 3000 J の仕事をしたとき、その系は平均的に 300 W の仕事率で仕事をしたというわけだ。

数式 (1.6) を基準に仕事率を考えよう。点 A から点 B に向かう経路の途中において、微小区間  $d\mathbf{r}$  を移動するのに要する時間を  $dt$  とする。物体の速度が  $\mathbf{v}$  であれば、 $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$

が成立するはずだ。そのように考えると、仕事  $W$  は、

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt, \quad (1.8)$$

のように書き換えられる。この数式と (1.7) を比較することによって、

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.9)$$

が得られる。この数式によると、同じ力を与えても物体の速度が速ければ仕事率が大きくなる。例えば、速度 50 m/s で走行する車両が、空気抵抗に逆らい、その速度を保持するためエンジンから 2700 N の力を出力するとき、仕事率は  $2700 \text{ N} \times 50 \text{ m/s} = 135 \text{ kW}$  となる。その出力は 180 馬力<sup>4</sup> に相当する。この時点で、物理学における仕事の役割が見えていないだろうが、本節の終了までには有用な物理量であることが理解できるはずだ。

**運動エネルギー** 静止状態から速度  $\mathbf{v}$  に達するまでの加速のために印加した力  $\mathbf{F}$  によって与えられる仕事の積算は運動エネルギーとして定義される。運動エネルギーは、衝突などによって他の物体の運動状態を変化させる際の議論に便利なツールである。

質量  $m$  の物体を静止状態から速度  $\mathbf{v}$  まで加速するのに必要な仕事を計算しよう。ニュートンの運動方程式から、力が  $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}}$  であることがわかっている。その関係に注意しながら、(1.8) を計算すると、

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = m \int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m \int_0^{\mathbf{v}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v},$$

のように数式変形できる。ここで、点 A での物体の速度がゼロ、点 B での物体の速度が  $\mathbf{v}$  とした。当然であるが、移動する間、物体の質量  $m$  は変化しないものとした。この右辺をさらに計算すると、

$$W = \frac{1}{2}mv^2,$$

が得られる。ここで、 $v \equiv |\mathbf{v}|$  である。この計算結果は、静止状態から速さ  $v$  に加速するために物体に与える仕事は、その運動経路や、力  $\mathbf{F}$  の時間依存性に関わらず一定であることを意味する。このように、力や途中の運動経路に関係せず、現在の速度  $\mathbf{v}$  で決まる物理量となるので、運動を特徴づけるパラメータとして定義することが妥当である。この物理量を**運動エネルギー**と定義し、 $K$  なる記号で書くことにしよう。すなわち、質量  $m$  の物体が速さ  $v$  で運動するとき、運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.10)$$

<sup>4</sup>自動車の仕事率は、慣習的に 1 馬力 = 750 W を単位で表現される。

となるわけだ。これだけでは運動エネルギーを導入したことによる意味が見いだせないかもしれない。次項でポテンシャルエネルギーを取り扱った後、エネルギーという物理量の価値が見えてくるだろう。

等加速度運動を取り扱った際に、 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ なる公式を示した。この公式は運動エネルギーに関する公式だ。この公式の両辺に  $m/2$  を乗じると、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = max,$$

が得られる。左辺は加速の前後での運動エネルギーの増加分である。右辺は加速のために印加した力による仕事である。

### 1.3.2 ポテンシャルエネルギー

重力場において、高い場所に存在する物体は足場を失うと自由落下して速度をもつ。つまり、自由落下の結果、運動エネルギーを得るのだ。高い場所に存在する物体は、自由落下によって運動エネルギーを得る可能性をもっているということだ。その可能性をポテンシャルエネルギーという物理量で表現する。

ポテンシャルエネルギーは場所による関数と考えられ、 $U(\mathbf{r})$ なる記号で記述される。例えば、鉛直下方 ( $z$  の負の方向) に  $g$  の重力加速度を生じる一様な重力場において、質量  $m$  の物体を高さ  $z = h$  までゆっくりと持ち上げるのに必要な仕事は、

$$W = mgh,$$

である。物体には  $mg$  の重力が鉛直下方にはたらくているので、持ち上げるには  $mg$  より大きな力が必要だ。とはいえ、大きすぎる力を与えると、上方に加速して高さ  $h$  で静止できないので、 $mg$  より無限小だけ大きな力を与え、高さ  $h$  まで引き上げた、と考えるのだ。その重力場で、水平方向に物体をゆっくり動かす場合、運動方向と与える力の方向が直交するため、必要な仕事はゼロである。したがって、鉛直下方に向かう一様な重力場で、物体を任意の場所にゆっくり移動するのに必要な仕事は、鉛直座標  $z$  にしか依存しない。その必要な仕事  $W$  をポテンシャルエネルギー  $U(\mathbf{r})$  として定義する。この場合、ポテンシャルエネルギーは、

$$U(\mathbf{r}) = mgz, \tag{1.11}$$

となる。ここで、先ほど扱った高さ  $h$  を一般化して  $z$  で置き換えた。

バネ定数  $k$  のバネを伸ばしたときのポテンシャルエネルギーを考えよう。中立点から  $x$  だけ伸ばしたとき、バネには  $kx$  の復元力が中立点に向かってはたらくている。復元力に打ち勝ち、バネを伸ばすためには、少なくとも  $kx$  の力を  $x$  の正方向にかけなければならない

い。一様な重力場と異なり、この場合、必要な力が位置  $x$  の関数になっていることだ。その場合、ある場所  $x$  で力  $kx$  をかけて微小変位  $\Delta x$  だけ動かす。さらにその場所から新たに力  $kx$  をかけて微小変位  $\Delta x$  だけ動かす、というように位置をずらしながら、位置に応じて力を変化させながら所定の場所までゆっくりとバネを伸ばすと考えればよい。つまり、中立点から  $l$  だけばねを伸ばすのに必要な仕事は、

$$W = \int_0^l kx \, dx = \frac{1}{2}kl^2,$$

のような積分で計算できる。つまり、バネ定数  $k$  のバネにおけるポテンシャルエネルギーは、

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.12)$$

である。なお、バネが  $x$  軸方向にしか動かさないものと仮定し、ポテンシャルエネルギーは  $x$  のみの関数とした。

万有引力におけるポテンシャルエネルギーを考えてみよう。質量  $M$  の物体が原点に存在し、距離  $r$  だけ隔てた位置に質量  $m$  の物体が存在する。万有引力定数  $G$  を用いて、物体にはたらく重力を記述すると、

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

となる。この重力が原点に向かってはたらいっている。先ほどと同様に、この力を  $r$  について積分すれば、ポテンシャルエネルギー：

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}, \quad (1.13)$$

が得られる。ただし、ここでは無限遠でポテンシャルエネルギーがゼロとなるように積分定数を決定した。この結果からわかるように、ある天体から物体を無限遠まで移動するのに必要な仕事が有限値になるということだ。それは力が  $r^2$  に反比例しているからなのだ。

重力場のポテンシャルエネルギーを数式で表現したので、第2宇宙速度を計算してみよう。第2宇宙速度とは、地球の重力を振り切って無限遠に到達できる最小の速度である。第2宇宙速度を  $v$  とおき、地球の半径を  $R$  とすると、力学的エネルギー保存則は、

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{R} = 0,$$

となる。左辺は地表でのエネルギーを表し、具体的には、第1項が運動エネルギー、第2項がポテンシャルエネルギーだ。右辺が無限遠のエネルギーであり、運動エネルギーもポテンシャルエネルギーもともにゼロとなる。この方程式を解くと、

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \simeq 11.2 \text{ km/s},$$

が得られる。空気抵抗などの摩擦力を無視すると、地表でこの速度、または、それを超える速度で発射された物体は、地球の重力を振り切って無限遠まで飛んでいく。この速度より小さければ、いずれ、地球の重力によって引き戻される。

重力場のように、場所に依存した力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  が発生する場において、ポテンシャルエネルギー  $U(\mathbf{r})$  は、

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad (1.14)$$

なる関係を満たす。このような力は、エネルギー保存則を保持するための力であることから**保存力**と呼ばれる。ここで、 $\nabla U$  は勾配ベクトルであり、カルテシアン座標系では、

$$\nabla U = \left[ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right],$$

のように定義される。逆に、この勾配ベクトルを利用して、ポテンシャルエネルギーを計算すると、

$$\int (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} = \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \int dU = U,$$

となるので、(1.14) の正当性が確認できる。ここで、被積分関数が  $-\mathbf{F}$  であるのは、場の力  $\mathbf{F}$  に打ち勝つための最小の力を積分する必要があるからだ。上記の積分は、厳密には積分定数が必要であるが、ポテンシャルエネルギーの基準位置の問題であるので省略した。

### 1.3.3 力学的エネルギー保存則

重力場のような場における物体の運動では、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定である。その法則は力学的エネルギー保存則と呼ばれる。エネルギーは、これまでに説明したエネルギーだけでなく、熱エネルギーや電磁エネルギーなど多彩であり、それらのエネルギーの和が一定であるのだが、現時点では力学的エネルギーのみを考えよう。

単純な例として、1次元の調和振動子を考える。既に説明したように、調和振動子はバネに取り付けた物体の運動である。バネ定数  $k$  のバネにおいて、中立点からの変位を  $x$ 、そのときの速度を  $v$  とすると、

$$x = A \cos \omega t, \quad v = -A\omega \sin \omega t,$$

のように記述される。ただし、 $\omega = \sqrt{k/m}$ 、さらに、 $A$  は単振動の振幅である。具体的に運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を計算すると、

$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{A^2m\omega^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{A^2k}{2} \cos^2 \omega t = \frac{A^2k}{2},$$

のように、エネルギーの和が時刻  $t$  に依存せず一定値になることが導かれる。これがエネルギー保存則だ。

一様重力場での運動について力学的エネルギー保存則を確認しよう。質量  $m$  の物体が斜度  $\theta$  の斜面を滑る場合を考えよう。そのとき、斜面に沿って下向きの加速度  $g \sin \theta$  が生じる。斜面に沿って座標軸  $s$  をとったとすると、静止状態から滑り始めたときの時刻を  $t = 0$  とすると、

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta,$$

によって時刻  $t$  における物体の位置が特定できる。この数式を  $t$  について微分すると、時刻  $t$  における速度:

$$v = gt \sin \theta,$$

が得られる<sup>5</sup>。この  $v$  から運動エネルギーを計算すると、

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgt^2 \sin^2 \theta = mgs \sin \theta,$$

が得られる。ここで、鉛直上方にとった座標が  $z = h - s \sin \theta$  であると仮定しよう。つまり、物体を解放する場所を  $z = h$  としたわけだ。このとき、運動エネルギーは、

$$K = mg(h - z),$$

と書けるわけだ。運動エネルギー  $K(z)$  とポテンシャルエネルギー  $U(z)$  をグラフとして描くと図 1.8 のようになる。数式から明らかなように、運動エネルギーとポテンシャルエ

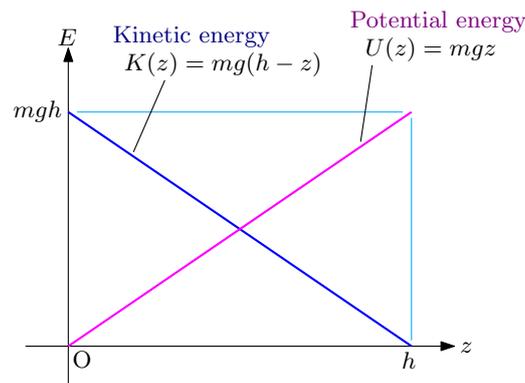


図 1.8: 高さ  $h$  で解放した物体のエネルギー

ネルギーの和は  $K(z) + U(z) = mgh$ , すなわち、一定である。念のため強調しておくが、速度  $v$  は鉛直下方への速度成分ではない。斜面下方に沿った速さである。また、自由空間を自由落下させる場合、 $\theta = \pi/2$  と考えればよい。

<sup>5</sup>この問題の場合、速度  $v$  を先に特定し、それを積分して  $s$  を計算してもよい。

一様な重力場における運動で  $K = -mgz$  となることは直線的な斜面だけでなく、一般の曲がった斜面において成立する。これまでと同様に、水平座標を  $x$ 、鉛直上方に向かう座標を  $z$  とし、それらが斜面の長さ  $s$  の関数  $x(s)$ 、 $z(t)$  で表現されるとしよう。ここで、斜面の途中の微小区間  $dx$ 、 $dz$  を考える。微小区間であるので、この区間で斜面は平坦であると考えるよい。この斜面の沿って、物体には、

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g dz}{\sqrt{dx^2 + dz^2}}$$

なる加速度が生じる。この時点で、物体は斜面に沿って速度  $v$  で運動しているとする。その物体は微小区間を走り抜けるのに  $\sqrt{dx^2 + dz^2}/v$  の時間を要する。つまり、物体は微小区間を走り抜ける間に、

$$dv = -\frac{g}{v} dz,$$

だけ速度が変化する。この方程式の両辺に  $mv$  を乗じて両辺を積分すると、

$$-mgz + \frac{1}{2}mv^2 = C,$$

が得られる。ここで、 $C$  は積分定数だ。したがって、一様な重力場において任意の曲がった斜面を滑る物体の運動において力学的エネルギー保存則が成立する。上で述べたように、ここでは任意の形状の斜面を取り扱った。その斜面における摩擦力がないことが前提である。

## 1.4 運動量

エネルギーに類似した物理量として、本節では運動量を定義する。エネルギーがスカラーであることに對し、運動量はベクトルである。エネルギーと同様に、外力を受けない物体は運動量を一定に保つ。さらに、物体の衝突において、衝突の前後で運動量が一定に保たれることも物理学において重要な性質である。

### 1.4.1 力積と運動量

壁に投げつけられたボールは、壁で跳ね返る。跳ね返るということは、速度が逆転することだ。ボールがそのような速度変化を引き起こすのは、壁がボールに力を与えているからだ。そのように速度変化を引き起こすまでに与えた力の積分は力積と呼ばれる。

壁でボールが跳ね返る現象を簡単なモデルで考察しよう。簡単なモデルとして、壁がバネ定数  $k$  のバネであるとする。質量  $m$  のボールが速度  $v$  で飛んできて、バネと融合する。

質量  $m$  の物体はバネと融合して、速度  $v$  でバネを縮める。バネが縮めば、物体の速度は遅くなり、ある限界で速度がゼロになり、その後、バネは物体を押し戻す。最初の長さにバネが戻ると、物体は壁を離れて飛んでいくのだ。ボールがバネを縮める変位の限界を  $A$  とし、エネルギー保存則:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

を利用すれば決定できる。左辺が衝突直前のエネルギー状態だ。バネは中立点なのでエネルギーがゼロだが、ボールには運動エネルギーがある。右辺はバネが限界まで縮んだ状態だ。バネにはエネルギーが蓄えられ、停止した物体の運動エネルギーはゼロだ。この方程式を解くと、

$$A = \sqrt{\frac{m}{k}} v,$$

が得られる。壁をバネ定数  $k$  の理想的なバネと仮定したので、衝突から跳ね返るまでの運動は単振動となり、その振幅が  $A$  ということだ。その単振動の変位を時刻  $t$  の関数として書くと、

$$x = -\sqrt{\frac{m}{k}} v \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

が得られる。ただし、ボールがバネに接した時刻を  $t = 0$  とし、バネが縮む方向を  $x$  の負の方向とした。ボールがバネから受ける力は時刻  $t$  の関数として、

$$F(t) = m\ddot{x} = \sqrt{km} v \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

と書ける。この関数をグラフに描くと図 1.9 のようになる。ボールがバネに接している時間は  $t = 0$  から  $t = \pi\sqrt{m/k}$  である。バネ定数  $k$  が大きくなるほど、接触時間は短くなる。その接触時間に受ける力の時間積分が力積である。図中の網掛け部分の面積が力積に相

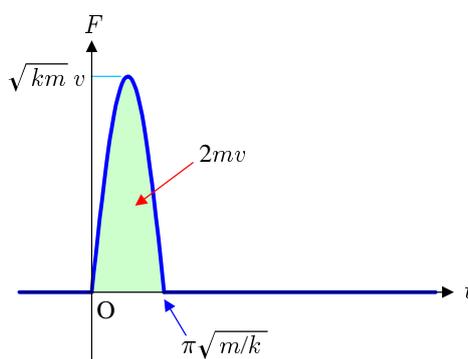


図 1.9: 壁に衝突したボールが受ける力

当する。ここで扱っているような簡易的なモデルでは、力積は  $k$  とは無関係に一定値  $2mv$  となる。この力積を受けることにより、速さ  $v$  で壁に衝突したボールが、速さ  $v$  で逆方向に跳ね返るのだ。

上の例では、力の特定の成分のみを取り扱ったが、力は本来、ベクトル量だ。そのベクトルを時間にわたって積分しても、やはり、ベクトルになるはずだ。つまり、力積は、

$$\mathbf{I} = \int_A^B \mathbf{F} dt, \quad (1.15)$$

なるベクトルとして定義される。この数式において、開始条件 A と終端条件 B を書いた。これは、運動状態 A から運動状態 B に変化する間に与えられた力積を意味する。後に本項で証明するように、力積は開始条件と終端条件によって決まるのであって、その途中の仮定には依存しない。

壁に衝突したボールの例では、壁からボールが受ける力積が  $2mv$  になった。この値は、壁に仮定したバネ定数  $k$  に依存しない。そう考えると、質量と速度の積自体  $mv$  が意味のある物理量だと推測できる。その物理量  $mv$  は、**運動量** (momentum) と呼ばれる物理量である。容易に察しがつくように、運動量は静止状態から  $v$  まで加速させるために物体に与えた力積と等しい。

質量  $m$  の物体に力を作用させて静止状態から速度  $v$  に加速する過程での力積を考えてみよう。作用させる力は、任意の力である。初期状態で静止、終了状態として  $v$  になってさえいけば、どのような速度変化を途中で与えていても構わない。定義に基づいて力積を計算すると、

$$\mathbf{I} = \int_A^B \mathbf{F} dt = m \int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = m \int_0^v d\mathbf{v} = m\mathbf{v},$$

が得られる。上で述べたように、初期状態 A を物体が停止している状態、終端状態 B を物体が速度  $v$  で運動する状態とした。計算された力積は、まさに、上で定義した運動量だ。改めて運動量を公式として記述すると、

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1.16)$$

となるわけだ。逆に、任意の状態 A から B へ運動を変化させるための力積  $\mathbf{I}$  は、

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}(A) - \mathbf{p}(B) = m(\mathbf{v}(A) - \mathbf{v}(B)),$$

のように書ける。つまり、物体に与えた力積は初期状態と終端条件が決まれば特定できる。その途中の仮定には依存しないのだ。この関係式によると、物体に力積を与えると、それだけ運動量が増えるということだ。

### 1.4.2 運動量保存則

物体が衝突して速度が変化する場合、物体の運動量の和は一定に保たれる。その補足は**運動量保存則**と呼ばれる。運動量保存則は、衝突による物体の速度変化だけでなく、ロケット推進の原理を説明できる。

衝突において運動量保存則が成立することは明らかである。二つの物体 A と B が衝突する場合を考えよう。衝突する短い間に、A から B に力  $\mathbf{F}$  が与えられるとする。このとき、作用反作用の法則によって、B から A には力  $-\mathbf{F}$  が作用する。この力が微小時間  $\Delta t$  だけ作用するならば、物体 B の運動量が  $\mathbf{F} \Delta t$  だけ増加し、物体 A の運動量は  $-\mathbf{F} \Delta t$  だけ増加する。すなわち、物体 A と物体 B の運動量の和は一定に保たれるのだ。

運動量保存則を用いて、二つの物体の衝突を解析しよう。質量  $m_A$  の物体 A が速度  $v$  で運動して、質量  $m_B$  の物体 B に衝突した。物体 B は衝突前は静止していて、衝突後も物体 A と物体 B の速度ベクトルは同一直線上であるとする。つまり、1次元の衝突問題を解くのだ。なお、衝突後の物体 A と物体 B の速度は、

$$v_B - v_A = ev,$$

を満たすものとする。ここで、 $e$  は反発係数と呼ばれる数値であり、物体の材質に依存し  $0 \leq e \leq 1$  の値をとる。そのうち、 $e = 1$  による衝突は弾性衝突、 $e \neq 1$  は非弾性衝突と呼ばれる。非弾性衝突の中でも、特に、 $e = 0$  は完全非弾性衝突である。完全非弾性衝突は、衝突した二つの物体が一体化して運動する状況に相当する。上で述べたように、反発係数に関わらず、衝突の前後で運動量保存則が成立し、

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B,$$

なる関係式を満足する。反発係数の定義に注意しながら運動量保存則を解くと、

$$v_A = \frac{(m_A - em_B)v}{m_A + m_B}, \quad v_B = \frac{(1 + e)m_A v}{m_A + m_B},$$

が得られる。これが衝突後の速度というわけだ。この結果を利用して、衝突後の運動エネルギーの和を計算すると、

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{m_A(m_A + e^2 m_B)}{2(m_A + m_B)}v^2,$$

が得られる。この結果によると、衝突の前後で運動量は不変だったにも関わらず、運動エネルギーは変化してしまう。その変化量は、

$$\Delta K = -\frac{(1 - e^2)m_A m_B}{2(m_A + m_B)}v^2,$$

となるわけだ。この数式からわかるように、反発係数が  $e = 1$ 、すなわち、弾性衝突の場合には運動エネルギーは不変だ。しかし、それ以外の場合、衝突後に運動エネルギーは減少している。反発係数  $e$  が小さくなると、衝突によって多くの運動エネルギーが失われる。失われたエネルギーは、以下のように変化する。

- 物体の形状変化として使われる。具体的には、物体の形状が歪むと歪みによるポテンシャルエネルギーとして内部に蓄えられる。
- 熱エネルギーとして内部に蓄えられる。つまり、衝突によって物体の温度が上昇するわけだ。
- 音、場合によっては光のように、衝突のエネルギーが姿を変え、外部に放出される。

特殊なケースとして、弾性衝突 ( $e = 1$ ) で、 $m_A = m_B$  の場合、面白い現象が起きる。衝突後に、 $v_A = 0$ ,  $v_B = v$  となるのだ。すなわち、衝突した物体 A が静止し、その代り、物体 B が速度  $v$  を得て運動を引き継ぐ。その法則はニュートンのゆりかごという玩具で応用されている。ニュートンのゆりかごで確認できる衝突現象の例を図 1.10 に挙げてみた。図 (a) は 1 個の球が、静止している 4 個の球に衝突する現象だ。この場合、衝突後、反対側の球が 1 個だけ飛び出す。この現象の原理は、左側から衝突した球は停止し、2 番目の球が運動する。その直後、3 番目の球に衝突し、同様に繰り返していくので、最終的に球が 1 個だけ飛び出すわけだ。図 (b) は 2 個の球が衝突する現象であり、衝突後、反対側から球が 2 個だ

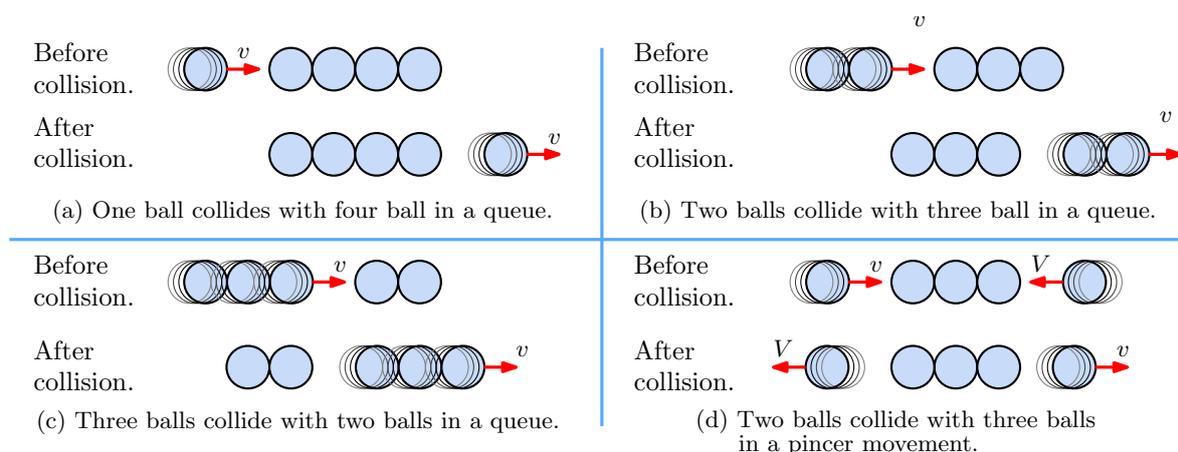


図 1.10: ニュートンのゆりかごで実験できる衝突現象

け飛び出す。この場合も原理は図 (a) と同様だ。最初の球が衝突し、衝突が伝搬していく。その直後、2 番目の球が左から衝突し、同様に衝突が伝搬する。その結果、球が 2 個だけ飛び出すのだ。図 (c) は説明不要だろう。衝突後、球が 3 個だけ飛び出すのだ。図 (d) は、両側から挟み撃つように球が衝突している。その衝突後、両側から到来した球は跳ね返されたように、逆方向に飛び出す。挟み撃ちになっているが、左から到来する球による衝突の伝搬と、右から到来した球の衝突の伝搬を、1 ステップずつ想像してみればわかる。中央の球に左右から同時に衝突することを考えるとわかりにくいので、左か右のどちらかが最初に衝突したと考える方がよい。その結果、図のように左右から球が 1 個ずつ飛び出すはずだ。さらに、左から到来する球の速さを  $v$ 、右から到来する球は  $V$  のように、異なる速度を仮定してもよい。その場合、右から速さ  $v$  で、左から速さ  $V$  で球が飛び出すことになる。

近似的だが、同じ大きさ、同じ質量の球による弾性衝突はビリヤードボールの衝突で観測できる。回転や摩擦を無視すると、衝突したビリヤードボールは図 1.11 に示すように、相手のボールと直交する方向に運動する。ビリヤードボールの衝突を理解するには、図

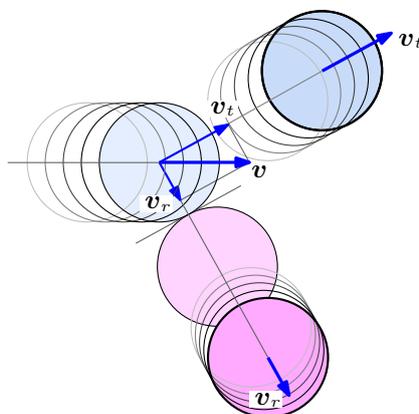


図 1.11: 同一サイズの球の弾性衝突

1.11 のように速度 (運動量) を成分分解すればよい。衝突の瞬間において、速度ベクトル  $v$  を、二つの球の中心を結ぶ動径成分  $v_r$  と接線成分  $v_t$  に分解した。動径成分  $v_r$  が弾性衝突をする。弾性衝突の結果は、ニュートンのゆりかごと同様、衝突したボールの速度がゼロになり、衝突を受けたボールの速度が  $v_r$  を引き継ぐ。一方、二つのボールで摩擦がないとすると、接線成分の運動量  $mv_t$  は相手の球に影響せず、衝突したボールが保持することになる。その結果、二つのボールは互いに直交する速度をもつわけだ。



## 第2章 さまざまな運動の解析

本章では、ニュートンの運動方程式を利用し、恒星のまわりを公転する惑星の運動、加速度運動などを取り扱う。加速度運動に関して、観測者が加速度運動している場合を想定し、慣性力についても議論する。さらに、本節では束縛運動についても議論する。

### 2.1 惑星の公転軌道

惑星の公転軌道は、太陽の重力が支配的となってその形状が定まっている。そのような軌道を記述するには、太陽を原点とした極座標が便利である。本節では、運動方程式を解くことによって惑星の公転軌道を解析する。

#### 2.1.1 ケプラーの法則

自らの質量に比べ巨大な質量を有する恒星を公転する惑星の軌道はケプラーの法則によって支配される。ケプラーの法則は、17世紀にケプラーがティコ・ブラーエの観測結果を火星の公転軌道を推定し、一般的な惑星の軌道として定式化した法則だ。ケプラーの法則は、次の三つの法則で構成される。

**第1法則 (楕円軌道の法則)** 惑星は、太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く。軌道の形状は地球のようにほぼ円に近い軌道や、ハレー彗星のようにかなり扁平した軌道などのように多様である。

**第2法則 (面積軌道一定の法則)** 惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に掃く面積は一定である。楕円軌道において、太陽から遠くを公転しているとき速度が小さく、近くを公転しているときその距離に応じて速度が大きくなる。

**第3法則 (調和の法則)** 惑星の公転周期の自乗は軌道長半径の3乗に比例する。例えば、軌道長半径が9.54天文単位の土星では、公転周期が $9.54^{3/2} = 29.5$ 年となる。

上で述べたように、ケプラーは観測結果からこれらの法則を提唱した。当然だが、ケプラーの法則はニュートンの運動方程式から数学的に導出できる。数学的に導出できるということは、ケプラーの法則が厳密に正しいということだ。ここからケプラーの法則を導出しよう。

ケプラーの法則を導出するには、ニュートンの運動方程式を極座標で表現するのが便利だ。二次元のカルテシアン座標  $[x, y]$  を極座標  $[r, \theta]$  で表すと、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

となる。これらの数式を時間  $t$  について微分すると、

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta,$$

が得られる。ここで、数式記述を簡略化するため、導関数はニュートンの表記法 ( $\dot{x}$  など) にしたがって数式を記述した。引き続き、これらの数式を  $t$  について微分すると、

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta, \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

が得られる。これが極座標における加速度だ。ここで加速度を動径成分  $a_r$  と接線成分  $a_\theta$  を用いて記述しよう。その場合、

$$\ddot{x} = a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta, \quad \ddot{y} = a_r \sin \theta + a_\theta \cos \theta,$$

となるはずなので、

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}, \tag{2.2}$$

が特定できる。太陽が原点に存在する場合、太陽による重力は動径方向にしかはたらかず、 $a_\theta = 0$  となる。したがって、第2式は、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0, \tag{2.3}$$

のように書き換えることができる。つまり、この数式は、

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const}, \tag{2.4}$$

すなわち、面積速度一定の法則を意味するのだ。この数式からわかるように、万有引力が面積速度一定の法則の必要十分条件ではない。中心力であれば、すなわち、 $a_\theta = 0$  さえあればよいのだ。例えば、自由に回転できる支点に端点を取り付けたバネのもう一端におもりをつけて、バネの伸び縮みを利用して運動させても面積速度一定の法則が成立するのだ。

動径方向の加速度  $a_r$  に注目しよう。この加速度成分は太陽による重力に起因するはずなので、 $a_r = -GM/r^2$  となるべきだ。したがって、微分方程式:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (2.5)$$

が得られる。ここで、定数であるべき面積速度を、

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = l, \quad (2.6)$$

とおけば、微分方程式 (2.5) は、

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (2.7)$$

のように変形できる。この微分方程式を解けば、時刻  $t$  における太陽と惑星の距離が決定できるわけだ。ここでは、惑星の軌道の形状に関心をもつことにし、 $r$  を  $\theta$  の関数で表現してみたい。その準備として、 $d^2r/dt^2$  を解析学の公式によって、

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{t}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \\ &= -\frac{l^2}{r^2} \left[ \frac{2}{r^3} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} \right], \end{aligned}$$

のように変形しておく。この結果を利用すると、微分方程式 (2.7) は、

$$\frac{2}{r^2} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2},$$

なる形で表できる。この微分方程式は、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2}, \quad (2.8)$$

のように簡略化できるので、容易に解くことができ、

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta}, \quad (2.9)$$

なる解をもつことがわかる。ここで、 $r_0 \equiv l^2/GM$  と  $e$  は積分定数である。特に、 $0 \leq e < 1$  であれば、方程式の解 (2.9) は図 2.1 に示すように、原点を焦点とする楕円を描く。図 2.1 において、原点  $O$  が太陽、楕円に沿って運動する点  $P$  が惑星に相当する。図に示すように、積分定数  $e$  は楕円の中心から原点  $O$  のずれを表すため、**離心率** (eccentricity) と呼ばれる。得られた解 (2.9) は、観測結果に基づいて推測された楕円軌道の法則をニュートン力学によって厳密に証明した結果なのだ。

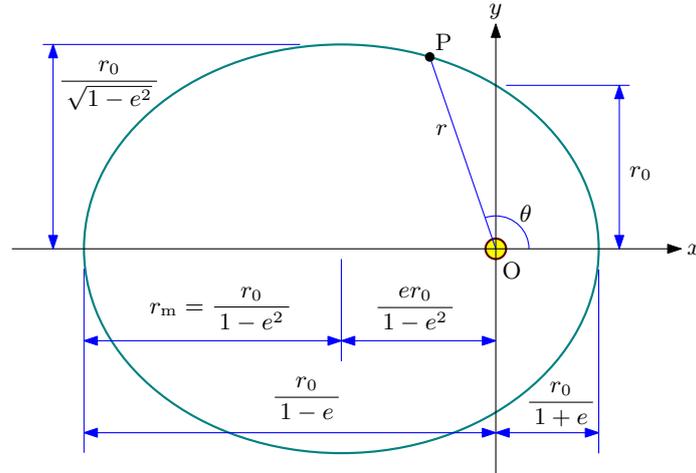


図 2.1: ケプラーの法則による惑星の楕円軌道

面積速度一定の法則と楕円軌道の法則が証明され、調和の法則が残った。調和の法則を証明するには、面積速度一定の法則を利用するのが便利である。図 2.1 に示すように、(2.9) が描く楕円は、長半径が  $r_0/(1 - e^2)$ 、短半径が  $r_0/\sqrt{1 - e^2}$  である。つまり、その楕円の面積は  $\pi r_0^2/(1 - e^2)^{3/2}$  となる。一方、(2.6) によって面積速度が  $l/2$  である。楕円の面積を面積速度で除すれば公転周期が得られるのだ。実際に計算すれば、

$$T = \frac{2\pi r_0^2}{(1 - e^2)^{3/2} \cdot l} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \left( \frac{r_0}{1 - e^2} \right)^{3/2},$$

が得られる。ここで、 $l = \sqrt{GM r_0}$  を利用した。さらに、軌道長半径を  $r_m (= r_0/(1 - e^2))$  とおくと、公転周期が、

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r_m^{3/2}, \quad (2.10)$$

であることが導かれる。この結果は、公転周期の自乗  $T^2$  が軌道長半径の長半径の 3 乗  $r_m^3$  に比例することを意味する。したがって、調和の法則が証明された。数式 (2.10) のように軌道長半径  $r_m$  を用いて記述すると、公転周期は離心率  $e$  の依存性を排除できる。

### 2.1.2 離心率と軌道形状

前項で導出したように、離心率  $e$  が  $0 \leq e < 1$  の場合、惑星は楕円軌道を描く。離心率は太陽の位置が楕円の中心からずれている度合いを表し、 $e$  が大きいほど扁平した楕円軌道となる。特別な場合として、 $e = 0$  は円軌道となる。その場合、前項での数式において、必ず、 $r = r_0$  となるため、 $l = \sqrt{GM r_0}$  から、天体の公転速度が  $v = \sqrt{GM/r}$  であることが容易に導かれる。この速度が円軌道速度であり、太陽による重力と円軌道を描くことによる遠心力が釣り合った状態である。

太陽系の天体の軌道について述べよう。地球の軌道は、軌道離心率が0.0167であり、かなり円軌道に近い。それに対して、水星が最も軌道離心率が大きく0.2056、続いて、火星が0.0935である。太陽系の内惑星の軌道を図2.2に描いてみた。水星と火星でさえ、楕円軌道になっているか確認するのは難しいが、太陽の位置が中心からずれていることは容易にわかるだろう。なお、図2.2は春分点 (vernal equinox) が水平軸の右方向になるように描

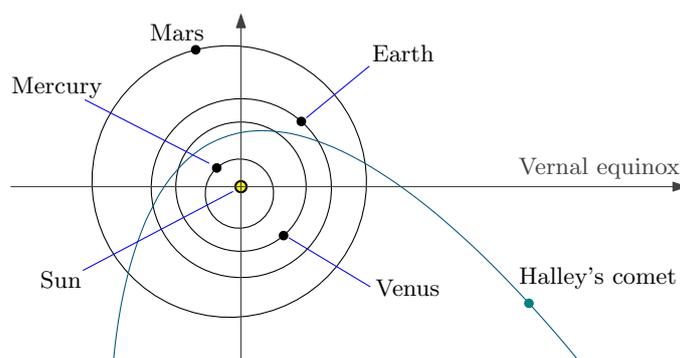


図 2.2: 太陽系の内惑星の公転軌道

いている。惑星に比べ、周期彗星は大きな離心率の軌道を描く。例えば、ハレー彗星の軌道離心率は0.967である。この軌道は長半径が短半径の3.925倍となる扁平楕円である。

楕円軌道の遠日点では重力に打ち勝つには速度が不十分であるため、太陽に引き寄せられる。その間に速度が増大し、近日点では速度が円軌道速度を超え、再び、太陽から遠ざかる。その間に速度が減少し、円軌道速度より小さくなるため、太陽の重力によって引き戻される。その結果、太陽との距離を変えながら速度の増減を繰り返す。それが楕円軌道を描く仕組みである。地球上で投げ上げた物体が放物線を描くのも、実は、楕円軌道の一部である。円軌道速度を超えないうちに地表に到達してしまっているだけの違いだ。

一方、軌道離心率が1以上の値になる場合も軌道の形状が定義できる。軌道離心率が1に等しい場合、すなわち、 $e = 1$ のとき、天体は放物線軌道を描く。この場合、天体は軌道のいたるところで、その時点での太陽の距離に対応した脱出速度で運動するため、太陽の重力を振り切り、かろうじて無限遠に逃れることができる。

軌道離心率が1より大きい場合、すなわち、 $e > 1$ のとき、天体は双曲線軌道を描く。この場合、天体は脱出速度より大きな速度で運動しているため、余裕をもって太陽の重力を振り切って無限遠に逃れることができる。この軌道を描く典型的な天体が彗星だ。彗星は太陽から1光年離れたオールトの雲の天体であり、太陽の重力に捕捉されて太陽の近くまで落下してくる。その後、重力を振り切って無限遠に逃れていく。その軌道は、概して1付近の値となる。ごく一部が木星の重力に捕まり、再び、太陽に引き戻され、ハレー彗星のように周期彗星となることがある。なお、周期彗星になると楕円軌道を描くため、軌道離心率は1より小さくなる。

### 2.1.3 有効ポテンシャル

重力ポテンシャルと運動エネルギーの和は、エネルギー保存則にしたがい保存される。重力源の周囲の軌道を運動する物体の運動エネルギーを動径方向と接線方向の運動エネルギーに分離し、接線方向の運動エネルギーと重力ポテンシャルを加算して得られた和は有効ポテンシャルと呼ばれ、物体が楕円軌道を描くメカニズムを説明するのに有効だ。

重力場における有効ポテンシャルを導入しよう。原点に存在する重力源の周囲を運動する物体の単位質量あたりのエネルギーの総和は、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r}, \quad (2.11)$$

となる。面積速度一定の法則から、 $r^2\dot{\theta} = l$ が成立することを利用して、エネルギーの総和は、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r},$$

のように書き換えられる。当然、 $l$ は定数である。この数式に着目し、

$$V(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}, \quad (2.12)$$

なる関数を導入しよう。新たに導入された関数を利用すると、単位質量あたりのエネルギーは、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + V(r), \quad (2.13)$$

なる形で記述できるようになる。この数式が表現する物理量は、重力の影響を受ける物体の全エネルギーなので、当然、保存量である。重力ポテンシャルと接線方向の運動エネルギーの和  $V(r)$  が、あたかも、ポテンシャルエネルギーのように見える。そのため、 $V(r)$  は**有効ポテンシャル**と呼ばれる。

有効ポテンシャルを距離  $r$  の関数としてプロットすると図2.3に示す曲線を描く。グラフに記載している  $c$  は光速だ。グラフの横軸をわざわざ  $c^2$  で正規化したのは、ディメンジョンを一致させるためだ。正規化に用いた分母が非常に大きな値であるので、正規化された値が  $10^8$  オーダの大きな値になっている。例えば、重力源の質量として太陽の質量  $M = 1.989 \times 10^{30}$  kg を仮定すると、グラフ横軸の目盛り1個は、ほぼ太陽と地球の距離に相当する。有効ポテンシャルには接線方向の運動エネルギーが含まれているので、面積速度に関係する  $l$  に依存して有効ポテンシャルの形状が変化する。角運動量がゼロであれば、有効ポテンシャルは  $-GM/r$  となり、原点に近づくほど低下する。この事実は、接線方向に速度をもたない物体は、重力源に衝突するまで落下することを意味する。一方、 $l > 0$  ならば、有効ポテンシャルは  $r = 0$  の近傍で大きくなる。この事実は、接線方向に速度をも

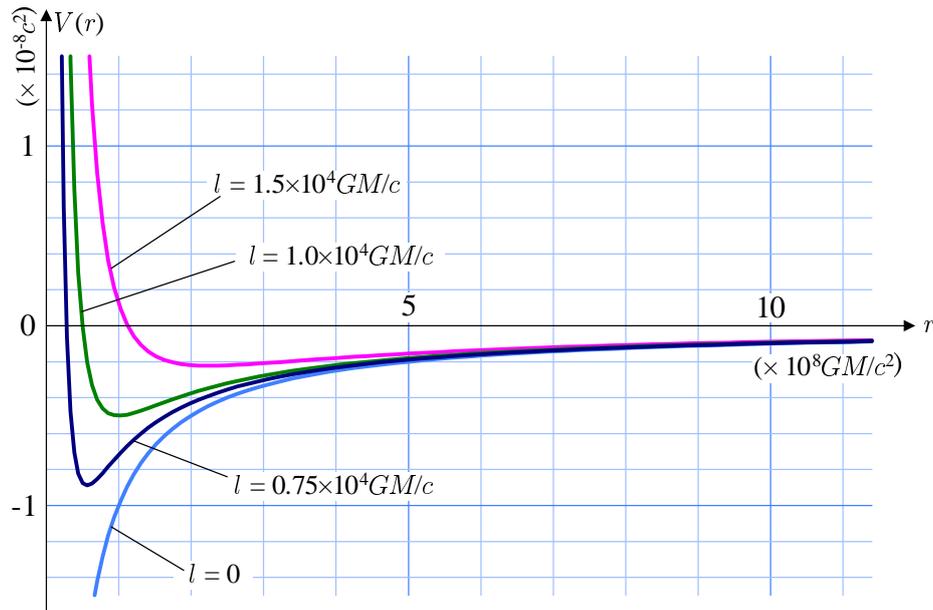


図 2.3: 角運動量と有効ポテンシャル

つ物体は、重力源に向かって落下したとしても、重力源の近傍のポテンシャル障壁に跳ね返され、重力源から遠ざかるように運動方向を変えることを意味する。

エネルギーが有効ポテンシャルの極小値であれば、重力源と物体の距離は安定し、一定値となる。その安定状態は、言い換えると、物体が円軌道を描くことに相当する。安定状態に対応する距離は、有効ポテンシャル  $V(r)$  の  $r$  についての導関数がゼロになる条件、すなわち、

$$r = \frac{l^2}{GM},$$

である。この数式が安定した円軌道の半径を与えるのだ。ここで、軌道を周回する物体の速度を  $v$  と仮定すると、 $l = rv$  だから、円軌道半径は  $r = r^2 v^2 / GM$  で与えられることになり、その結果、円軌道を周回する物体の速度は、

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad (2.14)$$

となる。この速度は、既に紹介した円軌道速度であり、この速度では円軌道の周回によって生じる遠心力と重力が釣り合っている。

有効ポテンシャルは重力源を周回する軌道を考える上で便利である。有効ポテンシャルを、運動する物体についてのエネルギー保存則とともに考えるのだ。エネルギー保存則によると、有効ポテンシャルと動径方向の運動エネルギーの和は一定である。これは模式的には図 2.4 (a) のように示される。この図は、横軸が重力源と物体の距離、縦軸が物体のエ

エネルギーの総和を表している。エネルギーの総和とは、重力の有効ポテンシャルと動径方向の運動エネルギーの和である。イメージとして、物体は有効ポテンシャルの谷を上り下

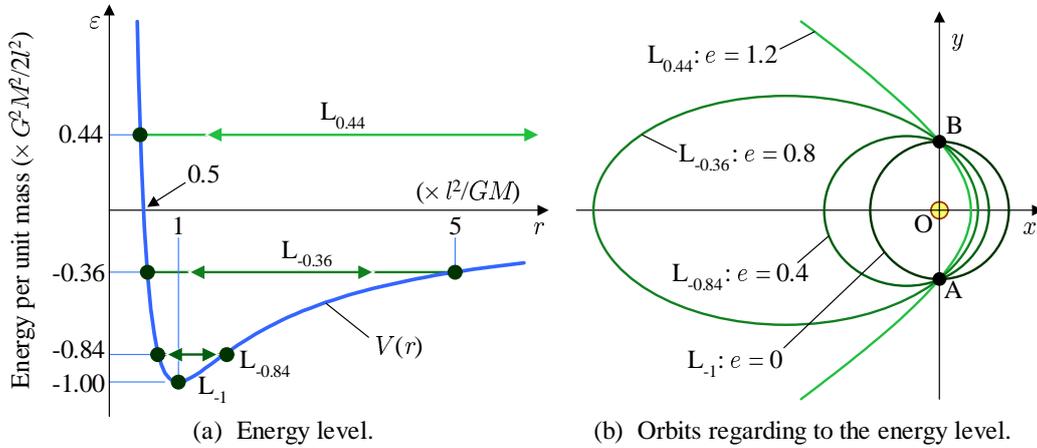


図 2.4: 有効ポテンシャルと軌道の関係

りすることで距離の増減を繰り返す。これが楕円軌道における重力源と距離の変化だ。例えば、単位質量あたりの角運動量を  $l$  としたとき、エネルギーの総和が  $-0.84G^2M^2/l^2$  であれば、物体は離心率 0.4 の楕円軌道を描く (図 2.4 (b))。ここで、 $r_0 = -l^2/GM$  とすると、近点距離は  $0.714r_0$ 、遠点距離は  $1.67r_0$  となる。なお、 $r_0$  は真近点角が  $\pm\pi/2$  となる点 A と点 B における物体と重力源の距離である。その定義から、 $r_0$  は保存量である角運動量  $l$  によりのみ依存する。角運動量  $l$  を保ったままエネルギーの総和を  $-0.36G^2M^2/l^2$  に変化させると、軌道は離心率 0.8 の楕円を描く。さらに、エネルギーを増加させ、 $\epsilon > 0$  とすれば、軌道は双曲線となり、いったん重力源から離れると二度と戻ってこなくなる。なお、角運動量を一定にしてエネルギーを変化させるには、動径方向に外力を与えることで実現できる。図 2.4 (b) は、真近点角が  $-\pi/2$  となる点 A で重力源  $O$  に向かって短時間に大きなインパルスを与えた場合を想定して描いた。その力の作用として軌道の離心率が変化するのである。

## 2.2 ラザフォード散乱

惑星の公転軌道が重力に起因する中心力による運動だ。重力に類似した力の意味でクーロン力に着目しよう。クーロン力が重力と異なる点として、斥力もある。しかし、斥力であっても中心力であるので、クーロン力で弾き返される運動も面積速度一定の法則にしたがう。クーロン斥力で支配される運動の代表としてラザフォード散乱を解析しよう。

### 2.2.1 荷電粒子の軌跡

ラザフォード散乱は、原子の中心に小さな原子核が存在することを検証した現象である。この現象は、1909年にガイガー (H. Geiger) とマースデン (E. Marsden) が実験し、ラザフォード (E. Rutherford) が実験結果を解析したことによって明らかになった。ガイガーとマースデンは薄い金箔にアルファ粒子を打ち込む実験を実施した。実験の結果、ほとんどの粒子は金箔を通過するが、8000回に1回の確率で90°以上の角度で粒子が散乱する現象が観測されたのだ。この実験結果は、原子の中心に非常に小さい正電荷が存在することを示唆した。それが原子核だ。

質量  $M$  で電荷  $Q$  の粒子に、質量  $m$  で電荷  $q$  の粒子を打ち込んだときの散乱軌跡を考察しよう。簡単のため、 $M \gg m$  とし、粒子を打ち込まれても質量  $M$  の粒子は動かないものとする。質量  $M$  が座標の原点に静止しているとし、打ち込まれた荷電粒子  $q$  の位置を極座標  $[r, \theta]$  で記述することにする。そのとき、その位置は、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2}, \quad (2.15)$$

にしたがう。突然このような微分方程式が現れ驚くかもしれないが、難しいことはない。この方程式は、惑星の運動を解析した際に導出した (2.8) に含まれる  $GM$  を  $-qQ/4\pi\epsilon_0$  で置き換えただけだ。なお、この数式に含まれる  $l$  は、

$$l = r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

すなわち、面積速度の2倍に相当する量である。微分方程式 (2.15) の形から、一般解が、

$$\frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 ml^2} + A \cos \theta + B \sin \theta,$$

なる形で記述できることが明らかだ。この数式において、 $A$  と  $B$  は初期条件によって決定される定数だ。

図 2.5 に描くように、荷電粒子  $q$  は  $\theta = \pi$  の無限遠から、 $x$  軸に平行に速さ  $v_0$  で発射されたとする。無限遠で発射される瞬間の  $y$  座標は  $y_0$  だったとする。その初期状態での  $y$  座標は**衝突径数**と呼ばれる。その初期条件に対し、荷電粒子  $q$  の軌跡は  $\theta$  の関数として、

$$\frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 ml^2} (1 + \cos \theta) + \frac{\sin \theta}{y_0}, \quad (2.16)$$

のように書ける。つまり、先ほどの未知数  $A$  と  $B$  は解決されている。これらの未知数は、 $\theta = \pi - \Delta\theta$  としたとき、 $y_0 \simeq r \Delta\theta$  となる条件によって決定されたのだ。さらに、面積速度に対応する定数  $l$  を決めておこう。定数  $l$  の決定には、無限遠で荷電粒子  $q$  が  $y = y_0$  を  $x$

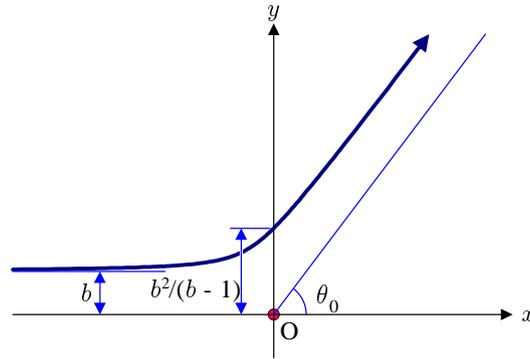


図 2.5: 原子核をかすめる正電荷の軌跡

軸と平行に速さ  $v_0$  で運動していることを利用する。まず、座標  $y_0 = r \sin \theta$  を時間について微分し、

$$0 = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta,$$

を得る。左辺は  $y_0$  が定数だからゼロである。この等式から、 $r \dot{\theta} = -\dot{r} \tan \theta$  となり、この両辺に  $r$  を乗じると、

$$l = r^2 \dot{\theta} = -\dot{r} \cdot r \tan \theta \simeq y_0 v_0,$$

が得られる。ここで、 $\theta \rightarrow \pi$  とした。既に導出された解 (2.16) に  $l = y_0 v_0$  を代入すれば、遠方から速さ  $v_0$  で発射された荷電粒子の軌跡が特定できるわけだ。ところで、

$$r_0 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2}, \quad (2.17)$$

なる  $r_0$  を定義すれば、(2.16) は、

$$\frac{r_0}{r} = -\frac{r_0^2}{y_0^2} (1 + \cos \theta) + \frac{r_0}{y_0},$$

なる形で書ける。さらに、 $u \equiv r/r_0$ ,  $a \equiv y_0/r_0$  のように無次元化した長さを用いると、(2.16) は、

$$\frac{1}{u} = -\frac{1 + \cos \theta}{a^2} + \frac{\sin \theta}{a}, \quad (2.18)$$

のような形に書き換えられる。これがラザフォード散乱の荷電粒子の軌跡の本質的な数式表現だ。散乱される荷電粒子の軌跡を実際に計算すると、図 2.6 に示す軌跡を描く。アルファ粒子の軌跡なら、本来、量子力学における不確定原理を考慮しなければならないが、ここでは古典力学 (ニュートン力学) による計算である。正面方向、すなわち、 $x$  軸上に撃ち込まれた荷電粒子は、ある距離まで近づくが、逆方向に弾き返される。その最接近距離は、

$$r_{\min} = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2} = 2r_0,$$

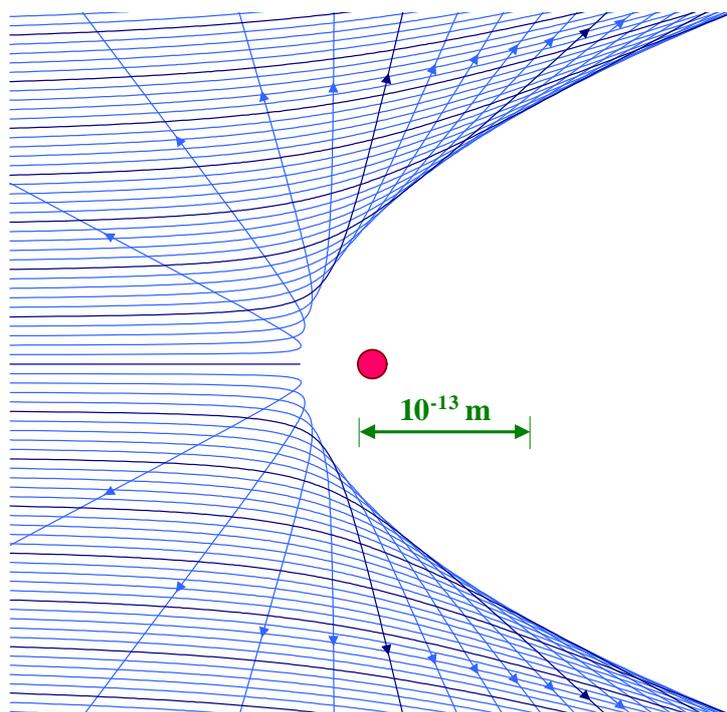


図 2.6: 金 Au の原子核に照射されたアルファ粒子の軌跡

である。つまり、距離を正規化した際の正規化係数は最接近距離の 2 分の 1 にあたる距離だったわけだ。具体的に、金の原子核の電荷  $Q = 1.26 \times 10^{-17} \text{ C}$ , アルファ粒子の電荷  $q = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$ , アルファ粒子の質量  $m = 6.68 \times 10^{-28} \text{ kg}$ , 無限遠から打ち込まれる速度  $v_0 = 1.6 \times 10^7 \text{ m/s}$  なる条件で計算すると、最接近距離は  $2r_0 = 4.25 \times 10^{-14} \text{ m}$  である。この距離は、水素原子の半径の 1000 分の 1 に満たない非常に小さな距離だ。正面からずれた位置から照射すると、その位置に依存し、特定の方に散乱される。その散乱方向は次項で議論する。

### 2.2.2 微分散乱断面積

原子核に撃ち込まれた荷電粒子の散乱方向を特定し、散乱現象の意味での原子核の大きさを考察しよう。散乱現象における原子核の大きさは散乱断面積という量で表現される。散乱断面積による評価によって、原子核の大きさが原子の大きさと比較して非常に小さなスケールであることが明らかになる。

前項で導出した散乱される荷電粒子の軌跡 (2.18) から散乱方向が特定できる。散乱方向は、荷電粒子を撃ち込む初期の位置  $a$  によって一意的に決まる。荷電粒子が無限遠に飛ん

でいく方向を  $\theta$  とすれば、数式 (2.18) において  $1/u = 0$  とすればよいので、

$$a = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \cot \frac{\theta}{2}, \quad (2.19)$$

を満たすことになる。右辺が  $\cot(\theta/2)$  となることは、半角の公式を利用して導かれた。この公式によると、図 2.7 のように、 $x$  軸から距離  $a$  をなす円環から発射された荷電粒子は、天頂角  $\theta$  の方向に散乱される。この天頂角は、 $x$  軸となす角度である。入射される荷電粒子の集合も、散乱される荷電粒子も円環をなすが意味が異なるので注意が必要だ。入射される荷電粒子が構成する円環は原子核に近づくまでほとんど広がらないが、原子核の近傍を通過した後、原子核を中心に放射状に広がるのだ。

図 2.7 のように、入射する荷電粒子を半径  $a$  から微小幅  $da$  の円環を構成するように照射した場合を考えよう。このとき、散乱される天頂角  $\theta$  も幅をもつはずだ。その幅を評価するには、(2.19) の微分:

$$da = \frac{d\theta}{2 \sin^2(\theta/2)},$$

に注目すればよい。散乱解析の慣習にしたがい、**微分散乱断面積**を導入しよう。微分散乱断面積は、入射側が微小面積  $d\tilde{\sigma}$  に撃ち込まれた粒子が、散乱されて立体角  $d\Omega$  に広がるモデルによって、 $d\sigma/d\Omega$  で定義される量だ。微小面積  $d\tilde{\sigma}$  が波線記号 ( $\sim$ ) を伴っているの

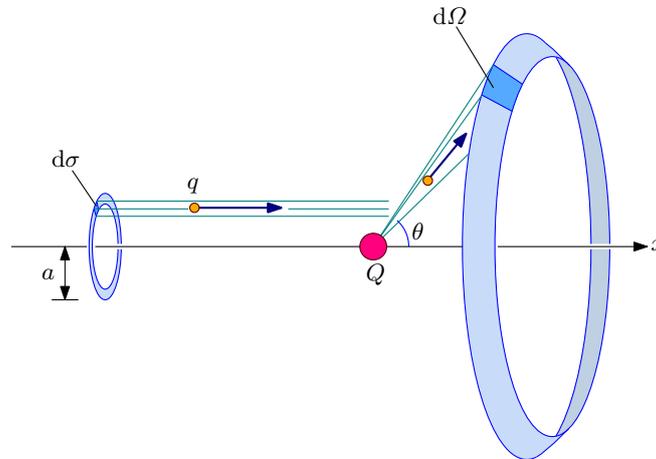


図 2.7: 微分散乱断面積のモデル

は、正規化された無次元量だからだ。ひととおりの計算を終えた後で面積の次元に戻すことにする。入射側について、 $x$  軸から  $a$  だけ離れ、幅  $da$  の円環の面積は、 $d\tilde{\sigma} = 2\pi a da$  だ。散乱側について、天頂角  $\theta$  で角度幅  $d\theta$  の円環がつくる立体角は、 $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  となる。これらの数式から、

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega} = \frac{a}{2 \sin^2(\theta/2) \sin \theta},$$

が得られる。ここで、入射位置  $a$  と散乱角  $\theta$  の関係 (2.19) に注意すると、微分散乱断面積は、

$$\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega} = \frac{1}{4 \sin^4(\theta/2)}, \quad (2.20)$$

となる。ひとり計算が終わったので、微小断面積  $d\sigma$  を面積の次元をもつ量  $d\sigma$  に戻そう。本稿での計算過程は、正面方向から打ち込まれた荷電粒子が最接近する距離の半分にあたる  $r_0$  で正規化されている。正規化の基準  $r_0$  は、(2.17) のように定義されている。微小断面積を面積の次元に戻すには、 $d\sigma = r_0^2 d\tilde{\sigma}$  とするべきだ。したがって、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (2.21)$$

が得られる。この数式は、**ラザフォードの散乱公式**と呼ばれる。

ラザフォードの散乱公式を用いて、撃ち込まれた荷電粒子が  $90^\circ$  以上の散乱を受ける断面積を計算しよう。すなわち、微分散乱断面積 (2.21) を、 $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  にわたって積分すればよい。実際に計算してみると、

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \left( \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)} \\ &= 2\pi \left( \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\cos(\theta/2) d\theta}{\sin^3(\theta/2)} \\ &= 8\pi \left( \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\sin\eta)}{\sin^3\eta} = -4\pi \left( \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 \left[ \frac{1}{\sin^2\eta} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \pi \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2, \end{aligned}$$

が得られる。前項で挙げたラザフォード実験の条件を代入すると、この断面積は  $\sigma = 1.42 \times 10^{-27} \text{ m}^2$  という小さな面積になる。断面積  $\sigma$  は、金の原子間隔  $2.57 \times 10^{-10} \text{ m}$  が張る面積  $6.60 \times 10^{-20} \text{ m}^2$  に比べ<sup>1</sup> 非常に小さい。実験に使用した金箔の厚さが  $1 \mu\text{m}$  であれば、貫通するためには、金の原子 3890 層を通過しなければならない。そのように考えると、撃ち込まれたアルファ線が  $90^\circ$  以上の角度で散乱される確率は、

$$3890 \times \frac{1.42 \times 10^{-27} \text{ m}^2}{6.60 \times 10^{-20} \text{ m}^2} \simeq \frac{1}{1.19 \times 10^4},$$

のように計算される。つまり、約 12000 回に 1 回は  $90^\circ$  以上の角度で散乱されるわけだ。これが、ガイガーとマースデンの実験で、ごく少数のアルファ線のみが大きく散乱される理由だ。その実験によって、原子内部に電荷が広く分布している (トムソンモデル) ではなく、中心に正電荷をもつ原子核が存在することが明らかになったのだ。

<sup>1</sup>この原子間隔は、金の質量数 179, 金の密度  $19.32 \text{ g/cm}^3$  から計算すれば得られる。

## 2.3 加速度運動と慣性力

加速する電車や、自転する地球のように、加速度運動する足場に乗っている観測者は、足場の加速度運動に起因して慣性力と呼ばれる力を感じる。例えば、ブレーキをかける電車では、身体が前方に押されるような力を感じる。それが慣性力である。慣性力は実際に生じている力でなく、足場との相対速度が変化することに伴って知覚する見かけの力である。本節では、加速度運動に伴う見かけの力を取り扱う。

### 2.3.1 ガリレイ変換

基準となる静止系を K 系としよう。K 系に対し、 $x$  軸方向に一定の速度  $v$  で運動する K' 系を考えよう。速度の方向に沿った K' 系の位置は  $x'$  なる座標で表されるとする。時刻  $t = 0$  において、K 系と K' 系の原点が重なっていると仮定する。つまり、 $t = 0$  のとき  $x = 0$  と  $x' = 0$  が一致すると仮定するのだ。そのとき、二つの座標系は、

$$x' = x - vt, \quad (2.22)$$

のように関係づけられる。例えば、K 系から見て  $x = 100$  m に存在する物体 A を観測しているとする。速度  $v = 10$  m/s で走る K' 系から物体 A を観測した場合、 $t = 0$  では  $x' = 100$  m だが、 $t = 2$  s の時点では  $x' = 80$  m の位置に移動しているように見える。このように、二つの等速度運動<sup>2</sup> する座標系の間での座標変換は**ガリレイ変換**と呼ばれる。

ガリレイ変換の数式は、時間  $t$  について微分すると、二つの座標系の間での速度の変換式を与える。実際にガリレイ変換を微分すると、

$$\dot{x}' = \dot{x} - v, \quad (2.23)$$

が得られる。この数式において、 $\dot{x}$  が K 系から見た物体の速度、 $\dot{x}'$  が K' 系から見た物体の速度と考えればよい。例えば、K 系から見て速度 30 m/s で移動する物体 A を 10 m/s で移動する K' 系から見た場合、その物体は 20 m/s で移動するよう見える。ガリレイ変換の時間微分は、我々の日常と合致する速度の変換則に相当するのだ。

ガリレイ変換をさらに時間  $t$  について微分すると、加速度の対応関係を得ることができる。実際に得られる結果は、

$$\ddot{x}' = \ddot{x}, \quad (2.24)$$

なのだ。加速度は K 系から見ても K' から見ても同一なのだ。この加速度変換の両辺に物体の質量  $m$  を乗じると  $m\ddot{x}' = m\ddot{x}$  が得られる。物体に作用する力が  $F$  であるとき、ニュー

<sup>2</sup>静止状態は、速度ゼロで等速度運動していると考えればよい。

トンの運動方程式は  $F = m\ddot{x}$  であるので、同時に  $F = m\ddot{x}'$  が成立する。つまり、K系で成立するニュートンの運動方程式は、その形を変えることなく、K'系でも成立する。これがガリレイの相対性原理である。

### 2.3.2 等加速度運動する座標系

座標系が加速度運動している場合、前項で紹介したガリレイの相対性原理が成立しない。具体的には、ニュートンの運動方程式の形が、静止系との間で差異が現れるのだ。その際は、慣性力なる見かけの力に起因する。

K'系が等加速度運動する場合の座標変換を考えよう。時刻  $t = 0$  において、互いの座標系の原点が一致し、そのとき、K'系がK系に対して  $x$  軸方向に速さ  $v_0$  で運動しているとす。K'系は、さらに、 $x$  軸方向に加速度  $a$  で運動しているとす。このとき、K'系の座標  $x'$  は、

$$x = x' + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

のように記述できる。この数式を  $t$  について微分すると、

$$\dot{x} = \dot{x}' + v_0 + at,$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}' + a,$$

が得られる。得られた2階微分について、両辺に  $m$  を乗じ、 $F = m\ddot{x}$ 、 $F' = m\ddot{x}'$  とおくと、

$$F' = F - ma, \quad (2.25)$$

が得られる。この数式において、 $F$  がK系における力、 $F'$  がK'系における力である。つまり、加速度  $a$  で加速する系での観測では、必ず、 $-ma$  なる力が作用しているように見える。その力は**慣性力**と呼ばれる。例えば、走行中のバスがブレーキをかけたときに身体が前方に力を受けたように感じる。それが慣性力だ。実際には、乗客の身体が力を受けているのではなく、バスの車体がブレーキによって減速するための力を受けている。乗客は、バスという座標系と自分の相対速度が変化する事態を見て、あたかも自分が力を受けているかのように錯覚する。それが慣性力だ。つまり、慣性力は実際に作用している力でなく、見かけの力である。

## 2.4 回転する座標系

回転運動する座標系における物理現象を記述しよう。回転運動は向心力によって引き起こされるため、前節で取り扱った慣性力の観点では、向心力と逆方向に見かけの力が発生するはずだ。その見かけの力は、遠心力と呼ばれる力である。

### 2.4.1 回転運動する系での運動方程式

基準とする座標系  $K$  の座標をカルテシアン座標  $[x, y, z]$  で記述しよう。このとき、この座標系の  $z$  軸を回転軸にして角速度  $\omega$  で回転している。その回転する座標系  $K'$  をカルテシアン座標で  $[x', y', z']$  と記述することにする。この回転座標系における運動方程式を導出しよう。

前提条件として、 $K$  系がニュートンの運動方程式  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  にしたがう。ここで、力  $\mathbf{F}$  はカルテシアン座標系で  $[F_x, F_y, F_z]$  のように成分表示されたとする。例えば、 $x$  成分が  $m\ddot{x} = F_x$  となるわけだ。座標系  $K'$  は  $K$  系に対して角速度  $\omega$  で回転しているならば、立場を逆にして、 $K$  系は  $K'$  系に対して角速度  $-\omega$  で回転していることになる。この関係を数式で書くと、

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t, \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t, \quad z' = z,$$

となる。これらの数式を  $t$  について微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t + \omega (-x \sin \omega t + y \cos \omega t), \\ &= \dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t + \omega \eta, \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= -\dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t - \omega (x \cos \omega t + y \sin \omega t), \\ &= -\dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t - \omega \xi, \end{aligned} \quad (2.26b)$$

$$\dot{z}' = \dot{z}, \quad (2.26c)$$

が得られる。これらの数式を再び  $t$  について微分すると、

$$\ddot{x}' = \ddot{x} \cos \omega t + \ddot{y} \sin \omega t + \omega (-\dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t) + \omega \dot{y}', \quad (2.27a)$$

$$\ddot{y}' = -\ddot{x} \sin \omega t + \ddot{y} \cos \omega t - \omega (\dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t) - \omega \dot{x}', \quad (2.27b)$$

が得られる。得られた結果の第1式と第2式は、右辺に  $K$  系と  $K'$  系の座標成分が混在しているが、1階の導関数を利用すれば  $K$  系の座標成分を消去でき、

$$m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega \dot{y}' + m\omega^2 \xi, \quad (2.28a)$$

$$m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega \dot{x}' + m\omega^2 \eta, \quad (2.28b)$$

$$m\ddot{z}' = F_{z'}, \quad (2.28c)$$

のように  $K'$  系の座標成分だけで記述できる。ここで、ベクトル成分  $[F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}]$  は、ベクトル  $\mathbf{F}$  を  $K'$  系の座標で表現した成分である。つまり、物体に作用する力は、 $K$  系から見ると  $\mathbf{F}$  であるにも関わらず、 $K'$  系から見ると  $\mathbf{F}$  とは異なるということだ。

数式によって判明したように、回転する座標系から見ると、物体に作用する力が、単に力のベクトルを座標回転に合わせて成分を読み替えただけではない。このように、回転する座標系から見ると新たな力が発生しているように見えるのは、観測者自身が加速度運動していることに起因する。上で導出した (2.28a) と (2.28b) の右辺の第3項は遠心力である。第2項はコリオリの力と呼ばれる力である。

回転する座標系から物体の運動を観測すると、前段落で導出したように、ポテンシャルに起因する力だけでなく、コリオリの力や遠心力といった見かけの力が現れる。上で導出した結果をベクトル表記すると、

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -\nabla U + 2m\dot{\mathbf{r}}' \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (2.29)$$

が得られる。この数式で新たに記述したベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は、角速度  $\omega$  を大きさとし、回転軸 ( $z$  軸) を向くベクトルだ。ベクトルの方向は、回転方向に関して右ねじの方向にとるものとする。今後、回転速度をベクトルで扱う場合、このように回転軸方向に角速度を大きさとするベクトルで表現する。また、(2.29) に含まれる “ $\times$ ” なる演算子は、ベクトル積を与える。ベクトル積は本項の最後で説明することにする。ベクトル表記 (2.29) に基づいて、回転する座標系から見た見かけの力、すなわち、コリオリの力と遠心力は図 2.8 に示すようなベクトルとなる。この図において、座標は  $z$  軸を回転軸とし、角速度  $\omega$  で回転している。回転する座標系  $[x', y', z']$  から見たとき、物体 P が  $\dot{\mathbf{r}}'$  で運動しているとする。なお、角速

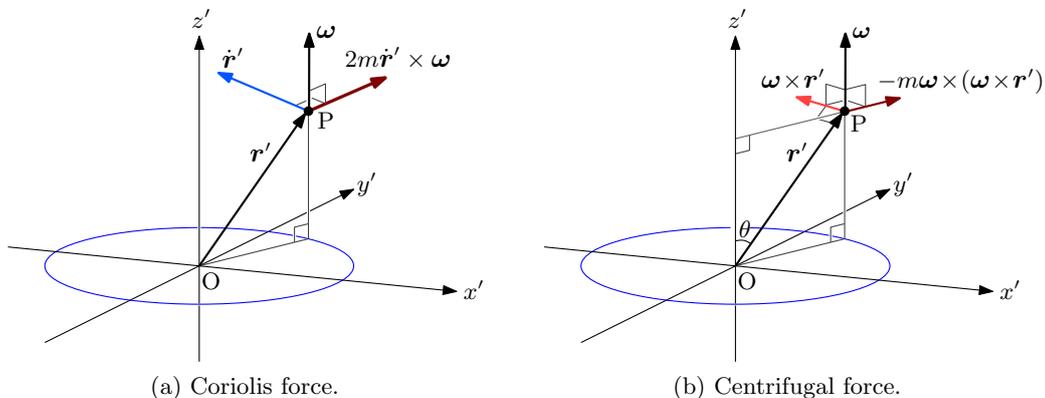


図 2.8: 回転する座標系から見た見かけの力

度に対応するベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は、便宜上、 $z'$  軸の方向を向き、角速度  $\omega$  を大きさとするように設定する。このベクトルの向きは、回転方向に対する右ねじの方向である。このベクトル設定のもとで、コリオリの力は図 2.8 (a) に示す方向に作用するわけだ。遠心力は物体 P の速度  $\dot{x}'$  には依存せず、回転軸 (この例では  $z'$  軸) からの距離に依存する。図 2.8 (a) に示すように、物体の P の天頂角を  $\theta$  とすると、 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  は、大きさが  $x'\omega \sin \theta$  であり、回転の接線方向に向かうベクトルである。大きさに含まれる  $x' \sin \theta$  は、物体 P と回転軸 ( $z'$  軸) との距離と考えてもよい。遠心力  $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$  は、大きさが  $mr'\omega^2 \sin \theta$  であり、回転軸に対して外側に向かうベクトルである。

**ベクトル積** 二つのベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  がカルテシアン座標系で  $\mathbf{A} = [A_x, A_y, A_z]$ ,  $\mathbf{B} = [B_x, B_y, B_z]$  のような成分をもつとする。このとき, これら二つのベクトルのベクトル積は,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x],$$

のように計算される。成分表示ではわかりにくいかもしれないが, ベクトル積は図 2.9 に示すベクトルだ。簡単に証明できるように,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  は,  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  のどちらにも直交するベクトルである。ベクトルの方向は, 右手系において,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  が, それぞれ, 右手系

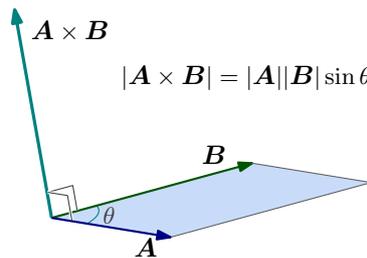


図 2.9: ベクトル積の説明図

の第1ベクトル, 第2ベクトル, 第3ベクトルなるように定められる。つまり,  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  を交換すると,

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

のように向きが逆になる。しかも, ベクトルの大きさ  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$  は,  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が張る平行四辺形の面積に等しい。例えば,  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が角度  $\theta$  をなすのであれば,  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \theta$  である。容易にわかるように, 互いに平行なベクトルどうしのベクトル積はゼロ, すなわち,  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$  である。

## 2.4.2 遠心力とコリオリの力

前項で導出した数式 (2.29) の右辺の第2項と第3項は回転する座標系から観測した見かけの力である。観測対象の物体が等速度運動であっても, 回転する座標系から見ると湾曲した軌跡を描くため, 力の作用を受けるように見えるのだ。

コリオリの力は, 観測者に対して相対速度をもつ場合にのみ観測される。後に説明するが, 台風の渦が北半球で反時計回りに流れるのはコリオリの力の影響である。コリオリの力の発生原理は, 回転テーブルに立った観測者が容易な説明モデルである (図 2.10)。テーブルは角速度  $\omega$  で回転し, 観測者 P は回転軸から  $R$  だけ離れた場所に立ち, テーブルとともに回転している。観測者 P が回転軸に向かって, ボールを速度  $v$  で投げたとする。観測者 P が見ると, 時間経過とともに投げられたボールは回転軸の方向から逸れるように湾曲し, 最終的には, 大きく右に回って観測者の後方に抜けていくのだ (図 2.10 (b))。

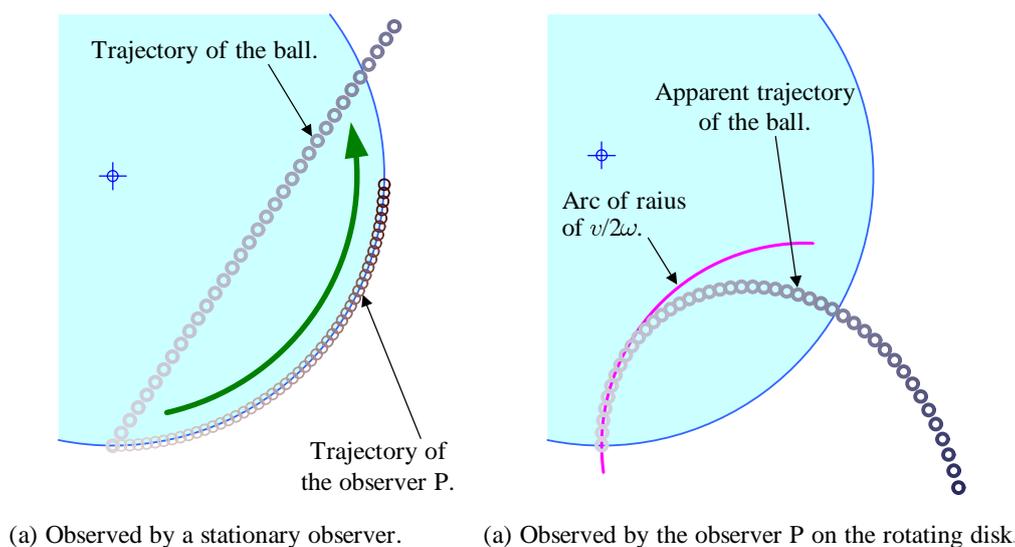


図 2.10: 回転円板によるコリオリの力

上で書いたボールの軌跡は、ボールに力が作用しているのではなく、観測者 P が回転していることによる見かけの運動軌跡である。静止している観測者から見ると、ボールは等速度運動をする。例えば、回転テーブル上の観測者 P の位置が、

$$x_0 = R \sin \omega t, \quad y_0 = -R \cos \omega t,$$

であるとする。時刻  $t = 0$  に観測者 P がボールを回転軸に向かって投げたとする。静止する観測者から見たボールの位置を  $[x, y]$  で記述したとすると、

$$x = R\omega t, \quad y = -R + vt,$$

となるはずだ。上記の観測者 P の位置とボールの位置は図 2.10 (a) のように図示できる。これが静止する観測者から見た状況である。観測者 P はボールを回転軸に向かって投げたつもりであるが、静止した観測者から見ると、ボールは回転軸とは異なる方向に等速直線運動するのだ。

これを回転テーブルに立つ観測者 P から見た場合、回転によって座標軸もともに回転することを考慮し、

$$\begin{aligned} x' &= (x - x_0) \cos \omega t + (y - y_0) \sin \omega t, \\ y' &= -(x - x_0) \sin \omega t + (y - y_0) \cos \omega t, \end{aligned}$$

となる。この様子は図 2.10 (b) のように描かれる。なお、図 2.10 (b) に重ねて描いた曲線は、半径  $\rho = v/2\omega$  の円弧である。観測者が投げた直後、ボールはこの円弧に沿って動いている。

図 2.10 に示した円弧の半径は簡単な計算で予想された曲率半径である。数式 (2.29) によると、コリオリの力によって、 $2\dot{\mathbf{r}}' \times \boldsymbol{\omega}$  なる加速度が発生する。この加速度は速度ベクトルに直交している。速度ベクトル  $\dot{\mathbf{r}}'$  と角運動量ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  が角度  $\alpha$  をなすと仮定すれば、コリオリの力によって、速度ベクトルと垂直方向に大きさ  $2v\omega \sin \alpha$  の加速度を生じる。ここで、ボールの速さを  $v$  とした。ボールは、微小時間  $\Delta t$  の間に、垂直方向に  $2v\omega \cos \alpha \Delta t$  の速度成分を得ることになる。つまり、この微小時間の間に進行方向が  $\Delta\varphi = 2\omega \cos \alpha \Delta t$  だけ変化することを意味する。ボールの軌跡の曲率半径が  $\rho$  であるとすると、曲率の中心から角度  $\Delta\varphi$  で見込んだ長さが  $\rho \Delta\varphi = v \Delta t$  となるはずだ。その条件で曲率半径  $\rho$  を決定すると、

$$\rho = \frac{v}{2\omega \sin \alpha}, \quad (2.30)$$

が得られるわけだ。図 2.10 の例において、この曲率半径の予想は的中していると言えるだろう。

地球上でも回転テーブルと同様にコリオリの力が作用する。地球の場合、北極点と南極点を結ぶ軸が回転軸である。自転による地球表面の回転速度は、緯度によって異なる。例えば、赤道上の場所は  $464 \text{ m/s}$  で回転しているが、北緯  $30^\circ$  では回転速度は  $402 \text{ m/s}$  である。慣性の法則がゆえに、低緯度から高緯度に移動すると、一定経度にとどまらず、東向きに運動する傾向を示す。それが見かけの力(コリオリの力)として観測されるのだ。

地球上におけるコリオリの力の影響の一例は、台風の渦の回転方向である。台風の渦は、中心に向かって反時計回りに流れる。大気は台風の中心に集まっていくはずだが、コリオリの力のため、右に曲げられる。曲げられた位置で再び、大気は台風の中心に流れようとするのだが、同様に右に曲げられる。繰り返して右に曲げられながら台風の中心を目指して進む大気は、台風を反時計回りに流れるのだ。

### 2.4.3 フーコーの振り子

コリオリの力による効果として、フーコーの振り子が有名である。フーコーの振り子とは、東西南北の任意方向に振動できるように設置した振り子であり、初期状態で南北に振動していたとしても、時間の経過とともに振動方向が変化し、そのうち、東西に振動する現象を示す振り子である。さらに、時間が経過すると、振動方向の変化がさらに持続する。そのような振り子の振動方向の変化はコリオリの力に起因する。地球上の緯度を天頂角  $\theta$  で表そう。その緯度の任意の地上において、東を  $x$  軸、北を  $y$  軸、鉛直上方を  $z$  軸とする。このとき、ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は天頂から  $\theta$  の角度をなす北を向いている。すなわち、地上のカルテシアン座標系  $[x, y, z]$  では、 $\boldsymbol{\omega}$  は、

$$\boldsymbol{\omega} = [0, \omega \sin \theta, \omega \cos \theta],$$

のように成分表示できる。一方、振り子の運動が真東から角度  $\phi$  だけ反時計回りの方位を向いているとすると、

$$\dot{\mathbf{r}} = \left[ v \cos \phi, v \sin \phi, 0 \right],$$

のように表されるだろう。ここで、 $v$  は振り子の速さである。この条件において、振り子の運動は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x + 2\omega \frac{dy}{dt} \cos \theta, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{g}{l}y - 2\omega \frac{dx}{dt} \cos \theta, \end{aligned}$$

なる微分方程式にしたがう。双方の数式において、右辺の第1項は、重力による振り子の復元力である。なお、 $g$  は重力加速度、 $l$  は振り子のひもの長さである。なお、この数式は

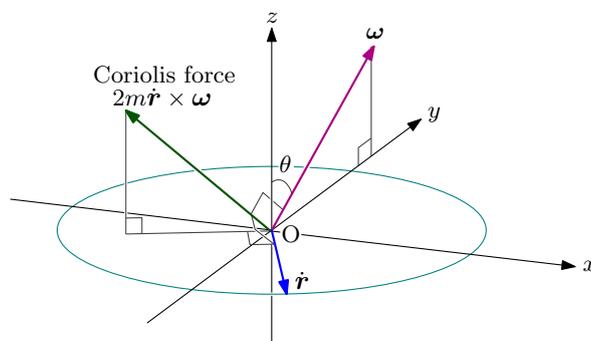


図 2.11: フーコーの振り子の原理

振り子の振れ角が十分小さい場合の近似である。また、自転による遠心力は無視した<sup>3</sup>。第1式に  $y$  を乗じ、第2式に  $x$  を乗じて、互いの差をとれば、

$$y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \cos \theta \cdot \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right),$$

が得られる。簡単な計算によって、この微分方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left( y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = \omega \cos \theta \cdot \frac{d}{dt} (x^2 + y^2),$$

なる形に書き換えられる。この数式の両辺を積分すると、

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = \omega (x^2 + y^2), \quad (2.31)$$

<sup>3</sup>現実的な振り子の運動速度の場合、コリオリの力よりも遠心力の方が大きい。コリオリの力とは異なり、遠心力は観測場所(緯度)にのみ依存し、運動速度に依存しない。その性質のため、遠心力は重力加速度がわずかに変化させる程度の効果しか示さず、振り子は運動軌跡へ与える影響が極めて小さい。それが遠心力を無視した理由だ。

が得られる。ここで、振り子は、必ず、原点を通過するものとし、 $x = y = 0$ を条件にして積分定数を決定した。新たに得られた微分方程式を解くため、

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi,$$

としよう。ここで、 $r$ は原点から振り子の距離、 $\phi$ は振り子の方位である。これらの数式を微分方程式(2.31)に代入すると、

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega \cos \theta, \quad (2.32)$$

が得られる。この結果は、 $r$ に時間依存性を含ませていないかのように見えるかもしれないが、そうではない。仮定として、 $r$ と $\phi$ の双方に時間依存性を含ませて計算した。その計算過程で $\dot{r}$ が消えてくれたのだ。結果として、振り子の方位 $\phi$ は、

$$\phi = \phi_0 - \omega t \cos \theta, \quad (2.33)$$

であることが導かれる。ここで、 $\phi_0$ は $t = 0$ における方位である。この結果によると、北半球( $\cos \theta > 0$ )では、振り子は時間経過とともに振動方向を時計回りに回転させる。しかも、振動方向は $T = 2\pi/\omega \cos \theta$ で1回転するのだ。世界の都市について、フーコーの振り子の振動方向の回転周期を計算すると、表2.1のような値を得た。計算するにあたり、高緯度になるほど天頂角 $\theta$ が小さくなることに注意が必要だ。この表では、北半球では周期が負になっているのは、フーコーの振り子が時間経過とともに時計回りに回転することを意味する。南半球では反時計回りに回転するので周期は正となっている。なお、この計算

表 2.1: 世界の都市におけるフーコーの振り子の周期 (hh:mm:ss)

都市	緯度	周期	都市	緯度	周期
ヘルシンキ	60.17°N	-27:30:24	ブラジリア	15.83°S	87:44:29
ロンドン	51.51°N	-30:34:43	ケープタウン	33.92°S	42:53:26
ニューヨーク	40.71°N	-36:41:47	メルボルン	37.65°S	39:10:59
東京	35.68°N	-41:02:09	クライストチャーチ	43.53°S	34:45:05
バンガロール	12.58°N	-109:53:26	プンタ・アレナス	53.16°S	29:54:23
シンガポール	1.35°N	-1015:54:12	昭和基地	69.01°S	25:58:08

において、地球の自転周期が23時間54分4秒という値を用いた。赤道に近いほど周期が長くなるとはいうものの、シンガポールでの周期は驚く長さだ。振動方向が一巡するのに42日を要する。

フーコーの振り子の振動方向の変化は、北極点や南極点では容易に想像ができる。振り子自体は単振り子であり、常に同じ方向に振動している。観測者は地球の自転に伴い、24

時間周期で回転する床に座って振り子を観測している。その観測者の立場では、振り子は24時間周期で振動方向が回転するように見えるはずだ。北極点では、振り子は時計回りに、南極点では反時計回りに回転する。

## 2.5 遠心力

前節で、回転する座標系では見かけの力として遠心力が発生することを確認した。回転する座標系では見かけの力として、コリオリの力も発生するが、コリオリの力は運動している物体にしか作用しない。それに対し、遠心力は誰にでも作用する。身の回りに遠心力の発生が頻繁に目撃できるので、遠心力の例を取り扱ってみよう。

**円錐振り子** 円振り子は回転運動する振り子だ。図 2.12 に示すように、おもりを支持するひもが鉛直下方から傾いている。ひもの傾きによって、おもりに作用する重力とひもの張力との合力で、内側に作用する力が発生する。内側に向く力が向心力として作用し、おもりが水平面で円運動するのだ。

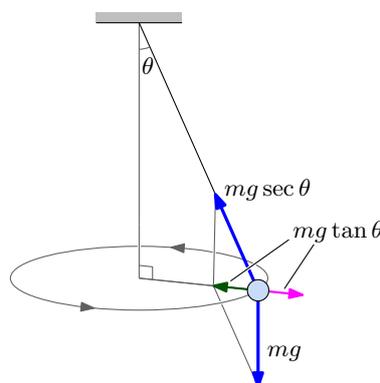


図 2.12: 円錐振り子

鉛直方向から測ったひもの傾き角を  $\theta$  としよう。おもりに鉛直下方に重力  $mg$  が作用しているので、ひもの張力は  $mg \sec \theta$  となり、重力と張力との合力  $mg \tan \theta$  が向心力としてはたらき、おもりは円運動する。一方、おもりから見ると、円運動によって遠心力が発生するので、向心力と釣り合い、一定の回転半径を保持している。ひもの長さが  $l$  のとき、円錐振り子の回転半径は  $l \sin \theta$  なので、向心力 (= 遠心力) は、

$$ml\omega^2 \sin \theta = mg \tan \theta,$$

を満たさなければならない。この方程式から、円錐振り子の角速度が、

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}},$$

であることが導かれる。したがって、傾斜角  $\theta$  の円錐振り子の周期は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}, \quad (2.34)$$

である。なお、右辺の記述に関して、 $h \equiv l \cos \theta$  を用いた。円錐振り子のおもりの立場に立つと、自分が回転運動をしているため、遠心力という見かけの力が発生する。遠心力は、重力の分力である向心力と釣り合っている。その釣り合いがゆえに、おもりは  $z$  軸との距離を一定に保っているのだ。

円錐振り子は、速く回転させる  $\theta$  が大きくなる。それに伴い、張力  $mg/\cos \theta$  が大きくなる。この張力が、ひもが支えられる限界を超えると、ひもが切れてしまうのだ。

**ローラコースタ** 遊園地の人気遊具の一つであるローラコースタは逆さに走行しても、乗員が落下しないように設計されている。一般的に、ローラコースタの設計には遠心力が利用されている、と表現されるかもしれない。しかし、遠心力は回転運動する観測者から見たときの見かけの力であることに注意が必要だ。

ローラコースタの外部で静止している観測者が見たときの力は、図 2.13 に示す関係になっている。ローラコースタはループの最高点の手前  $\theta$  の角度を速度  $v$  で上昇中とする。ループの回転半径を  $R$ 、ローラコースタ質量を  $m$  とし、ローラコースタとループ(レール)

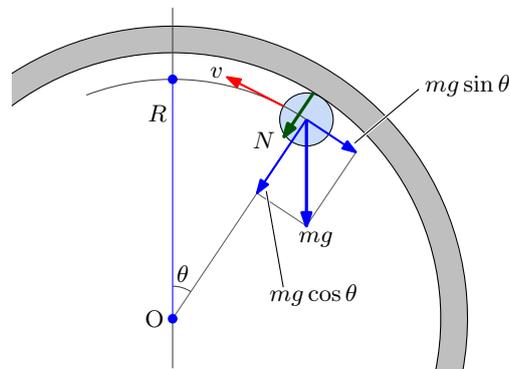


図 2.13: ローラコースタに作用する力

の間に摩擦がないものとする。ローラコースタには鉛直下方に重力  $mg$  が作用している。その重力は、ループの中心を向く  $mg \cos \theta$  と、ループの接線方向に向かう  $mg \sin \theta$  に分解できる。そのうち、ループ中心に向かう力がローラコースタを円運動させるための向心力として使われる。速さ  $v$  で半径  $R$  の円を描く物体に作用する向心力は  $mv^2/R$  なので、このローラコースタは、

$$mg \cos \theta \leq \frac{mv^2}{R},$$

を満たさなければならない。この条件を満足できなければ、向心力  $mg \cos \theta$  はさらに半径が小さい円を描くことになり、ループから外れて自由落下することになる。上記の不等式を満たす場合、不足した力はレールから垂直抗力  $N$  が補われ、

$$mg \cos \theta + N = \frac{mv^2}{R}, \quad (2.35)$$

が満たされているのだ。ローラコースタに動力が装備されなく、単に慣性で運動しているのであれば、エネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 + \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

が成立する。ここで、 $v_0$  はループの最下点から侵入するときの突入速度とする。突入速度  $v_0$  を用いて (2.35) を書き換えると、

$$mg \cos \theta + N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg(1 + \cos \theta),$$

が得られる。この数式を変形すると、レールから与えられる垂直抗力:

$$N = m \left[ \frac{v_0^2}{R} - g(2 + 3 \cos \theta) \right],$$

が得られる。垂直抗力  $N$  が負になると、もはや、ローラコースタはレールに接することなく、自由落下しているということだ。容易に予想できるように、最も垂直抗力が弱くなるのは、ローラコースタが最高点 ( $\cos \theta = 1$ ) にいるときだ。その条件で落下しないように突入速度を計算すると、

$$v_0 \geq \sqrt{5gR},$$

となる。例えば、ループの半径が  $R = 15 \text{ m}$  であれば、突入速度は  $v_0 > 27.1 \text{ m/s}$  でなければならない。あくまでも、これは摩擦がない条件でのぎりぎりの速度であるので、実際にはもっと大きな突入速度が必要だろう。

## 2.6 束縛運動

束縛運動とは、物体の運動に制約を設けて自由度を減少させた運動である。本書において、既に束縛運動を扱ってきた。例えば、斜面を滑る物体の運動が束縛運動の例だ。斜面を滑る運動を取り扱う際、物体の座標は斜面に沿った1次元の座標しか考えなかった。本来、3次元空間の現象ならば三つの座標成分が必要であるが、運動に制約事項を設けることによって解析する次元が減少しているのだ。

### 2.6.1 束縛力と束縛条件

運動を束縛するには、自由度を与えないように物体に力を与える必要がある。ただし、単に力を与えると物体が加速してしまうので、安定させるためには作用反作用の原理で釣り合った状態を維持するのだ。そのような力は束縛力と呼ばれる。束縛力は物体の運動の自由度を奪い、少ない座標成分での解析を可能とする。運動の自由度が奪われた状態は、束縛条件として数学的に記述できる。本項では、いくつかの運動において、束縛力と束縛条件を確認する。

**斜面を滑る物体** この運動が最も簡単な束縛運動の例だろう。図 2.14 に示すように、 $xy$  平面に斜面があり、物体はその斜面に沿って運動するという設定だ。本来の空間は 3 次元空間であり、残った座標軸  $z$  は紙面の奥行方向に向いている。ここで考える束縛条件は、斜面に沿って物体が運動するということだ。物体の質量を  $m$  とすると、物体には  $y$  軸の負方向 (鉛直下方) に重力  $mg$  が作用している。斜面の傾斜角が  $\alpha$  であるなら、その重力は、斜面を押す力  $mg \cos \alpha$  と、斜面に沿った力  $mg \sin \alpha$  に分解できる。特に、斜面を垂直に押す力

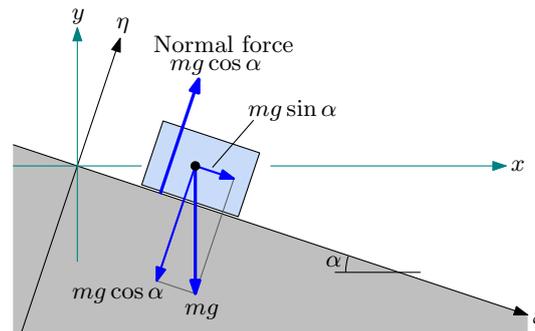


図 2.14: 斜面を滑る物体に作用する力

に対して、作用反作用の法則によって、物体は斜面から等しい力 (垂直抗力)  $mg \cos \alpha$  で押し返される。垂直抗力、斜面垂直方向における力は釣り合い、物体は斜面にもぐることがなければ、飛び上がることもない。この場合、斜面からの垂直抗力が束縛力として機能している。重力を分解したもう一方の成分、すなわち、斜面下方に向かう  $mg \sin \theta$  が全体の合力として物体に作用する力である。その結果、物体の運動は斜面に沿った運動となる。

上に書いた束縛条件に基づいて運動方程式を記述してみよう。そもそも、斜面に対して垂直に作用する力を議論する代わりに、運動は斜面上に限定されるという拘束条件を課すのだ。つまり、拘束条件は

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0, \quad (2.36)$$

である。このとき、物体に作用する力は斜面下方に向かう力のみを考えればよく、ニュー

トンの運動方程式は,

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha \cos \alpha, \quad m\ddot{y} = -mg \sin^2 \alpha, \quad (2.37)$$

となる。ここで, 斜面下方に向かう座標  $\xi$  と, その垂直方向の座標  $\eta$  を用いることにすると, その新たな座標は,

$$x = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \quad y = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha,$$

によって  $[x, y]$  から座標変換される。すなわち,  $[x, y]$  を角度  $\alpha$  だけ回転すれば  $[\xi, \eta]$  が得られる。この座標回転を束縛条件 (2.36) に適用すると,

$$\eta = 0, \quad (2.38)$$

なる単純な数式が得られる。この数式は, 物体が必ず斜面の上に存在するという拘束条件を与える。一方, 運動方程式 (2.37) を座標回転すると,

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} \cos \alpha + \ddot{\eta} \sin \alpha &= mg \sin \alpha \cos \alpha, \\ -\ddot{\xi} \sin \alpha + \ddot{\eta} \cos \alpha &= -mg \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

が得られる。これらの数式に, 拘束条件  $\eta = 0$  を代入すると, これら二つの方程式はともに,

$$m\ddot{\xi} = mg \sin \alpha, \quad (2.39)$$

なる一つの方程式に変形される。したがって, 拘束条件を利用して, 運動方程式の未知数を減らすことができた。通常, 我々はこのような回りくどいことをせずに, 無意識のうちに斜面下方に沿った座標軸を設定し, 運動方程式 (2.39) を記述していることだろう。斜面下方に沿った座標時を設定するのは, ここに示したように, 束縛条件から規定される数学に基づくことが, この例から理解できるだろう。

**単振り子** 図 2.15 に示す振り子の運動を考えよう。振り子は原点を支点とし, 長さ  $l$  のひもに取り付けられた質量  $m$  の物体が運動する。なお, 物体の大きさは無視できるくらい小さいとする。厳密に考えると, 物体に作用する力によって, ひもは伸縮するのだが, ここではひもの伸縮は考えないことにする。さらに, ひもがたるんだ状態の運動も考えないことにすると, 拘束条件は,

$$x^2 + y^2 = l^2, \quad (2.40)$$

のように表される。振り子の位置を特定するため, 鉛直下方から角度  $\theta$  だけ離れた位置に振り子が運動している瞬間を考えよう。振り子は鉛直下方に重力  $mg$  作用を受ける。その重力は, 原点から振り子を結ぶひもの方向の成分  $mg \cos \theta$  と, その垂直方向の成分  $mg \sin \theta$

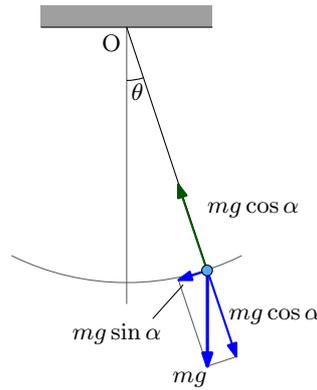


図 2.15: 振り子に作用する力

に分離できる。そのうち、前者はひもの張力によって相殺される。そうでなければ、ひもが伸びるかたるむかの運動をするはずだ。ここでは、ひもはたるみもしなければ、伸縮もしないので、ひもの方向の力は完全に相殺されている。したがって、考えるべきは、ひもと垂直な成分(接線成分)のみである。上で議論した斜面の例に基づき、振り子の運動方程式を2次元のカルテシアン座標について記述すると、

$$m\ddot{x} = -mg \sin^2 \theta, \quad m\ddot{y} = -mg \sin \theta \cos \theta,$$

となる。ここで、座標  $[x, y]$  が、

$$x = l \sin \theta, \quad y = l \cos \theta,$$

によって変換されることに注意すると、運動方程式は、

$$m\ddot{\theta} = -\frac{mg}{l} \sin \theta, \tag{2.41}$$

のように変換される。ここまでに書いた思考も我々が無意識に実行していることかもしれないが、束縛運動の考えに基づき、 $x$  と  $y$  の2次元の問題を、 $\theta$  だけの問題に簡略化したのだ。さらに面白いことに、ニュートンの運動方程式は  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  のように、位置ベクトルの2階微分を取り扱っていたのだが、変換された方程式は角度  $\theta$  の2階微分である。このように、取り扱う物理現象に依存し、解析すべき変数のディメンジョンが異なる。これは、本書の後半で説明する解析力学における一般化座標につながる。

### 2.6.2 束縛と自由度

前項で確認したように、束縛運動では束縛条件を利用することによって、取り扱う座標成分を少なくできる。取り扱う座標成分が少ないということは、その運動による未知数が

少なくなるということだ。そのような運動における未知数の数は自由度と呼ばれる。自由度が減少するのは数学的に好ましい。

一般的に、3次元空間で  $N$  個の質点の運動を一括して取り扱おうとすると、 $3N$  個の成分を取り扱う必要がある。本書の後半で取り扱う解析力学の手法では、それらの座標成分を一括して、座標系  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  の運動を取り扱う。ここで、 $n = 3N$  とおいた。束縛がない任意の運動であれば、未知数が  $n$  個も存在することになる。束縛運動となると、束縛条件によって未知数が減少するわけだ。一般的に、束縛条件は、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

のような数式で表現される。束縛条件の例として、前項で扱った斜面の問題では  $x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0$ 、単振り子の問題では  $x^2 + y^2 = l^2$  である。このように、明確な関数で表現できる束縛は**ホロノミックな束縛** (holonomic constraint) と呼ばれる。

ホロノミックな束縛が未知数を減少させることを斜面の問題で考えてみよう。既にみたように、 $x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0$  なる束縛条件が、座標系  $[x, y]$  から別の座標系  $[\xi, \eta]$  に変換した結果、 $\eta = 0$  のように簡略化された。その結果、運動方程式に含まれる未知数が  $\xi$  だけになったのだ。この変化を一般化すると次のように考えられる。束縛条件を考慮し、座標系  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  から適当な座標系  $[q_1, q_2, \dots, q_n]$  に変換すれば、 $q_n = \text{const}$  とすることができる。その結果、未知数が明示的に減るわけだ。複数の束縛条件が設定できれば、その数だけ未知数が減る。

運動方程式で決めるべき未知数の数は**自由度**と呼ばれる。一つの物体の3次元空間での運動は、 $[x, y, z]$  が未知数となるため、自由度3をもつ。任意の二つの物体の運動は自由度6をもつ。その自由度は束縛条件によって減少する。一般的に、 $n$  個の座標成分を取り扱う問題において、束縛条件を設定でき、 $q_n = \text{const}$  とすれば、未知数が  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$  になる。例えば、2原子分子の運動を記述する場合、原子間の距離が拘束条件となり、決定すべき未知数は、 $x, y, z, \theta, \varphi$  の5個である。すなわち、自由度は5である。なお、前半の三つの未知数は重心の位置を表す座標、残りの二つは原子間を結ぶ線分方向(天頂角と方位角)である。さらに、3原子分子になると、各原子の位置を表す座標は全部で9個であるが、拘束条件が三つ現れる<sup>4</sup> ため、自由度は6となる。一般的には、 $n$  次元の一般化座標において、拘束条件が  $k$  個だけ設定されると、自由度は  $n - k$  になる。

拘束条件はホロノミックな拘束だけではない。例えば、振り子の運動の場合、 $x^2 + y^2 \leq l^2$  が非ホロノミックな拘束である。この場合、左辺等辺が不等号で結ばれているため、ひものたるみが許容されているのだ。具体的には、等号が成立しているとき、ひものが張り詰めている状態であり、不等号がたるんだひもに対応する。例えば、振り子が  $\theta < \pi/2$  となる

<sup>4</sup>拘束条件の設定方法は複数ある。例えば、二つの原子間の距離を拘束条件として設定できる。三原子分子では、原子間の距離は3通り設定できるので、拘束条件が三つ設定できるということだ。

まで上昇すると、下降時にはひもがたるむ。非ホロノミックな拘束は、数学的に未知数を減少させることができず、解法が難しい。非ホロノミックは拘束の場合、問題ごとに個別に解法を設定することになる。

**時間依存する束縛条件** 束縛条件は、時間依存するように設定することも可能だ。その一例が、動く支点に取り付けられた振り子の運動だ。支点の位置が時間の関数  $\mathbf{r}_0(t)$  であるとき、振り子の位置  $\mathbf{r}$  は、

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)| = l,$$

なる束縛を受ける。このように、束縛条件が時間の関数となることも想定できるわけだ。時間依存する束縛条件を一般的に扱うには、現時点では難しい。この問題は、本書の後半で解析力学のトピックとして取り扱いたい。

## 第3章 剛体の運動

本章では、有限の大きさをもち変形しない物体、いわゆる、剛体の運動を取り扱う。単なる質点とは異なり、有限の大きさをもつため、剛体は回転を伴う運動をする。そのため、前章で議論した角運動量などが解析の役に立つ。

### 3.1 質点系の力学

剛体は多数の質点の集合であると考えることができる。ただし、へ陰茎しないのだから、構成する質点間の距離は変化しない。剛体を取り扱う際、その距離の制約を束縛条件として取り扱うことになる。本節では、束縛条件を取り扱わず、複数の質点で構成される質点系について物理学を考える。

#### 3.1.1 重心の運動方程式

質点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  のように、 $n$  個の質点で構成される質点系を考えよう。それら質点は、それぞれ、質量  $m_1, m_2, \dots, m_n$  を有し、位置  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  に存在する。その質点系における運動方程式は、

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \hat{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1,n-1} + \mathbf{F}_{1n}, \\
 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \hat{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2,n-1} + \mathbf{F}_{2n}, \\
 m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \hat{\mathbf{F}}_3 + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{F}_{3,n-1} + \mathbf{F}_{3n}, \\
 &\vdots \\
 m_n \ddot{\mathbf{r}}_n &= \hat{\mathbf{F}}_n + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_{n3} + \cdots + \mathbf{F}_{nn},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

のように書くことができる。ここで、力  $\hat{\mathbf{F}}_j$  は質点  $P_j$  に作用する外力、 $\mathbf{F}_{jk}$  は質点  $P_k$  との相互作用で  $P_j$  に作用する力である。作用反作用の法則によって  $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$  が成立する。これらの運動方程式をすべて加算すると、

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{F}}_j,$$

となる。質点どうしの相互作用による力は、作用反作用の法則によって相殺されている。ここで、系の全質量と外力の総和を、

$$M = \sum_{j=1}^n m_j, \quad \mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{F}}_j,$$

とおき、系の重心を、

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j,$$

と定義すると、系全体の運動方程式は、

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

のように書くことができる。つまり、内部で相互作用があっても、質点系の運動方程式は、外力と重心の関係だけで記述できるのだ。言い換えると、外力がなければ、どんなに内部で激しく相互作用していても、系の重心  $\mathbf{r}_G$  に加速度が生じず、等速直線運動するわけだ。

系の内部で発生する相互作用による力は、どのような力であってもよい。質点同士の間作用する重力や、電磁気力であってもよい。また、衝突の瞬間に力積を与える力であってもよい。

**衝突問題** 図 3.1 に示すような二体の衝突問題を考えてみよう。図は二つの球体の衝突を描いているが、球体でなくてもよい。初期状態として、質量  $m_A$  の物体 A が  $x$  軸方向に速さ  $v$  で運動し、静止している質量  $m_B$  の物体 B に衝突する。その結果、A は  $x$  軸と角度  $\theta$  をなす方向に運動する。このとき、A と B の速度  $v_A$  と  $v_B$ 、B の運動方向  $\theta_B$  が決定すべき未知数である。なお、この衝突は弾性衝突であるとする。弾性衝突ということは、衝突前後

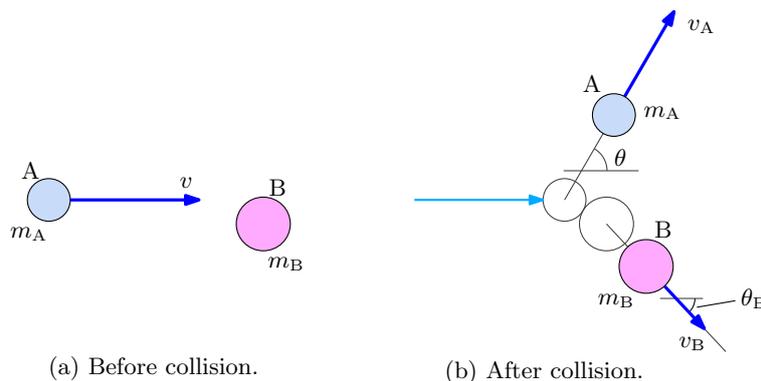


図 3.1: 物体の弾性衝突

で運動エネルギーの総和が保存されるということだ。その前提で方程式をつくと、

$$m_A v_A \cos \theta + m_B v_B \cos \theta_B = m_A v, \quad (3.3a)$$

$$m_A v_A \sin \theta - m_B v_B \cos \theta_B = 0, \quad (3.3b)$$

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v^2, \quad (3.3c)$$

が得られる。これらの数式は、左辺が衝突後の状態、右辺が衝突前の状態に対応する。第1式と第2式が運動量保存則、第3式が運動エネルギーの保存を表している。言うまでもなく、運動量保存則を  $m_A + m_B$  で除すれば、重心の速度が衝突の前後で変化しないことを表現する数式が得られる。その重心の速度は  $x$  軸方向に、

$$v_G = \frac{m_A v}{m_A + m_B}, \quad (3.4)$$

の速さをもつ。連立方程式 (3.3a) から (3.3c) を衝突後の二つの物体の運動が特定できる。とはいえ、もう少し簡単に運動を特定する方法を次の段落以降で説明しよう。

連立方程式 (3.3a) から (3.3c) を解くことは可能だが、もう少し簡単に衝突後の運動を特定する方法がある。それは、重心の運動が不変であることを利用するのだ。具体的に言うと重心とともに運動する観測者が見た座標系、いわゆる、重心系に変換してやるのだ。結果として、重心系における物体の弾性衝突は図 3.2 のようになる。図に描かれた内容を説明していこう。既に (3.4) で計算された重心の速さを用いると、衝突前における物体 A と B

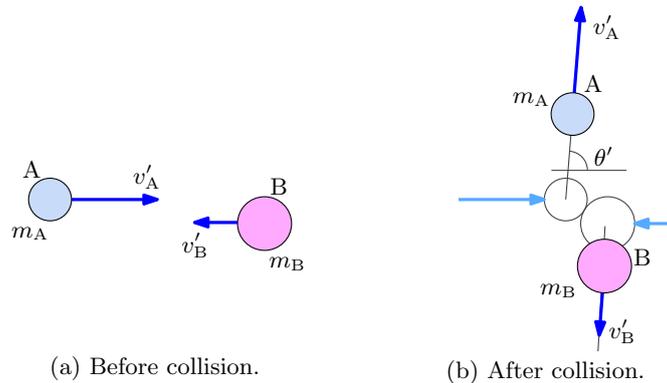


図 3.2: 重心系における物体の弾性衝突

の速さは、

$$v'_A = \frac{m_B v}{m_A + m_B}, \quad v'_B = \frac{m_A v}{m_A + m_B},$$

となる。言うまでもなく、 $v_A$  と  $v_B$  は正反対に向かうベクトルだ。これで運動量の総和が確実にゼロになっている。続いて、衝突後 (b) を考察しよう。衝突後も運動量の総和がゼロでなければならないので、やはり、速度は互いに逆向きになる。しかも、運動エネルギーの総和も保存しなければならないので、物体 A と B の速さは、それぞれ、 $v'_A$  と  $v'_B$  でなければならない。この場合、未知数は速度の方向  $\theta'$  だけだ。その未知数を得るには、静止系から見たとき、物体 A が  $x$  軸と角度  $\theta$  をなす方向に運動する事実を使えばよい。すなわち、

$$\tan \theta = \frac{v'_A \sin \theta'}{v'_A \cos \theta' + v'_B},$$

を解けばよい。この数式は,

$$m_B^2 \cos^2 \theta' + 2m_A m_B \sin^2 \theta \cos \theta' + m_A^2 \sin^2 \theta - m_B^2 \cos^2 \theta = 0,$$

のように,  $\cos \theta'$  についての2次方程式である。この方程式の解は,

$$\cos \theta' = \frac{-m_A \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{m_B^2 - m_A^2 \sin^2 \theta}}{m_B},$$

のように計算できる。この解に対し, 複号のうち適切な方を選択しなければならない。これによって未知数  $\theta'$  が特定できれば, 問題が解けたことになる。実際の解は, 重心座標における物体 A と B の速度ベクトルを計算し, それらを静止座標に変換すれば求まるわけだ。

**万有引力** 第1章では, 恒星を公転する惑星の運動を解析し, ケプラーの法則を導出した。その際, 恒星は惑星に比べ十分に大きな質量をもっていると仮定した。恒星が惑星と比較できる程度の質量の場合, 恒星も惑星による重力のため運動することになる。そのような例を取り扱おう。

主星 A と伴星 B による二重星 (binary stars) の運動を考えよう。これらの天体は, 互いの重力によって運動が規定され, 外力が存在しないものとする。これまでの議論の通り, この二重星の重心に加速度が発生しない。ここで, この二重星の重心系で観測することを考える。主星 A と伴星 B の質量を, それぞれ,  $m_A$  と  $m_B$  とする。さらに, A と B の距離を  $r$  としよう。そのとき, 重心から A までの距離  $r_A$  と, 重心から B までの距離  $r_B$  は,

$$r_A = \frac{m_B r}{m_A + m_B}, \quad r_B = \frac{m_A r}{m_A + m_B},$$

となる。A と B の間の万有引力は, A と B を結ぶ直線の方に大きさ  $F = Gm_A m_B / r^2$  の引力として作用する。当然, 作用反作用の法則のため, この万有引力は A にも B にも作用している。万有引力  $F$  は,

$$F = \frac{Gm_A m_B}{r^2} = \frac{Gm_A}{r_A^2} \frac{m_B^3}{(m_A + m_B)^2} = \frac{Gm_B}{r_B^2} \frac{m_A^3}{(m_A + m_B)^2},$$

のように書き換えることができる。この数式の右辺として,  $r_A^2$  を分母にする形と,  $r_B^2$  を分母にする形の2種類で表現した。前者は, A に作用する万有引力が, 重心に存在する質量  $m_B^3 / (m_A + m_B)^2$  から受ける力に見えることを意味する。同様に, 後者は, B に作用する万有引力が, 重心に存在する質量  $m_A^3 / (m_A + m_B)^2$  から受ける力に見えることを意味する。

二重星は主星も伴星も, 重心のまわりをケプラーの法則にしたがい楕円軌道を描く。その例として, 主星 (primary star) の質量が伴星 (secondary star) の2倍, すなわち,  $m_A = 2m_B$  である二重星の運動を図3.3に示す。この場合, 主星と伴星を結ぶ線分を1:2で内分する点が重心の位置だ。主星から見ると重心に質量  $0.11m_A$  の天体が存在する場合と等価で

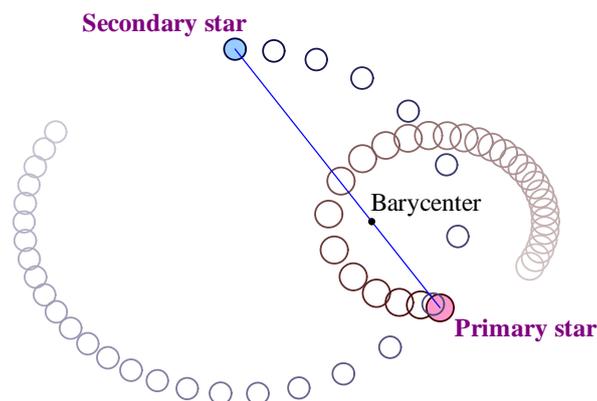


図 3.3: 楕円軌道を描く二重星 ( $m_A = 2m_B$ )

ある。一方、伴星から見ると重心に質量  $0.89m_A$  の天体が存在する場合と等価である。重心の位置を一定に保つため、主星と伴星の動きは完全に同期している。すなわち、主星が重心に最接近するとき、伴星も重心に最接近しているわけだ。

主星が明示的に楕円軌道を描くのは、伴星の質量が大きいため、自らの重力で主星を振り回すと解釈することもできる。この図ほど顕著ではないが、月は地球との質量比が、太陽系のどの衛星と惑星の比よりも顕著であるため、公転に同期して地球を振り回している。月の質量は地球の約 81 分の 1 にもなるため、約 4700 km の軌道長半径にて地球を振り回している。

### 3.1.2 運動量と運動エネルギー

実験室系と重心系の間で運動量と運動エネルギーの関係を調べよう。重心を  $\mathbf{r}_G$  とし、系に含まれる第  $j$  番目の質点の実験室系と重心系での位置ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{r}_j$  と  $\mathbf{r}'_j$  とする。このとき、それらのベクトルは、

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j,$$

なる関係を満たす。この関係式から、実験室系における重心を計算すると、

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j) = \mathbf{r}_G + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j,$$

が得られる。ここで、 $M$  は系の全質量:

$$M = \sum_{j=1}^n m_j,$$

とした。当然, 計算している重心は  $\mathbf{r}_G$  に等しくなければならないので,

$$\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j = 0, \quad (3.5)$$

が成立する。つまり, 重心系における重心は原点に存在するということだ。改めて成立すべき関係式として,

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j, \quad (3.6)$$

を書いておこう。この数式の両辺に  $M$  を乗じ, 時刻  $t$  について微分すると,

$$M \dot{\mathbf{r}}_G = \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j,$$

が得られる。得られた数式は運動量の関係式だ。実験室系での運動量を  $\mathbf{p}_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j$ , 重心系での運動量を  $\mathbf{p}'_j = m_j \dot{\mathbf{r}}'_j$  とおいてみる。さらに, 系全体を重心  $\mathbf{r}_G$  に存在する質量  $M$  の質点として取り扱い, その運動量を  $\mathbf{p}_G = M \dot{\mathbf{r}}_G$  としよう。そのとき,

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_G, \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{p}'_j = 0, \quad (3.7)$$

が得られる。得られた第1式によると, 実験室系では, すべての質点の運動量の総和は, 系全体を質量  $M$  の質点とみなしたときの運動量に等しい。第2式は, 重心系では系の運動量の総和がゼロであることを主張する。

運動エネルギーは運動量とは少し違った特徴を示す。運動エネルギーの定義にしたがい, 系に含まれる質点の運動エネルギーをすべて加算すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\mathbf{r}}_G^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}'_j + \dot{\mathbf{r}}_j'^2) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_G^2 \sum_{j=1}^n m_j + \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}'_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j'^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j'^2, \end{aligned}$$

のように計算できる。第4行目への数式変形は, 重心系における運動量がゼロであることを利用した。その結果, 系の運動エネルギーは, 重心を質量  $M$  の質点とみなしたときの運動エネルギーだけでなく, 重心系からみた運動エネルギーを加算した値になっている。すなわち, 実験室系での運動エネルギーを  $K$ , 重心を質点とみなした運動エネルギーを  $K_G$ , 重心系での運動エネルギーを  $K'$  とおくと,

$$K = K_G + K', \quad (3.8)$$

が成立する。この関係式は、熱力学で、ある体積内に閉じ込めた気体のエネルギーを論じるときに重要だ。右辺の第1項は、気体を収容した体積の運動に起因するエネルギーであり、第2項は気体分子の熱運動に起因する運動エネルギーなのだ。その理由で、熱力学では右辺の第2項に相当するエネルギーは**内部エネルギー**と呼ばれる。

## 3.2 剛体運動の記述

剛体は変形しない質点系だ。変形をしないことが束縛条件となり、自由度を少なくしている。本節で説明するように、変形しない質点系に与えられる運動は、重心の平行移動と向きの変更(回転)のみだ。そのような運動によって自由度6が与えられる。

### 3.2.1 自由度

空間が3次元の場合、理想気体のように各質点は何の制約も受けず自由に運動できるなら、質点 $n$ 個で構成される系の自由度は $6n$ となる。本節の冒頭で述べたように、剛体は構成する質点がどんなに多くなっても自由度は6である。本項では、その事実を説明しよう。

図3.4によって剛体の自由度を説明しよう。なお、全く変形しないことから、構成する質点の間の距離はすべて定められているとする。図3.4(a)は質点1個のみの系である。質点の位置として、座標 $[x, y, z]$ を自由に選ぶことができるので自由度3をもっている。表現する座標系はカルテシアン座標でなくてもよいが、いずれにしても、位置を特定するには、三つの座標成分が必要だ。

図3.4(b)は質点2個で構成される系である。第1の質点は上で説明したように、三つの座標成分によって定まる。第2の質点を定めるには、第1の質点から見た方向を決定する必要がある。例えば、図に示すように $\theta$ と $\varphi$ の二つの座標があれば方向が決定できる。したがって、質点2個で構成される系の自由度は5である。

図3.4(c)は質点3個で構成される系である。第2の質点までは5個の座標成分で定まる。第3の質点の位置を定めるにあたって、質点1と質点2を結ぶ線を軸にして回転する自由度が許されている。図に示すように、回転角 $\psi$ を決めれば第3の質点の位置が定まるわけだ。したがって、質点3個で構成される系の自由度は6である。

図3.4(d)は質点4個で構成される系である。第3の質点の位置を定めるために、既に自由度6を使っている。第4の質点の位置は、図から明らかなように、自由度なく一意的に決まる。系を構成する質点がさらに多くなっても、残された質点の位置は自由度なく一意的に定まるのだ。したがって、3個以上の質点で構成される剛体は自由度が6である。

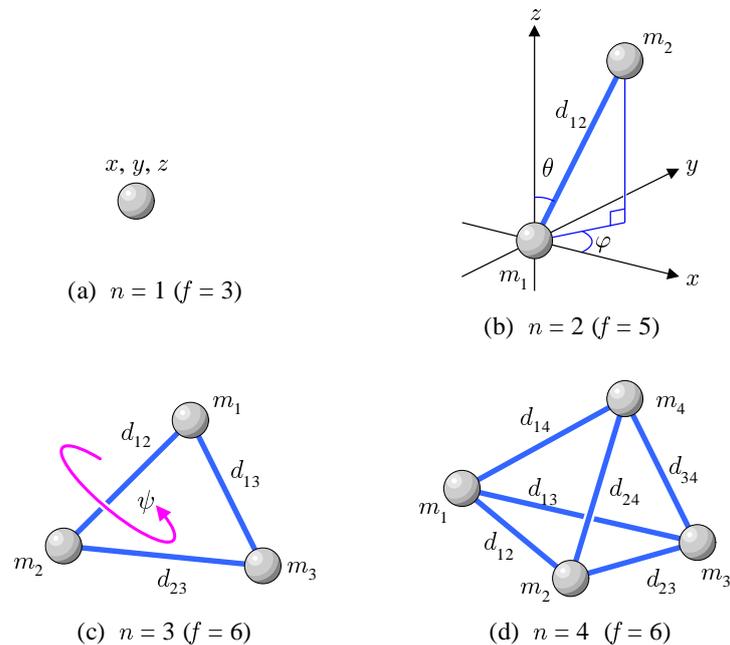


図 3.4: 寸法が規定された質点系の自由度

上に書いた質点の位置の定め方は一例に過ぎないが,  $[x, y, z, \theta, \varphi, \psi]$  を決めれば剛体の位置や向きが特定できるということだ。決定したパラメータのうち, 前半の三つがカルテシアン座標成分であり, 後半は方向を与える角度である。その位置の定め方は剛体がとることができる運動形態にも対応している。剛体の運動は, 平行移動と回転運動に分類できる。平行移動は重心座標を移動するため, 前半三つの自由度に相当する。回転運動は, 定めた軸まわりの回転角を与えることによって実行するため, 後半三つの自由度に相当する。

### 3.2.2 回転運動

剛体は変形しないのだから, 剛体を構成する質点の運動は気体分子のような乱数的な運動ではない。変形をしないことが条件なのだから, 剛体を構成する質点は, 互いの距離を一定に保って運動する。互いの距離を一定に保つ運動とは, 平行移動と回転に分類できる。

平行移動はすべての質点が等しい変位だけ移動する運動である。形式的には, 時刻  $t$  において  $\mathbf{r}_j(t)$  に存在した第  $j$  番目の質点が, 時刻  $t + \Delta t$  では,

$$\mathbf{r}_j(t + \Delta t) = \mathbf{r}_j(t) + \mathbf{v} \Delta t,$$

に運動する。ここで,  $\mathbf{v}$  は速度に相当するベクトルであり, すべての質点に対して共通だ。この数式から明らかなように, 重心も,

$$\mathbf{r}_G(t + \Delta t) = \mathbf{r}_G(t) + \mathbf{v} \Delta t,$$

となる。つまり、平行移動とは、重心系では質点の座標が不変となる運動なのだ。

回転運動は、剛体の向きを変える運動だ。簡単な運動の例として、質量が等しい二つの質点で構成される系を考えよう。二つの質点は、 $xy$  平面上で、

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r \cos \omega t, & y_1(t) &= r \sin \omega t, \\x_2(t) &= -r \cos \omega t, & y_2(t) &= -r \sin \omega t,\end{aligned}$$

となるように運動する。この系の重心は常に原点だ。原点が移動しないので、この系の運動量は常にゼロとなる。とはいえ、静止しているものとしてこの系を取り扱うのは妥当ではない。なぜなら、この系には運動エネルギーをもつからだ。二つの質点はともに速さ  $r\omega$  で運動しているのだから、この系は  $mr^2\omega^2$  の運動エネルギーをもつ。ここで、 $m$  は質点一つあたりの質量とした。

運動エネルギーだけでは回転運動を取り扱うのは不十分だ。運動エネルギーでは回転の方向を取り扱えないからだ。方向を取り扱うには、運動量のようなベクトルが好ましい。例えば、 $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  なるベクトル積を用いるのはどうだろうか？ ここで、 $\mathbf{r}$  は原点を始点とする位置ベクトルだ。上の数式に記載したような円運動の場合、質点1と質点2に対応するベクトル積は、

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \left[ 0, 0, mr^2\omega \right],$$

となる。このベクトルは  $z$  軸方向を向いている。つまり、回転軸の方向を向くベクトルだ。しかも、質点1と質点2に対応するベクトルはともに同じ方向を向いている。この新たなベクトルは、回転運動において運動量の代役となることを期待する。また、ベクトルの大きさが角速度に比例していることから、角運動量と呼んでみよう。

回転運動を取り扱うとき、角運動量  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  を取り扱うことが便利のように思える。とはいえ、上の例では、 $\mathbf{r}$  が回転軸を基準に考えた位置ベクトルだった。当然、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の基準を変えると、 $\mathbf{L}$  は変わってしまう。運動量  $\mathbf{p}$  が原点を変えても不変だったことと比較し、そのような  $\mathbf{L}$  でも実用上、問題ないか考えてみよう。その検討をするため、カルテシアン座標系で  $[x_0, y_0, z_0]$  を中心に、 $xy$  平面と平行に、半径  $r$  で角速度  $\omega$  で運動する質点 P を考えよう。質点 P の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  は時刻  $t$  の関数として、

$$\mathbf{r} = \left[ x_0 + r \cos \omega t, y_0 + r \sin \omega t, z_0 \right],$$

のように記述できる。質点 P の質量を  $m$  とすると、角運動量  $\mathbf{L}$  は、

$$\mathbf{L} = \left[ -mz_0r\omega \cos \omega t, -mz_0r\omega \sin \omega t, mr\omega (x_0 \cos \omega t + y_0 \sin \omega t) + mr^2\omega \right],$$

となる。この角運動量は特徴のある形をしている。長時間にわたって平均すると、三角関数が相殺され、結果的に  $z$  軸方向の成分  $mr^2\omega$  のみが残る。つまり、長時間にわたって平

均すれば、原点との相対位置に関する依存性が消え、回転半径  $r$  と回転の速さ  $\omega$  の依存性のみが残る。

長時間の平均をとるのでなく、複数の質点に対して角運動量を重ね合わせるとどうなるか考えてみよう。系には質点が  $n$  個だけ含まれているとし、第  $j$  番目の質点の質量を  $m_j$ 、位置ベクトルを  $\mathbf{r}_j$  とする。特に、重心を  $\mathbf{r}_G$  を用い、 $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j$  であるとする。言い換えると、 $\mathbf{r}'_j$  は重心系の位置ベクトルである。このとき、角運動量の重ね合わせは、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_j &= \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j \times \dot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j) \times (\dot{\mathbf{r}}'_G + \dot{\mathbf{r}}'_j) \\ &= \left( \sum_{j=1}^n m_j \right) \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + \mathbf{r}_G \times \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}'_j + \left( \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j \right) \times \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{r}}'_j \\ &= M \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{r}}'_j = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}', \end{aligned}$$

のように計算される。第3行目への数式変形は、 $\mathbf{r}'_j$  が重心系の位置ベクトルであることを利用した。また、 $M$  は系の全質量である。その結果、系に含まれる質点の角運動量の和は、重心を質量  $M$  の質点とみなしたときの角運動量と、重心を基準とした角運動量の和である。この関係は、運動エネルギーの関係に類似している。この関係式を見ると、 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  を回転運動を扱う物理量とする妥当性がわかる。

### 3.2.3 角運動量保存則

運動量と同様に、外力が存在しなければ角運動量も保存する。保存する物理量は、物理学の問題を解くうえで有力な鍵になる。本項では、外力の作用を受けない系で角運動量が保存することを証明する。

準備段階として、 $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$  と同様に、角運動量の時間微分を  $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{p}}$  なるベクトルを導入する。新たに定義された  $\mathbf{N}$  を計算すると、

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

が得られる。この計算において、 $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ 、すなわち、 $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = 0$  であることを利用して右辺が得られた。改めて  $\mathbf{N}$  の計算結果:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.9)$$

を記述しておこう。この物理量は、力のモーメントと呼ばれる。力のモーメントという名称は、 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  なる数式の直接的な呼び方である。これに対し、角運動量  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  は運動量のモーメントというわけだ。

複数の質点によって構成される系における角運動量の時間微分は、各質点に作用する力のモーメントの総和である。つまり、系全体の角運動量の時間微分は、

$$\sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{L}}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{N} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j,$$

となるわけだ。質点を受ける力  $\mathbf{F}_j$  には、系の内部の質点に起因する力  $\mathbf{F}_{jk}$  と、外力  $\hat{\mathbf{F}}_j$  が含まれる。ここで、 $\mathbf{F}_{jk}$  は第  $k$  番目の質点によって第  $j$  番目の質点に作用する力とする。すなわち、

$$\mathbf{F}_j = \hat{\mathbf{F}}_j + \sum_{j=1}^n{}' \mathbf{F}_{jk},$$

である。ここで、プライム (') 付きの総和記号は  $j = k$  を除外して総和をとるものとする。この関係に注意して角運動量の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{L}}_j &= \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \left( \hat{\mathbf{F}}_j + \sum_{j=1}^n{}' \mathbf{F}_{jk} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \hat{\mathbf{F}}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n{}' \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \hat{\mathbf{F}}_j + \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \hat{\mathbf{F}}_j, \end{aligned}$$

が得られる。最終行への数式変形では、作用反作用の法則  $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$  を利用した。さらに、質点間の相互作用が  $\mathbf{F}_{jk}$  が、二つの質点を結ぶ  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$  と同一方向 (または逆方向) を向いていることから、 $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} = 0$  となる。その結果、系全体の角運動量の時間微分は、外力のモーメントに等しい。したがって、外力が存在しなければ、角運動量の時間微分はゼロであるので、角運動量は保存するのだ。

**面積速度一定の法則** 公転する惑星の軌道に関する面積速度一定の法則は、角運動量保存の法則と同一である。この場合の系は、楕円軌道の焦点に存在する恒星と、公転する惑星によって構成される。ケプラーの法則のモデルでは、恒星の質量は惑星質量に比べ十分大きいので、恒星の位置が系の重心である。このとき、恒星を基準にした惑星の位置  $\mathbf{r}$  と、惑星の速度  $\dot{\mathbf{r}}$  によって、角運動量は、

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}},$$

のように記述できる。ここで、 $m$  は惑星の質量だ。特にベクトルの外積  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  の大きさは、恒星と惑星を結ぶ線分と、惑星の速度ベクトルが張る平行四辺形の面積に等しい。その平行四辺形の面積は、恒星から見たときの惑星の方位を  $\theta$  とすると、

$$|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = r^2 \dot{\theta},$$

であり、面積速度の2倍と等しいのだ。したがって、面積速度一定の法則と、惑星の軌道に関する面積速度一定の法則は同一法則ということだ。

**エネルギー保存則との関係** 角運動量保存則は物理学の基本原則ではない。本項では、運動量保存則と作用反作用の法則から角運動量保存則を導いたわけだから、角運動量保存則は、原理でなく定理である。ということは、角運動量保存則で説明される物理現象は、エネルギー保存則や運動量保存則などによって説明できるはずだ。以下の問題をそのような観点で考えてもらいたい。

スピンをしているフィギュアスケートの選手が、広げていた腕を引き寄せると回転が速くなる現象を見たことがあるだろう。その回転速度の加速は、しばしば、角運動量保存則で説明される。その現象を他の物理法則から説明してみたい。モデルとして、図3.5に示すように、原点Oと物体Pを長さ $r$ のひもで結び回転させることを考えてみよう。ひもの長さを2倍にすると、角運動量保存則によって、回転速度が2分の1になるはずだ。する

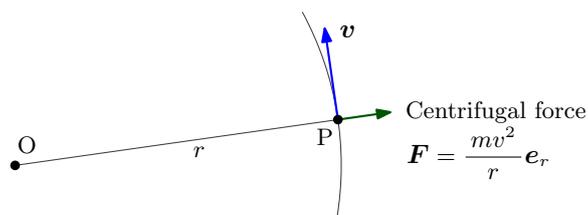


図 3.5: 円運動する物体に作用する遠心力

と、運動エネルギーが4分の1になるので、エネルギー保存則を満たさなくなる、という疑いが沸くのだ。その疑いを晴らし、角速度保存とエネルギー保存が両立することを示そう。

物体Pの質量を $m$ とすると、半径 $r$ で回転する物体には $F = mv^2/r$ の遠心力が作用している。遠心力は見かけの力だが、物体Pから見るとひもから受ける張力と遠心力が釣り合っているのだ。ここで、原点Oと物体Pを結ぶひもを $\Delta r$ だけ長くすることを考えよう。遠心力のため、ひもを緩めれば物体Pは自発的に遠くに動いてくれる。実際、回転中に長さを $\Delta r$ だけ伸ばすには、

$$\Delta W = -\frac{mv^2}{r} \Delta r,$$

の仕事が必要である。正確には、符号が負になっているので、物体が外部に仕事を施すという数式表現になっている。その仕事の量だけ、運動エネルギーが減少すると考えてみよう。ひもの長さを伸ばした結果、速さが $v + \Delta v$ になったとする。つまり、運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2}m(v + \Delta v)^2 \simeq \frac{1}{2}mv^2 + mv\Delta v,$$

である。つまり、運動エネルギーは  $mv\Delta v$  だけ増加する。運動エネルギーの増分を方程式にすると、

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{v}{r},$$

なる微分方程式が得られる。この微分方程式を解くと、

$$v = \frac{v_0 r_0}{r},$$

が得られる。ここで、 $v_0 r_0$  は積分定数だ。この結果からただち、角運動量が  $mvr = v_0 r_0$  のように定数になることがわかる。したがって、角運動量保存則で説明される物理法則が、実は、エネルギー保存則で説明できることがわかった。

**力が釣り合った系における力のモーメント** 力のモーメントは、一般的に、中心とする場所を特定しなければならない。中心とする位置を変えると力のモーメントは変化する。しかし、力が釣り合った系に限り、どこを中心にとっても力のモーメントが不変となる。その事実を示しておこう。位置ベクトルを  $\mathbf{r}_j = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}'_j$  とする。ここで、 $\bar{\mathbf{r}}$  は任意の定ベクトルである。このベクトルは重心でなくてもよい。そのとき、力のモーメントは、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j &= \sum_{j=1}^n (\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}'_j) \times \mathbf{F}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j \\ &= \bar{\mathbf{r}} \times \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j, \end{aligned}$$

のように計算できる。最終行での計算は、系全体で力が釣り合っていることに注意し、第1項がゼロとなっている。その結果、系全体の力のモーメントから  $\bar{\mathbf{r}}$  の依存性が消えている。したがって、力が釣り合った系では、基準とする位置をどこにとっても力のモーメントは変化しない。物理学のテキストでは、力のモーメントを計算する際、基準位置を明らかにしないことがある。その場合、その系は力が釣り合っているはずだ。

**てこの原理** 力のモーメントはてこの原理の説明に用いられる。図 3.6 に示すように、水平方向に棒を渡し、点 O を支点とするてこを構成した場合を考える。支点より  $x_1$  だけ左に下向きの荷重  $F_1$  をかけ、支点より  $x_2$  だけ右に荷重  $F_2$  をかける。このてこが釣り合う条件は、

$$x_1 F_1 = x_2 F_2,$$

である。これは支点を中心とした力のモーメントの釣り合い条件だ。力のモーメントは、系における力のバランスを評価する物理量と考えることができる。上の数式に対し、右辺

を左辺に移項すると,

$$x_1 F_1 - x_2 F_2 = 0,$$

なる数式が得られる。この数式は支点  $O$  に対して、左回りの力が正となるように表現した系全体の力のモーメントだ。この値がゼロになるということは、系全体でバランスがと

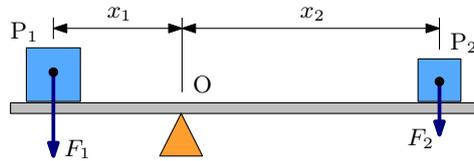


図 3.6: 釣り合ったてこ

れ、安定した状態であることを意味する。仮に、この数式が正になると、系は左回りに偏っていることになり、左側  $P_1$  が下がるということだ。

前で述べたように、角運動量保存則が物理の基本原則でないことと同様に、力のモーメントの釣り合いも基本原則ではない。てこの釣り合いは、てこの構成要素として水平方向にわたした棒の変形(歪み)が関係している。てこの両端に荷重をかけることによって、棒が歪み、その歪みを復元しようとする力が棒を伝搬する。伝搬した力は、力のモーメントに比例する大きさとなって支点  $O$  に作用する。荷重  $F_1$  と  $F_2$  に起因するそのような力が釣り合うため、結果的に  $x_1 F_1 - x_2 F_2 = 0$  が満たされる。だから、力のモーメントでてこの原理が説明できるのだ。一方、てこの原理の物理現象を細かく説明するには、上で述べたように、棒の変形を取り扱うため、弾性体の物理学の知識が必要である。

### 3.3 慣性モーメント

慣性モーメントという量を定義すると、回転運動における角運動量と運動エネルギーが、質点の運動量や運動エネルギーと同形の数式で記述できる。そのとき、質量が加速に対する抵抗の大きさであると同様に、慣性モーメントは回転の開始や停止に対する抵抗の大きさである。

#### 3.3.1 慣性モーメントの導入

図 3.7 に示すように、複数の質点によって構成される剛体が  $z$  軸まわりを回転する場合を取り扱おう。そのモデルにおいて角運動量と力のモーメントを計算し、質点の運動量や力との関係を調べるのだ。剛体を構成する質点のうち、第  $j$  番目の質点の位置を  $\mathbf{r}_j = [x_j, y_j, z_j]$ ,

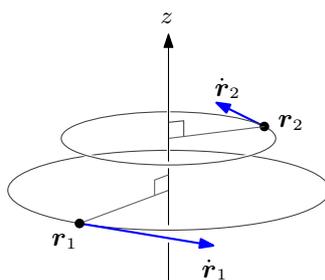


図 3.7: 軸まわりに回転する質点

質量を  $m_j$  とする。このとき、剛体の角運動量は、 $z$  成分を書くと、

$$L_z = \sum_{j=1}^n m_j (x_j \dot{y}_j - y_j \dot{x}_j),$$

となる。これを時間について微分すると、力のモーメントの  $z$  成分:

$$N_z = \sum_{j=1}^n m_j (x_j \ddot{y}_j - y_j \ddot{x}_j),$$

が得られる。この時点では、質点が  $xy$  平面に平行な面内で運動しているという極めて一般的なモデルだ。続いて、剛体が角速度  $\omega$  で回転している条件を適用する。つまり、上で書いた数式に、

$$x_j = r_j \cos \varphi_j, \quad y_j = r_j \sin \varphi_j,$$

を代入すればよい。ここで、 $r_j$  は  $z$  軸からの距離であり、時間に依存しない。一方、 $\varphi_j$  は  $x$  軸から反時計回りに測った角度であり、いうまでもなく、時間の関数である。これらの座標を時間微分すると、

$$\dot{x}_j = -r_j \omega \sin \varphi_j, \quad \dot{y}_j = r_j \omega \cos \varphi_j,$$

が得られる。これらの数式を利用すると、角運動量の  $z$  成分は、

$$L_z = \sum_{j=1}^n m_j r_j^2 \omega = \omega \sum_{j=1}^n m_j (x_j^2 + y_j^2), \quad (3.10)$$

が得られる。ここで、**慣性モーメント**:

$$I = \sum_{j=1}^n m_j (x_j^2 + y_j^2), \quad (3.11)$$

を定義すると、角運動量の  $z$  成分は、

$$L_z = I\omega, \quad (3.12)$$

のように簡単な数式で記述できる。慣性モーメント  $I$  は時間に依存していないため、容易に時間微分でき、

$$N_z = I\dot{\omega}, \quad (3.13)$$

が得られる。力が質量と加速度の積であることと同様に、モーメントは、慣性モーメントと角速度の時間微分の積である。つまり、慣性モーメントは角速度の変化に対する抵抗である。慣性モーメント面とが大きいほど、回転速度の加速や減速が難しいのだ。また、角運動量は慣性モーメントと角速度の積である。この量も、運動量が質量と速度の積であることと同形の数式である。慣性モーメントを用いると、運動エネルギーも、

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (3.14)$$

のように見慣れた形式の数式で記述できる。見慣れた形式の数学で記述する考えは、本書の後半で取り扱う解析力学の根本となる重要な思想である。

回転軸を任意方向にとった場合、角速度ベクトルは、回転軸に平行であり、角速度  $\omega$  を大きさとするベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  を設定すればよい。回転軸に平行なベクトルの方向は、回転方向に対して右ねじの方向に設定するのだ。そのとき、角速度、力のモーメント、運動エネルギーは、

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{N} = I\dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad K = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (3.15)$$

のように記述される。ディメンジョンは異なるが、運動量、力、エネルギーの関係式と同形の数式で記述できることが興味深い。あたかも、慣性モーメント  $I$  が質量、角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  が速度であるかのように見えるのだ。そのとき、角運動量  $\boldsymbol{L}$  が運動量、力のモーメント  $\boldsymbol{N}$  が力に相当する。

原点  $O$  を通る軸を回転する質点  $\boldsymbol{r}_j$  について、回転軸  $\boldsymbol{\omega}$  と  $\boldsymbol{r}_j$  のなす角を  $\theta$  とすると、回転半径は  $r_j \sin \theta$  である。質点が角速度  $\omega$  で回転しているとすると、その速度  $\dot{\boldsymbol{r}}_j$  は、 $r_j \omega \sin \theta$  を大きさとするベクトルである。しかも、角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  が回転方向と直交していることから、 $\dot{\boldsymbol{r}}_j$  は  $\boldsymbol{\omega}$  と直交する。同時に、 $\dot{\boldsymbol{r}}_j$  は  $\boldsymbol{r}_j$  とも直交する。したがって、速度ベクトル  $\dot{\boldsymbol{r}}_j$  は、

$$\dot{\boldsymbol{r}}_j = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_j, \quad (3.16)$$

なる関係を満足する。この関係式は、以降の数式変形でしばしば活用する有用な公式である。

### 3.3.2 慣性モーメントの平行移動

慣性モーメントは、物体固有の物理量というだけでなく、回転軸の選び方に依存する。とはいえ、回転軸の選択によって複雑に変化するのではなく、慣性モーメントは単純な規則によって変換できる。本節では、回転軸を変更したときの慣性モーメントの変換について説明する。

空間中に存在する質量  $M$  の剛体について、重心を通過する軸  $A_G$  まわりの慣性モーメントが  $I_G$  であるとする。軸  $A_G$  から距離  $d$  を隔て、 $A_G$  に平行な軸  $A$  まわりの慣性モーメント  $I$  は、

$$I = I_G + Md^2, \quad (3.17)$$

で与えられる。この関係式は、剛体の形状に依存せずに成立する。この公式を利用すれば、重心を通る軸まわりの慣性モーメントがわかっているならば、任意の軸まわりの慣性モーメントを容易に計算できる。また、重心以外の軸まわりの慣性モーメントが計算しやすいので

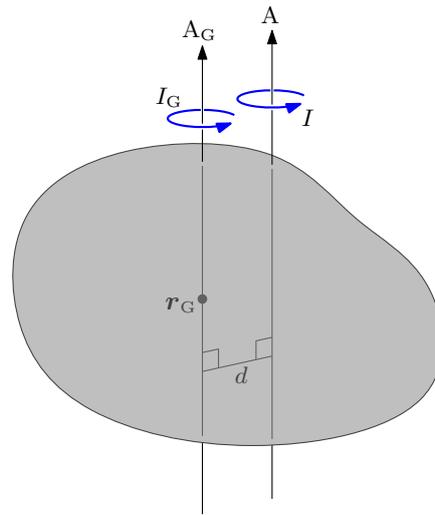


図 3.8: 慣性モーメント計算のための軸の移動

あれば、計算しやすい軸を選んで計算した後に、この公式を用いて重心を通る軸まわりの慣性モーメントに変換することもできる。そのように考えると、この公式は有用なのだ。

関係式 (3.17) を証明しよう。重心の位置をカルテシアン座標で  $\mathbf{r}_G = [x_G, y_G, z_G]$  とする。重心  $\mathbf{r}_G$  を通り、 $z$  軸に平行な軸を  $A_G$  とする。この軸まわりのモーメントが  $I_G$  である。一方、 $z$  軸を  $A$  軸とし、その軸まわりのモーメント  $I$  を計算する。なお、 $A$  軸と  $A_G$  の距離は  $d$  であるとする。剛体に含まれる質点の位置が、

$$x_k = x_G + x'_k, \quad y_k = y_G + y'_k, \quad z_k = z_G + z'_k,$$

であるとする。そのとき、慣性モーメントの定義にしたがって計算すると、

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^N m_k [(x_G + x'_k)^2 + (y_G + y'_k)^2] \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (x_G^2 + y_G^2) + 2 \sum_{k=1}^N m_k (x_G x'_k + y_G y'_k) + \sum_{k=1}^N m_k (x_k'^2 + y_k'^2) \\ &= (x_G^2 + y_G^2) \sum_{k=1}^N m_k + I_G = Md^2 + I_G, \end{aligned}$$

が得られる。第2行目の第2項(の総和)はゼロである。また、A軸と $A_G$ 軸の距離が $d$ であるので、第3行目において $x_G^2 + y_G^2 = d^2$ である。その結果、(3.17)が得られる。

慣性モーメントの平行移動に関する公式(3.17)は、運動エネルギーを考えるとわかりやすい。回転軸を $z$ 軸に選び、角速度 $\omega$ で剛体を回転させたとする。このとき、剛体に含まれる質点は、重心を通る軸 $r_G$ のまわりを運動するのだが、重心 $r_G$ も半径 $d$ で $z$ 軸のまわりを回転している。そのため、剛体の運動エネルギーは、 $A_G$ 軸まわりの回転エネルギーと、重心の回転運動による運動エネルギーの和であると考え。つまり、剛体の運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}Md^2\omega^2,$$

である。右辺の第1項が重心まわりの回転エネルギー、第2項が重心運動に伴う剛体の運動エネルギーである。ここで、 $K = I\omega^2/2$ を利用して慣性モーメント $I$ を計算すると、(3.17)が導かれる。

### 3.3.3 斜面を転がる球

重力の作用によって斜面を転がる球の運動を解いてみよう。球の半径は $a$ 、質量は $M$ とする。また、斜面の角度は $\alpha$ とする。この球は、滑らずに転がりながら斜面を下降する。解析の便宜上、斜面下方に $x$ 、斜面と垂直方向に $y$ 軸を設定する。さらに、球が転がった量として、時計回りに回転角 $\theta$ を設定する。

転がる球には、図3.9に示すような力が作用する。球の重心には重力 $Mg$ が作用する。その重力は、成分分解すると、 $Mg \sin \alpha$ で球を斜面下方に引っ張り、 $Mg \cos \alpha$ で斜面を垂直に押している。その反作用として、斜面から急に垂直抗力 $N$ が作用するため、球が斜面

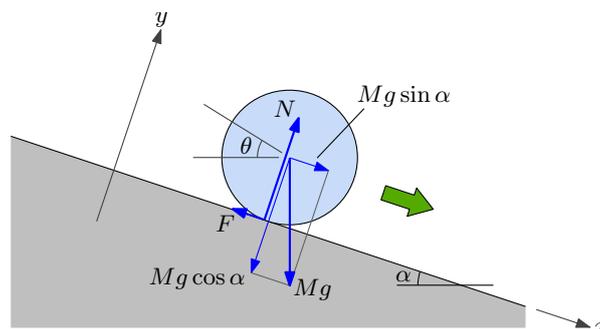


図 3.9: 斜面を転がる球に作用する力

に潜り込むことがない。つまり、 $N = Mg \sin \alpha$ である。一方、球と斜面の設置点では摩擦力 $F$ が斜面上方に向かって作用する。

運動を解析するにあたり、力の釣り合いに注目し、運動方程式を記述しよう。この問題は、斜面に沿った運動を取り扱うため、仕事をしない垂直抗力  $N$  について考える必要がない。球には、重力によって  $Mg \sin \alpha$  が斜面下方に、摩擦力  $F$  が斜面上方に作用する。一方、球の重心まわりのモーメントが球を回転させるトルクになる。重力は重心に作用するため、モーメントを発生させない。摩擦力  $F$  は重心から  $a$  だけ離れ、球の接線方向に作用するので、モーメント  $aF$  を発生させる。したがって、

$$M\ddot{x}_G = Mg \sin \alpha - F, \quad (3.18a)$$

$$I_G \ddot{\theta} = aF, \quad (3.18b)$$

なる運動方程式が得られる。この条件設定において、 $F < Mg \sin \alpha$  である。摩擦力  $F$  が大きくなれば、球を回転させるモーメントが大きくなるのだが、斜面下方に引っ張る合力が小さくなるので、回転する必要性が失われる。球に作用するモーメントと、下方に引っ張る力のつじつまが合う条件を方程式から特定するのだ。ここで、球が転がった長さだけ斜面を下る事実から、 $x_G = a\theta$  であり、これを方程式に代入するとともに、 $F$  を消去すると、

$$(Ma^2 + I_G) \ddot{\theta} = a^2 Mg \sin \alpha,$$

が得られる。球の重心まわりの慣性モーメントが、

$$I_G = \frac{2}{5} Ma^2,$$

であることに注意すると、上の微分方程式は、

$$\frac{7Ma^2}{5} \ddot{\theta} = Ma^2 g \sin \alpha,$$

のように計算される。ここで、 $x_G = a\theta$  を用いると、

$$\ddot{x}_G = \frac{5}{7} g \sin \alpha, \quad (3.19)$$

が得られる。この結果によると、回転せずに摩擦力なしで滑るのに比べ、加速度が  $5/7$  倍でゆっくりと加速することがわかる。この斜面を転がり続け、高さ  $h$  だけ (斜面に沿って  $h/\sin \alpha$ ) 下がったとすると、その時点での重心の運動エネルギーは、

$$K_G = \frac{5}{7} Mgh,$$

となるはずだ。ポテンシャルエネルギーが  $Mgh$  だけ低下するので、エネルギー保存則では  $2Mgh/7$  が不足することになる。実は、その不足分が球の回転に使われている。つまり、斜面を転がり落ちる球は、運動エネルギーの約 28.6% が回転運動のエネルギーなのだ。

### 3.4 慣性乗積と慣性主軸

一般の物体を回転させたときの角運動量の表記では、慣性モーメントがテンソルとして振る舞う。しかし、座標軸をうまく設定すれば、テンソルは対角成分以外のすべての成分をゼロにすることができ、数学記述を簡略化できる。

#### 3.4.1 慣性モーメントテンソル

内部の固定点  $O$  を中心に回転する剛体を考えよう。固定点  $O$  を原点にとり、座標  $[x, y, z]$  を設定しよう。この座標は絶対静止系の座標であるとする。一方、剛体の回転とともに回転する座標  $[\xi, \eta, \zeta]$  を設定する。この座標の原点も  $O$  であるとする。この剛体が、原点  $O$  を通る  $\omega$  軸を回転軸として (角速度  $\omega$  で) 回転する。

剛体が  $n$  個の質点  $\mathbf{r}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) で構成されると仮定する。各質点の質量を  $m_k$  とする。このとき、剛体の回転による角運動量は、

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k),$$

となる。ここで、位置ベクトル  $\mathbf{r}_k$  を、

$$\mathbf{r}_k = \xi_k \mathbf{e}_\xi + \eta_k \mathbf{e}_\eta + \zeta_k \mathbf{e}_\zeta,$$

のように、剛体とともに回転する座標で表現しよう。このとき、角運動量の  $\zeta$  成分は、

$$\begin{aligned} L_\zeta &= \sum_{k=1}^n m_k \left[ \eta_k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)_\zeta - \zeta_k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)_\eta \right] \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \left[ \eta_k (\omega_\xi \eta_k - \omega_\eta \zeta_k) - \zeta_k (\omega_\zeta \xi_k - \omega_\xi \zeta_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n m_k (\eta_k^2 + \zeta_k^2) \omega_\xi - \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \eta_k \omega_\eta - \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \zeta_k \omega_\zeta, \end{aligned}$$

のように計算できる。他の成分  $L_\xi$  と  $L_\eta$  も同様に計算でき、その結果として、角運動量  $\mathbf{L}$  は、

$$\begin{bmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\xi\xi} & -I_{\xi\eta} & -I_{\xi\zeta} \\ -I_{\eta\xi} & I_{\eta\eta} & -I_{\eta\zeta} \\ -I_{\zeta\xi} & -I_{\zeta\eta} & I_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

のように行列表現できる。この数式において、慣性モーメントはテンソルであり、**慣性モーメントテンソル**と呼ばれる。その対角成分は、

$$I_{\xi\xi} = \sum_{k=1}^n m_k (\eta_k^2 + \zeta_k^2), \quad I_{\eta\eta} = \sum_{k=1}^n m_k (\zeta_k^2 + \xi_k^2), \quad I_{\zeta\zeta} = \sum_{k=1}^n m_k (\xi_k^2 + \eta_k^2),$$

となる。また、非対角成分は、

$$I_{\xi\eta} = I_{\eta\xi} = \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \eta_k, \quad I_{\eta\zeta} = I_{\zeta\eta} = \sum_{k=1}^n m_k \eta_k \zeta_k, \quad I_{\zeta\xi} = I_{\xi\zeta} = \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \zeta_k,$$

となる。この計算結果によると、慣性モーメントテンソルは、対称テンソルである。また、非対角成分は**慣性乗積**と呼ばれる。

慣性乗積は回転軸の独立性の悪さ、または、不安定さを表す。慣性乗積がゼロでなければ、ある軸の回転が他の軸の角運動量に影響を及ぼすということだ。つまり、回転軸のぶれを引き起こす。例えば、剛体中の座標系をカルテシアン座標で表現したとき、 $\mathbf{r}_1 = [\xi_1, 0, \zeta_1]$ のみ質量  $m$  の質点が存在したとする。その条件のもとで、 $\zeta$  軸まわりに角速度  $\omega_\zeta$  で剛体を回転させたとすると、角運動量は、

$$L_\xi = -m\xi_1\zeta_1\omega_\zeta, \quad L_\eta = 0, \quad L_\zeta = -m(\xi_1^2 + \eta_1^2)\omega_\zeta,$$

となる。この状況は、原点から離れた位置に質点が1個しかないのでバランスが悪く、 $\xi$  軸まわりにぶれが起きていることを示唆する。これを避けるため、質量  $m$  の質点  $\mathbf{r}_2 = [-\xi_1, 0, \zeta_1]$  を配置する。その結果、 $\xi$  と  $\zeta$  による慣性乗積が相殺され、 $\zeta$  軸まわりの回転に対して角運動量は、

$$L_\xi = 0, \quad L_\eta = 0, \quad L_\zeta = -2m(\xi_1^2 + \eta_1^2)\omega_\zeta,$$

となり、軸が安定するわけだ。

### 3.4.2 対角化と慣性主軸

慣性モーメントテンソルは、座標系を選べば対角成分以外の成分をすべてゼロにすることができる。つまり、慣性モーメントテンソルは対角テンソルに変換できるということだ。そのような座標系では、回転運動の取り扱いが簡略化されるはずだ。例えば、ベクトル  $\boldsymbol{\xi}$  を変換行列  $T$  によって  $\boldsymbol{\xi}'$  に変換すると考えよう。つまり、

$$\boldsymbol{\xi}' = T\boldsymbol{\xi},$$

のように変換される。このベクトルは、行列表現において、

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

のような列ベクトルである。これに対して、

$$\boldsymbol{\xi}^\dagger = [ \xi_1^\dagger \quad \xi_2^\dagger \quad \xi_3^\dagger ],$$

のような行ベクトルを使うと便利である。その行ベクトルは**余ベクトル**と呼ばれる。例えば、ベクトルの長さを  $\xi$  とすると、

$$\xi^2 = \boldsymbol{\xi}^\dagger \boldsymbol{\xi},$$

のように行列の積で書くことができる。余ベクトルが  $1 \times 3$  の行列であり、一般の列ベクトルが  $3 \times 1$  の行列であるので、その積は  $1 \times 1$  の行列、すなわち、スカラになる。上に書いたように、列ベクトルが  $\boldsymbol{\xi}' = T\boldsymbol{\xi}$  のように変換されるのなら、余ベクトルは  $\boldsymbol{\xi}'^\dagger = \boldsymbol{\xi}^\dagger T^{-1}$  のように変換される。なぜなら、

$$\xi'^2 = \boldsymbol{\xi}'^\dagger \boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}^\dagger T^{-1} T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^\dagger \boldsymbol{\xi} = \xi^2,$$

のように、ベクトルの長さは座標変換によらず一定値であるべきだからだ。このような行列表記を用いると、慣性乗積によるテンソルは、

$$I = I_0 - \sum_{k=1}^n m_k \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^\dagger, \quad (3.21)$$

のようによく書くことができる。ここで、 $I_0$  は、

$$I_0 = \sum_{m=1}^n m_m \xi^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

なる対角行列である。変換された座標系  $\xi'$  において、(3.21) の右辺の第2項は、

$$\sum_{k=1}^n m_k \boldsymbol{\xi}'_k \boldsymbol{\xi}'_k{}^\dagger = \sum_{k=1}^n m_k T \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^\dagger T^{-1} = T \left( \sum_{k=1}^n m_k \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^\dagger \right) T^{-1},$$

のように変形される。右辺の括弧の中は  $3 \times 3$  の行列である。線形代数の定理によって明らかのように、ある行列  $P$  が与えられたとき、変換行列  $T$  を適当に選べば、 $TPT^{-1}$  を対角行列にできる。そのような操作は対角化と呼ばれる。しかも、上で述べたように  $\xi^2$  が座標変換に対して不変であるので、(3.21) の右辺の第1項は、座標変換をしても対角行列である。

座標系  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$  で、慣性モーメントテンソルが対角化されたとする。この座標系は直交座標とは限らない。このとき、慣性モーメントテンソルは、

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix},$$

のように対角行列となる。その座標系において、角運動量が  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$  とすると、角運動量は、

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 I_1 \\ \omega_2 I_2 \\ \omega_3 I_3 \end{bmatrix},$$

のような簡単な数式で表される。このような座標系では  $\xi_1$  軸,  $\xi_2$  軸,  $\xi_3$  軸が回転に関して独立しているということだ。この性質によって, どのような形状でも安定した回転軸が三つ選べることになる。そのような安定した軸は**主軸**と呼ばれる。

### 3.5 オイラーの運動方程式

主軸  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  が特定できたものとして, 回転に関する運動方程式を導出しよう。各主軸の方向における単位ベクトルを, それぞれ,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  とする。そのとき, 角運動量をそれらの1次結合:

$$\mathbf{L} = L_1\mathbf{e}_1 + L_2\mathbf{e}_2 + L_3\mathbf{e}_3,$$

とする。この角運動量を時間微分すると,

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{L}_1\mathbf{e}_1 + \dot{L}_2\mathbf{e}_2 + \dot{L}_3\mathbf{e}_3 + L_1\dot{\mathbf{e}}_1 + L_2\dot{\mathbf{e}}_2 + L_3\dot{\mathbf{e}}_3, \quad (3.22)$$

が得られる。計算にあたって, そもそも座標系  $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$  が回転しているので, 単位ベクトルも時間微分がゼロでないことに注意が必要である。単位ベクトルが, 回転軸  $\boldsymbol{\omega}$  のまわりを回転しているのだから, 単位ベクトルの時間微分は,

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3,$$

と書けるはずだ。一方, 角運動量ベクトルの成分  $L_1, L_2, L_3$  は,

$$L_1 = I_1\omega_1, \quad L_2 = I_2\omega_2, \quad L_3 = I_3\omega_3,$$

だから, その時間微分は単純に,

$$\dot{L}_1 = I_1\dot{\omega}_1, \quad \dot{L}_2 = I_2\dot{\omega}_2, \quad \dot{L}_3 = I_3\dot{\omega}_3,$$

となる。これらの数式を (3.22) に代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= I_1\dot{\omega}_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\mathbf{e}_3 + I_1\omega_1(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) + I_2\omega_2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2) + I_3\omega_3(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \\ &= I_1\dot{\omega}_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}, \end{aligned}$$

が得られる。第2行目への数式変形では,

$$\mathbf{L} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3,$$

であることに注意した。ここで,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$  の第1成分が,

$$\omega_2L_3 - \omega_3L_2 = \omega_2\omega_3I_3 - \omega_3\omega_2I_2 = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3,$$

であることに注意しよう。同様の手順で、第2成分や第3成分も計算でき、その結果、

$$N_1 = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \quad (3.23a)$$

$$N_2 = I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \quad (3.23b)$$

$$N_3 = I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2, \quad (3.23c)$$

が得られる。これらの方程式は、**オイラーの運動方程式**と呼ばれる。

### 3.5.1 対称ゴマの運動

対称ゴマとはある特定の回転軸に対して軸対称になっている形状の回転体である。例えば、 $\xi_3$  軸を回転軸とすると、剛体の形状が  $\xi_1 \xi_2$  平面で円形であれば、確実に対称ゴマである。楕円であれば対称ゴマではない。他にも、 $\xi_3$  軸が重心を通るように描かれた正多角形など、対称ゴマは無数に存在する。

対称ゴマの条件を考えてみよう。慣性乗積  $I_{\xi\eta}$  を考えたとき、その定義:  $I_{\xi\eta} = \sum \xi_k \eta_k$  に基づき、ある質点  $\mathbf{r}_k = [\xi_k, \eta_k]$  に対して、別の質点  $\mathbf{r}_l = [\xi_k, -\eta_k]$  が存在する。ただし、すべての質点が同一の質量  $m$  をもつと仮定した。その場合、慣性乗積が相殺されて  $I_{\xi\eta} = 0$  となる。他の慣性乗積についても同様の考察をすると、慣性モーメントテンソルが対角行列であることがわかる。

対称軸が  $\xi_3$  である場合、 $\xi_1$  軸と  $\xi_2$  軸は区別がつかない。そのように考えると、 $I_1 = I_2$  でなければならない。その条件のもとでオイラーの運動方程式を書くと、

$$N_1 = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3, \quad (3.24a)$$

$$N_2 = I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \quad (3.24b)$$

$$N_3 = I_3 \dot{\omega}_3, \quad (3.24c)$$

が得られる。外力によるモーメントが作用しなければ、 $\mathbf{N} = 0$  なので、第3式は  $\dot{\omega}_3 = 0$  のように書き換えられる。すなわち、 $\omega_3$  は定数である。その定数を  $\omega_3 = \omega_0$  と書くことにしよう。そのとき、オイラーの運動方程式の第1式と第2式は、

$$\dot{\omega}_1 - \lambda \omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 + \lambda \omega_1 = 0,$$

のように書き換えられる。ここで、

$$\lambda = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0,$$

とおいた。得られた微分方程式から  $\omega_2$  を消去すると、

$$\ddot{\omega}_1 + \lambda^2 \omega_1 = 0,$$

が得られる。この微分方程式は容易に解くことができ、

$$\omega_1 = A \cos(\lambda t + \alpha), \quad \omega_2 = -A \sin(\lambda t + \alpha), \quad (3.25)$$

となるのだ。ここで、 $A$  と  $\alpha$  は積分定数である。得られた結果によると、対称ゴマの運動は、対称軸以外の軸成分がゼロでない場合、図 3.10 に示すように対称軸  $\xi_3$  を周回するように角運動ベクトルが変化する。このような回転軸の変動は**章動**と呼ばれる。数式 (3.25)

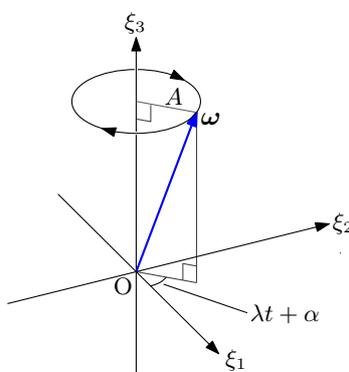


図 3.10: 対称ゴマの章動

によると、角運動量ベクトルの変化は、 $I_3 > I_1$  であれば  $\lambda > 0$  となるので、 $\xi_3$  の正から原点を見ると時間経過とともに時計回りに回転する。章動は、歳差運動に類似しているが、発生原理が歳差運動とは異なる。歳差運動は後に議論するように、外力に起因する運動であるが、章動は慣性モーメントの成分に起因するのだ。

章動の現象は、地球の自転運動でも観測されている。地球の対称軸は北極点と南極点を結ぶ軸である。地球の慣性モーメントは、 $(I_1 - I_3)/I_1 \simeq 1/298$  程度である。自転の角速度  $\omega_0$  は1日の長さの逆数である。よって、自転軸の揺らぎの角速度  $\lambda$  は  $\omega_0/300$  程度の値となり、自転軸が300日程度で揺らぐことが予想される。実際の揺らぎの周期は434日程度である。予想と異なるのは、地球が完全な剛体でなく、マントル等が滞留する構造に起因する。章動に起因する自転軸の動揺はチャンドラスカー振動と呼ばれ、北極点や南極点の付近での自転軸のずれは10メートル程度である<sup>1</sup>。

<sup>1</sup> Alfred Leick, "GPS Satellite Surveying," John Wiley & Sons, Inc., 3rd Ed., ISBN 0-471-05930-7 pp.13-15, 2004.

### 3.5.2 回転による運動エネルギー

慣性主軸を座標軸に設定すると、任意の回転において単純な数式で運動エネルギーが記述できる。運動エネルギーを導出するにあたり、剛体に含まれる各質点が  $m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2/2$  の運動エネルギーをもつことに注意しよう。しかも、これまで扱ったように、質点の速度は  $\dot{\mathbf{r}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k$  なる関係を満たす。この前提のもとで、剛体の運動エネルギーを計算すると、

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k [(\omega_2 \xi_3^{(k)} - \omega_3 \xi_2^{(k)})^2 + (\omega_3 \xi_1^{(k)} - \omega_1 \xi_3^{(k)})^2 + (\omega_1 \xi_2^{(k)} - \omega_2 \xi_1^{(k)})^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k [\omega_2^2 (\xi_3^{(k)})^2 - \omega_2 \omega_3 \xi_2^{(k)} \xi_3^{(k)} + \omega_3^2 (\xi_2^{(k)})^2 \\ &\quad + \omega_3^2 (\xi_1^{(k)})^2 - \omega_1 \omega_3 \xi_1^{(k)} \xi_3^{(k)} + \omega_1^2 (\xi_3^{(k)})^2 \\ &\quad + \omega_1^2 (\xi_2^{(k)})^2 - \omega_1 \omega_2 \xi_1^{(k)} \xi_2^{(k)} + \omega_2^2 (\xi_1^{(k)})^2] \\ &= \frac{1}{2} [\hat{I}_{11} \omega_1^2 + \hat{I}_{22} \omega_2^2 + \hat{I}_{33} \omega_3^2 - 2(\hat{I}_{12} \omega_1 \omega_2 + \hat{I}_{23} \omega_2 \omega_3 + \hat{I}_{13} \omega_1 \omega_3)], \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\hat{I}_{kl}$  は慣性モーメントテンソルの成分である。座標軸が慣性主軸になるように選ばれているならば、慣性乗積がゼロになるはずなので、運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2), \quad (3.26)$$

のように簡単な数式で表現できる。また、 $I_k$  は慣性モーメントテンソルの対角成分、すなわち、 $I_k = \hat{I}_{kk}$  である。

## 3.6 歳差運動

コマは外力の影響で回転軸を変化させる、いわゆる、歳差運動と呼ばれる運動をする。地上で回すコマが歳差運動をするのは、地球の重力が要因だ。地球でさえ歳差運動をする。地球は公転面から約  $23.4^\circ$  自転軸が傾いている。地球の自転軸は太陽の重力のため、約 25,800 年周期で自転軸の向きが変化している。本節では歳差運動を解析する手法を取り扱う。

### 3.6.1 オイラー角

歳差運動するコマは、回転軸が鉛直方向から傾き回転する。そのような運動をする剛体を解析するには、回転軸を明らかにしたうえで、剛体自体がどれくらい回転したか表現する

ことが重要である。その表現のため、**オイラー角**と呼ばれる三つの角度  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  を用いる。

オイラー角の表現方法はいくつも存在するが、図 3.11 を用いて一例を示そう。初期状態として、3次元のカルテシアン座標  $[x, y, z]$  を考える。その座標から、次の手順によって、剛体における座標系  $[\xi, \eta, \zeta]$  を得る。

1. 座標系を  $z$  軸まわりに角度  $\varphi$  だけ回転させる。回転後の座標系を  $[x', y', z']$  とする。このとき、 $z'$  軸は  $z$  軸と一致している。
2. 座標系を  $y'$  軸まわりに角度  $\theta$  だけ回転させる。回転後の座標系を  $[x'', y'', z'']$  とする。この回転によって、図中の円板  $D_1$  は  $D_2$  の位置に回転する。このとき、 $y''$  軸は  $y'$  軸と一致する。また、 $[x, y, z]$  座標系から見ると、方位角  $\varphi$ , 天頂角  $\theta$  の方向に新たな  $z''$  軸が向いていることになる。
3. 座標系を  $z''$  軸まわりに  $\psi$  だけ回転させる。回転後の座標系が最終的な座標系  $[\xi, \eta, \zeta]$  である。なお、図では座標軸が込み合うため、 $\eta$  軸は省略した。

この手順の中で、手順1と手順2によって剛体の回転軸が定まる。手順3は、定まった回転軸における回転によって、局所的な座標軸  $[\xi, \eta, \zeta]$  の方向を決めているわけだ。剛体の運動を記述するには、 $[\xi, \eta, \zeta]$  でなく、回転軸の方向と、回転軸まわりの回転角を表す  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  を用いる。

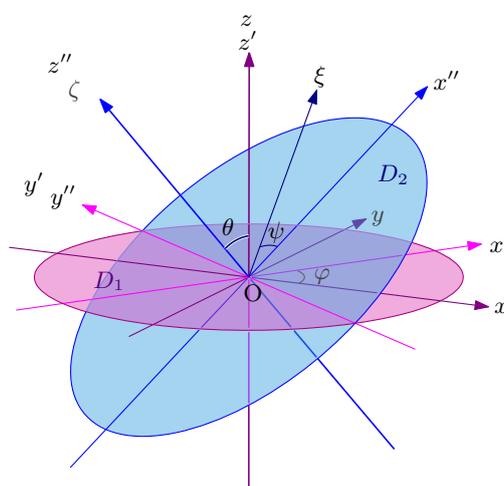


図 3.11: オイラー角の説明図

剛体の運動の取り扱いには、回転軸の方向  $\theta$ ,  $\varphi$  と、回転軸まわりの回転角  $\psi$  の変化を解析するのだ。そのためには、慣性主軸まわりの角速度  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  を  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$  の寄与で構成することが重要である。それらの角運動量の構成は、次のように段階的に構成するとわかりやすい。なお、説明を簡潔に書くため、 $\Delta\omega_{x''}$  のような記号で角運動量に対する寄与を表記する。この  $\Delta\omega_{x''}$  は、 $x''$  軸まわりの角運動量の増加分を表すことにする。

$\dot{\psi}$  による寄与 この回転角の変化は、 $z''$  軸 (=  $\zeta$  軸) まわりの回転であるので、その寄与は明らかである。つまり、 $\dot{\psi}$  は角運動量の変化  $\Delta\omega_\zeta = \dot{\psi}$  を発生させる。一方、 $\omega_\xi$  と  $\omega_\eta$  の増減にはまったく寄与しない。

$\dot{\theta}$  による寄与 この回転角の変化は、 $y'$  軸 (=  $y''$  軸) まわりの回転であるので、角運動量の変化  $\Delta\omega_{y''} = \dot{\theta}$  を発生させる。この回転によって得られた座標系  $[x'', y'', z'']$  は、引き続き、 $z''$  軸 (=  $\zeta$  軸) のまわりに角度  $\psi$  だけ回転して、座標系  $[\xi, \eta, \zeta]$  に変換される。このとき、 $\zeta$  軸は  $y''$  軸と直交するので、 $\Delta\omega_{y''}$  は  $\omega_\zeta$  には寄与しない。結果として、 $\Delta\omega_{y''}$  は、 $\Delta\omega_\xi = -\Delta\omega_{y''} \sin \psi$  と、 $\Delta\omega_\eta = \Delta\omega_{y''} \cos \psi$  に分配される。

$\dot{\varphi}$  による寄与 この回転角の変化は、 $z$  軸 (=  $z'$  軸) まわりの変化であるので、角運動量の変化  $\Delta\omega_{z'} = \dot{\varphi}$  を発生させる。その回転によって得られた座標系  $[x', y', z']$  は、引き続き、 $y'$  軸 (=  $y''$  軸) まわりに角度  $\theta$  だけ回転し、 $[x'', y'', z'']$  に変換される。新たな座標系では、 $\Delta\omega_{z'}$  は  $\omega_{x''} = -\dot{\varphi} \sin \theta$  と、 $\omega_{z''} = \dot{\varphi} \cos \theta$  に成分分解される。引き続き、座標系  $[x'', y'', z'']$  は  $z''$  軸 (=  $\zeta$  軸) まわりに角度  $\psi$  だけ回転し、 $[\xi, \eta, \zeta]$  に変換される。その結果、 $\Delta\omega_{z''}$  は  $\Delta\omega_\zeta = \Delta\omega_{z''}$  のように引き継がれるが、 $\Delta\omega_{x''}$  は、 $\omega_\xi = \Delta\omega_{x''} \cos \psi$  と  $\omega_\eta = \Delta\omega_{x''} \sin \psi$  に分配される。

上で書いた説明は、オイラー角の時間微分が図 3.12 に示すように角運動量の成分として分配されることを述べている。ここで、座標系  $[\xi, \eta, \zeta]$  が慣性主軸になるよう座標軸が設

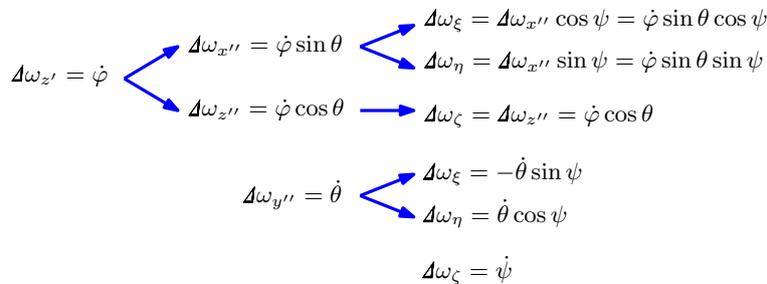


図 3.12: オイラー角の変化による角運動量への寄与

定されていると仮定し、 $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  を、それぞれ、 $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  と書くことにしよう。図 3.12 に描かれた寄与に注意しながら角運動量を特定すると、

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (3.27a)$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (3.27b)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \quad (3.27c)$$

が得られる。剛体による任意の回転体は、この方程式を解くことによって解析できるのだ。

### 3.6.2 対称ゴマの運動

本項では対称ゴマの運動を解析する。対称軸を $\zeta$ 軸とし、 $I_1 = I_2$ の条件を設定する。また、対称軸( $\zeta$ 軸)まわりの慣性モーメントを $I_3$ とする。ゴマの質量を $M$ としておく。このとき、対称ゴマの運動方程式を導出しよう。

ゴマの脚が原点 $O$ で接地しているとし、原点からゴマの重心までの距離が $l$ であるとする。前項で議論したオイラー角 $\varphi, \theta, \psi$ は、それぞれ、対称軸の傾斜方向、対称軸の傾斜角、ゴマの回転角に対応する。対称軸が鉛直方向から傾いている場合、すなわち、 $\theta \neq 0$ のとき、ゴマは重力で倒れないように歳差運動している。歳差運動は $\dot{\varphi} \neq 0$ に対応する。

ゴマに作用する力のモーメントは、図3.13に示すように三つの要因で発生する。それらの要因は、重力、歳差運動による遠心力、歳差運動によるゴマ自身の角運動量の変化だ。そ

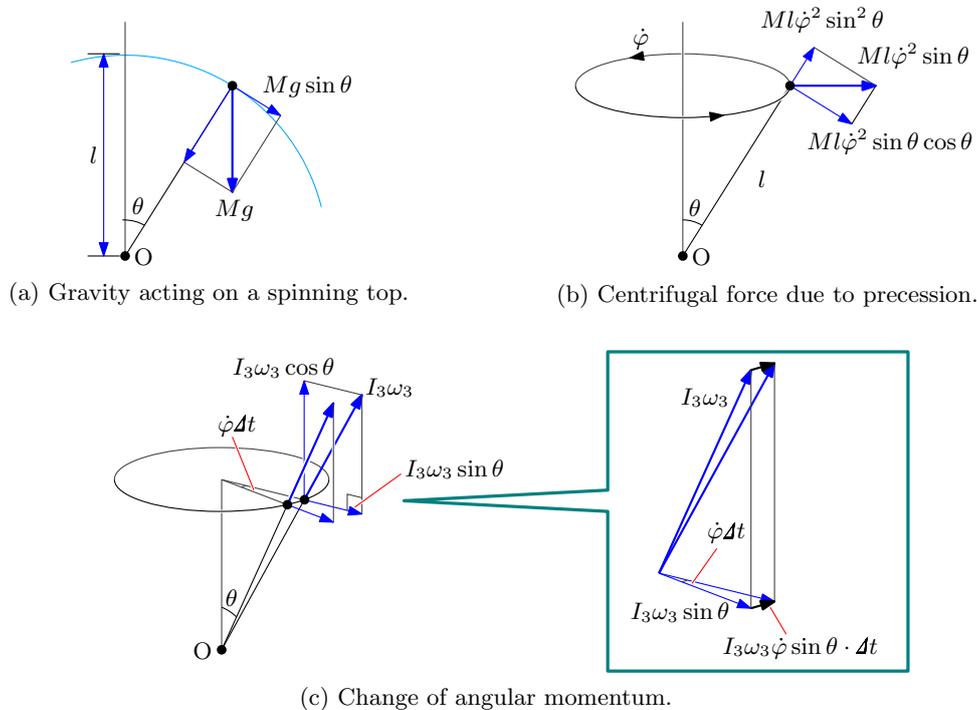


図 3.13: 対称ゴマに作用する力のモーメントの要因

これらの要因は、ゴマが重力を受けて傾くことを発端にして、ゴマ自身が自己制御をかけて発生する。歳差運動のメカニズムは本項では触れず、歳差運動しているゴマに作用する力のモーメントを考察する。それら三つの要因に起因する力のモーメントの合計がゴマに作用している。

**重力** 図3.13 (a)に示すように、ゴマの重心には、鉛直下方に重力 $Mg$ が作用する。そのとき、原点から半径 $l$ の円の接線方向の成分がゴマを倒す力なので、ゴマには力のモー

メント  $N_g = Mgl \sin \theta$  が作用する。この力のモーメントは、 $\theta$  を増加する方向に作用している。

**歳差運動による遠心力** 歳差運動は対称軸の方向を変化させる運動だ。上に書いたようにコマは  $\dot{\varphi}$  の角速度で対称軸の向きを変える。この歳差運動によって、コマの重心は半径  $l \sin \theta$  の円を描く。円運動をするために、コマの重心は歳差運動の内側に向かう水平方向に  $l\dot{\varphi}^2 \sin \theta$  の加速度で運動している。そのとき、回転するコマの重心の立場では、図 3.13 (b) に示すように、遠心力として、 $l\dot{\varphi}^2 \sin \theta$  なる加速度が外側にはたらいっている。これが、コマをさらに倒そうとするわけだ。重力と同様に、鉛直面に描いた半径  $l$  の円の接線方向の成分がコマを倒す加速度となる。すなわち、 $l\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$  がその成分だ。支点から長さ  $l$  の位置でこの加速度となるので、傾き角  $\theta$  の 2 階微分への寄与は  $\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$  となる。したがって、遠心力に起因する力のモーメントは  $N_c = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$  となる。この成分も  $\theta$  を増加させる方向に作用する。

**歳差運動による角運動量の変化** コマが対称軸のまわりを  $\omega_3$  の角速度で回転している場合、図 3.13 (c) に示すように、その軸方向に  $I_3 \omega_3$  の角運動量をもつ。対称軸が鉛直方向から  $\theta$  だけ傾いているので、角運動量は水平方向に  $I_3 \omega_3 \sin \theta$ 、鉛直方向に  $I_3 \omega_3 \cos \theta$  の成分に分解できる。歳差運動によって、微小時間  $\Delta t$  の間に対称軸は水平方向に  $\dot{\varphi} \Delta t$  だけ変化する。対称軸の変化によって、角運動量の鉛直方向の成分は変化を受けないが、水平方向の成分が変化する。図 3.13 (c) の吹き出しの中に描くように、水平方向の成分の変化は、大きさが  $I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta \cdot \Delta t$  で、その方向は、歳差運動の進行方向だ。つまり、コマの重心は歳差運動によって、 $N_a = I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta$  なる力のモーメントを受けている。コマの立場では、慣性力として、その逆方向に見かけの力のモーメントを受ける。その力のモーメントは、 $\theta$  を減少する方向に、すなわち、コマを起き上がらせる方向に作用する。

上で記述した考察によって、回転するコマに作用する力のモーメントが明らかになった。上で用いた記号を使うと、運動方程式は  $I_1 \ddot{\theta} = N_g + N_c - N_a$  となる。これらの記号の正体を展開すると、運動方程式:

$$I_1 \ddot{\theta} = Mgl \sin \theta + I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta, \quad (3.28)$$

が得られる。この方程式を得るために、上のような考察が必要となることを考えると、コマの回転は複雑に感じるかもしれない。後の章で解析力学の手法を用いて、(3.28) がもっと簡単に導出できることを示す。

微分方程式 (3.28) の最も簡単な解は  $\theta = 0$  である。この解は、対称軸が鉛直方向に直立して回転する状況に相当する。オイラー角の定義上、このケースでは、 $\xi$  軸が  $xy$  平面上で  $x$  軸を角度  $\varphi + \psi$  だけ回転した位置に存在する。一方、(3.27c) に  $\theta = 0$  を代入すると、

$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}$  が得られる。これらの事実は、コマの回転角が  $\varphi + \psi$  であり、一定の角運動量  $\omega_3$  がその回転角の時間微分であることを意味している。すなわち、この解が意味するのは、対称軸を鉛直方向に直立させ、対称軸まわりに一定の角速度で回転を続けるコマである。そのようなコマは、**眠りコマ**と呼ばれる。

### 3.6.3 歳差運動

重力場で回転するコマは、対称軸が鉛直方向からずれていると、重力の影響で中心軸を鉛直軸まわりに揺らしながら回転する。そのような運動は歳差運動と呼ばれる。歳差運動は (3.28) の解として導出される。

微分方程式 (3.28) を直接的に解くのは難しいので、エネルギー保存則を利用して現象を解析しよう。つまり、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和  $E \equiv K + U$  が一定であることを利用するのだ。エネルギーの和  $E$  は、

$$E = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta, \quad (3.29)$$

となる。この方程式を評価するにあたり、系全体の角運動量保存則を考えるのがよい。系全体の角運動量の鉛直成分  $L_z$  は、

$$L_z = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta,$$

である。第1項は歳差運動におけるコマの重心の角運動量であり、第2項は対称軸まわりを回転するコマの角運動量である。それらの和として与えられる  $L_z$  は定数だ。その事実を利用し、

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - I_3 \omega_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta},$$

に注意しよう。既に述べたように、 $\omega_3$  も定数である。そこで、

$$V(\theta) = \frac{I_3}{2} \omega_3^2 + Mgl \cos \theta + \frac{(L_z - I_3 \omega_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}, \quad (3.30)$$

なる有効ポテンシャルを導入すると、コマの全エネルギーは、

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + V(\theta), \quad (3.31)$$

のように、対称軸の傾き  $\theta$  の関数で記述できるのだ。数式 (3.30) で定義される有効ポテンシャル  $V(\theta)$  は、図 3.14 に示す曲線を描く。このポテンシャルは、 $\theta \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow \pi$  の極限で、 $V(\theta) \rightarrow \infty$  のように振る舞い、区間  $(0, \pi)$  に含まれる一か所 (例えば  $\theta_0$ ) で極小値をとる。その有効ポテンシャルの極小値を  $E_0$  とすると、(3.31) で表される全エネルギーが  $E > E_0$

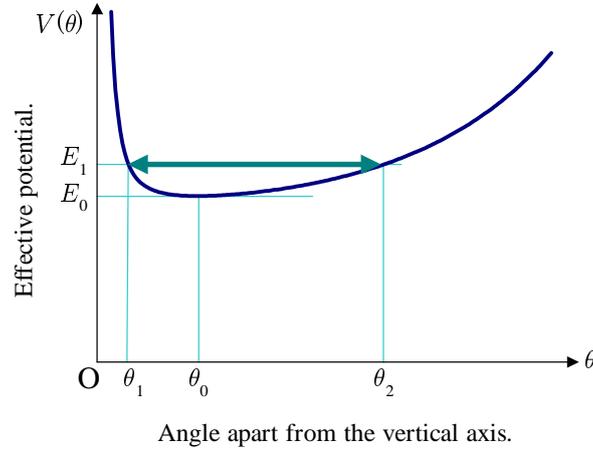


図 3.14: 対称コマの有効ポテンシャル

であれば、コマはポテンシャルの谷間を往復運動する。例えば、全エネルギーが図 3.14 に示す  $E_1$  であると、コマの回転軸は  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の間で変動する。そのような運動は章動と呼ばれる。全エネルギーが  $E_0$  となれば、コマの回転軸は  $\theta_0$  で安定する。この場合、コマの回転軸は、鉛直方向と角度  $\theta_0$  を保って周回する、いわゆる、歳差運動をする。

コマが歳差運動をする状況に限定して解析しよう。回転軸の傾き  $\theta$  は一定値であるので、 $\ddot{\theta} = 0$  である。このとき、微分方程式 (3.28) は、

$$I_1 \dot{\varphi}^2 \cos \theta_0 - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} + Mgl = 0,$$

となる。歳差運動の条件が成立することから  $\theta = \theta_0$  とした。この微分方程式は、 $\dot{\varphi}$  に関する 2 次方程式である。ここで、

$$I_3^2 \omega_3^2 - 4Mgl I_1 \cos \theta \geq 0, \quad (3.32)$$

が成立するならば、2 次方程式には実数解が存在する。その場合、 $\varphi$  は一定値をとるということだ。その一定値を  $\Omega$  とおけば、

$$I_1 \Omega^2 \cos \theta_0 - I_3 \omega_3 \Omega + Mgl = 0, \quad (3.33)$$

が成立するわけだ。コマは回転軸を角速度  $\Omega$  で  $z$  軸まわりを周回しながら歳差運動するのだ。特にコマが高速回転する条件では、 $\omega_3$  が十分に大きく、2 次方程式 (3.33) の 2 次の項が無視できる。その場合、

$$\Omega \simeq \frac{Mgl}{I_3 \omega_3}, \quad (3.34)$$

の角速度でコマの回転軸が回転することになる。この数式によると、コマの角速度が大きくなるほど、 $\Omega$  が小さい、すなわち、歳差運動での回転軸の振れが遅くなる。

一方、 $\omega$  が小さくなると、2 次方程式 (3.33) が条件 (3.32) を満たすことができず、実数解をもたない。その場合、 $\theta$  が大きくなれば解をもつことができる。この事実は、接地点との

摩擦によってコマの回転速度  $\omega_3$  が低下すると、傾きが大きくなり、コマはいずれ地面に倒れこむことになる。

## 3.7 コマが倒れない理由

回転をするコマは重力の作用を受けて回転軸を傾斜させるが、歳差運動をすることによって倒れない。その現象は謎めいて見えるかもしれない。回転するコマが重力に逆らって見えることから、回転運動と反重力を結びつけたくなるかもしれない。確かに、宮崎駿監督の「となりのトトロ」ではコマに乗って浮遊するシーンがあった。ファンタジーとは異なり、現実としてコマの運動が反重力につながらないことを本節で説明する。コマを使って反重力装置を発明しようとしても無駄なのだ。

### 3.7.1 角運動量保存の観点

コマの運動は角運動量保存によって簡潔に説明できる。一般の物理学のテキスト<sup>2</sup>は、角運動量によってコマの歳差運動を説明している。第3.6.2項でコマに作用する力のモーメントの要因として取り上げた角運動量の変化が、角運動量保存則に基づく変化だという説明だ。角運動量保存則は、重力の作用によってコマが歳差運動をすることを簡潔に説明してくれる。

既に導入したように、複数の質点で構成される剛体の角運動量は  $\mathbf{L} = \sum m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k$  によって与えられる。回転する対称コマの場合、図3.15に描くように、角運動量  $\mathbf{L}$  は回転軸方向を向いたベクトルである。コマは、脚が床に接地し、その接地点を固定点として回転している。回転軸が鉛直方向から傾いていると、重力の作用を受けて倒れようとする。接地点からコマの重心までの距離が  $l$  であり、コマの質量が  $M$  であるとする。コマの回転軸が鉛直方向から角度  $\theta$  だけずれている場合、重力  $Mg$  は、接地点に向かう成分  $Mg \cos \theta$  と、軸を倒そうとする成分  $Mg \sin \theta$  に分離できる。そのうち、接地点に向かう成分は、コマの構造の中で反作用成分との間で釣り合っているはずだ。そのため、軸を倒そうとする成分がコマの運動に影響を与える。その力は、接地点  $O$  を中心とする大きさ  $Mgl \sin \theta$  のモーメントを形成する。力  $\mathbf{F}$  に起因するモーメントが  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  となるので、この例においては、図3.15に描くように、モーメント  $\mathbf{N}$  は角運動量  $\mathbf{L}$  と直交する。このモーメントは角運動量の向きを変化させるのだ。

角運動量とモーメントの関係は、速度と加速度の関係と同一である。速度と直交する力は、速さを一定に保ちながら運動方向を変化させる。同様に、角運動量と直交するモーメン

<sup>2</sup>例えば、阿部龍蔵，“力学・解析力学，”岩波書店，第4版，ISBN 4-00-007921-2，p. 183，1999.

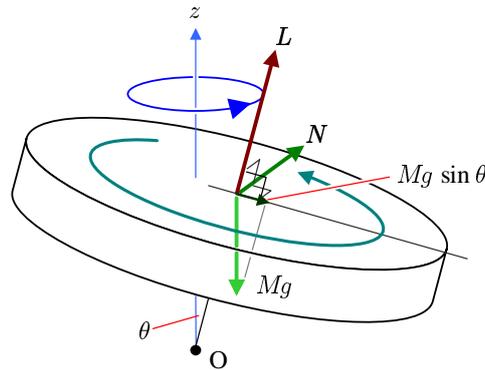


図 3.15: 歳差運動するコマ

トは、角運動量の大きさを一定に保ちながらベクトルの向きを変える。言いかえると、角運動量の大きさが一定のもとで、回転軸が変化するのである。その様子は、微小時間  $\Delta t$  における角運動量の変化として、図 3.16 に描いた。モーメント  $\mathbf{N}$  が角運動量  $\mathbf{L}$  と直交するので、 $\mathbf{L}$  の大きさは不変である。微小時間に角運動量が増える量は、図に示すように  $Mgl \sin \theta \Delta t$

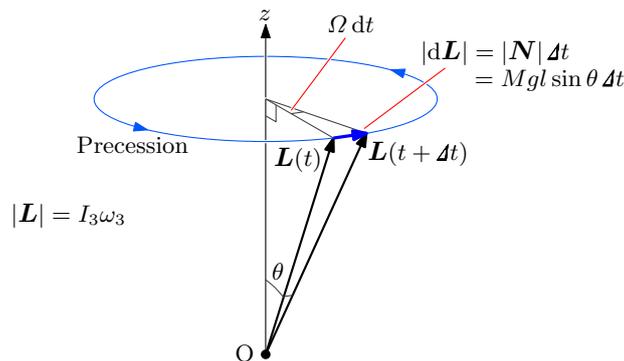


図 3.16: 歳差運動による角運動量の変化

である。そのとき、角運動量は、 $Mgl \sin \theta \Delta t / I_3 \omega_3$  だけベクトルの向きが変わる。この角運動量の変化による歳差運動は、角運動量ベクトルの先端の動きを回転面における角度で評価する。微小時間  $\Delta t$  に歳差運動で変化した方位を  $\Omega \Delta t$  としよう。そのとき、

$$\Omega = \frac{Mgl}{I_3 \omega_3},$$

となる。この  $\Omega$  が歳差運動による回転軸の変化率を表している。この値は、前節で算出した、高速回転しているコマにおける歳差運動の速さと一致する。

本項で説明したように、角運動量を用いると、コマの重心に作用する重力が回転軸を変化させるためのモーメントになることを簡潔に説明している。そのため、回転するコマは歳差運動しながら、回転を持続できるのだ。しかし、筆者は次のような理由で、角運動量の説明だけでは不十分であると考えている。

1. 角運動量やモーメントは数学記述の道具であり、そのベクトルの方向が実際の力の方向と一致していないので、直接的に物体に作用する力の関係がわかりづらい。
2. 歳差していない状態から歳差運動に入る過渡的な状態がわかりづらい。

これらの点について現象を解説するため、次項ではコマに作用する力を直接的に解析する。

### 3.7.2 慣性力による観点

回転運動するコマを構成する要素(質点)は、回転運動を強いられているので、常に遠心力などの慣性力が作用している。その慣性力が、重力で倒れることなく回転を維持するためのからくりだと考え、本項ではコマの運動について解説する。

歳差運動せずに直立状態で回転するコマはわかりやすい。図のように、四方からコマを外向きに引っ張る力が釣り合った状態でコマは回転しているのだ。コマの回転軸が傾くとどうなるだろうか? 回転軸がずれるため、コマを構成する質点は円運動をしなくなる。運動形態が円運動でなくなるので、質点に作用する遠心力などの慣性力は時間経過とともに変化する。その変化を調べてみよう。

任意の運動は複雑なので、安定的に歳差運動をする形態に限定して説明しよう。コマを構成する微小部分に着目し、図 3.17 に示すように、微小部分には慣性力が作用していると考えられる。この図は、コマの外周上の点 P に作用する力を図示している。慣性力を評価するには、特定の点 P の位置を時間  $t$  の関数として数式で表現し、時間についての 2 階微分を計算する。その導関数に質量を乗じて符号反転すれば質点 P に作用する慣性力  $\mathbf{F}$  が得

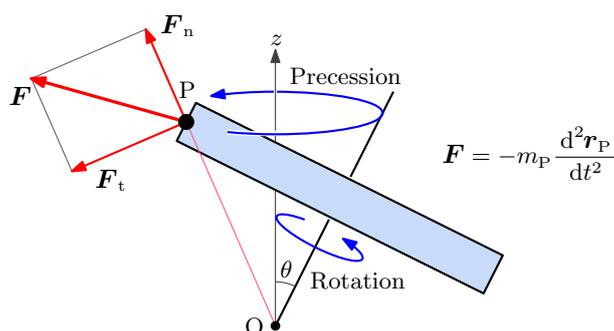
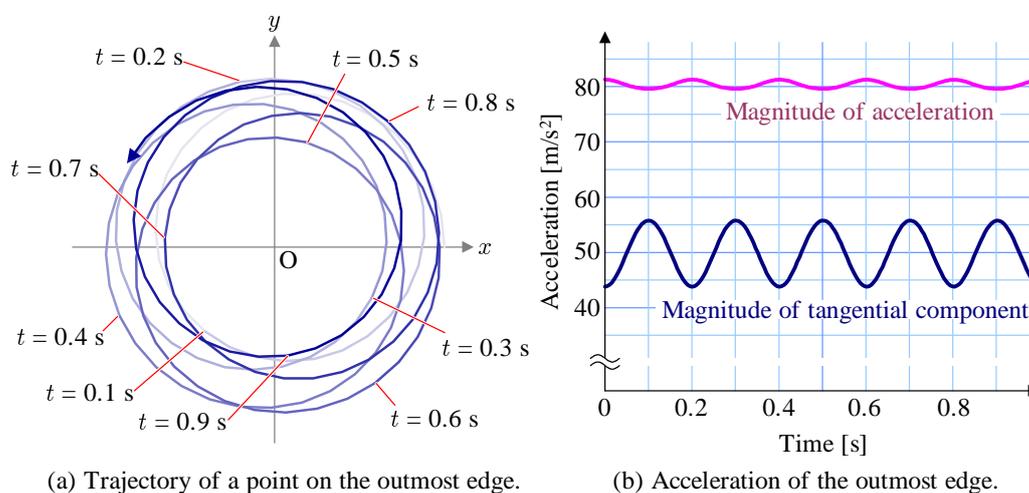


図 3.17: 回転するコマの構成要素に作用する慣性力

られるわけだ。次のステップとして、 $\mathbf{F}$  を法線成分  $\mathbf{F}_n$  と接線成分  $\mathbf{F}_t$  に分解することが重要である。コマがいかなる力に対して変形しないと仮定するならば、コマの運動は  $\mathbf{F}_n$  による影響を受けない。コマは自らの構造に基づき、 $\mathbf{F}_n$  を相殺するだけの力を供給できるからだ。一方、 $\mathbf{F}_t$  は原点  $O$  を中心に、コマを回転させようとする。つまり、質点に作用す

る慣性力のうち接線成分  $F_t$  を特定することが重要である。図を見てもわかるように、歳差運動の内側に位置する外周は、加速度が上向きに作用するため、回転軸を引き戻そうとする。逆に、歳差運動の外側に位置する外周は、回転軸をさらに大きく倒そうとする。コマの動きは、それらの大小関係によって決まるわけだ。

一例として、半径 5 cm の円板で構成されるコマを考えよう。コマの支点から重心までの距離が 4 cm となるように、円板に回転軸が取り付けられているとする。計算するにあたり、コマは  $\omega_3 = 40 \text{ rad/s}$  で回転し、 $\Omega = 9 \text{ rad/s}$  で歳差運動する状態を仮定した。計算結果として、図 3.18 (a) にコマの外周の軌跡を、同図 (b) に外周の加速度をプロットする。コマの外周は、ほぼ 0.1 秒ごとに、歳差運動の外側と内側を切り替えながら運動している。外周にかかる加速度が  $80 \text{ m/s}^2$  にも達するのは驚く事実だ。計算対象のコマの大きさも



コマ支点と重心の距離  $l = 4 \text{ cm}$ , コマの半径  $r = 5 \text{ cm}$ ,  
 回転速度  $\omega_3 = 40 \text{ rad/s}$ , 歳差速度  $\Omega = 9 \text{ rad/s}$ .

図 3.18: 回転するコマの外周の軌跡と加速度の変化

回転速度も、遊びの中で簡単に実現できる数値であるにも関わらず、そのコマの外周には重力加速度の 8 倍もの加速度が生じているのだ。図 3.18 の (a) と (b) を比べると、外周が歳差運動の外側に位置するとき加速度が大きくなっていることがわかる。しかし、加速度の接線成分は歳差運動の内側に位置するときの方が、外側に位置するより  $10 \text{ m/s}^2$  以上も大きい。上で述べたように、外周に作用する慣性力は、歳差運動の外側で回転軸を倒す方向に、内側で引き起こす方向に働くので、コマ全体としては回転軸を引き起こす方向に力が働くことが予想できる。コマのすべての構成要素に作用する力の総和が、重力に負けなければ、コマは倒れないのだ。

**コリオリの力による現象説明** 上で一例をあげて説明したように、コマが倒れずに回転を継続できるのはコマの各構成要素に作用する慣性力に起因する。図 3.18 (a) に示したよう

に、静止系から見るとコマに含まれる特定の点は円運動でないため、加速度の計算が単純ではない。簡単に現象理解するにはコリオリの力を考えるとよいだろう。コリオリの力は、回転運動する観測者が観測する見かけの力である。この場合、歳差運動によって生じるコマの回転軸と一緒に運動する観測者の目線で物理現象を考えてみるのだ。鉛直軸を  $z$  軸にとり、コマと一緒に歳差運動している観測者の目線では、図 3.19 のようにコマの状態が描かれる。コマは、 $xz$  平面内で傾いているとしよう。既に説明したように、質量  $m_k$  に作用

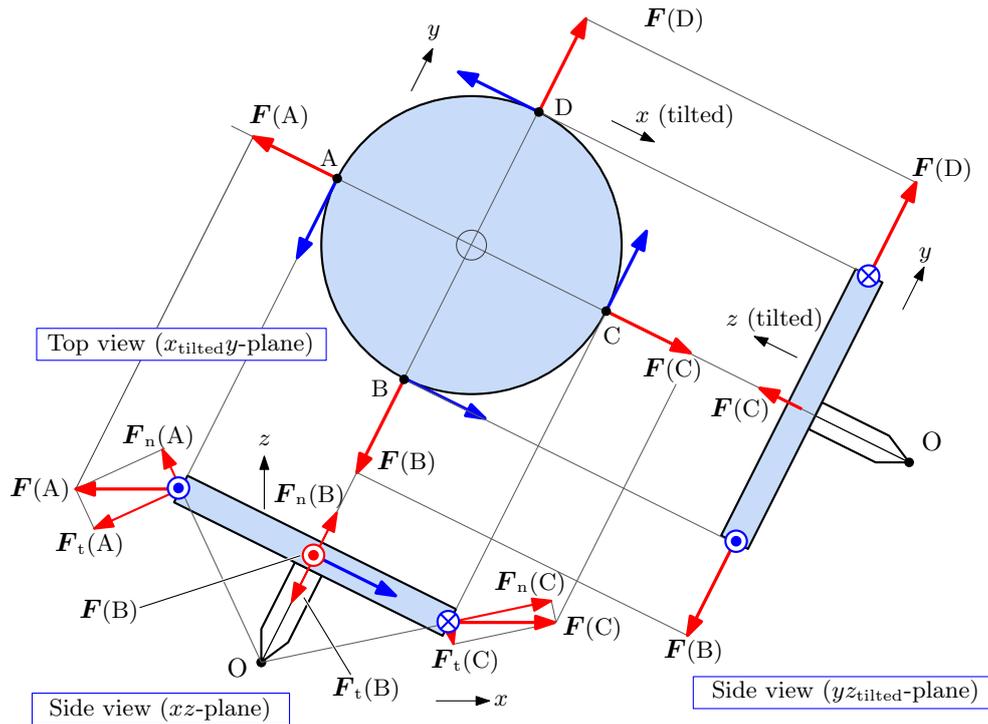


図 3.19: 歳差運動するコマに作用するコリオリの力 ( $\varphi = 0$ )

するコリオリの力は  $m_k \dot{\mathbf{r}}_k \times \boldsymbol{\omega}$  で与えられる。ここで、 $\dot{\mathbf{r}}_k$  は質量  $m_k$  の速度であり、 $\boldsymbol{\omega}$  は角速度ベクトルである。角速度ベクトルは、回転の角速度を大きさとし、回転軸方向を向いたベクトルである。コリオリの力を特定するため便宜的に設けられたベクトルと考えればよい。歳差運動が  $z$  軸まわりの運動なので、歳差に関する角速度ベクトルは  $z$  軸の正の方向を向いている。コマは本来の軸を中心に回転しているので、回転による速度軸を図 3.19 のように描く。図では、コマの外周の 4 点: 点 A, 点 B, 点 C, 点 D に速度ベクトルを描いた。それらの速度ベクトルに対応するコリオリの力は、 $\mathbf{F}(A)$ ,  $\mathbf{F}(B)$ ,  $\mathbf{F}(C)$ ,  $\mathbf{F}(D)$  のように描かれる。描かれた力によると、 $\mathbf{F}(B)$  と  $\mathbf{F}(D)$  は均衡がとれているが、 $\mathbf{F}(A)$  と  $\mathbf{F}(C)$  が一直線上にないため注意が必要だ。この場合、線分 BD のまわりに回転するところであるが、コマの軸がしっかりと固定されているのであれば、むしろ、自由に動ける O を支点として回転をしようとする。その場合、 $\mathbf{F}(A)$  と  $\mathbf{F}(C)$  を、支点 O から見た法線成分と接線成分に分けると便利だ。法線成分が  $\mathbf{F}_n(A)$ ,  $\mathbf{F}_n(C)$  であり、接線成分が  $\mathbf{F}_t(A)$ ,  $\mathbf{F}_t(C)$  である。図から明らかなように、接線成分が点 A と点 C で異なり、コマを鉛直軸に向かって持

ち上げようとする力がコマに作用している。その力がコマに作用する重力と釣り合えば、安定に歳差運動し、コマは倒れないのだ。一方、法線成分はコマを変形させようとする力となるが、コマの剛性によって内部で反作用がはたらき変形を免れているはずだ。

**歳差運動発生メカニズム** 前段落では、歳差運動するコマには重力に逆らってコマを持ち上げようとする力が作用することを説明した。本段落では、どのような仕組みによって歳差運動が開始するのかを説明する。回転するコマを傾けて設置すると、少しだけ重力で下がった後、歳差運動が始まる。その下がるという運動が重要である。図3.20に、重力で下がるコマに作用するコリオリの力を描いた。重力の作用でコマは支点Oを中心に回転しながら落下する。この図は、落下運動する観測者から見たコリオリの力を描いている。コマの回転軸が  $xz$  平面上で発生している場合、便宜上設定される角速度ベクトル  $\Omega$  は  $y$

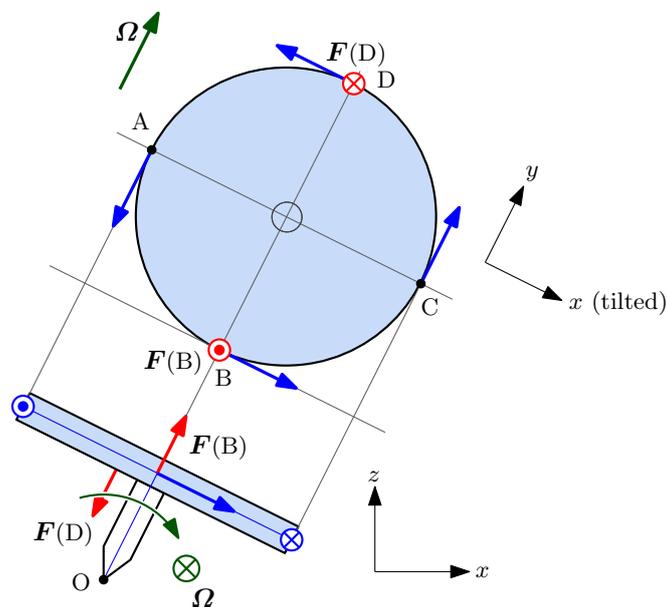


図 3.20: 歳差運動の原動力 ( $\varphi = 0$ )

軸の正の方向を向いている。図のように、コマの外周に点A, 点B, 点C, 点Dを設定し、各点におけるコリオリの力を調べてみよう。点Aと点Cではコマの回転による速度が角速度ベクトルと平行なのでコリオリの力は発生しない。それに対して、点Bと点Dでは速度が角速度ベクトルと直角をなし、コリオリの力が最大になる。発生するコリオリの力は、点Bと点Dで逆方向になるので、上から見たとき、コマの回転軸を反時計回りに回転させる。これが歳差運動が発生するメカニズムである。

歳差運動を発生させるメカニズムはよくできていて、コマの回転速度と歳差運動の速度が自動的に釣り合う仕組みを自然に実現している。コマの回転速度が小さく重力が優勢のとき、コマは下がり、その間に歳差運動が速くなる。逆に、歳差運動が速すぎる場合、コ

マは重力を振り切って直立しようとするが、軸が上に向かって運動すると、歳差運動にブレーキがかかる。どちらにしても、歳差運動によるコリオリの力が重力と釣り合う位置を回転するコマが自ら探して安定化するのだ。これは、初期状態でふらついていたコマが、回るうちに軸のブレが少なくなって安定化する過程に相当する。



## 第4章 一般化座標

本章から解析力学を取り扱う。解析力学は、力学における数学体系を追求する学問である。力学はニュートンの運動方程式によって確実に記述されるのだが、ベクトルの成分表示をすると適用する座標系によって記述が異なる。解析力学は、力学を取り扱う以上、ニュートンの運動方程式と互換性をもつ一方で、座標系の選び方に関わらず数式記述の統一を追求した力学である。

### 4.1 解析力学への動機づけ

運動エネルギーを例に挙げ、解析力学への動機づけをしよう。本書で既に説明したように、質量が  $m$  で速度  $v$  で運動する物体の運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad (4.1)$$

となることがわかっている。それに対して、質量  $m$  で半径が  $r$  の円板が角速度  $\omega$  で回転している場合を考えよう。先に結果を示しておく、回転運動による円板の運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (4.2)$$

のように、同一形式の数式で記述できるのである。ここで、 $I$  は慣性モーメントである。既に計算したように、半径  $r$  の円板の質量が  $m$  の円板では、慣性モーメントは  $I = mr^2/2$  によって与えられる。回転する円板が運動エネルギーをもつのは、円板を構成する内部が速度をもっているからだ。とはいえ、回転軸からの距離を  $a$  としたとき、その速さが  $a\omega$  となるように、円板の位置によって速度が異なる。そのため、回転運動を扱う場合、速さは本質的な物理量とは言えず、むしろ、角速度  $\omega$  を使うべきだ。慣性モーメントを用いた運動エネルギーの表現  $E = I\omega^2/2$  は、その意味で理にかなっている。

回転運動における運動エネルギー  $E = I\omega^2/2$  には注意を要する。それは、 $E = mv^2/2$  と同一の数学形式をとっているとはいえ、次元が異なるのだ。質量、長さ、時間の次元を、それぞれ、 $M$ ,  $L$ ,  $T$  と書くと、慣性モーメントの次元は  $ML^2$ 、角速度の次元は  $T^{-1}$  である。このように、数学形式の統一をはかるため、取り扱う物理量の次元が異なることがある。

これから学習する解析力学では、このように、物理量の次元が、通常取り扱う速度や運動量とは次元が異なる場合がある。

## 4.2 座標系と運動方程式

ニュートン力学では、あらゆる運動が運動方程式  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$  によって支配される。運動方程式は、カルテシアン座標系の  $x$  成分では、 $F_x = m\ddot{x}$  のようになるし、 $y$  成分や  $z$  成分も同様だ。ところが、極座標のように異なる座標系において、運動方程式はこんな単純に記述できないのだ。本節では、2次元の極座標と3次元の球面座標において運動方程式を記述し、運動方程式の問題を考察する。

**二次元の極座標** 二次元の極座標における運動方程式は、第1章で惑星の運動を解析した際に取り扱った。本節では改めて、極座標における運動方程式を導出する。

準備段階として、カルテシアン座標と極座標の関係を調べておこう。カルテシアン座標  $[x, y]$  は極座標  $[r, \theta]$  との間に、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

なる関係を満たす。カルテシアン座標系でベクトルを扱う際に、各座標軸と平行な単位ベクトル  $\mathbf{e}_x$  と  $\mathbf{e}_y$  が用いられる。極座標では、動径方向と接線方向に平行な単位ベクトル  $\mathbf{e}_r$  と  $\mathbf{e}_\theta$  が用いられる。各単位ベクトルは次のように考えれば抽出できる。動径方向の単位ベクトルは  $\mathbf{e}_r$  は、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を動径方向に微小変化したときの変化率である。正確には、その変化率を長さが1となるように調整したベクトルが単位ベクトル  $\mathbf{e}_r$  なのだ。つまり、単位ベクトル:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = r \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y,$$

を  $r$  で偏微分して得られるベクトルが動径方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}_r$  だ。接線方向の単位ベクトルは、位置ベクトルを  $\theta$  について偏微分して長さを調整すれば得られる。結果を書くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \cdot \mathbf{e}_x + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_y, \end{aligned} \tag{4.3}$$

である。この方程式の逆変換は、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \cos \theta \cdot \mathbf{e}_r - \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \cdot \mathbf{e}_r + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \tag{4.4}$$

である。この単位ベクトルの変換公式に注意して、一般のベクトル  $\mathbf{A}$  のカルテシアン座標表示と極座標表示が、

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta,$$

となるように座標成分を変換すると、

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta, & A_x &= A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta, \\ A_\theta &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta, & A_y &= A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.5)$$

が得られる。各行の左右の数式は互いに逆変換の関係にある。ここまでが準備段階だ。

上記の準備を利用し、運動方程式に必要な加速度ベクトルを極座標で記述しよう。最初に位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を時間微分し、速度ベクトルの成分をカルテシアン座標で表現しよう。その結果は、

$$v_x = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad v_y = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, \quad (4.6)$$

となるはずだ。ここで、 $v_x \equiv \dot{x}$ ,  $v_y \equiv \dot{y}$  とした。準備段階で導出したベクトル成分の変換公式 (4.5) に注意すると、極座標系における速度ベクトルの成分は、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad (4.7)$$

となることがわかる。この数式のように、速度ベクトルは簡単な成分表示で記述できるが、加速度ベクトルは多少複雑になる。数式 (4.6) を時刻  $t$  について微分すると、

$$a_x = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \sin \theta, \quad (4.8)$$

$$a_y = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \theta, \quad (4.9)$$

が得られる。ここで、加速度ベクトルの成分として  $a_x \equiv \ddot{x}$ ,  $a_y \equiv \ddot{y}$  を定義した。速度ベクトルと同様に、(4.5) に注意しながら動径成分  $a_r$  と接線成分  $a_\theta$  に分解すると、

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}, \quad (4.10)$$

が得られる。この計算結果に示されるように、 $a_r \neq \dot{v}_r$ ,  $a_\theta \neq \dot{v}_\theta$  である。このように、極座標表示で速度と加速度の成分が単純な関係を示さないのは、動径方向が角度  $\theta$  の依存性をもっているからだ。つまり、 $\theta$  を変化させると、その影響を受けて  $r$  も変化するのだ。

加速度に物体に質量  $m$  を乗じると物体に作用する力が得られる。すなわち、物体に作用する力の動径成分  $F_r$  と接線成分  $F_\theta$  は、

$$F_r = m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2), \quad F_\theta = m(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}), \quad (4.11)$$

のように特定される。この数式が2次元の極座標における運動方程式だ。カルテシアン座標系の運動方程式  $F_x = m\ddot{x}$  と比べると複雑である。一般的な形態が複雑に見えるが、特

定の点からの影響による平面運動を記述するには、この座標系が便利なのだ。例えば、物体に作用する力が中心力の場合、 $F_\theta = 0$ であるので、

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0,$$

である。この微分方程式は、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0,$$

のように変形できるので、 $r^2\dot{\theta}$ が一定である。これは面積速度一定の法則だ。中心力という前提条件だけで、面積速度が一定であることがただちに示せる。これが座標系を選択する理由だ。とはいえ、運動方程式がカルテシアン座標と異なることは問題点として認識しておこう。

**球面座標** 球面座標系の運動方程式はさらに複雑だ。後に解析力学の恩恵をしっかりと感ずるために、ここで苦勞して球面座標における運動方程式を導出してみよう。導出の開始点は座標変換:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (4.12)$$

である。球面座標においても、座標成分に関する単位ベクトルは2次元の極座標と同様の手順で得られる。つまり、座標変換(4.12)を座標成分で偏微分すれば単位ベクトルが得られるのだ。そのような操作を実行すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \cdot \mathbf{e}_r - \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (4.13)$$

が得られる。この方程式の逆変換を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_y + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_y - \sin \theta \cdot \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (4.14)$$

が得られる。我々は、これを利用して、球面座標での運動方程式を導出しようとしている。この時点で計算が大変そうだ。

準備段階として、一般のベクトル  $\mathbf{A}$  の成分について、カルテシアン座標から球面座標への変換を確認しよう。変換を確認するには、素直にベクトル  $\mathbf{A}$  を成分分解してやればよい。すなわち、

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned}
&= (A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta) \mathbf{e}_r \\
&\quad + (A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta) \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + (-A_z \sin \varphi + A_y \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi,
\end{aligned}$$

のように計算を実行する。第1行目は単にカルテシアン座標で成分分解しただけだ。第2行目以降では、(4.13)を利用して単位ベクトルを変換し、数式を整理した。これによって、ベクトルの成分が、

$$\begin{aligned}
A_r &= A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta, \\
A_\theta &= A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta, \\
A_\varphi &= -A_z \sin \varphi + A_y \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

のように変換できることがわかる。この変換の逆変換が、

$$\begin{aligned}
A_x &= A_r \sin \theta \cos \varphi + A_\theta \cos \theta \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi, \\
A_y &= A_r \sin \theta \sin \varphi + A_\theta \cos \theta \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi, \\
A_z &= A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

であることも簡単な計算で導出できる。とはいえ、このベクトルの変換式は2次元の極座標よりも複雑だ。これで球面座標における運動方程式を導出する準備が整った。

準備が整ったので、運動方程式を計算しよう。カルテシアン座標  $[x, y, z]$  を時間微分して得られるベクトル  $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$  は速度ベクトルなので、 $[v_x, v_y, v_z] \equiv [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$  のように記述しよう。座標変換(4.12)を時間微分して得られる数式:

$$\begin{aligned}
v_x &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi, \\
v_y &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi, \\
v_z &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

を、ベクトルの変換式(4.16)と比較すると、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta, \tag{4.18}$$

なる変換が得られる。これが球面座標における速度ベクトルの表示だ。続いて、加速度を計算しよう。二次元の極座標のときと同様に考えると、加速度  $[a_x, a_y, a_z]$  は、(4.17)を時間微分することによって得られる。その手順は正しいのだが、実際に計算を実行してみると、結構手間がかかる。その代わりに、速度ベクトルそのもの:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\varphi,$$

を時間微分してみると,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \frac{d}{dt} (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi) \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \end{aligned} \quad (4.19)$$

が導かれる。ここで注意すべきことがある。球面座標における単位ベクトル  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  は (4.14) に示すように、位置によって変化するので、時間変化に対して定ベクトルとは限らない。つまり、球面座標における単位ベクトルの時間微分は、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (4.20)$$

のように、ゼロではない。これらの導関数を (4.19) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

のように計算できる。したがって、球面座標における加速度の成分は、

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta, \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta, \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta, \end{aligned} \quad (4.21)$$

となるわけだ。したがって、球面座標系での運動方程式は、

$$\begin{aligned} F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta), \\ F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta), \\ F_\varphi &= m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta), \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。かなり複雑そうな方程式になってしまった。当然だが、 $\theta = \pi/2$  に限定 ( $\dot{\theta} = 0$ ) すると、この運動方程式は2次元の極座標における運動方程式と一致する。これらの運動方程式は、本来の運動方程式  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$  から大きく形が変わっている。座標変換によって、運動方程式がここまで変わってしまうことは問題と考えることができるだろう。

### 4.3 一般化力

前節で実演したように、座標系が異なると同一の数学形式で運動方程式が記述できない。正確に言うと、取り扱っている座標系での分解した力の成分が、他の座標系と同一の数学

形式で記述できないのだ。本節では、力の定義を変更し、座標系を変更しても同一の数学形式で力を定義する方法を模索する。そのためには、なりふりに構わず、本来の力の次元でなくても許容するような寛容性が必要かもしれない。

異なる座標系で共通の力の定義を探るため、2次元のカルテシアン座標における運動量の成分が  $p_x = m\dot{x}$ ,  $p_y = m\dot{y}$  であることに注目しよう。カルテシアン座標系では、力が運動量の時間微分:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad (4.23)$$

である。一方、運動エネルギーが、

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (4.24)$$

であることに注意すると、

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}}, \quad p_y = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}}, \quad (4.25a)$$

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}}, \quad F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{y}}, \quad (4.25b)$$

が得られる。このように、カルテシアン座標系では、運動量と力が運動エネルギーから派生できる。この性質を足掛かりに検討を進めよう。

極座標系ではカルテシアン座標系とは同一ではない。速度ベクトルの成分が、 $v_r = \dot{r}$ ,  $v_\theta = r\dot{\theta}$  であることに注意すると、極座標系における運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad (4.26)$$

となるはずだ。カルテシアン座標系を参考に、運動エネルギーを  $\dot{r}$  と  $\dot{\theta}$  について微分すると、

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = p_r, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = rp_\theta,$$

が得られる。得られた数式のうち、第2式は運動量とは次元が異なる。その理由は、 $\dot{\theta}$  と  $\dot{r}$  の次元が異なるからだ。これらの数式を、さらに  $t$  について微分すると、力とは異なる量が導かれる。具体的に計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} &= 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = rF_\theta, \end{aligned}$$

が得られる。第1式には、 $F_r$  だけでなく、遠心力  $mr\dot{\theta}^2$  が現れている。第2式は、次元が異なることを除けば、接線方向の力が得られている。次元が異なるのは、上と同様、速度と次元が異なる物理量で微分しているからだ。

力  $\mathbf{F}$  を作用させて物体を微小変位  $d\mathbf{r}$  だけ移動させる仕事  $dW$  について考えよう。二次元のカルテシアン座標の場合、仕事  $dW$  は、

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy = m\ddot{x} dx + m\ddot{y} dy,$$

となる。この数式に、(4.8) と (4.9) を代入すると、

$$\begin{aligned} dW &= m\ddot{x} dx + m\ddot{y} dy \\ &= (F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta) dx + (F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta) dy \\ &= F_r dr + rF_\theta d\theta, \end{aligned}$$

が得られる。第3行目への数式変形には、 $x = r \cos \theta$  と  $y = r \sin \theta$  の全微分:

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

を利用した。得られた結果より、 $f_r \equiv F_r$ ,  $f_\theta = rF_\theta$  を定義すれば、微小仕事  $dW$  は、

$$dW = f_r dr + f_\theta d\theta, \quad (4.27)$$

のように、カルテシアン座標と同様の数学形式で表現できる。つまり、 $f_r$  と  $f_\theta$  を座標系によらず共通の数学形式で記述できる**一般化力**として定義すると面白そうだ。ところが、前に書いたように、

$$\frac{d}{dt} \frac{dK}{dr} = F_r + mr\dot{\theta}^2$$

であるので、カルテシアン座標のように  $(\partial/\partial t) \partial K / \partial \dot{r}$  が力になるわけではない。その意味で、一般化力の定義には工夫が必要だ。ここで、

$$\frac{\partial K}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0,$$

であることに注意すると、

$$f_r \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial K}{\partial r}, \quad f_\theta \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial K}{\partial \theta}, \quad (4.28)$$

のように一般化力が定義できることがわかる。異なる成分においても同一の数学形式で一般化力が記述できている。カルテシアン座標系であれば、

$$f_x \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial K}{\partial x}, \quad f_y \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (4.29)$$

と考えればよい。実際に計算すればわかるとおり、 $f_x = F_x$ ,  $f_y = F_y$  であることが導かれる。このように2次元のカルテシアン座標系と極座標系で共通の数学形式で力を定義できた。実際のところ、(4.28) と (4.29) は、極座標でしか成立できないかもしれない。次節以降では、一般的な座標系において一般化力を考察する。

## 4.4 一般化座標

物体の運動を記述するにあたり、成分表示するのであれば、3個の座標成分が必要である。複数の物体から構成される系を記述するのであれば、各物体の座標を取り扱うことが必要になる。ここで考える系は、剛体のように特別な束縛条件をもつ系だけでなく、理想気体など束縛条件なしに各質点が自由に運動できる系も包括的に含む。つまり、系全体を取り扱うには、 $N$ 個の物体の座標:

$$[x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2], [x_3, y_3, z_3], \dots, [x_N, y_N, z_N],$$

をすべて取り扱うということだ。これらの座標を特定するには、 $3N$ 個の方程式を連立することになるから、数式表現の上では、

$$[x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \dots, x_N, y_N, z_N],$$

のような $3N$ 次元のベクトルを扱っていると考えてもよいだろう。そう考えるなら、むしろ、

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}],$$

のように、ベクトル成分を $x, y, z$ のように区別せず、すべてを $x$ で統一した方が取り扱いやすい。さらに、物体の数 $N$ という概念も取り払い、 $n$ 次元のベクトル:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n],$$

を取り扱うと考えよう。この場合、 $n \equiv 3N$ である。前節までは $n = 2$ の例を考えていたということだ。特定の1個の物体を3次元空間で扱う場合、 $n = 3$ となる。さらに、10000個の物体を3次元空間で扱うのであれば、 $n = 30000$ となる。

理論構築の上で、カルテシアン座標は取り扱いやすいので、カルテシアン座標を出発点をして利用しよう。カルテシアン座標は、 $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ と記述することにする。カルテシアン座標から任意の座標変換で変換される座標系を $[q_1, q_2, \dots, q_n]$ とする。新たな座標系は、特定の座標を意識しているわけではなく、**一般化座標**と呼ばれる。一般化座標は、

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \end{aligned}$$

のようにカルテシアン座標と座標変換で関係づけられているとする。注意すべき点として、一般化座標は、必ずしも、長さの次元をもっているとは限らない。例えば、角度 $\theta$ のように無次元であってもよい。

カルテシアン座標系における速度ベクトルの成分  $\dot{x}_k$  は、解析学の公式を用いて、

$$\dot{x}_k = \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j,$$

で与えられる。総和記号は、 $j = 1, 2, \dots, n$  にわたって演算するものとする。この数式に表すように、 $\dot{x}_k$  は  $\{\dot{q}_j\}$  の1次関数であるが、その展開係数  $\partial x_k / \partial q_j$  は、一般的に  $\{q_j\}$  の関数である。

速度  $\dot{x}_k$  は、上で述べたように、 $\{q_j\}$  と  $\{\dot{q}_j\}$  の関数であるので、形式的に、

$$\dot{x}_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n),$$

と記述できる。とはいえ、 $\dot{x}_k$  は  $\dot{q}_j$  に関して1次関数であるので、

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad (4.30)$$

が成立する。興味深いことに、カルテシアン座標系と一般化座標系の偏微分の関係が、速度ベクトルの間での偏微分の関係と一致する。

物体が力の作用を受けて微小変位を生じたときの仕事について考えよう。解析学の公式によって、微小変位は、

$$dx_k = \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j,$$

で与えられる。物体に作用する力を  $F_k$  とすると、微小仕事は、

$$dW = \sum_k F_k dx_k = \sum_k \sum_j F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j,$$

である。一般化座標系  $q_k$  における一般化力  $f_j$  は、

$$f_j = \sum_k F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad (4.31)$$

のように変換される。このように定義された一般化力  $f_j$  を用いると、微小仕事は、

$$dW = \sum_j f_j dq_j,$$

のように記述できる。この記述において、 $f_j dq_j$  がエネルギーの次元をもつのだが、 $f_j$  が力の次元をもつとは限らない。なぜなら、 $dq_j$  が長さの次元をもたない場合があるからだ。例えば、 $q_j$  が方位角である場合、 $dq_j$  は次元をもたないので、 $f_j$  がエネルギーの次元をもっているはずだ。結果的に、 $dW$  がエネルギーの次元をもっていればよい。

力  $F_k$  がポテンシャル  $U$  による保存力の場合, 対応する一般化力は特別な関係式で記述できる。カルテシアン座標系では, 保存力は,

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k},$$

のように表現できる。この関係式を (4.31) に代入すると,

$$f_j = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

が得られる。改めて結果を記述すると,

$$f_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad (4.32)$$

となる。保存力の場合, 一般化力はカルテシアン座標系の力と同一の数式で計算できる。一般化座標は長さの次元をもっているとは限らないが, 次元を気にすることなく, カルテシアン座標の場合と同一の数式で力を計算してよいのである。

## 4.5 ラグランジュの運動方程式

カルテシアン座標系を参考に, 運動エネルギーから運動量を導く規則を定義しよう。カルテシアン座標系では, 運動エネルギーを速度ベクトルの成分で偏微分することによって運動量が得られていた。一般化座標系でも同様に,

$$p_k \equiv \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}, \quad (4.33)$$

によって**一般化運動量**を定義する。前にも言及したように, 一般化速度  $\dot{q}_k$  が速度の次元をもたないことがあるので, 一般化運動量  $p_k$  が運動量の次元をもたない場合があることに注意が必要である。

解析力学は, 次元を気にせず, 想定した定義にしたがって機械的に計算を進めればよい。一般化運動量の定義式 (4.33) に, 解析学の公式を適用し,

$$p_k = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k},$$

のように数式変形する。この数式は, カルテシアン座標系での運動量から一般化座標系への変換である。カルテシアン座標での運動量が  $\partial K / \partial \dot{x}_j = m_j \dot{x}_j$  であることに注意すると,

$$p_k = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k},$$

のように一般化運動量を表現できる。なお、この数式変形には (4.30) を利用した。一般化運動量を時刻  $t$  について微分すると、

$$\dot{p}_k = \sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad (4.34)$$

が得られる。右辺の第1項は一般化力  $f_k$  を与える。カルテシアン座標系で、 $m_j \ddot{x}_j = F_j$  であり、(4.31) に注意すれば、右辺の第1項が一般化力であるとわかるのだ。一方、第2項は遠心力のような見かけの力を与える。

運動エネルギー  $K$  を一般化座標  $q_k$  について微分した導関数についても考察しよう。もともと、 $K$  は  $x_k$  の依存性は含まないが、 $\dot{x}_k$  の関数であり、さらに、 $\dot{x}_k$  が  $q_k$  の関数であるので、 $K$  には  $q_k$  の依存性が含まれるわけだ。したがって、

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k}, \quad (4.35)$$

と書くことができる。一方、

$$\dot{x}_j = \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \dot{q}_m,$$

を  $q_k$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} = \sum_m \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_m} \dot{q}_m = \sum_m \frac{dq_m}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k},$$

が得られる。この数式を (4.35) に代入すると、

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k},$$

なる関係が導かれる。この数式の右辺は、(4.34) の右辺の第2項であるので、

$$\frac{d}{dt} p_k = f_k + \frac{\partial K}{\partial q_k}, \quad (4.36)$$

に帰着する。ここで、一般化運動量の定義  $p_k = \partial K / \partial \dot{q}_k$  に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} = f_k, \quad (4.37)$$

が得られる。得られた数式は、カルテシアン座標系ではニュートンの運動方程式に変形できるので、この方程式は一般化座標における運動方程式だと考えればよい。ニュートンの運動方程式とは異なり、いかなる座標系においても、この形式の方程式で運動方程式が記述できるわけだ。

運動方程式 (4.37) において、右辺がポテンシャル  $U$  による保存力である場合を考えよう。数式 (4.32) に注意すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0,$$

が導かれる。ポテンシャル  $U$  は  $\dot{q}_k$  の依存性を含まないので、

$$L \equiv K - U, \quad (4.38)$$

で定義される **ラグランジアン** を導入すると、運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (4.39)$$

のように変形される。この方程式は、**ラグランジュの運動方程式** と呼ばれる。方程式 (4.37) において、一般化力  $K_k$  の中に摩擦力のように、運動エネルギーを熱エネルギーなど、ポテンシャル以外に変化させる力が含まれる場合、その成分は右辺に吸収されず、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = f'_k, \quad (4.40)$$

のように右辺に残る。この数式が一般的なラグランジュの運動方程式である。なお、この数式によって、(4.28) と (4.29) が一般化できたことになる。なお、一般化運動量の定義を、

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (4.41)$$

のように、ラグランジアンの偏微分として定義してもよい。運動方程式が座標系の選び方によらず同一の数学形式で記述できることは、実際に計算する立場で考えると好ましいことだ。とはいえ、形式の美を優先するあまり、手順が複雑化してしまったのでは現実的でない。例を用いて、ラグランジュの運動方程式の有用性を確認しよう。

**斜面を転がる球** 第 3.3.3 項で取り扱った問題をラグランジュの運動方程式によって解析しよう。第 3.3.3 項と同一設定として、半径  $a$  で質量  $M$  の球を取り扱う。球が転がる斜面の角度を  $\alpha$  とする。この球は、滑らずに転がりながら斜面を下降する。解析の便宜上、斜面下方に  $x$ 、斜面と垂直方向に  $y$  軸を設定する。さらに、球が転がった量として、時計回りに回転角  $\theta$  を設定する。

転がる球には、図 4.1 に示すような力が作用する。球の重心には重力  $Mg$  が作用する。その重力は、成分分解すると、 $Mg \sin \alpha$  で球を斜面下方に引っ張り、 $Mg \cos \alpha$  で斜面を垂直に押している。

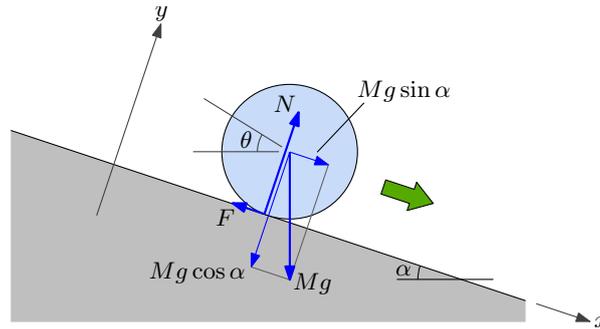


図 4.1: 斜面を転がる球に作用する力

解析力学はラグランジアンを設定するところから始まる。ラグランジアンは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差であるので、

$$L = \frac{1}{2} \left( M + \frac{I_G}{a^2} \right) \dot{x}_G^2 + Mgx_G \sin \alpha,$$

のように定義できる。ここで、球が斜面を滑ることなく転がっていると仮定し、 $a\dot{\theta} = \dot{x}_G$  である。つまり、回転による運動エネルギーが  $I_G \dot{\theta}^2 / 2 = I_G \dot{x}_G^2 / 2a^2$  となることから、ラグランジアンが上のように記述できるのだ。このラグランジアンのもと、ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} - \frac{\partial L}{\partial x_G} = 0,$$

を計算すると、この問題における運動方程式が得られる。運動方程式の決定に必要な要素を計算すると、

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = Mg \sin \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = \left( M + \frac{I_G}{a^2} \right) \dot{x}_G,$$

が得られる。第2式を  $t$  について微分すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = \left( M + \frac{I_G}{a^2} \right) \ddot{x}_G = \frac{7}{5} M \ddot{x}_G,$$

が得られる。したがって、ラグランジュの運動方程式は、

$$\ddot{x}_G = \frac{5}{7} g \sin \alpha,$$

のように、ニュートンのアプローチと同一の微分方程式が得られる。ここに示したように、解析力学的アプローチでは、斜面との接触抵抗が球を回転させるモーメントになるとの意識がなくても、正しい運動方程式が導出できるのだ。

**球面座標の運動方程式** ラグランジュの方程式を利用して、逆に球面座標におけるニュートンの運動方程式を導出しよう。ニュートンの運動方程式を球面座標に変換する作業が煩

雑であることは既に実証済みだ。その作業がラグランジュの方程式を利用すると簡略化される。導出作業は、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta,$$

から始める。これらの関係式はニュートンの運動方程式を変換する際の間接系として導出した数式だ。この数式の導出までは容易なのだが、これらを時間微分するのが煩雑だった。ここでは、この速度ベクトルを用いて、運動エネルギー：

$$K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta),$$

を書いておく。ここで、自由空間を仮定し、ポテンシャルエネルギーは  $U = 0$  とする。つまり、ラグランジアンは  $L = K$  である。ラグランジアンを  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$  で微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta,$$

が得られる。これらを時間微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{r}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2mr\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \theta + 2mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta + mr^2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

が得られる。一方、ラグランジアンを  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  について微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 + m\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

が得られるので、ラグランジュの運動方程式を構成すると、

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) &= 0, \\ mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) &= 0, \\ mr \sin \theta \cdot (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) &= 0, \end{aligned}$$

が得られる。これらの数式において、括弧で囲んだ要素が前に導出した加速度成分  $a_r$ ,  $a_\theta$ ,  $a_\varphi$  と一致しているはずだ。ラグランジュの方程式を利用すると、球面座標におけるニュートンの運動方程式が比較的簡単に導出できたことになる。また、これらの数式は、それぞれ、一般化力  $f_r$ ,  $f_\theta$ ,  $f_\varphi$  に相当する。

**対称ゴマの運動方程式** 第3.6.2項で、歳差運動する対称ゴマの運動方程式を導出した。その際、対称ゴマに作用する力のモーメントを丁寧に考察することが必要だった。ここでは、ラグランジュの運動方程式を用いると、簡単に同じ結果が導出できることを示す。

回転ゴマの運動を考えるには、第3.6.2項のようにオイラー角を意識することが重要だ。特に、ゴマの対称軸を $\zeta$ として、前提条件として微分方程式(3.27a)から(3.27c)に注意する。これらの微分方程式を解くには、ラグランジアンが必要だ。ラグランジアンを書き下すには、運動エネルギーが、

$$\begin{aligned} K &= \frac{I_1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2} \omega_3^2 \\ &= \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2, \end{aligned}$$

であることに注目する。右辺を得るには、第1行目の数式に(3.27a)から(3.27c)を代入すればよい。原点からゴマの重心までの距離を $l$ とし、重力加速度 $g$ の様な重力場を仮定するならば、ゴマのポテンシャルエネルギーは、

$$U = Mgl \cos \theta,$$

で与えられる。その結果、ラグランジアン( $L = K - U$ )は、

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta, \quad (4.42)$$

となる。ラグランジュの運動方程式に、このラグランジアンを代入すれば重力の影響下でのゴマの運動を解析できるのだ。

導出したラグランジアン(4.42)は、 $\varphi$ と $\psi$ (導関数は除く)を含んでいない。つまり、 $\varphi$ と $\psi$ は循環座標である。したがって、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = \text{const}, \quad (4.43a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const}, \quad (4.43b)$$

が得られる。特に、第2式は、

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \text{const}, \quad (4.44)$$

のように、対称軸まわりの角速度ベクトルが一定であることに読み換えられる。この性質を利用すると、第1式も、

$$L_z = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta = \text{const}, \quad (4.45)$$

のように書き換えられる。この数式は、角運動量ベクトルの鉛直成分が一定であることを示唆している。この数式の第1項が歳差運動によって周回する重心の角運動量であり、第2項が対称軸のまわりを回転するゴマの角運動量である。

ラグランジュの運動方程式に基づいて、 $\theta$  について方程式を変形すると、

$$I_1 \ddot{\theta} = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta + Mgl \sin \theta, \quad (4.46)$$

が得られる。得られた微分方程式は、第 3.6.2 項で導出した (3.28) と同一の方程式である。ラグランジュの運動方程式を用いると、コマに作用する力のモーメントを特に考察することもなく運動方程式を得ることができたのだ。これが、解析力学の効果だ。

## 4.6 エネルギー保存則

本節ではラグランジュの運動方程式からエネルギー保存則を導く。これまでの議論が正しいければ、エネルギー保存則が導かれるはずだ。

エネルギー保存則を導くため、作用する力が保存力の場合に制限して考える。ラグランジアン  $L$  は、 $q_k$  と  $\dot{q}_k$  の関数であるが、それらが時刻  $t$  の依存性をもっているため、 $L$  は  $t$  に依存する。解析学の公式によって、

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k,$$

が得られる。ラグランジュの運動方程式から、

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

であるから、 $dL/dt$  は、

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left[ \dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] = \frac{d}{dt} \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

のように変形できる。この計算結果は、

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right] = 0, \quad (4.47)$$

のような形式で書くこともできる。この数式は、ブラケット ( $[\ ]$ ) の中が一定であることを意味している。それを表す意味で、定数  $E$  を用いて、

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = E, \quad (4.48)$$

と書いてみよう。ラグランジアンが  $L = T - U$  であり、 $U$  は  $\dot{q}_k$  の依存性を含まず、 $K$  が  $\dot{q}_k$  に関する 2 次の同次式であるから、

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2K,$$

となる。その事実注意到すると、(4.48)は、 $2K - L = E$ なる数式に変形できる。ここで、 $L = K - U$ に注意すると、

$$K + U = E, \quad (4.49)$$

が導かれる。つまり、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定であるということだ。それは力学的エネルギー保存則に他ならない。

本節で示したように、ある物理量  $F$  が、 $dF/dt = 0$  を満足する場合、 $F$  は時間経過において一定である。そのような量は**保存量**と呼ばれる。中心力の作用で運動する物体の  $p_\theta$  が保存量の例である。特に、(4.49)は**エネルギー積分**と呼ばれる。

保存力しか存在しない系において、ラグランジュの運動方程式が、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k},$$

のように書けることから、ラグランジアン  $L$  が  $q_k$  に依存しないのであれば、 $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$  は保存量になる。中心力の系における  $p_\theta$  が保存量であるのは、そのような条件が整っているからである。その条件を満たす一般化座標は**循環座標**と呼ばれる。循環座標が多くなれば、数学的な取り扱いが容易になることは言うまでもないだろう。そのため、数学的な取り扱いのため、できるだけ多く循環座標がとれるように一般化座標を選ぶべきである。循環座標を確保するための変換については、第6章で説明する。

## 4.7 回転運動とローレンツ力

回転運動する系から観測される物理現象は、絶対静止系から時間依存する回転角度で座標変換することで計算できる。座標変換が時間の関数になるため、本章での議論が適用できる。数学的な解析によって、回転運動する系からの観測と、電磁気学におけるローレンツ力が類似することがわかる。

### 4.7.1 回転運動する系からの観測

回転運動する系から物理用を観測する場合、自らの回転運動を理由に、遠心力やコリオリの力といった見かけの力が観測される。本項では、ラグランジュの運動方程式を用いて、それら見かけの力を導出する。

絶対静止系を  $[x, y, z]$  なる座標で、原点を中心に角速度  $\omega$  で回転する座標系を  $[\xi, \eta, \zeta]$  で表すとき、これらの座標系は、

$$x = \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t, \quad y = \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t, \quad z = \zeta,$$

なる座標変換で関係づけられる。この座標変換を時間について微分すると、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\xi} \cos \omega t - \dot{\eta} \sin \omega t - \omega (\xi \sin \omega t - \eta \cos \omega t), \\ \dot{y} &= \dot{\xi} \sin \omega t + \dot{\eta} \cos \omega t + \omega (\xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t), \\ \dot{z} &= \dot{\zeta},\end{aligned}$$

が得られる。これが、任意の物体を観測したときの速度ベクトルを与えればよい。その対象物体の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned}K &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2} [(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) - 2\omega(\dot{\xi}\eta - \xi\dot{\eta})],\end{aligned}$$

のように計算できるはずだ。ここで、物体の運動はポテンシャル  $U(\xi, \eta, \zeta)$  の影響を受けるものとする。いうまでもなく、ポテンシャルは物体の速度には依存しない。このとき、ラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2} [(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) - 2\omega(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi)] - U, \quad (4.50)$$

となる。ラグランジアンを速度ベクトルの成分で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m(\dot{\xi} - \omega\eta), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m(\dot{\eta} + \omega\xi), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} = m\dot{\zeta}, \quad (4.51)$$

が得られる。これらは、共役運動量の成分である。さらに、ラグランジアンを座標成分で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = m(\omega^2\xi + \omega\dot{\eta}) - \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta} = m(\omega^2\eta - \omega\dot{\xi}) - \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \zeta} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (4.52)$$

が得られる。したがって、ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} - \frac{\partial L}{\partial \zeta} = 0,$$

に上記の計算結果を代入すると、

$$\begin{aligned}m\ddot{\xi} &= -\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\omega\dot{\eta} + m\omega^2\xi, \\ m\ddot{\eta} &= -\frac{\partial U}{\partial \eta} - 2\omega\dot{\xi} + m\omega^2\eta, \\ m\ddot{\zeta} &= -\frac{\partial U}{\partial \zeta},\end{aligned}$$

なる運動方程式が得られる。この運動方程式は、カルテシアン座標系で加速度を計算し、数式を整理する労力に比べると計算が楽になっている。それがラグランジュの運動方程式の効果である。得られた数式は、回転座標系から見た加速度に物体の質量を乗じた量であるので、回転座標系から見た力を表す。各座標成分に対応する微分方程式について、右辺の第2項がコリオリの力、第3項が遠心力である。それらの力は、回転座標系からの観測される見かけの力である。

### 4.7.2 ローレンツ力

本項では電磁気学におけるローレンツ力を取り扱う。突然、電磁気学に話題が変わって驚くかもしれないが、ローレンツ力を取り扱うには、前項の回転座標系の知識が役に立つのだ。ローレンツ力と回転座標系の類似性から、本項の最後にはラーモアの定理を紹介する。

既に前項で回転座標系を取り扱い、そこで生じる見かけの力としてコリオリの力と遠心力の存在を認識した。回転座標系から見た位置ベクトル  $\xi$  と、回転の角速度ベクトル  $\omega$  が与えられると、質量  $m$  の物体は、コリオリの力  $-2m(\dot{\xi} \times \omega)$ 、遠心力  $-m\omega \times (\omega \times \xi)$  なる見かけの力を受けるのだ。

電磁気学において、磁場の中を荷電粒子が運動するとローレンツ力の作用を受ける。そのローレンツ力が、回転座標系におけるコリオリの力に類似している。例えば、電場  $\mathbf{E}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$  の中で電荷  $e$  をもった荷電粒子が速度  $\mathbf{v}$  で運動する場合を考えよう。荷電粒子は電場からクーロン力を受けるだけでなく、磁束密度に起因するローレンツ力を受ける。荷電粒子が受ける力は、

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.53)$$

のように記述される。右辺の第1項が電場から受けるクーロン力、第2項がローレンツ力である。これを見ると、コリオリの力における  $\omega$  を  $\mathbf{B}$  に置き換えればローレンツ力になるという類似性がわかるだろう。

簡単のため、磁束密度が  $z$  成分しかもたない状況 ( $B_x = B_y = 0, B_z = B$ ) を考えよう。さらに、静電ポテンシャルを  $\phi$  とする。このとき、荷電粒子の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -e\frac{\partial\phi}{\partial x} + eB\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -e\frac{\partial\phi}{\partial y} - eB\dot{x}, \quad m\ddot{z} = -e\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (4.54)$$

となる。このように成分分解しても、前項で取り扱った回転座標系に類似している。このような運動方程式を導けるようなラグランジアンを考えると、

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2}(xy - yx) - e\phi, \quad (4.55)$$

であることが容易にわかる。このラグランジアンを、ラグランジュの運動方程式に代入して検算すると上に書いた運動方程式が得られるはずだ。

電磁場と回転座標系のラグランジアンの比較し、共通点を考察してみよう。回転座標系のラグランジアンは前項で既に導出したが、再び、ここで書き出してみよう。前節で導出した回転座標系のラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2} \left[ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - 2\omega(\dot{x}y - \dot{y}x) + \omega^2(x^2 + y^2) \right] - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (4.56)$$

なる形をしていた。ただし、前項で用いた回転座標系の座標  $[\xi, \eta, \zeta]$  は  $[x, y, z]$  として書き換えた。条件を整理しておく、前項で取り扱ったのは、 $z$  軸を回転軸とする回転座標から見た物理現象を取り扱った。これに対して、本項の現時点では、 $z$  軸方向に磁束密度が向いている電磁場における荷電粒子の運動を取り扱っている。なお、回転座標系におけるポテンシャルに関して完全に  $z$  軸について軸対称とすると、その依存性は、 $x^2 + y^2$  と  $z$  についてのみとなる。その場合、座標軸が回転していても常に一定となり、時間依存性がなくなる。そのような条件を満たすのが (4.56) で記述されるラグランジアンだ。このラグランジアンと、電磁場におけるラグランジアン (4.55) との比較によって、**ラーモアの定理**が導かれる。

**ラーモアの定理** 電場が  $z$  軸に対して軸対称であるとき、その環境下にある荷電粒子に、さらに  $z$  軸方向の意思ような磁場 (磁束密度が  $B$ ) を加えたときの運動は、 $B = 0$  のときの運動を角速度  $\omega = eB/2m$  で  $z$  軸のまわりを回転する回転座標系から見た状況と同一である。ただし、 $\omega^2$  の項を無視するものとする。

ラーモアの定理によると、磁束密度が存在しない状況で荷電粒子が電場の影響を受けながら運動している様子を角速度  $\omega = eB/2m$  で回転する回転座標系から観測すると、 $\omega^2$  の項を無視すれば、磁束密度  $B$  の影響を受けたときと等価な状況を観測できるとも解釈できる。なお、その座標回転の角速度  $\omega = eB/2m$  は**ラーモア周波数**と呼ばれる。

磁場を定義する際にベクトルポテンシャルを用いることも多いので、ベクトルポテンシャルを用いた表記も言及しておこう。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

によって磁束密度  $\mathbf{B}$  を与える。磁場が  $z$  軸方向にのみ成分をもつ場合 ( $B_z = B$ )、ベクトルポテンシャルは、

$$A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0,$$

となる。このベクトルポテンシャルをラグランジアン (4.55) に代入すると、

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) - e\phi,$$

が得られるわけだが、この成分表示から一般的なベクトル表記において、

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - e\phi, \quad (4.57)$$

となることが容易に想像できる。このベクトル表記を利用して、 $z$ 成分以外をもつ一般的な磁束密度を考えると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z,$$

であるから、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right),$$

が導き出せる。他の成分 ( $y$  と  $z$ ) についても同様なので、記述は省略する。ここで、 $dA_x/dt$  と  $\partial A_x/\partial t$  との違いは、前者は  $x, y, z$  に含まれる  $t$  の依存性を含めての微分係数であり、後者は明示的な  $t$  による偏微分係数である。一方、

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e \frac{dA_x}{dx} \dot{x} + e \frac{dA_y}{dx} \dot{y} + e \frac{dA_z}{dx} \dot{z} - e \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

であるので、ラグランジュの運動方程式は  $x$  軸方向について、

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + e \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \dot{y} - e \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \dot{z} \\ &= -e \left( \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_x + e \dot{y} (\nabla \times \mathbf{A})_z - e \dot{z} (\nabla \times \mathbf{A})_y \\ &= -e \left( \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_x + e [\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x, \end{aligned}$$

のように数式変形できる。ここで、静電ポテンシャルやベクトルポテンシャルとの電磁場の関係:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

に注意すると、ラグランジュの運動方程式が、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B},$$

なる運動方程式に帰着することが結論づけられる。つまり、ローレンツ力が電磁場のラグランジアン (4.57) から導出できたのだ。なお、(4.57) の右辺における  $-e\phi$  の項が、回転座標系における  $-U$  に相当する。

## 4.8 束縛運動

束縛運動は、既に第 2.6 で取り扱っているが、ここでは、解析力学の立場で束縛運動を考察しよう。前に学んだように、束縛運動における束縛条件を利用すると、取り扱う座標成分を減らすことができる。座標成分の減少は、自由度の減少、さらに、未知数の減少を意味する。未知数が減ることは問題を解くうえで好ましいことだ。

### 4.8.1 束縛条件と自由度

既に説明したように、さまざまな形態の運動を同一形式の数学で取り扱うためには、一般化座標の取り扱いが有効だ。一般化座標が  $[q_1, q_2, \dots, q_n]$  である場合、座標成分として  $n$  個の未知数が存在する。しかし、束縛条件を利用し、未知数が  $n$  より少なくなるように一般化座標を設定することが問題を解くうえで有効だ。

束縛運動を取り扱うにあたり、束縛条件が未知数を減少させる。既に学んだように、束縛条件は一般的に、

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0,$$

のような数式で表現される。このように、明確な関数で表現できる束縛は**ホロノミックな束縛**と呼んだのだった。好ましい形として、束縛条件が  $q_n = \text{const}$  のように表現できると、未知数が明示的に減るわけだ。この時点で未知数が  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$  となっているので、自由度は  $n - 1$  である。

複数の未知数が設定され、一般化座標をうまく設定することによって、 $q_n = \text{const}$ ,  $q_{n-1} = \text{const}$ ,  $\dots$ ,  $q_{n-k+1} = \text{const}$  のように表現できたとしよう。つまり、束縛条件が  $k$  個も設定できている。このとき、自由度は  $n - k$  となる。

### 4.8.2 時間依存する束縛条件

第 2.6 節では時間依存する束縛を取り扱わなかった。その説明に一般化座標の知識が必要だったからだ。本章で一般化座標を取り扱ったので、時間依存する束縛条件の取り扱い準備が整ったわけだ。

時間依存する束縛運動の例として、移動する支点に取り付けられた振り子の運動を考えよう。図 4.2 に示すように、振り子の支点は時間の関数  $x = F(t)$  で表される。振り子の長さは  $l$  で、その先端に質量  $m$  のおもりが取り付けられている。当然である、振り子の運動

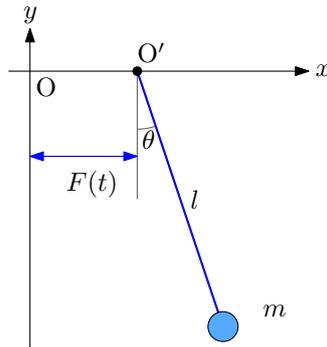


図 4.2: 支点が移動する振り子

は支点の移動  $F(t)$  によって影響を受ける。支点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_0(t)$  なる記号で書くならば、振り子の位置  $\mathbf{r}$  は、

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)| = l,$$

なる束縛を受ける。簡単のため、ホロノミックな束縛を考えよう。つまり、ひもの長さ  $l$  が定数であり、たるむ場合を想定しないものとする。時間の依存性を含む場合、ホロノミックな束縛条件は一般的に、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0,$$

なる形式で記述できる。束縛条件となる関数に  $t$  の依存性が含まれている。

**解析の準備** 支点が運動する振り子を解析する準備として、数学的な処方箋を少し整理した方がよいだろう。処方箋を整理することによって、始点が運動していたとしても、すなわち、時間依存の束縛条件があったとしても、ラグランジュの方程式が形を変えないことを示しておく。

既に説明したように、束縛条件は自由度を減少させる。ここでは、空間の次元が  $n$  であるが、束縛条件によって自由度が  $n'$  に減少しているとする。すなわち、 $n' < n$  である。このとき、座標  $x_k$  は、

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_{n'}, t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.58)$$

なる関数で表される。ここで、一般化座標  $q_j$  は、束縛条件に依存する成分が  $n' < j \leq n$  となる成分になるよう座標が変換されている。つまり、運動解析において一般化座標の第  $n' + 1$  成分以降を考えなくてもよいということだ。そのとき、一般化座標や時間の微小変化によって、座標成分  $x_k$  には、

$$dx_k = \sum_{j=1}^{n'} n' \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_k}{\partial t} dt,$$

なる微小変化が生じる。この微小変化が微小時間  $dt$  における変化だとすると、変化率は、

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^{n'} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad (4.59)$$

となるはずだ。右辺の最終項が時間による束縛条件に相当する。その項は、 $\partial x_k / \partial t$  であり、 $dx_k / dt$  ではない。その最終項は、明示的に含まれる  $t$  の依存性について  $x_k$  を微分した導関数にすぎない。実際、 $x_j$  は  $q_j$  の依存性を含み、さらに、その内部に  $t$  の依存性を含んでいる。含まれる  $t$  の依存性すべてについて微分した導関数が  $dx_k / dt$  なのだ。

数式 (4.59) によると、 $\dot{x}_k$  は  $\dot{q}_j$  について 1 次式で表現される。このとき、 $\partial x_k / \partial t$  は定数項として振る舞う。すなわち、時間依存の束縛条件を含まないときと同様に、

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad (4.60)$$

が成立する。この対称性は後で利用することになる。

物体に力  $F_k$  を作用させることによって微小変位  $dx_k$  が生じたとき、力  $F_k$  は、

$$dW = \sum_{k=1}^n F_k dx_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n'} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j + \sum_{k=1}^n F_k \frac{\partial x_k}{\partial t} dt,$$

なる微小仕事を実行する。一般化力  $f_j$  を用いると、

$$dW = \sum_{j=1}^{n'} f_j dq_j + \sum_{k=1}^n F_k \frac{\partial x_k}{\partial t} dt, \quad (4.61)$$

なる数式で微小仕事が表現できる。ここで、一般化力  $f_j$  は、

$$f_j \equiv \sum_{k=1}^n F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j},$$

によって定義される。数式 (4.61) の右辺第 2 項は、時間依存の束縛条件を創り出す系が実行する仕事を表す。例えば、振り子の支点が運動することによって時間依存の束縛条件が発生しているのであれば、その支点が振り子を移動するのに要する仕事である。

時間依存の束縛条件によって物体の運動が時間依存をもつはずであるから、系全体の運動エネルギー  $K$  には  $t$  の依存性が明示的に含まれるはずだ。そのため、共役運動量:

$$p_k \equiv \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k},$$

も明示的に  $t$  の依存性を含む。運動量の時間微分  $\dot{p}_k$  は、時間依存の束縛条件がない場合と同様に、

$$\dot{p}_k = \sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad (4.62)$$

が成立するのだが,  $\dot{x}_j$  を  $q_k$  で偏微分した導関数は, 時間依存の束縛条件の影響を受け,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} &= \sum_{m=1}^{n'} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_m \partial q_k} \dot{q}_m + \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial t} \\ &= \sum_{m=1}^{n'} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial t},\end{aligned}$$

のようになる。ここで, 微分演算子  $\partial/\partial t$  が,

$$\frac{d}{dt} = \sum_{m=1}^{n'} \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m} + \frac{\partial}{\partial t},$$

であることに注意すると, 偏導関数  $\partial \dot{x}_j / \partial q_k$  は,

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad (4.63)$$

と書けることがわかる。この偏導関数の性質を (4.62) に代入すると,

$$\dot{p}_k = \sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k},$$

が得られる。この数式の右辺第1項は一般化力  $f_k$  に他ならず, 第2項は  $\partial K / \partial q_k$  に等しいので, この数式全体は,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = f_k + \frac{\partial K}{\partial q_k},$$

となり, 時間依存の束縛条件がない場合と数学的に同形である。なお, 一般化力  $f_k$  はポテンシャル  $U$  を用いて,

$$f_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k},$$

となることも時間依存の束縛条件がない場合と同様である。時間依存の束縛条件によって, ポテンシャル  $U$  は,  $U(q_1, q_2, \dots, q_{n'}, t)$  のように, 空間に関する自由度が  $n' (< n)$  になり,  $t$  の依存性を含んではいるが, ラグランジアン<sup>1)</sup>の定義や, ラグランジュの運動方程式は時間依存の束縛条件がない場合と同一である。つまり, ラグランジュの手法は, 様々なケースにおいて同一の数学形式での記述を可能とすることが長所である。

**運動の解析** 準備が整ったので, 図4.2に描く振り子を, 時間依存の束縛条件を含む系の例としてと解析しよう。振り子の支点は  $x$  軸上を動き, 時刻  $t$  において  $x = F(t)$  に支点が位置すると仮定しよう。振り子の長さは  $l$  であり, 視点から見た鉛直下方を基準とし, 角度  $\theta$  で振り子の位置を表すとする。このとき, 振り子の位置は,

$$x = l \sin \theta + F(t), \quad y = -l \cos \theta,$$

である。言うまでもなく、角度  $\theta$  には時刻  $t$  の依存性が隠れている。これらを時刻  $t$  で微分すると、

$$\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta + F'(t), \quad \dot{y} = l\dot{\theta} \sin \theta,$$

なる速度ベクトルの成分が得られる。振り子の質量を  $m$  とすると、運動エネルギーは、

$$K = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta} F'(t) \cos \theta + \frac{m}{2} [F'(t)]^2, \quad (4.64)$$

なる。ただし、 $F'(t)$  は  $F(t)$  の導関数である。右辺の第2項と第3項が、視点の運動に関する影響であり、特に、第2項には、 $\theta$  と  $\dot{\theta}$  の依存性が含まれている。なお、束縛条件は、

$$(x - F(t))^2 + y^2 - l^2 = 0, \quad (4.65)$$

のように、 $x, y$  だけでなく  $t$  の依存性が含まれる。この例において、ポテンシャルエネルギーが、

$$U = -mgl \cos \theta,$$

であるので、ラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta} F'(t) \cos \theta + \frac{m}{2} [F'(t)]^2 + mgl \cos \theta, \quad (4.66)$$

である。このラグランジアンに基づき、ラグランジュの運動方程式のための要素を計算しておこう。ラグランジアンを  $\dot{\theta}$  で偏微分した導関数、すなわち、一般化運動量  $p_{\dot{\theta}}$  は、

$$p_{\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} + mlF'(t) \cos \theta,$$

となる。この数式を時間微分すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \ddot{\theta} + mlF''(t) \cos \theta - ml\dot{\theta} F'(t) \sin \theta,$$

が得られる。一方、ラグランジアンを一般化座標  $\theta$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{\theta} F'(t) \sin \theta - mgl \sin \theta,$$

が得られる。これでラグランジュの運動方程式を具体的に記述する材料がそろった。したがって、支点が動く振り子に関するラグランジュの運動方程式として、

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = -\frac{F''(t)}{l} \cos \theta, \quad (4.67)$$

が得られる。具体例として、支点の運動が正弦関数  $F(t) = A \cos \omega t$  で記述できる場合において、 $\theta$  が十分に小さい前提条件で運動方程式を書くと、

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = \frac{A\omega^2}{l} \cos \omega t, \quad (4.68)$$

なる微分方程式が得られる。いうまでもなく、 $\sin \theta \simeq \theta$ ,  $\cos \theta \simeq 1$ なる近似を適用した。得られた微分方程式は、この系が強制振動であることを示唆している。微分方程式(4.68)の解を調べるため、その方程式を、

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = B \cos \omega t,$$

のように簡略化しておこう。ここで、 $\omega_0^2 = g/l$ ,  $B = A\omega^2/l$ である。この方程式の一般解は、

$$\theta = C \cos(\omega_0 t + \phi) - \frac{B}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t, \quad (4.69)$$

のように書くことができる。この数式の第1項は微分方程式の右辺をゼロとしたとき、すなわち、斉次微分方程式の一般解であり、第2項は与えられた微分方程式の特殊解である。この一般解によると、 $\omega$ が $\omega_0$ に近づくと第2項の振幅が増大する。特に、 $\omega = \omega_0$ の場合、第2項が発散する。その現象は**共振**と呼ばれる。この例では摩擦を考慮していないので、共振条件において振幅が発散する。実際の物理現象では、摩擦があるため、共振条件でも振幅は有限である。

共振の条件を満たすとはいえ、突如として振幅が無限大になるわけではない。時間の関数として強制振動の解を調べてみよう。そのためには、条件を与えて積分定数  $B$  と  $\phi$  を決定する必要がある。条件として、 $t = 0$ において、 $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} = \alpha$ としよう。その条件は、

$$C \cos \phi = \frac{B}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad -C\omega_0 \sin \phi = \alpha,$$

なる数式で表現できる。未知数  $C$  と  $\phi$  を直接決定する代わりに、この数式を  $C \cos(\omega_0 t + \phi)$  に代入すると、

$$\begin{aligned} C \cos(\omega_0 t + \phi) &= C \cos \phi \cos \omega_0 t - C \sin \phi \sin \omega_0 t \\ &= \frac{B}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \end{aligned}$$

が得られるので、微分方程式の解は、

$$\theta = \frac{B}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t) + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega t, \quad (4.70)$$

であることがわかる。この解の第1項は、 $\omega = \omega_0$ のとき、分子と分母がともにゼロとなるので、発散を免れるかもしれない。その可能性を確かめるため、 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ としてみよう。ここで、 $\Delta\omega$ は十分に小さいものとする。そのとき、

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \simeq \frac{1}{2\omega_0 \Delta\omega},$$

なる近似が成立する。一方、

$$\cos \omega_0 t - \cos \omega t \simeq t \sin \omega_0 t \cdot \Delta\omega,$$

なる近似も成立する。したがって、

$$\theta = \frac{1}{\omega_0} \left( \alpha + \frac{B}{2}t \right) \sin \omega_0 t$$

が得られる。ここで、 $B = A\omega_0^2/l$  ( $\omega \simeq \omega_0$  なので) によって記号を戻し、 $\alpha = 0$  に限定すると、

$$\theta = \frac{A\omega_0}{2l} t \sin \omega_0 t, \quad (4.71)$$

なる解が得られる。この解は、 $\alpha = 0$  に限定したため、 $t = 0$  で完全に静止している状態からの強制振動だ。この解は、強制振動によって、振幅が時刻  $t$  に比例して増大することを意味している。比例するということは、 $A$  が小さくても時間をかければ振幅が十分に大きくなることを示唆する。つまり、共振条件を満たせば、小さな力であっても大きな振幅が得られるということだ。

本項で解析した運動は、時間の関数としてグラフ表示すると図 4.3 のような曲線を描く。このグラフは、初期状態が  $\theta = 0$  で停止している条件における数式 (4.70) である。つまり、 $\alpha = 0$  とした解だ。強制振動の角速度  $\omega$  が  $\omega_0$  と大きく違う場合、振幅が小さい。一方、 $\omega$

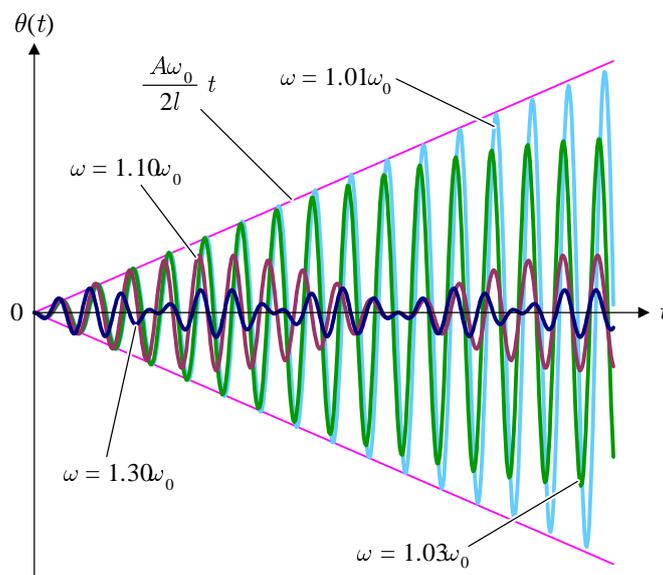


図 4.3: 強制振動の解

が  $\omega_0$  に近づくと、時間とともに振幅が増大する。グラフに記載した直線  $A\omega_0 t/2l$  は完全に共振条件が確立したとき ( $\omega = \omega_0$ ) の振幅の増大を表す。数式 (4.70) で計算した曲線は、 $\omega = 1.01\omega_0$  の条件で、この直線に沿って振幅が増大していることがグラフから読み取れる。

共振は建築において注意すべき重要な点である。その地域で発生しやすい地震の周波数と共振しないように建築物の共振周波数を設計する必要があるのだ。万一、共振してしまうと、小さな地震であっても建築物が倒壊する危険性があるからだ。共振したときの振る

舞いは、上で示したように、時間の経過とともに振幅が増加し続け、建造物が倒壊することになるのだ。

## 4.9 散逸関数

現実の物体の運動は、摩擦力、または、抵抗力によってエネルギーを失っていく。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから単純に形成されるラグランジアンでは、エネルギー損失が表現されていない。解析力学においてエネルギー損失を取り入れるには散逸関数を導入する。

例として、速度に比例する抵抗力が発生する系を考えよう。物体の変位を  $x_k$  なる座標で書き、抵抗力の比例係数として  $\gamma_k$  を用いるとしよう。そのとき、物体に作用する抵抗力  $F'_k$  は、

$$F'_k = -\gamma_k \dot{x}_k,$$

である。抵抗力は速度ベクトルと逆方向に作用するので右辺は負符号を伴っている。なお、この問題はカルテシアン座標系で取り扱うものとする。ここで、微小変位  $dx_k$  に対する抵抗力がする仕事は、抵抗力と微小変位の内積:

$$\delta'W = -\sum_k \gamma_k \dot{x}_k dx_k,$$

である。この変位が微小時間  $dt$  で発生すると仮定するなら、 $\dot{x}_k = dx_k/dt$  なので、

$$\frac{\delta'W}{\delta't} = -\sum_k \gamma_k \dot{x}_k^2,$$

なる等式が書ける。この等式は、抵抗力によって単位時間あたりに失うエネルギーを表す。この数式を2分の1倍して符号反転した量:

$$D \equiv \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k \dot{x}_k^2, \quad (4.72)$$

を**散逸関数**として定義する。この関数はレイリー卿によって1873年に導入された。この定義を見ると、運動エネルギーの規定割合が散逸関数になっている。

レイリーが導入した散逸関数を用いると、ラグランジュの微分方程式に散逸関数に基づく項を追加するだけで抵抗力を伴う系の運動が記述できる。散逸関数  $D$  は、

$$F'_k = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k},$$

なる形式にて抵抗力と関連づけられる。一般化座標  $q_k$  に対応し、抵抗力を一般化力  $Q'_k$  として記述するならば、

$$Q'_k = \sum_j F'_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = - \sum_j \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k},$$

なる等式が得られる。この等式は、(4.30) を利用すると、

$$Q'_k = - \sum_j \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k},$$

のように書き換えることができ、結局、

$$Q'_k = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}, \quad (4.73)$$

なる形に落ち着くのだ。散逸関数を導入した時点ではカルテシアン座標系に限定して記述していた数式と同じ形で一般化座標でも記述できたということだ。外力を伴う運動方程式 (4.40) を参考にすると、散逸関数に基づく項は、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad (4.74)$$

のような形でラグランジュの運動方程式に取り込まれる。

**支点が移動する振り子** 前節で取り扱った支点が移動する振り子に散逸関数を適用してみよう。散逸関数として、 $D = \rho \dot{\theta}^2$  を仮定しよう。その仮定では、散逸関数による一般化力は、

$$Q'_k = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = -2\rho \dot{\theta},$$

となる。言うまでもなく、 $Q'_k$  は粘性抵抗に相当する。前節での運動方程式 (4.68) を参考に、散逸関数を用いたときの運動方程式を書くと、

$$\ddot{\theta} + 2\rho \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = B \cos \omega t, \quad (4.75)$$

が得られる。ここで、前節と同様に、 $\omega_0^2 = g/l$ ,  $B = A\omega^2/l$  である。この微分方程式に関して  $\omega_0^2 > \rho^2$  なる条件を設けると、その一般解は、

$$\theta = C_0 e^{-\rho t} \cos \left[ \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} (t + \phi_0) \right] + \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \phi), \quad (4.76)$$

なる形で記述できる。ここで、 $C_0$  と  $\phi_0$  は任意の積分定数だ。一方、右辺の第2項に含まれる  $\phi$  も積分定数であるが、

$$\tan \phi = - \frac{2\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

なる条件を満たす定数だ。特に、 $\rho \rightarrow 0$ の極限で、解(4.76)は、前節で導出した解(4.70)に近づくはずだ。解(4.76)の右辺の第1項は固有振動だが、時定数 $1/\rho$ の減衰振動になっている。パラメータ $\rho$ は単位時間に減衰するエネルギーに相当するので、 $\rho$ が大きいほど時定数が小さいというわけだ。一方、右辺の第2項は強制振動項に相当する。時刻 $t$ が十分大きくなった自転を想定すると、第1項は無視できるくらいまで減衰するので、第2項のみに注目すればよいだろう。残された第2項の振幅は $\omega_0$ と $\omega$ の関係によって決まる。その振幅を $C(\omega)$ 、すなわち、

$$C(\omega) \equiv \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}},$$

と定義しよう。散逸関数のパラメータ $\rho$ が $\rho \ll \omega_0$ であれば、 $C(\omega)$ は $\omega \simeq \omega_0$ で最大値をとり<sup>1</sup>、その値は $C(\omega_0) = B/2\rho\omega$ である。振幅 $C(\omega)$ は、周波数特性として図4.4に示すような曲線を描く。典型的に想定される $\rho$ は $\rho \ll \omega_0$ なので、 $C(\omega)$ は $\omega = \omega_0$ において鋭く

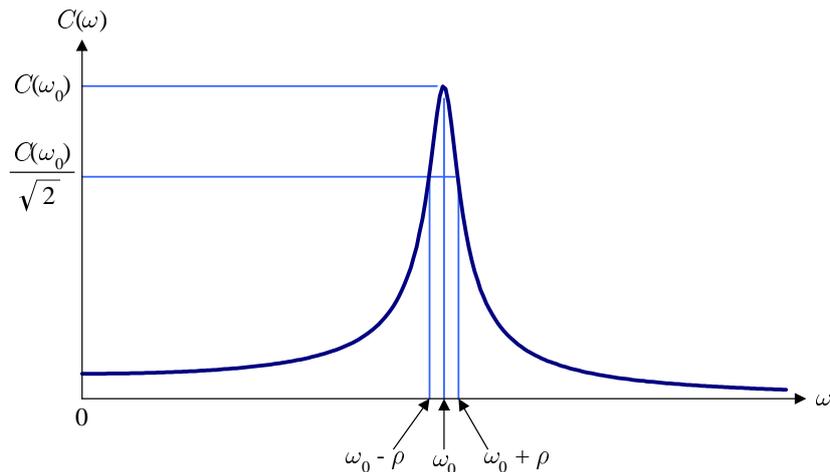


図 4.4: 強制振動の振幅の周波数特性

尖った特性を示す。また、 $C(\omega)$ は $\omega \simeq \omega_0 \pm \rho$ で最大振幅の $1/\sqrt{2}$ 倍になる。最大エネルギーの2分の1にあたるため、 $2\rho$ が角速度の軸におけるエネルギー半値幅である。いうまでもなく、 $C(\omega)$ が最大値をとる周波数が共振周波数である。散逸関数があるため、共振周波数であっても振幅が発散しないのだ。

<sup>1</sup>振幅 $C(\omega)$ を時間について微分すれば明らかのように、厳密には、 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\rho^2}$ で最大値をとる。

## 第5章 最小作用の原理

光学におけるフェルマーの原理のように、物理現象はなんらかの物理量を最小化するように状態が決まる、との観点をもつと新たな性質を見出すことができる。本章では、前に導出したラグランジュの運動方程式を最小化問題の手法として物理学を解釈する。

### 5.1 オイラーの方程式

第4章で導出したラグランジュの運動方程式は、変分法における最小化問題の解を与える微分方程式である。本節では、実際に変分法を定式化し、ラグランジュの運動方程式と同形の方程式を導出し、運動方程式の意味を考察する。

#### 5.1.1 最小化問題の解法

物理学で最小化の対象といえば、エネルギーが第1候補にあがるだろう。本節ではエネルギーに限ったことではないが、現時点ではエネルギーを最小化するといえばイメージしやすいだろう。エネルギーは、大まかに、ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和であると考えよう。ポテンシャルエネルギーは位置  $x$  に依存し、運動エネルギーは速度  $\dot{x}$  に依存する。瞬時的なエネルギーに相当する関数として  $F(t, x, \dot{x})$  を考えよう。ここで、関数  $F$  は三つの変数  $t, x, \dot{x}$  をとるように見えるが、それほど単純ではない。変数  $x$  と  $\dot{x}$  は  $t$  の関数である。この関数がある時間的な区間  $[a, b]$  で積分し、

$$I = \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt, \quad (5.1)$$

なる量を評価しよう。積分  $I$  は  $x$  の汎関数である。ここで、積分  $I$  が最小値をとるような  $x$  を決定しよう。一般の関数の極値と同様、積分  $I$  を最小にする条件は、 $x$  を微小変化させたときの変化量がゼロに近いと考える。関数  $x$  を変化させたときの汎関数  $I$  の変化量は**変分**と呼ばれ、 $\delta I$  なる記号で記述される。汎関数  $I$  を最小化する  $x$  を見つける問題、いわゆる、最小化問題の解は、最小値で変分がゼロになるはずだという観点にしたがう。つまり、 $\delta I = 0$  となるように  $x$  を決定するのだ。そのような解法は**変分法**と呼ばれる。

変分法を解くにあたり,  $x$  を  $x + \delta x$  に変化させた場合を考える。それに伴い,  $\dot{x}$  は  $\dot{x} + \delta \dot{x}$  に変化したとする。このとき, 関数  $F(t, x, \dot{x})$  は,

$$F(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) = F(t, x, \dot{x}) + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x},$$

のように変化すると考えられる。その考察に基づくと, 変分  $\delta I$  は,

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b F(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) dt - \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt \\ &= \int_a^b \left[ F(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) - F(t, x, \dot{x}) \right] dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt, \end{aligned}$$

となるはずだ。この数式の右辺がゼロになるように  $x$  を決定すればよい。ここで,  $\delta \dot{x}$  が  $\delta x$  の時間微分だと考え, 右辺の第2項の積分に部分積分を適用すると,

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt = \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x dt, \quad (5.2)$$

のように計算できる。ここで, 一つだけ制約事項を設ける。積分区間で最小解からのずれ  $\delta x$  はどのようなずれでもよいとした。しかし, 積分区間の両端  $t = a, b$  では  $\delta x = 0$  とする。この条件を設けなければ, 何が真値かわからなくなるからだ。その制約条件のもとで (5.2) はゼロとなるので, 変分  $\delta I$  は,

$$\delta I = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt,$$

となる。最小化問題の解  $x$  からの逸脱度  $\delta x$  は任意であるので, それに対して変分が  $\delta I = 0$  となるためには,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (5.3)$$

とならなければならない。この微分方程式を解いて,  $x$  を決定すればよい。導出された方程式 (5.3) が**オイラーの方程式**である。

### 5.1.2 オイラーの方程式の変形

オイラーの方程式 (5.3) を解けば最小化問題の解が得られるのだが, 被積分関数  $F$  の形によっては, 問題を簡略化できることがある。本項では最小化問題を簡略化するテクニックについて説明する。

簡略化のためのヒントとしてオイラーの方程式の変形版を紹介しよう。オイラーの方程式 (5.3) において、時間による微分  $d/dt$  には、明示的に含まれる  $t$  の依存性についての偏微分  $\partial/\partial t$  と、 $x$  や  $\dot{x}$  の中に隠れた  $t$  の依存性についての微分の和である。明示的な依存性による偏微分  $\partial/\partial t$  がわかるような形でオイラーの方程式を書くと、

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left( F - \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (5.4)$$

のようになる。この関係式は次のようにして導出される。

この表現を得るには、隠れた  $t$  の依存性も含めて微分した結果  $dF/dt$  を書いてみるとよい。その微分係数は、

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \ddot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \quad (5.5)$$

となる。一方、オイラーの方程式の両辺に  $\dot{x}$  を乗じると、

$$\dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (5.6)$$

が得られる。ここで、

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}},$$

であることに注意しながら、(5.5) を利用して (5.6) から  $\dot{x} \cdot \partial F / \partial x$  を消去すると、変形した公式 (5.4) が得られる。¶

前項で導出した公式 (5.3) よりも少し複雑に見えるかもしれないが、変形公式 (5.4) は、関数  $F$  が明示的に  $t$  への依存性を含まない場合に有用である。その場合、(5.4) の左辺の第 1 項がゼロであるので、

$$F - \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \text{const}, \quad (5.7)$$

のように公式が簡略化されるのだ。ここまで簡略化できれば公式を変形した甲斐があった。簡略化した効果を示すため、後に実際に最小化問題を解いてみよう。

**最短経路** 最小化問題の簡単な例として、最短経路を特定する問題を解いてみよう。カルテシアン座標  $[x, y]$  をとり、経路が  $y(x)$  のように  $y$  座標を  $x$  の関数で表す。経路の始点を  $[0, 0]$ 、終点を  $[x_1, y_1]$  であるとする。このとき、経路長は、

$$I = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

で計算できる。この積分を最小化するわけだ。ただし、 $y' \equiv dy/dx$  である。前に示した定式化では媒介変数が  $t$  だったが、この問題では  $x$  を媒介変数とする。そのため、解くべきオイラーの方程式は、

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

である。ところが、 $F = \sqrt{1+y'^2}$  のように  $y$  を含まないので、オイラーの方程式は、

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const},$$

まで簡略化できる。この微分方程式は簡単な計算で、 $y' = C_1$  ( $C_1$  は定数) に変形できる。その変形された微分方程式を積分すると、 $y = C_1 x + C_0$  ( $C_0$  は積分定数) が得られるわけだが、既に始点と終点の座標が与えられているので、定数が特定でき、

$$y = \frac{y_1}{x_1} x,$$

なる最短経路が得られる。つまり、2点間を結ぶ最短経路は直線である。

**最急降下線** 与えられた点 A と点 B を結ぶ斜面をつくって物体を滑らせる目的において、到達時間を最短にするための斜面を特定したい。図 5.1 のように、水平方向に  $x$ 、垂直下方に  $y$  なる座標をとって、斜面の垂直座標を  $y(x)$  のように  $x$  の関数で表す。斜面での摩擦がないと仮定すると、垂直座標  $y = 0$  で物体を離した場合、物体の速さは  $v = \sqrt{2gy}$  となる。ここで、 $g$  は重力加速度である。このとき、斜面を滑る速度の  $x$  成分は、

$$v_x = \frac{v dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sqrt{\frac{2gy}{1+y'^2}},$$

となるはずだ。ここで、 $y' \equiv dy/dx$  とした。点 A と点 B の  $x$  座標を、それぞれ、 $x_A$  と  $x_B$  とすると、物体がその2点間を移動する時間は、

$$t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx,$$

なる積分で計算できる。被積分関数  $F = \sqrt{(1+y'^2)/2gy}$  は  $x$  についての依存性を明示的に含んでいないので、オイラーの方程式は (5.7) を使うのが便利だ。簡単な計算によって、オイラーの方程式は、

$$y(1+y'^2) = 2a,$$

なる形で表現できる。ここで、 $a$  は任意の定数である。この数式を  $y'$  について解くと、

$$y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

が得られる。この微分方程式を解けば最急降下線が得られるのだが、 $y$  を  $x$  の関数として導出するのは難しい。その代わりに、 $x$  と  $y$  を媒介変数で表示することを考えよう。垂直座標は下方を正にとっているので、 $y > 0$  でなければならないし、さらに、 $y'$  が実数になるように条件を加えると、 $0 \leq y \leq 2a$  が満たすべき条件である。この条件を満たす関数として、

$$y = a(1 - \cos \theta),$$

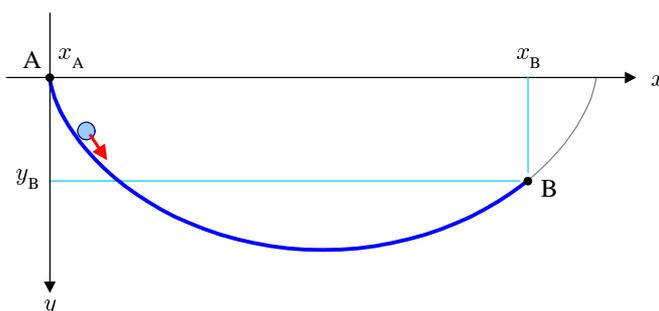


図 5.1: 最急降下線

を仮定しよう。ここで、 $\theta$  が媒介変数である。この関数形は、単に、 $0 \leq y \leq 2a$  を満たす関数ということで仮定した。条件を満たせば、他の関数形で媒介変数表示してもよいのだが、その設定次第で問題の解きやすさが左右される。解きやすい設定をしたのか不明のまま計算を進めてみよう。この仮定に基づき、 $y'$  を計算すると、

$$y' = a \sin \theta \frac{d\theta}{dx},$$

が得られる。仮定された  $y$  と  $y'$  を微分方程式に代入すると、

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta),$$

が得られる。これを  $\theta$  について積分すると、 $x = a(\theta - \sin \theta) + C$  が導出される。ここで、 $C$  は積分定数である。かなり簡単に関数が特定できたことを考えると、仮定した媒介変数表示は正解だったということだ。改めて結果を書くと、

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta), \quad (5.8)$$

である。得られた曲線はサイクロイド曲線だ。物体の初期位置として、 $\theta = 0$  のとき  $x = x_A = 0$  となるように積分変数を選んだ。また、定数  $a$  は始点と終点の位置関係によって決まる。例えば、終点の位置が  $[x_B, 0]$  の場合、 $a = x_B/2\pi$  となる。

サイクロイド曲線は、平面上で車輪を転がしたときの外周上の点の動きを表す曲線だ。車輪の外周の特定の点の動きは、図 5.2 のように描くことができる。この図は半径  $a$  の車輪を転がし、移動距離が  $1.3a$  間隔となるように描いている。車輪が  $1.3a$  移動する間に、角度にして  $1.3\text{rad} \simeq 74.5^\circ$  回転する。そのように回転する車輪の外周上の特定の点はサイクロイドを描いているのだ。円が平面の設置している瞬間、点は停止状態にある。一方、点が最も高い位置に回転したとき、点は車輪の移動速度の 2 倍の速さで水平方向に移動する。それは、車輪の移動速度と回転速度が加算された状態だからだ。その後、再び、点は地面に接地する。

サイクロイド曲線で作られた斜面に物体を滑らせると、最下点を挟んで物体は往復運動をする。サイクロイド曲線では、始点の位置に関わらず、往復運動の周期が一定である。

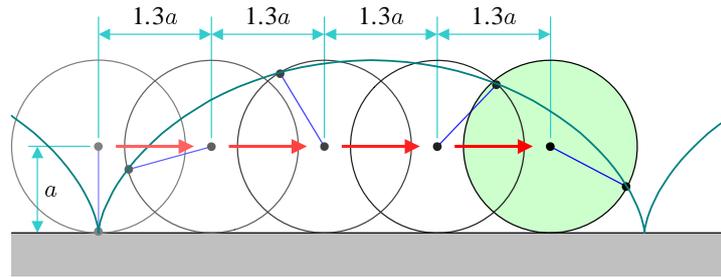


図 5.2: サイクロイドの幾何学的意味

始点の垂直座標を  $y_0 = a(1 - \cos \theta_0)$  とすると、瞬時的な物体の速さは、

$$v = \sqrt{2ga(\cos \theta_0 - \cos \theta)},$$

なる数式で表される。この速度の水平成分は、

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{ga(\cos \theta_0 - \theta)(1 - \cos \theta)},$$

のように計算される。ここで、 $dx = a(1 - \cos \theta) d\theta$  であることに注意すると、

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta,$$

によって周期が計算できることがわかる。右辺は、物体が媒介変数  $\theta$  を  $\theta_0$  から  $\pi/2$  まで変化する間を滑る時間の4倍である。媒介変数の区間  $[\theta_0, \pi/2]$  とは、物体を離れた場所からサイクロイドの最下点であるので、その移動に要する時間の4倍が周期というわけだ。積分を実行するにあたり、

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1,$$

に注意すると、

$$T = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2) - \cos^2(\theta/2)}} d\theta,$$

が得られるので、さらに積分を実行するために、

$$\cos \frac{\theta}{2} = u \cos \frac{\theta_0}{2},$$

なる置きさえを適用する。ここで、 $u$  が新しい積分変数である。このとき、積分範囲は  $u$  が1から0まで変化する区間ということになる。この置き換えによって、周期  $T$  は、

$$T = 8 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}},$$

のように計算できる。したがって、サイクロイド曲線のどの位置から物体を滑らせても、その振幅に関わらず周期は一定である。なお、その周期は長さ  $4a$  の微小振幅の単振り子と同一周期である。

**懸垂線** 図 5.3 に示すように、両端を固定し、重力に任せて垂らした一様密度のひもが描く曲線を特定しよう。考え方として、ひもは位置エネルギーが最小となるように変形すると考えるのだ。ひもの密度 (単位長さあたりの質量) を  $\rho$  としよう。水平方向に  $x$  軸、鉛

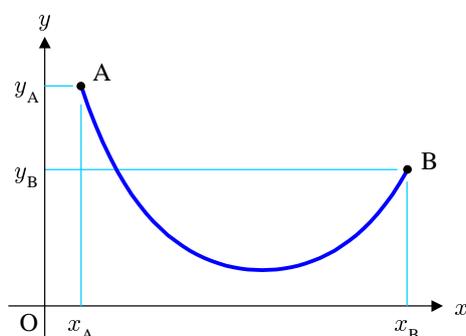


図 5.3: 重力に任せてたるませたひもの形状

直上方に  $y$  軸をとったとする。ひもが曲線  $y(x)$  を描くとき、水平方向の長さ  $dx$  あたりに、質量  $\rho\sqrt{1+y'^2} dx$  が含まれることを考えると、ひも全体の位置エネルギーは、

$$U = \int \rho y \sqrt{1+y'^2} dx,$$

となるはずだ。ここで、 $F = \rho g y \sqrt{1+y'^2}$  と考えて積分  $U$  を最小化するのだ。被積分関数  $F$  は明示的に  $x$  の依存性を含んでいないので、公式 (5.7) を利用するのが便利だ。代入すると、

$$\frac{\rho g y}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

なる微分方程式が得られる。ここで、 $C$  は定数である。この微分方程式を変形すると、

$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{A^2} - 1},$$

のように書き換えられる。ただし、 $A \equiv C/\rho g$  とおいた。つまり、 $A$  は長さの次元をもつ任意の定数である。この微分方程式は、容易に解くことができ、

$$y = A \cosh \frac{x - x_0}{A} + y_0,$$

なる解が得られる。ここで、 $x_0$  と  $y_0$  も任意の定数だ。得られた数式のように、一様な密度のひもは重力によって双曲線余弦関数を描く。この関数は特に、**懸垂線** と呼ばれる。数式に含まれる未知数 (定数) は、両端が固定される位置、ひもの長さによって決まる。

懸垂線の問題は最急降下線と同様、変分法の例題として有名である。しかし、変分法が必須ではなく、力の釣り合いから懸垂線を導出できる。図 5.4 のように、微小区間  $[x, x + \Delta x]$  のひもに作用する力を考える。微小区間の質量は、前に述べたように  $\rho\sqrt{1+y'^2} \Delta x$  だから、

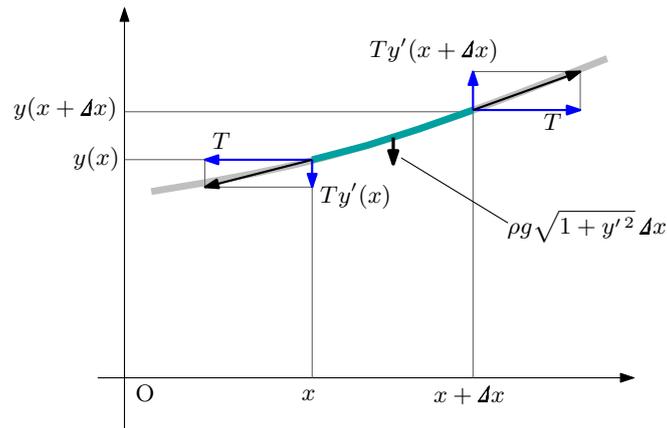


図 5.4: 力の釣り合いによる懸垂線の特定

鉛直下方に重力  $\rho g \sqrt{1 + y'^2} \Delta x$  が作用する。一方、微小区間の左右には張力が作用している。微小区間が安定しているならば、左右に作用する張力の水平成分が釣り合っているはずだ。その仮定から、微小区間の左端の張力の  $x$  成分が  $-T$ 、右端の張力の  $x$  成分が  $T$  と考えるのが妥当だ。そのとき、張力の  $y$  成分は、左端で  $-Ty'(x)$ 、右端で  $Ty'(x + \Delta x)$  となるだろう。つまり、張力の合力は  $y$  成分のみをもち、その成分は、

$$-Ty'(x) + Ty'(x + \Delta x) = Ty''(x) \Delta x,$$

となる。張力の合力は鉛直下方に作用する重力と釣り合うはずなので、微小区間に作用する力の釣り合いは、

$$y'' = \frac{\rho g}{T} \sqrt{1 + y'^2},$$

が成立する。この方程式を積分すると、

$$y' = \sinh \frac{\rho g}{T} (x - x_0),$$

が得られ、この数式をさらに積分すると、重力にまかせて垂らしたひもの形状:

$$y = \frac{T}{\rho g} \cosh \frac{\rho g}{T} (x - x_0) + y_0,$$

が特定できる。当然、 $x_0$  と  $y_0$  は積分定数である。得られた数式は変分法で導出した結果と同一である。変分法で導出した結果における定数  $A$  は、力の釣り合いで解いた数式と比較すると、 $A = \rho g / T$  であることがわかる。その関係から見かけ上、力の釣り合いから導出した結果の方が積分定数が定まっているように見えるかもしれないが、それは気のせいである。なぜなら、現時点で張力  $T$  が特定できていないからだ。張力  $T$  を特定するには他の物理条件が必要なのだ。そのことを考えると、 $\rho g / T$  も単なる積分定数にすぎず、変分法の結果は、力の釣り合いが導出する数式と同一である。

## 5.2 ハミルトンの原理

第4章で導出したラグランジュの運動方程式は、変分法におけるオイラーの方程式である。つまり、物体の運動は最小化問題の解として決定されるということだ。本節ではその事実を分析する。

### 5.2.1 ラグランジュの運動方程式

一般化座標  $q_k$  の系において、ポテンシャルを  $U$ 、運動エネルギーを  $K$  としたとき、物体の運動はラグランジュの微分方程式で規定される。ラグランジュの運動方程式は、 $L \equiv K - U$  なるラグランジアンを定義すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

となる。ただし、外力が存在しないものとする。明らかに、ラグランジュの運動方程式は変分法におけるオイラーの方程式である。例えば、 $n$ 次元の一般化座標において、ラグランジアンは、

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n),$$

なる関数である。ラグランジュの運動方程式は、任意の積分区間  $[t_0, t_1]$  において、

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) dt$$

を最小にする問題に帰着する。ラグランジュの運動方程式は、いかなる時間帯においても成立するので、積分区間  $[t_0, t_1]$  はどの時間帯でもよい。ラグランジュの運動方程式は、ニュートンの運動方程式と対応しているので、ニュートンの運動方程式は、積分  $I$  に停留値をとらせるように運動が決まるのだ。言い換えると、現実の運動は、

$$\delta I = 0,$$

となるように定められるわけだ。この数学的性質は、解析力学における基本原理として位置づけられ、**ハミルトンの原理**と呼ばれる。

外力が存在する場合、ハミルトンの原理が成立するか調べてみよう。一般化力  $F_k$  が与えられたとき、ラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = F_k,$$

となる。この運動方程式は、変分原理では、

$$\int \left[ \delta L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) + \sum_k F_k \delta q_k \right] dt = 0, \quad (5.9)$$

のように書き換えられる。この数式がラグランジュの運動方程式につながることを示そう。ラグランジアン  $L$  の変分が,

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d(\delta q_k)}{dt},$$

となるので、これを (5.9) に代入するのだが、上式の第2項の積分に関して部分積分を適用する。その結果,

$$\int \sum_k \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + F_k \right] \delta q_k dt = 0, \quad (5.10)$$

が得られる。この数式が高騰的にゼロになるためには、ブラケットの中がゼロであること、すなわち,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + F_k = 0,$$

が必要である。したがって、ラグランジュの運動方程式が変分法によって導出できた。

外力  $F_k$  が保存力であれば、ポテンシャル  $U$  を用いて  $F_k \equiv -\partial U / \partial q_k$  のように外力を定義できるので,

$$F_k \delta q_k = - \sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k = -\delta U,$$

のように変形できる。その場合、積分 (5.10) は,

$$\int \sum_k [-\delta L - \delta U] dt = 0, \quad (5.11)$$

のように単純な形にまとまるのだ。しかし、外力  $F_k$  が保存力でない場合、このような簡単な関係で書けないため、微分方程式がすっきりした形に書けない。

## 5.2.2 最小作用の原理

変分法との比較によって、ラグランジュの運動方程式がラグランジアン  $L$  の時間積分を最小化する解を与えることを確認した。本項では、エネルギー保存則を考慮し、その最小化問題の物理的意味を考察する。

エネルギー保存則は、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和、すなわち、全エネルギー  $E = K + U$  が不変であることを規定する。この法則は既に第1章で示したとおりだ。エネルギー保存則に注意すると、ラグランジアンは,

$$L = K - U = K - (E - K) = 2K - E, \quad (5.12)$$

のように表現できる。ラグランジュの運動方程式がラグランジアンを最小化する解を与える事実から、物体の運動は,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

なる停留条件を満たすように決定されているとの解釈ができる。ここで、関係式 (5.12) に注目し、エネルギー保存則が  $\delta E = 0$  であると考え、ラグランジアン  $L$  に関する停留条件は、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 2\delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = 0,$$

のように書き換えられるので、結果的に、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = 0, \quad (5.13)$$

が得られるのだ。この結果によると、運動エネルギーの時間積分が停留条件を満たす、つまり、運動エネルギーの時間積分が最小となるように運動が決定されるということである。しかし、これでは少なくとも自由落下が説明できないではないか。どのようなポテンシャル分布においても、運動エネルギーさえ最小化すればよいのなら、その場に静止している解に落ち着くからだ。

得られた結論 (5.13) は正しいのだが、途中の仮定を単純化しすぎているため、この数式を考える上での注意事項が欠落している。最小化問題 (5.13) を取り扱うには、考慮すべき条件があるのだ。次の段落で、考慮すべき条件を考察する。

**一様重力場での自由運動** 例として、一様な重力加速度  $g$  における重力場での運動を考えてみよう。ラグランジアン  $L$  を最小化する立場に立った場合、

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

が最小化の対象だ。ラグランジュの運動方程式によると、

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} + mg = 0,$$

なる微分方程式が得られる。この微分方程式を解くと、

$$x = v_x t, \quad y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2,$$

なる放物運動が得られるのだ。ここで、 $v_x$  と  $v_y$  は初速度を表す積分定数であり、 $t = 0$  において  $[x, y] = [0, 0]$  となるように他の積分定数を選んだ。ところが、運動エネルギー  $K$  のみを最小化の対象にすると、 $y$  軸方向における運動方程式が  $m\ddot{y} = 0$  となるため、放物運動が導出できないのだ。この不整合は、積分 (5.13) に関して考察すべき事項が欠落しているからだと考えられる。

実際に、放物運動と、わずかに違う経路をとる運動を比較してみよう。図 5.5 に描くような放物運動をして、水平方向から  $30^\circ$  上方に物体を投げ上げる場合を考えよう。地上の点 A から投げ出される物体の初速を  $v_0$  とすると、 $x$  方向の初速度は  $\sqrt{3}v_0/2$ 、 $y$  方向の初速度

は  $v_0$  である。時刻  $t = 0$  で物体を投げ上げたとすると、時刻  $t = v_0/2g$  で物体は放物線の頂点  $C$  を通過し、 $t = v_0/g$  で地上の点  $B$  に着地する。このような放物運動の経路を  $L$  としよう。

経路  $L_0$  との比較のため、二つの経路に沿って物体を運動させたときを考えよう。第一の経路は、点  $A$  から  $30^\circ$  の斜度を上り、点  $C$  の鉛直上方に位置する点  $C'$  で向きを変え、 $30^\circ$  の斜度で点  $B$  まで下る経路である。これを経路  $L_+$  としよう。なお、点  $C'$  の高さは  $v_0^2/4g$

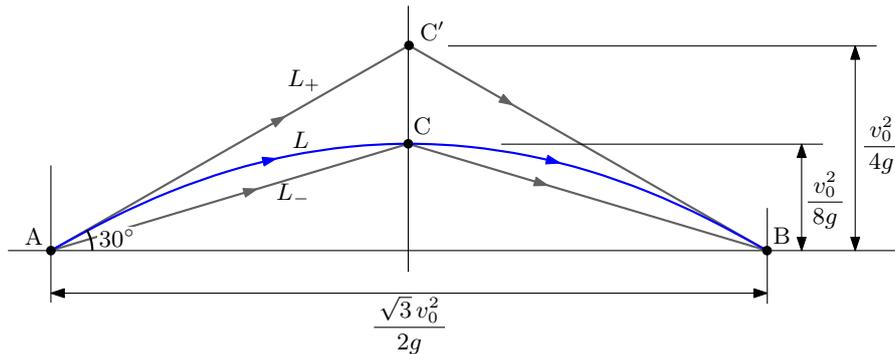


図 5.5: 一様重力場における物体の運動軌跡

である。第二の経路は、点  $A$  から放物線の頂点  $C$  まで直線的に斜面を上り、その後、直線的に点  $B$  まで斜面を下る経路である。これは経路  $L_-$  としよう。放物線  $L$  と、斜面  $L_+$  と  $L_-$  について、点  $A$  から点  $B$  までの移動時間と、運動エネルギーの時間積分を表 5.1 にまとめた。すべての経路とも初速度  $v_0$  で物体が出発しているが、経路によって所要時間が異なる。当然、大まわりになるほど所要時間が長くなる。一方、運動エネルギーの時間積分

表 5.1: 経路に沿った所要時間と運動エネルギーの時間積分

経路	$\overline{AB}$ 所要時間 $\times v_0/g$	運動エネルギー時間積分 $\times mv_0^3/2g$
放物線 $L$	1.0000	0.5833
斜面 $L_+$	1.1716	0.8619
斜面 $L_-$	0.9661	0.8425

は他の二つに比べ経路  $L$  が大差で小さい数値を出している。これだけのデータでは  $L$  があらゆる経路の最小値であることは検証できないが、十分に小さい数値であることは確かだ。

**運動エネルギーの時間積分** 上の考察を参考に、点  $A$  から点  $B$  まで移動するときの運動エネルギー  $K$  の停留条件を考察しよう。停留条件を満たす運動軌跡が  $x_k(t)$  で与えられるとする。これを経路  $L$  と呼ぶことにする。その軌跡から少しずれた軌跡を  $x'_k(t)$  とする。

こちらは経路  $L'$  としよう。ここで時間の変数を  $t$  としなかったのは、 $L$  と  $L'$  では点 A から点 B への移動時間がわずかに異なるため、その差を吸収するように少しずつ異なる時刻を対応させる目的で異なる変数  $t'$  を用いた。つまり、差分を計算するときに異なる時刻の点での差分をとるので、 $L$  と  $L'$  で対応する点の選び方は自由度があるのだが、時刻も位置もなるべく近い組み合わせで比較するものとする。

経路  $L$  と経路  $L'$  の双方とも、物体はエネルギー保存則にしたがって運動する。経路  $L$  における速度は  $\dot{x}_k$ 、経路  $L'$  における速度は  $\dot{x}'_k$  であるとする。このとき、位置の差分  $\delta x_k(t)$  と速度の差分  $\delta \dot{x}_k(t)$  は、

$$\delta x_k(t) = x'_k(t') - x_k(t), \quad \delta \dot{x}_k(t) = \dot{x}'_k(t') - \dot{x}_k(t) = \frac{dx'_k}{dt'} - \frac{dx_k}{dt},$$

のように定義される。速度の差分  $\delta \dot{x}_k$  をさらに計算すると、

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_k &= \frac{d}{dt'} [x_k(t) + \delta x_k] - \frac{dx_k}{dt} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} [x_k(t) + \delta x_k] - \frac{dx_k}{dt} \\ &= \left( \frac{dt}{dt'} - 1 \right) \frac{dx_k}{dt} + \frac{d}{dt'} \delta x_k(t), \end{aligned} \quad (5.14)$$

が得られる。ここで、 $t' = t + \delta t$  とおくと、その微分は  $dt' = dt + d(\delta t)$  となるのだから、

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{dt}{dt + d(\delta t)} = 1 - \frac{d(\delta t)}{dt},$$

が成立するはずだ。ここで、 $|d(\delta t)/dt| \ll 1$  を仮定した。この関係式を (5.14) に代入すると、

$$\delta \dot{x}_k(t) = -\dot{x}_k \frac{d(\delta t)}{dt} + \frac{d}{dt} \delta x_k(t), \quad (5.15)$$

が得られる。この数式を得るにあたり、高次の微小量を見捨てた。また、 $d/dt'$  か  $d/dt$  に置き換わ定るのも高次の微小量を見捨てたことによる。

時刻  $t_1$  から  $t_2$  にわたって運動エネルギーを時間積分した結果について、経路  $L$  と  $L'$  の差分を評価しよう。具体的には、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = \int_{t_1}^{t'_2} K' dt' - \int_{t_1}^{t_2} K dt,$$

を評価するのだ。ここで、点 A は双方の経路とも時刻  $t_1$  に出発したと仮定する。ただし、点 B への到着時刻が経路  $L$  では  $t_2$ 、経路  $L'$  では  $t'_2$  とする。右辺の第 1 項で積分変数が  $t'$  だが、取り扱いやすいように、積分変数を  $t$  にしておこう。そのためには、 $dt' = dt + d(\delta t)$  なる変換を利用する。さらに、 $K' = K + \delta K$  とすると、

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} K dt &= \int_{t_1}^{t_2} (K + \delta K)[dt + d(\delta t)] - \int_{t_1}^{t_2} K dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} K d(\delta t) + \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt, \end{aligned} \quad (5.16)$$

が得られる。当然ながら、ここでも高次の微小量は無視した。左辺等辺の関係は、積になった関数の微分  $((fg)' = f'g + fg')$  と同様の関係である。

簡単のため、カルテシアン座標系を考え、具体的に運動エネルギーの差分を計算してみよう。カルテシアン座標系において、複数の質点  $m_k$  で構成される系の運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{x}_k^2,$$

である。このエネルギーの差分は、

$$\delta K = \sum_k m_k \dot{x}_k \delta \dot{x}_k,$$

となるはずだ。この数式に (5.15) を代入すると、

$$\delta K = - \sum_k m_k \dot{x}_k^2 \frac{d(\delta t)}{dt} + \sum_k m_k \dot{x}_k \frac{d}{dt} \delta x_k \cdot dt,$$

が得られる。これを  $t$  について積分すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = - \int_{t_1}^{t_2} 2K d(\delta t) + \sum_k \int_{t_1}^{t_2} m_k \dot{x}_k \frac{d}{dt} \delta x_k \cdot dt,$$

となるのだが、右辺の第2項について部分積分を実行すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = - \int_{t_1}^{t_2} 2K d(\delta t) + \sum_k [m_k \dot{x}_k \delta x_k]_{t_1}^{t_2} - \sum_k \int_{t_1}^{t_2} m_k \ddot{x}_k \delta x_k dt,$$

が得られる。ここで、経路の両端において、位置に関する差分がゼロ ( $\delta x_k(t_1) = \delta x_k(t_2) = 0$ ) であること、 $m_k \ddot{x}_k = f_k$  が系に作用する力の成分であることに注意すると、計算結果は、

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = - \int_{t_1}^{t_2} 2K d(\delta t) - \sum_k \int_{t_1}^{t_2} f_k \delta x_k dt, \quad (5.17)$$

のように書き換えられることになる。系に作用する力  $f_k$  が保存力であるとの仮定にしたがうと、

$$\sum_k f_k dx_k = - \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \delta x_k = -\delta U,$$

となるはずだ。ここで、エネルギー保存則の登場だ。エネルギー保存則では  $\delta E = \delta K - \delta U = 0$  が成立するので、 $\delta U = \delta K$  となるのだ。したがって、(5.17) は、

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = - \int_{t_1}^{t_2} 2K d(\delta t) - \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt,$$

のように書き換えられる。この数式を整理すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt + \int_{t_1}^{t_2} 2K d(\delta t) = 0,$$

が得られる。この数式を (5.16) と比較すると, (5.13) が得られるのだ。公式の導出から明らかになったように, (5.13) は始点と終点が想定されたうえでの最小問題である。言い換えると, 時間に依存しないホロノミックな束縛を課した最小化問題である。しかも, 物体に作用している力が保存力であるとの仮定で (5.13) を使うのだ。なお, 運動エネルギーの 2 倍を時間積分した量:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} 2K dt,$$

は**作用積分** (または, **作用**<sup>1</sup>) と呼ばれる。その名称ゆえに, (5.13) によって運動が決定されることを原理として取り扱い, **最小作用の原理**と呼ぶ。

### 5.2.3 フェルマの原理

最小作用の原理が, 始点と終点を指定したうえでの運動エネルギーの時間微分を最小化する問題であることが前項で明らかになった。その最小化問題の形態は光学におけるフェルマの原理に類似している。本項では, 最小作用の原理とフェルマの原理の関係を調べてみる。

保存力の作用を受けて運動する 1 個の質点を考えよう。運動軌跡に沿って測った長さをパラメータ  $s$  とすると, 質点の速さは  $v = \partial s / \partial t$  と書ける。そのとき, エネルギー保存則は,

$$\frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + U(\mathbf{r}) = E,$$

である。この等式を速度  $ds/dt$  について解くと,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2[E - U(\mathbf{r})]}{m}},$$

が得られる。この関係式は,

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2[E - U(\mathbf{r})]}} ds,$$

のように書き換えてもよい。最小作用の原理にこの関係を適用すると, 左辺は,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2K dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} 2[E - U(\mathbf{r})] dt,$$

のように書き換えられる。ここで,  $dt$  を  $ds$  で書き換えるため, 積分変数の変換を適用すると,

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2[E - U(\mathbf{r})]} ds = 0, \quad (5.18)$$

<sup>1</sup>ラグランジアン  $L$  の時間積分を作用と呼ぶテキストもある。例えば, 潮秀樹, “よくわかる力学の基本と仕組み,” 秀和システム, ISBN4-7980-1361-7, p. 306, 2006.

のように数式が書き換えられる。なお、 $m$ は定数であるので、数式から省略した。さらに、 $s_1$ と $s_2$ は、それぞれ、始点と終点の長さ座標であるとする。このように、最小作用の原理は、運動エネルギーの平方根を経路長について積分した結果を最小化する問題であるとの解釈も可能だ。

作用積分は光学の分野におけるフェルマの原理に類似している。フェルマの原理は、始点Aと終点Bを指定したとき、光の伝搬経路は、それらの点を最短で結ぶ光の軌跡を決定されるという原理である。例えば、真空中の光の伝搬速度を $c$ 、位置 $\mathbf{r}$ における媒質の屈折率を $n(\mathbf{r})$ としよう。そのとき、位置 $\mathbf{r}$ における媒質中の光の伝搬速度は $c/n(\mathbf{r})$ となるので、微小距離 $ds$ を光が伝搬する時間は $n(\mathbf{r}) ds/c$ となる。したがって、光の経路の決定は、

$$T = \frac{1}{c} \int_A^B n(\mathbf{r}) ds,$$

なる到達時間の最小化問題に帰着する。つまり、方程式:

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0,$$

によって、 $\mathbf{r}$ を決定することになるわけだ。この方程式を(5.18)と比較すると、 $\sqrt{2[E - U(\mathbf{r})]}$ がフェルマの方程式における $n(\mathbf{r})$ に相当する。最小作用の原理は、運動エネルギーの積分を最小化する問題であり、この平方根はエネルギーの大きさに対応する。一方、フェルマの原理は光の伝搬時間を最小化する問題であり、 $n(\mathbf{r})$ は伝搬時間を長くするため、最小作用の原理と似ているのだ。

## 5.3 対称性と保存則

力学は座標の平行移動と回転、さらに、時間発展に対して対称である。対象とは、力学法則がそのまま成り立つということだ。言いかえると、平行移動、回転、時間発展に対して、運動方程式が形を変えずに成立するということだ。そのような対称性は、運動量、角運動量、エネルギーの保存則と関係があることが解析力学から導かれる。

### 5.3.1 力学の対称性

本項では平行移動、回転、時間発展についてニュートンの運動方程式が不変であることを示す。つまり、力学が平行移動、回転、時間発展に関して対象であることを示すのだ。

**平行移動** 平行移動に関する対称性は、宇宙のどこに行っても物理法則が形を変えることなく成立することを示唆している。その対称性を示すのは簡単だ。カルテシアン座標系の  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸を、それぞれ、図 5.6 に描くように  $a, b, c$  だけ平行移動する。平行移動された座標軸を、それぞれ、 $x'$  軸,  $y'$  軸,  $z'$  軸として設定する。空間中の任意の点  $P$  について、

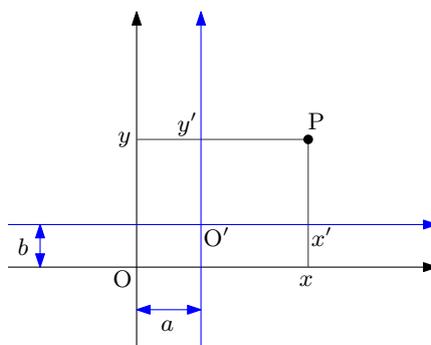


図 5.6: 座標の平行移動

当初の座標  $[x, y, z]$  と、座標軸を平行移動した後の座標  $[x', y', z']$  との間には、

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c,$$

なる関係が成立する。平行移動量,  $a, b, c$  は定数だ。変換後の座標のうち,  $x'$  を時刻  $t$  について微分すると、

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x},$$

が得られる。もう 1 回だけ  $t$  について微分すると、

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

が得られることは明らかだ。他の座標  $y$  と  $z$  についても同様である。したがって、運動方程式は、

$$m\ddot{x}' = F_{x'}, \quad m\ddot{y}' = F_{y'}, \quad m\ddot{z}' = F_{z'}, \quad (5.19)$$

のように書くことができる。得られた方程式 (5.19) の右辺に関して,  $F_{x'}$  は力  $\mathbf{F}$  の  $x'$  成分だ。なお,  $x'$  軸が  $x$  軸と平行なので,  $F_{x'} = F_x$  が成立する。他の成分 ( $y'$  と  $z'$ ) についても同様だ。これらの成分をまとめ、ベクトル形式で記述すると、

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}',$$

となる。なお, 右辺は  $\mathbf{F}$  と等しいのだが, 新たな座標系で記述したことを明記するため  $\mathbf{F}'$  と書いた。この数式は, 平行移動した先の座標系  $[x', y', z']$  における運動方程式だ。この結果から明らかのように, 平行移動しても運動方程式は形を変えることなく成立する。これが平行移動に関する対称性だ。

**座標回転** 座標回転に関する対称性は、向きに関係なく同一の物理法則が成立することを意味する。確かに、北を向いているときと東を向いているときで物理法則が変わるのは不適當だ。その性質を示そう。前回と同様にカルテシアン座標  $[x, y, z]$  を考えよう。図 5.7 に描くように、座標系を  $z$  軸まわりに角度  $\theta$  だけ回転させる。回転された  $x$  軸と  $y$  軸を、それぞれ、 $x'$  軸と  $y'$  軸と名づける。さらに、 $z$  軸はそのままだが、 $z'$  軸と名づける。そうすると、新たな座標  $[x', y', z']$  が設定されたわけだ。このような座標軸の回転によって、点 P の

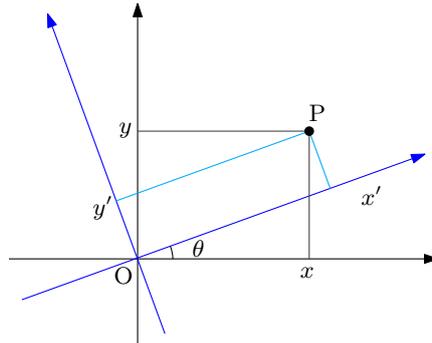


図 5.7: 座標の回転

座標  $[x, y, z]$  が<sup>3</sup>、回転によって  $[x', y', z']$  に変化する。回転前後の座標の関係は、

$$x = x' \cos \theta + y' \sin \theta, \quad y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta, \quad z = z',$$

のように記述される。これらの座標を  $t$  について 2 階微分すると、

$$\ddot{x} = \ddot{x}' \cos \theta + \ddot{y}' \sin \theta, \quad \ddot{y} = -\ddot{x}' \sin \theta + \ddot{y}' \cos \theta, \quad \ddot{z} = \ddot{z}',$$

が得られることから、平行移動のように簡単ではなさそうだ。物体に作用する力  $\mathbf{F}$  の成分  $F_x, F_y, F_z$  を用いて、ニュートンの運動方程式を書き換えると、

$$m(\ddot{x}' \cos \theta + \ddot{y}' \sin \theta) = F_x, \quad m(-\ddot{x}' \sin \theta + \ddot{y}' \cos \theta) = F_y, \quad m\ddot{z}' = F_z,$$

が得られる。これらの数式を見ると、 $z'$  については運動方程式が形を変えずに成立しているが<sup>3</sup>、 $x'$  と  $y'$  については形が変わっているように見える。ところが<sup>3</sup>、

$$F_{x'} = F_x \cos \theta - F_y \sin \theta, \quad F_{y'} = F_x \sin \theta + F_y \cos \theta, \quad F_{z'} = F_z,$$

を定義すると、運動方程式は、

$$m\ddot{x}' = F_{x'}, \quad m\ddot{y}' = F_{y'}, \quad m\ddot{z}' = F_{z'}, \quad (5.20)$$

のように簡潔な形で記述できる。新たに定義された  $F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}$  は、逆変換として書くと、

$$F_x = F_{x'} \cos \theta + F_{y'} \sin \theta, \quad F_y = -F_{x'} \sin \theta + F_{y'} \cos \theta, \quad F_z = F_{z'},$$

のように、座標変換と同形の数式になる。つまり、 $F_{x'}$ ,  $F_{y'}$ ,  $F_{z'}$  は、それぞれ、力  $\mathbf{F}$  の  $x'$  成分,  $y'$  成分,  $z'$  成分であるので、(5.20) は単なるつじつま合わせの数式ではなく、新たな座標系において意味のある数式である。したがって、この場合も運動方程式が  $m\mathbf{r}' = \mathbf{F}'$  と書けるので、座標回転に対して、ニュートンの運動方程式は対称である。

**時間発展** 時間発展に関する対称性は、いかなる時刻でも同一の物理法則が成立することを意味する。現時点で成立する物理法則は、1秒後であっても、1万年後であっても同一の方程式で記述できるということだ。例えば、定数  $a$  を用い、時刻  $t' = t + a$  で物理量を観測することを考えよう。この時間の変換が示すように、時間発展は時間軸における平行移動だ。観測を実行する時刻  $t'$  における時間微分の演算子は、

$$\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} (t' - a) \cdot \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt},$$

となる。この結果を利用すると、2階の時間微分の演算子は、

$$\frac{d^2}{dt'^2} = \frac{d}{dt'} \frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2},$$

のように計算できる。この結果から、時間発展において、時間微分の演算子が対称性を示すことがわかる。したがって、運動方程式は、時間発展した時刻  $t' = t + a$  においても、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt'^2} = \mathbf{F},$$

が成立する。得られた方程式は、 $m d^2 \mathbf{r} / dt^2 = \mathbf{F}$  と同形であるので、運動方程式は時間発展に対しても対称である。少なくとも1665年あたりで提唱された運動方程式が現代でも成立しているのだから、人間の歴史の範囲では時間発展に対して対称であることは間違いない。

ニュートンの運動方程式は、本項で示したように、平行移動、座標回転、時間発展に関して対称である。解析力学を用いると、それらの対称性が運動量、角運動量、エネルギーの保存則と関係があることが示せる。次項以降でその事実を示す。

### 5.3.2 ネーターの定理

既に宣言したように、解析力学を用いると、平行移動、座標回転、時間発展に関する力学の対称性が保存則と関係があることが導かれる。対称性と保存則の関係を結び付けるのがネーターの定理だ。ネーターの定理は作用積分が対称であれば、それに対応する保存則が存在することを主張する。

ネーターの定理を導出し、その後、対称性と保存則の関係を確認することにしよう。取り扱う系が一般化座標  $q_j$  で記述されることを仮定しよう。その座標におけるラグランジアン  $L(q, \dot{q}; t)$  によって力学が記述されている。このラグランジアンに対し、作用積分:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt,$$

を考察する。この作用積分に関し、座標を  $q \mapsto q + \delta q$  のように書き換えたとする。この書き換えは、作用積分を適用するための物体の運動経路を図 5.8 に描くように、わずかに変化させたと考えればよい。このように数式を書くと、変分法の停留条件の導出のように見えるかもしれないが、基本的な考え方が異なる。停留条件を求める場合、積分路の始点と終

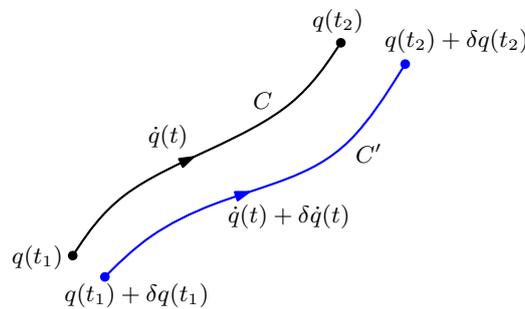


図 5.8: 作用積分の積分経路

点は変化させず、途中の経路をわずかに変化させていた。つまり、 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  を制約条件としていた。本項では、始点と終点もずらしてよいものとする。つまり、 $\delta q(t_1) \neq 0$ ,  $\delta q(t_2) \neq 0$  を許容するのだ。

積分経路が  $q + \delta q$  のように変化することによって、一般化速度が  $\dot{q} + \delta \dot{q}$  となる。このとき、作用積分が  $I$  から  $I + \delta I$  に変化したとしよう。この変化量  $\delta I$  は、

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \\ &= \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) dq_j dt, \end{aligned}$$

のように計算できる。第2行目への数式変形は、解析学における微分公式を利用した。第3行目への数式変形では、第2行目の被積分関数での第2項に部分積分を適用した。第3行目の数式の第2項は、ラグランジュの運動方程式のため、必ず、ゼロになる。ここで、一般化運動量  $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$  に注意すると、

$$\delta I = \sum_{j=1}^n \left[ p_j(t_2) \delta q_j(t_2) - p_j(t_1) \delta q_j(t_1) \right], \quad (5.21)$$

が成立することがわかる。この計算結果によると、作用積分の変化は、その積分経路に依存することなく、積分区間の両端での一般化座標の変分  $\delta q(t_1)$  と  $\delta q(t_2)$  に依存している。

一般的な経路の変更の場合、作用積分の変分  $\delta I$  はゼロにならないが、 $\delta q(t_1)$  と  $\delta q(t_2)$  を選べば  $\delta I = 0$  にすることができる。ましてや、任意の  $\delta q(t_1)$  と  $\delta q(t_2)$  において  $\delta I = 0$  が可能であれば、

$$\sum_{j=1}^n p_j(t) \delta q_j(t) = \text{const}, \quad (5.22)$$

が成立するのだ。これがネーターの定理だ。この数式をうまく使えば保存則がつけられるというわけだ。いくつか例を挙げて保存則をつくってみよう。

**循環座標** 一般座標のうち、第  $k$  成分、すなわち、 $q_k$  が循環座標である場合を考えよう。循環座標はラグランジアンに寄与しないので、確実に、 $\partial L / \partial q_k = 0$  が成立する。そのため、第  $k$  成分に関するラグランジュの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0,$$

となる。この方程式は、一般が運動量  $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$  を用いると、

$$\frac{dp_k}{dt} = 0,$$

のように書き換えられる。つまり、循環座標に対応する一般化運動量の成分は保存するわけだ。これをネーターの定理で説明しよう。循環座標  $q_k$  がラグランジアンに寄与しないため、 $q_k$  を変化させても作用積分は不変であるはずだ。そこで、 $\delta q_j = \epsilon \delta_{jk}$  としよう。これは、一般化座標の第  $k$  成分だけがゼロでない値  $\epsilon$  をもつ状態を表している。そのときの作用積分が不変であるので、

$$\delta I = \epsilon \sum_{j=1}^n [p_j(t_2) \delta_{jk} - p_j(t_1) \delta_{jk}] = \epsilon [p_k(t_2) - p_k(t_1)] = 0,$$

なる等式を満たすはずだ。この等式からただちに、 $p_k(t_2) = p_k(t_1)$  が得られる。時刻  $t_1$  と  $t_2$  の任意性を考えると、

$$p_k(t) = \text{const},$$

が結論づけられる。したがって、一般化運動量の第  $k$  成分が保存することが証明された。

**運動量保存則** 作用積分の積分経路を  $\delta q_j = \epsilon n_j$  のように平行移動した場合を考えよう。ここで、 $n_j$  は時刻  $t$  に依存しない定数であり、平行移動する方向を表すベクトル成分だ。既に検証したように、平行移動に関してニュートンの運動方程式が対称であるので、当然、ラグランジアンも対称のはずだ。つまり、平行移動に対して  $\delta L = 0$  となるわけだ。した

がって、明らかに作用積分の変分がゼロ、すなわち、 $\delta I = 0$ となる。そのとき、ネーターの定理によって、

$$\sum_{j=1}^n n_j p_j(t) = \text{const}, \quad (5.23)$$

が成立する。ここで、座標系  $q$  をカルテシアン座標系とし、 $p_j$  と  $n_j$  が、それぞれ、 $n$  次元空間のベクトル  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{n}$  の成分としよう。さらに、変分  $\delta I = 0$  を仮定すれば、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}(t) = \text{const}, \quad (5.24)$$

が導かれる。これは  $\mathbf{n}$  の方向における運動量保存則を意味している。例えば、 $\mathbf{n}$  が  $x$  方向の単位ベクトルならば、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$  は運動量の  $x$  成分であるので、ネーターの定理が運動量の  $x$  成分の保存則に相当するのだ。ただし、(5.23) が (5.24) と解釈できるのは、 $\mathbf{p}$  が  $n$  次元空間中のベクトルである場合だ。

三次元空間中の多粒子系で解釈してみよう。ここで、系に含まれる粒子の個数を  $N$  とし、 $n = 3N$  が成立すると仮定する。このとき、第  $k$  番目の粒子の運動量を  $\mathbf{p}^{(k)}$  と書くことにしよう。このベクトルの成分表示が、

$$\mathbf{p}^{(k)} = [ p_{3k-2}, p_{3k-1}, p_{3k} ],$$

であるとし、一般座標の変分が、

$$[ \delta q_{3k-2}, \delta q_{3k-1}, \delta q_{3k} ] = [ \epsilon n_x, \epsilon n_y, \epsilon n_z ] = \epsilon \mathbf{n},$$

となるように設定されていれば、(5.23) は、

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}^{(k)}(t) = \text{const}, \quad (5.25)$$

なる解釈ができる。この数式は、 $N$  個の粒子からなる多粒子系の  $\mathbf{n}$  方向における運動量保存則だ。この結果から、平行移動に関する対称性が運動量保存則と関連していることがわかった。

**角運動量保存則** 定ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  を用いて、積分経路の変分が  $\delta \mathbf{q} = \epsilon \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$  となる例を考えよう。この例において、一般化座標  $q$  は3次元のカルテシアン座標とする。変分  $\delta \mathbf{q}$  は、軸まわりに位置ベクトル  $\mathbf{q}$  を回転させる状況を与える。その回転軸は、原点  $O$  を通り、 $\boldsymbol{\omega}$  に平行な軸である。その状態は図 5.9 を見れば理解しやすい。ベクトル  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$  は、 $\boldsymbol{\omega}$  と  $\mathbf{q}$  の双方に直交するベクトルだ。まず、 $\boldsymbol{\omega}$  にと直交することから、 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$  は、回転軸まわりに回転する  $\mathbf{q}$  が描く平面上のベクトルだ。さらに、 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$  は  $\mathbf{q}$  とも直交することから、回転によって描く円の接線方向に向かうベクトルとなる。したがって、 $\delta \mathbf{q} = \epsilon \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$  は  $\mathbf{q}$  が回

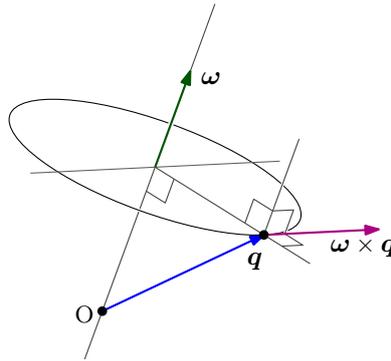


図 5.9: 座標の回転

転によって円を描く際の微小変位となるはずだ。つまり、 $\delta \mathbf{q}$  は微小の回転変換だ。

既に示したように、回転変換に関してニュートンの運動方程式が対称であるため、この場合も作用積分の変分は  $\delta I = 0$  となるはずだ。設定した一般化座標が3次元のカルテシアン座標系の場合、ネーターの定理は、

$$\sum_{j=1}^n p_j \delta q_j = \sum_{j=1}^n p_j (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})_j = \mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \text{const},$$

となる。この数式は、 $\boldsymbol{\omega}$  方向における角運動量の保存に相当する。

粒子数  $N$  の多粒子系 ( $n = 3N$ ) への対応も可能だ。回転軸の方向を  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ 、第  $k$  番目の粒子の位置と運動量を、それぞれ、 $\mathbf{q}^{(k)} = [q_x^{(k)}, q_y^{(k)}, q_z^{(k)}]$ 、 $\mathbf{p}^{(k)} = [p_x^{(k)}, p_y^{(k)}, p_z^{(k)}]$  とする。この仮定に対応し、一般化座標の変分  $\delta q_j$  を、

$$\delta q_{3k-2} = \omega_y q_z^{(k)} - \omega_z q_y^{(k)}, \quad \delta q_{3k-1} = \omega_z q_x^{(k)} - \omega_x q_z^{(k)}, \quad \delta q_{3k} = \omega_x q_y^{(k)} - \omega_y q_x^{(k)},$$

のように定義し、さらに、一般化運動量の変分を、

$$p_{3k-2} = p_x^{(k)}, \quad p_{3k-1} = p_y^{(k)}, \quad p_{3k} = p_z^{(k)},$$

のように定義すれば、ネーターの定理は、

$$\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{q}^{(k)} \times \mathbf{p}^{(k)}) = \text{const},$$

のように記述できる。この数式は  $N$  粒子系における角運動量保存則だ。したがって、座標回転に関する対称性が角運動量保存則と関連していることがわかった。

### 5.3.3 時間発展とエネルギー

エネルギー保存則は時間発展に関する対称性と関連がある。それを証明するには、作用積分の経路の変化だけでなく、積分時間も微小変化をネーターの定理を適用しなければならない。

前項では作用積分の時間範囲を  $[t_1, t_2]$  としたが, その範囲を微小変化させ,  $[t_1 + \delta t_1, t_1 + \delta t_2]$  としよう。そのように変化させたときの作用積分の変分  $\delta I$  を評価してみるのだ。積分経路は前項と同様に,  $q + \delta q$  を適用することにする。そのとき, 作用積分の変分は,

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt \\ &= \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} \left[ L(q, \dot{q}; t) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt \\ &= \left( \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} L(q, \dot{q}; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt \right) + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt,\end{aligned}$$

のように計算できる。ここで, 総和記号を伴う被積分関数の積分区間が  $[t_1 + \delta t_1, t_2 + \delta t_2]$  であるはずだが, 微小量の2次以上の項を無視したため, 積分区間が  $[t_1, t_2]$  となった。この計算を進めるため, 右辺の第1項, すなわち, 括弧内の二つの積分の差に注目しよう。それら積分の差は,

$$\begin{aligned}\text{1st term of RHS} &= \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} L(q, \dot{q}; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt \\ &= \left( \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} \right) L(q, \dot{q}; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt \\ &= \left( \int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} - \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \right) L(q, \dot{q}; t) dt = L(q, \dot{q}; t_2) \delta t_2 - L(q, \dot{q}; t_1) \delta t_1,\end{aligned}$$

のように計算できる。この結果を, 計算途中だった  $\delta I$  に代入すると,

$$\begin{aligned}\delta I &= L(q, \dot{q}; t_2) \delta t_2 - L(q, \dot{q}; t_1) \delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \\ &= L(q, \dot{q}; t_2) \delta t_2 - L(q, \dot{q}; t_1) \delta t_1 + \sum_{j=1}^n \left[ p_j(t_2) \delta q_j(t_2) - p_j(t_1) \delta q_j(t_1) \right] \\ &= L(q, \dot{q}; t_2) \delta t_2 - L(q, \dot{q}; t_1) \delta t_1 + \sum_{j=1}^n \left[ -p_j(t_2) \dot{q}_j(t_2) dt_2 + p_j(t_1) \dot{q}_j(t_1) \delta t_1 \right] \\ &= \left( \sum_{j=1}^n p_j(t_1) \dot{q}_j(t_1) - L(q, \dot{q}; t_1) \right) \delta t_1 - \left( \sum_{j=1}^n p_j(t_2) \dot{q}_j(t_2) - L(q, \dot{q}; t_2) \right) \delta t_2 \\ &= H(t_1) \delta t_1 - H(t_2) \delta t_2,\end{aligned}$$

のように計算できるのだ。第2行目への変形には, 前項で取り扱った時間を含まない作用積分の変分を利用した。第3行目への数式変形には,  $\delta q_j(t_1) = -\dot{q}_j \delta t_1$  を利用した。この関係式は, 積分開始時刻を  $\delta t_1$  だけ遅らせたため, それに合わせて位置  $q_j$  を時間にして  $\delta t_1$

相当だけ遅らせたことに起因する。当然、時刻  $t_2$  については、同様に、 $\delta q_j(t_2) = -\dot{q}_j \delta t_2$  が成立する。さらに、最終行への数式変形には、

$$H = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}; t),$$

なる記号を導入した。実は、この  $H$  は次章で導入するハミルトニアンという物理量だ。次章で説明するように、ハミルトニアンは系全体のエネルギーの意味をもつ。

特別な場合として、 $\delta t_1 = \delta t_2$  を考えよう。この条件は、積分の開始時間を遅らせた分と同じだけ終了時間を遅らせるということだ。言い換えると、これは積分時間の平行移動、すなわち、時間発展による差分を注目している。既に説明したように、物理現象は時間発展に対して対称であるため、 $\delta I = 0$  となるべきだ。その場合、必ず、 $H(t_1) = H(t_2)$  が成立する。これを一般化すると、

$$H(t) = \text{const},$$

と書くことができる。上で述べたように、ハミルトニアンは系全体のエネルギーを意味するので、得られた性質はエネルギー保存則に相当する。物理的な考察によって、既に、エネルギー保存則が成立することがわかっているので、ここで仮定したように、時間の平行移動に対して作用積分が一定でなければならないことが導かれる。その性質は、「作用積分が時間発展に関して対称である」と表現される。時間発展に関する対称性はエネルギー保存則に対応するわけだ。



## 第6章 正準方程式

本章では解析力学における方程式の構造について調べる。実用的な計算のためでなく、数学的な本質に迫るための考察するのだ。数学的な形態を追及しているため、物理現象のしくみは無視されているかもしれない。しかし、本章で得られる数学記述の美しさが、量子力学や統計力学において活用されることになる。

### 6.1 循環座標

ラグランジュの運動方程式が与えられ、方程式を解くために拘束条件が設定されているとする。ここでは、ホロノミックな拘束が設定されているとし、散逸関数を必要とする抵抗力の存在は考えないことにする。

問題を解くにあたり、数学記述は一般化座標  $q_k$  を用いるものとする。一般化座標を取り扱うのは、拘束条件を設定しやすいからである。一般化座標における一般化運動量:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

の利用価値を考察しよう。例えば、中心力を受けて運動する質点の解析にはカルテシアン座標よりも極座標の方が扱いやすい。極座標を用いると、

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r),$$

のように、ラグランジアンが  $\dot{\theta}$  を含むが  $\theta$  を含まない形で記述できることが利点なのだ。ラグランジュの方程式を定義どおりに書くと、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

なのだが、ラグランジアンに  $\theta$  が含まれないので、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = p_\theta = \text{const},$$

のように、一気に  $p_\theta$  が決まってしまうのだ。もともと、 $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$  だったので、 $\theta = C/r^2$  ( $C$  は定数) がわかり、数式から  $\theta$  を排除して  $r$  だけの数式に書き換えられる。そうすると、容易に  $r(t)$  が得られるのだ。カルテシアン座標系だと、そんなに簡単にはいかない。

一般化座標に期待する効果は、極座標の例のように、拘束条件によって特定の座標がラグランジアンから姿を消すことだ。拘束条件によって自由度が  $f$  になった系では、ラグランジアンは  $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$  となるが、特に注意を要する場合を除き、座標成分を一括にして  $L(q, \dot{q}, t)$  と書くことにしよう。

拘束条件によって、ラグランジアンが  $q_j$  の依存性をもたない場合、ラグランジュの運動方程式は、

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const},$$

のように変形できる。先ほど極座標の例で見たように、自由度が減れば方程式が簡略化される。そうすると、解の導出が容易になるのだ。この例のように、依存性が脱落した座標成分は循環座標と呼ばれる。いうまでもなく、拘束条件によって多くの座標成分が循環座標となる座標系を選ぶことが重要だ。

自由度が  $f$  の場合、独立した一般化運動量の成分は  $f$  個だけとることができる。一般化運動量は、 $q_k, \dot{q}_k, t$  の関数である。形式的に書くと、

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t), \\ p_2 &= p_2(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t), \\ &\vdots \\ p_f &= p_f(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t), \end{aligned}$$

のような連立方程式とみなすことができる。一般化速度  $\dot{q}_k$  が未知数だとみなせば、これら  $f$  この方程式から  $\dot{q}_k$  が  $q_k$  と  $t$  の関数として特定できるはずだ。

**中心力による運動** 球面座標系を用いて、中心力による運動について考察してみよう。座標として、原点からの距離  $r$ 、天頂角  $\theta$ 、方位角  $\varphi$  を使うことにする。原点  $O$  に中心力の源があると仮定し、位置エネルギーが  $U(r)$  で与えられるとする。このとき、ラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - U(r),$$

となる。このラグランジアンを座標の時間微分  $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$  で偏微分することによって、一般化運動量:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta,$$

が得られる。ポテンシャルエネルギーは座標の時間微分についての依存性含んでいないので、 $U(r)$  は運動量に寄与しない。この関係式から一般化座標の時間微分 (速度) は、

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta},$$

のように特定できる。これらを用いて運動エネルギーを記述すると、

$$K = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right),$$

が得られる。この結果から明らかなように、ラグランジアン  $L = K - U$  には  $\varphi$  が含まれないので、方位角  $\varphi$  は循環座標である。したがって、 $p_\varphi$  は定数である。中心力による運動におけるこの性質は、ケプラーの法則での面積速度一定の法則に相当する。

## 6.2 ハミルトンの正準方程式

これまで使ってきたラグランジアンは、エネルギーの次元をもつが、 $L = K - U$  のように運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差であった。これは、運動の決定を最小化問題に置き換えるためのテクニックである。本節では、全エネルギー  $E = K + U$  に相当する数学表現としてハミルトニアンを導入する。

### 6.2.1 ハミルトニアンの導入

前章で作用積分について考察した際に、ラグランジアンが  $L = 2K - E$  であることを利用した。この数式を全エネルギー  $E$  を左辺において変形すると、 $E = 2K - L$  が得られる。この関係性に基づいて、

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t), \quad (6.1)$$

なる量を定義しよう。この量がハミルトニアンと呼ばれる物理量である。右辺の第1項が運動エネルギーの2倍に相当するので、ハミルトニアンは全エネルギーを表現すると期待する。いくつかの例において、全エネルギーが表現されていることを確認しよう。

**一次元調和振動子** ある一方向  $x$  に沿って正弦関数にしたがって振動する振動子について考えよう。振動子の質量を  $m$ 、振動の角周波数を  $\omega$  とすると、ラグランジアンと運動量は、

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad p_x = m \dot{x},$$

となるはずだ。これらをハミルトニアン(6.1)に代入すると,

$$H = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \quad (6.2)$$

が導かれる。右辺の第1項と第2項は、それぞれ、位置エネルギーとポテンシャルエネルギーに相当する。

### 6.2.2 ハミルトンの原理

ハミルトンの原理は前章で説明した。ラグランジアン(6.1)の最小化である。本項ではハミルトンの原理を、ハミルトニアンを用いて記述する。既に示したように、ハミルトニアンは,

$$H = 2K - L = 2K - (K - U) = K + U,$$

のように定義されていることから、全エネルギーに相当する。この関係を見ると、前項で定義したハミルトニアンは正しいように思えるのだが、当たり前すぎるところがあって本当に大丈夫なのかと心配になっている。

ラグランジュの運動方程式が、ハミルトンの原理をオイラーの微分方程式で記述した姿だった。今度は、ハミルトンの原理をハミルトニアンで記述したいというのが新たな動機だ。ラグランジュの方程式は、定まった運動  $q_k(t)$  に対して、途中の経路をわずかに変化させたときに、ラグランジアン(6.1)の時間積分が停留条件を満たす、すなわち、

$$\delta \int L dt = 0,$$

を満たすとの考えで理論を導いた。そのとき微小変化は  $q_k$  にだけ与え、 $\dot{q}_k$  の変分は  $\delta q_k$  で得られる値で代用した。

ハミルトニアンは  $q_k, p_k$  の関数(しかも、 $t$  の関数)である。実際の運動は  $q_k$  と  $p_k$  は全くの独立ではないのだが、それら  $2f$  個の独立な変数をもった関数と考えてみよう。そのような関数を考える上で、それら  $2f$  個の変数を座標軸とする抽象的な  $2f$  次元空間の各点ごとに定まった関数としてハミルトニアンを考えるのだ。その  $2f$  次元空間は位相空間(phase space)と呼ばれる。例えば、1次元調和振動子の例では、ハミルトニアンは(6.2)で与えられる。全エネルギーを  $E$  とすると、ハミルトニアンは、

$$\frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E,$$

なる数式に書き換えられる。両辺に  $1/E$  を乗じると、この数式は、

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{E/m\omega^2} = 1,$$

なる形式に書き換えられる。この数式は、 $p_x$  軸方向に  $\sqrt{2mE}$ 、 $x$  軸方向に  $2E/m\omega^2$  の大きさをもつ楕円を表す。つまり、調和振動子の運動は図 6.1 に示すように、2次元の位相空間で楕円を描くのだ。一般的に、運動は  $2f$  次元の位相空間に曲線を描く。運動方程式を得

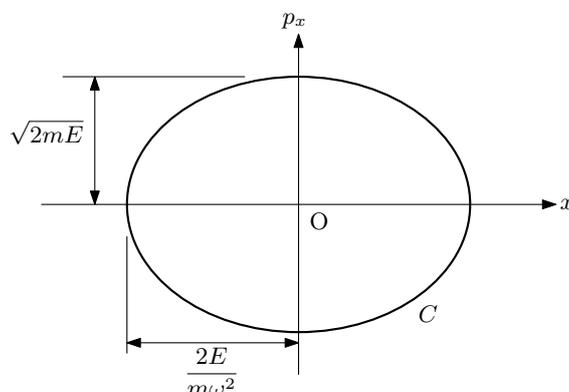


図 6.1: 一次元の調和振動子の位相空間

るには、その曲線から微小に変化した経路を想定するのだ。位相空間が  $q_k$  と  $p_k$  のように  $2f$  この座標成分をもっているので、変分は  $\delta q_k$  と  $\delta p_k$  の  $2f$  個を与えなければならない。その変分に対して調べるのは、ラグランジアンの変分を調べるのだ。

一般的な運動において、ラグランジアンの変分を評価しよう。変分の評価にあたって、本章で導入したハミルトニアンの定義からラグランジアンを取り出そう。つまり、

$$L = \sum_k p_k \dot{q}_k - H,$$

を使って変分を評価する。いささか強引にラグランジアンを取り出した気がするが、この数式を使って、ラグランジアンの変分を計算してみると、

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_k (\dot{q}_k \delta p_k + p_k \delta \dot{q}_k) - \delta H \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left( \dot{q}_k \delta p_k + p_k \delta \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt, \end{aligned}$$

が得られる。このうち、被積分関数の第2項について、 $\delta \dot{q}_k = (d/dt)q_k$  の想定で、部分積分を利用して個別に積分を実行すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} p_k \delta \dot{q}_k dt = \left[ p_k \delta q_k \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k \delta q_k dt,$$

が得られる。ところが、積分区間の両端  $t = t_1, t_2$  で  $\delta q_k = 0$  と考えるので、得られた積分結果の第1項はゼロである。したがって、ハミルトンの原理は、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[ \left( \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \left( \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt = 0, \quad (6.3)$$

のように数式変形できる。任意の変分  $\delta q_k$  と  $\delta p_k$  に対してこの数式が成立するには、

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, f), \quad (6.4)$$

が成立しなければならない。この数式が**ハミルトンの正準方程式**である。興味深い形式の数式が得られた。座標と運動量は互いに独立との仮定で数式変形してきたのだが、密接な関係というか、対称性をもった数式が得られた。

ここまでの想定では、ハミルトニアン  $H$  は明示的に時間の依存性を含んでいない。ただし、 $q_k$  や  $p_k$  に時間の依存性が含まれている。そのとき、 $H$  を時間  $t$  について微分すると、

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right),$$

が得られる。この導関数に対して、ハミルトンの正準方程式 (6.4) を適用すると、

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0,$$

が得られる。正準方程式を適用することによって、第1項と第2項が厳密に相殺し、 $\partial H / \partial t = 0$  となるのだ。つまり、明示的な時間依存性を含まなければ、ハミルトニアン  $H$  は変化しない。これはローレンツ力を受けて運動する荷電粒子に対しても成立するエネルギー保存則だ。

ハミルトニアン  $H$  が時間  $t$  に明示的に依存する状況は、拘束条件が  $t$  によって変換する場合、運動座標系を用いる場合である。これらの状況は、外部の系からのエネルギー流入が加わっているので、保存則が成立しなくても当然である。保存則は、エネルギーの源や、エネルギーの流出先までを含めて議論すべきである。

**荷電粒子の運動** 磁場の中で運動する荷電粒子を、ハミルトニアンを用いて記述しよう。荷電粒子は質量  $m$ 、電荷  $e$  をもっている。座標系として3次元のカルテシアン座標系  $[x, y, z]$  で議論しよう。運動量ベクトルを  $[p_x, p_y, p_z]$ 、電磁場のベクトルポテンシャルを  $[A_x, A_y, A_z]$ 、さらに、静電ポテンシャルを  $\phi$  とする。ベクトル成分のうち  $x$  成分だけを考えると、正準方程式 (6.4) の第1式は、

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}(p_x - eA_x),$$

のように書ける。この数式の両辺に  $m$  を乗じると、

$$p_x - eA_x = m\dot{x},$$

なる関係が導かれる。一方、正準方程式の第2式は、

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= \frac{e}{m} \left[ (p_x - eA_x) \frac{\partial A_x}{\partial x} + (p_y - eA_y) \frac{\partial A_y}{\partial y} + (p_z - eA_z) \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] - e \frac{\partial \phi}{\partial x}, \end{aligned}$$

のように書ける。この数式について、運動量を表す  $p_x - eA_x = m\dot{x}$  (と他の成分) を利用すると、

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x} + eA_x) = e \left( \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - e \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

が得られるのだが、左辺の第2項に注意が必要だ。ベクトルポテンシャル  $A_x$  が  $x, y, z$  の関数だが、その座標成分は  $t$  の関数だと認識する必要がある。その注意のもとで  $A_x$  を  $t$  について偏微分すると、

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

となるのだ。この結果を使って  $x$  成分について数式を整理すると、

$$m\ddot{x} = -e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + e (\dot{\mathbf{r}} \times \nabla \times \mathbf{A})_x,$$

が得られる。同様の数式が  $y, z$  成分についても得られるので、まとめると、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e \left( \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + e (\dot{\mathbf{r}} \times \nabla \times \mathbf{A}) = e (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}),$$

が得られる。これは紛れもなく、ローレンツ力による運動を表現している。

例を示して明らかになったように、ハミルトンの正準方程式は運動方程式の一形態である。このような形式で数式表現することに利点があるのだが、それについては次節で説明する。

## 6.3 位相空間における運動

自由度が  $f$  となるように拘束された条件において、物体の運動は、座標  $q_k$  と運動量  $p_k$  による  $2f$  次元の位相空間での曲線として記述できることを述べた。本節では、位相空間における運動の振る舞いをさらに考察する。

### 6.3.1 運動の記述

ハミルトニアンが明示的に時間を含まないものとし、 $H(q, p)$  のように  $2f$  次元の位相空間中の点に対応した値をとると仮定しよう。初期条件として、 $t = 0$  におけるすべての質点の座標と運動量が与えられたとする。その初期条件は、位相空間中の1点の座標を一意的に選んだことに相当する。そのとき、その点における  $H$  の値だけでなく、 $\partial H / \partial p_k$  や

$\partial H/\partial q_k$  も一意的に定まる。ということは、その後の微小時間  $\Delta t$  に対応する微小変化  $\Delta q_k$  や  $\Delta p_k$  も一意的に定まる。具体的に書くと、

$$\Delta q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \Delta t, \quad \Delta p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Delta t, \quad (6.5)$$

となる。初期状態から微小時間  $\Delta t$  の経過で変化量を積み重ねていくと、任意の時刻において位相空間中のどの場所に物体が存在するか特定できる。物体が存在する位相空間の位置を  $[q, p]$  ( $2f$  次元の座標) とすると、物体は時間経過とともに、

$$H(q, p) = E, \quad (6.6)$$

で表される曲線を描く。ここで、エネルギー保存則が成立するため、右辺の  $E$  は定数である。この数式によって、自由度が1個だけ減少するので、物体の運動は  $2f - 1$  次元となる<sup>1</sup>。すなわち、物体は  $2f$  次元中の超曲面上を運動するのだ。

**一次元の調和振動子** 位相空間内の運動を調べる対象として1次元の調和振動子を取り扱おう。この例であれば2次元の位相空間で表現できるので、例として最適である<sup>2</sup>。この場合のハミルトンの正準方程式は、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} p_x, \quad \frac{dp_x}{dt} = -m\omega^2 x,$$

であり、(6.6) は図 6.1 に示す楕円を与えるはずだ。

初期状態として、 $t = 0$  のとき、 $x = x_0$ ,  $p_x = 0$  としよう。この条件は、位相空間上の点 P  $[x_0, 0]$  を始点とすることに相当する。例えば、 $x_0 > 0$  とすると、微小時間  $\Delta t$  の間に移動する量は、

$$(\Delta x)_1 = \frac{p_x}{m} \Delta t = 0, \quad (\Delta p_x)_1 = -m\omega^2 x_0 \Delta t < 0,$$

であるので、位相空間における点は初期位置 P から下方に動くのだ。さらに微小時間  $\Delta t$  だけ時間を経過させ、同様の手順で、位相空間における点の移動を追跡できる。結果的に、図 6.2 に示すように、位相空間中の楕円を時計回りに周回する動きが得られる。

ハミルトニアン  $H(q, p, t)$  が明示的に時間  $t$  に依存する場合、位相空間中の同じ点  $[q, p]$  においても、 $H$  や  $\partial H/\partial t$  が  $t$  によって異なるので、初期状態の  $[q, p]$  が定まっても、 $t$  によって位相空間中に異なる経路を描く。とはいえ、経路を決定する考え方は上の同じであり、そのときの  $\partial H/\partial q_k$  や  $\partial H/\partial p_k$  によって経路が決まる。したがって、初期時条件として、時刻  $t$  と座標と運動量  $[q, p]$  を与えれば、その後の運動は一意的に決まるのだ。

<sup>1</sup>完全に1次元の変数がなくなるわけではない。三次元空間における曲面のような状態と思えばよい。

<sup>2</sup>空間次元が2次元以上になると、位相空間が4次元以上になるので紙面で表現できない。

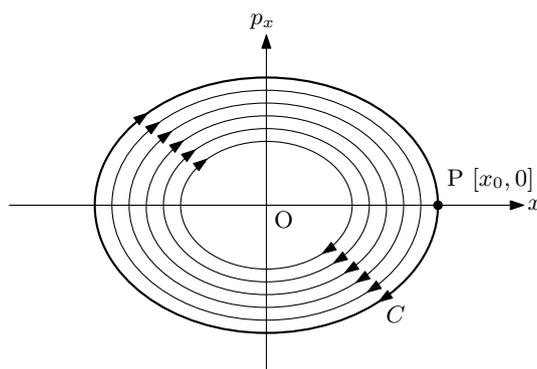


図 6.2: 一次元の調和振動子の位相空間中の運動

一意的に決まるということは、運動経路は枝分かれをすることはないということだ。つまり、同一時刻に位相空間中の任意の1点を通る運動経路は二つ以上存在しない。位置座標  $q_1, q_2, \dots, q_f$  のみでは、日常からわかるように、任意の1点を通る運動経路は無数に想定できる。しかし、運動量  $p_1, p_2, \dots, p_f$  を座標に加えて、 $2f$ 次元の位相空間を考えると、異なる運動経路どうしが交差することがないのだ。例えば、1次元の調和振動子は、位置座標  $x$  のみを考えると、どの振動子も原点を通るのだが、運動量を追加した位相空間を考えると、異なる振動子の運動は、原点を中心とする異なる楕円(図 6.2)を時計回りにたどる経路を描く。このような楕円は無数に想定することができるが、互いに交わることはない。

ハミルトニアンと位相空間を用いた議論は、物体の運動をニュートンやラグランジュの運動方程式とは異なる視点で見ることができる。ニュートンやラグランジュの運動方程式は、 $t$  についての2階の微分方程式であるので、運動を特定するために位置と速度の初期条件が必要である。それに対し、ハミルトニアンは座標を  $q_1, q_2, \dots, q_f$  と  $p_1, p_2, \dots, p_f$  の  $2f$  個の座標成分を必要とする代わりに、方程式が  $t$  についての1階の微分方程式になっている。そのため、位相空間中の初期位置だけ与えれば運動が特定できるのだ。ただし、位相空間中の初期位置には、初期運動量が含まれ、初期運動量は初速度で決まる量なので、ハミルトニアンを用いる議論はニュートンやラグランジュの微分方程式によるアプローチと等価である。

正準方程式(6.4)は、位相空間の各点で、時間に関する導関数  $[\dot{q}_k, \dot{p}_k]$  を与える。それは位相空間における速度とみなせるので、流体における流速の場に類似している。質点の初期条件を与えて運動を解析することは、流線に沿った流体の動きを解析することに相当する。

### 6.3.2 リウビルの定理

質点は運動するとともに、位置  $q_k$  や運動量  $p_k$  が時間経過とともに変化するので、位相空間中の運動として解釈することができる。初期状態として、位相空間中の有限の領域に含

まれる質点の運動を追跡すると、時間経過とともに、その領域は位置や形を変えるだろう。とはいえ、その運動が正準方程式 (6.4) にしたがうなら、その領域は体積が不変である。その性質はリウビルの定理と呼ばれる。

リウビルの定理を示すため、第  $k$  番目の座標成分  $q_k$  と運動量  $p_k$  に着目しよう。他の成分についても同様の議論が成立すると考えればよい。図 6.3 に示すように、初期状態として、位相空間中の長方形の領域 ABCD に存在する質点を考えよう。その領域は、微小時間  $\Delta t$  の経過によって、領域 A'B'C'D' に移動したとする。領域 ABCD に含まれるあらゆる点

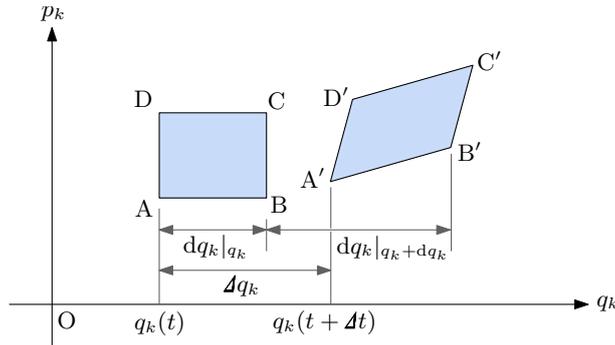


図 6.3: 運動による位相空間中の領域の変化

が、微小時間  $\Delta t$  を経過した後、領域 A'B'C'D' に移動するという意味だ。ここで、点 A の位相空間における位置を  $[q_k, p_k]$  とする。このとき、AA' の水平距離  $\Delta q_k|_{q_k}$  は、

$$\Delta q_k \Big|_{q_k} = \frac{\partial q_k}{\partial t} \Big|_{q_k} \Delta t = \frac{\partial H}{\partial p_k} \Big|_{q_k} \Delta t,$$

で与えられる。右辺の導出には正準方程式 (6.4) を適用した。さらに、 $AB = dq_k$  とすれば、BB' の水平距離  $\Delta q_k|_{q_k + \Delta q_k}$  は、

$$\Delta q_k \Big|_{q_k + \Delta q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \Big|_{q_k + \Delta q_k} \Delta t = \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \Big|_{q_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_k} dq_k \right) \Delta t,$$

となる。したがって、領域 ABCD の水平方向の長さは、微小時間  $\Delta t$  の経過に伴い、

$$\delta \Delta q_k = \Delta q_k \Big|_{q_k + \Delta q_k} - \Delta q_k \Big|_{q_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} dq_k \cdot \Delta t,$$

だけ伸びる。同様の考察をすれば、領域 ABCD の垂直方向の伸びは、

$$\delta \Delta p_k = - \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} dp_k \cdot \Delta t,$$

となるはずだ。この伸びの量に負の符号がついているのは、特別な意図があるわけではなく、正準方程式から素直に計算した結果である。つまり、領域 ABCD は、水平方向が伸びれば、

垂直方向に縮むのだ。簡単のため、初期状態における領域 ABCD が長方形すると、微小時間  $\Delta t$  が十分に小さいならば、移動先の領域 A'B'C'D' も、ほぼ長方形と考えてもよい<sup>3</sup>。したがって、領域 A'B'C'D' の面積は、

$$\begin{aligned} S_{A'B'C'D'} &= \left(1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \Delta t\right) dq_k \cdot \left(1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} \Delta t\right) dp_k \\ &= dq_k dp_k = S_{ABCD}, \end{aligned}$$

となることが導かれる。ここで高次の微小量は無視した。つまり、微小時間を経ても位相空間中の領域の面積は不変である。他の成分についても同様であるので、位相空間中の領域の体積は不変であるといえる。任意時刻への運動は、微小時間における運動の積分であるので、結局、位相空間中の領域の体積は不変のままである。したがって、リウビルの定理が得られる。

**リウビルの定理** 位相空間内に考えた有限の領域内に存在する各点が正準方程式にしたがって運動する場合、その領域の形は変化していくが、体積は不変に保たれる。

リウビルの定理が主張することは、位相空間における点密度が時間経過に対して一定であるということだ。上で説明した例において、領域 ABCD が運動によって領域 A'B'C'D' に変化するとき、領域 ABCD に含まれていた点がすべて領域 A'B'C'D' に含まれるということだ。つまり、時刻  $t = 0$  において領域 ABCD に含まれる点の数と、その領域から変化した領域 A'B'C'D' に含まれる点の数は等しい。しかも、それらの領域の体積が等しいため、点密度は時間経過によらず一定であるということだ。そのような性質は、統計力学では重要な性質として認識されている。

## 6.4 ポアソン括弧式

解析力学において、座標  $q_k$  と運動量  $p_k$  は単なる物理量に収まらず、重要な役割をもっている。その事実がポアソン括弧式と呼ばれる数式に現れる。本節ではポアソン括弧式を定義し、その性質を調べていこう。

<sup>3</sup> 辺 A'D' が垂直方向に対して微小角  $\delta\theta$  だけ傾いたと仮定すると、 $\cos \delta\theta \simeq 1 - \delta\theta^2/2$  のように、2 次の差分しか現れないため、 $\cos \delta\theta = 1$  と考えてもよい。

### 6.4.1 括弧式の定義

解析力学では、座標、運動量、時間の関数で記述される量は力学変数と呼ばれる。力学変数の代表例が、運動エネルギー  $K$ 、角運動量  $L$  である。力学変数は、運動に伴って時間経過とともに変化する。例えば、一般の力学変数  $F$  の時間変化の割合を調べるには、時間微分すればよいので、

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right),$$

なる計算を実行することになる。右辺に含まれる  $\dot{q}_k$  と  $\dot{p}_k$  について正準方程式 (6.4) を適用すると、時間微分は、

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right),$$

のように変形できる。興味深いことに、 $q_k$  と  $p_k$  に含まれる時間依存性がハミルトニアン  $H$  の偏微分で記述できるのだ。

数式 (6.4.1) の右辺の第2項の数式構造は、解析力学において、しばしば現れる。頻繁に現れるのなら、総和記号や偏微分記号を省略した記述:

$$[u, v] = \sum_k \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right), \quad (6.7)$$

を定義しよう。この数式が**ポアソン括弧式**である。当然、 $u$  と  $v$  は力学変数である。ポアソン括弧式を用いると、力学変数  $F$  の時間微分は、

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H],$$

のような簡単な数式で表現できる。特に、 $F$  が明示的に時間の依存性を含んでいない場合、 $dF/dt = [F, H]$  となるので、 $[F, H] = 0$  であれば  $F$  は時間が経過しても常に一定値をとるということだ。

中心力場を運動する物体の角運動量について、時間微分を考えてみよう。中心力が時間依存をもっていないと仮定しよう。そのとき、上で書いたように、時間微分はポアソンの括弧式と等しい。角運動量の  $x$  成分  $l_x$  について、形式的にポアソンの括弧式を展開すると、

$$\frac{dl_x}{dt} = \frac{\partial l_x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial l_x}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial l_x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial l_x}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial l_x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial l_x}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial z},$$

が得られる。角運動量の  $x$  成分は、 $l_x = yp_z - zp_y$  なので、その偏微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_x}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial l_x}{\partial y} &= p_z, & \frac{\partial l_x}{\partial z} &= -p_y, \\ \frac{\partial l_x}{\partial p_x} &= 0, & \frac{\partial l_x}{\partial p_y} &= -z, & \frac{\partial l_x}{\partial p_z} &= y, \end{aligned}$$

となる。一方、ハミルトニアンが  $H = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + U(r)$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial U}{\partial r}, & \frac{\partial H}{\partial p_x} &= \frac{p_x}{m}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial U}{\partial r}, & \frac{\partial H}{\partial p_y} &= \frac{p_y}{m}, \\ \frac{\partial H}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial U}{\partial r}, & \frac{\partial H}{\partial p_z} &= \frac{p_z}{m},\end{aligned}$$

が得られる。これらの偏微分を代入すると、

$$[l_x, H] = \frac{p_z p_y - p_y p_z}{m} + \frac{zy - yz}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0,$$

であることがわかる。この結果は、 $dl_x/dt = 0$  であることを意味する。他の成分 ( $y$  成分と  $z$  成分) も同様なので、結局、 $d\mathbf{l}/dt = 0$  ということだ。つまり、角運動量  $\mathbf{l}$  は保存量である。

特別な場合として、力学変数  $F$  としてハミルトニアン  $H$  を選んだ場合も考えてみよう。その場合、 $H$  の時間微分は、

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = \frac{\partial H}{\partial t},$$

となる。ポアソンの括弧式の定義から  $[H, H] = 0$  であることは容易に理解できるだろう。つまり、 $H$  が明示的に時間の依存性を含んでいなければ、すなわち、 $\partial H/\partial t = 0$  であれば、 $H$  は保存量となる。これはエネルギー保存則に相当する。

ポアソンの括弧式の力学的変数としてハミルトニアンを選んだのと同様に、座標や運動量を選んでもよい。括弧式の二つの変数のうち、一方を座標か運動量に設定した場合、

$$[u, p_j] = \frac{\partial u}{\partial q_j}, \quad [u, q_j] = -\frac{\partial u}{\partial p_j}, \quad (6.8)$$

なる性質を示す。これらの公式を証明するのは容易である。第1の公式は、

$$[u, p_j] = \sum_k \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k \frac{\partial u}{\partial q_k} \delta_{jk} = \frac{\partial u}{\partial q_j},$$

とすればよい。第2の公式も同様に、

$$[u, q_j] = \sum_k \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = -\sum_k \frac{\partial u}{\partial p_k} \delta_{jk} = -\frac{\partial u}{\partial p_j},$$

のようにして証明できる。これらの公式を証明するにあたり、座標  $q_k$  と運動量  $p_k$  が互いに独立、すなわち、

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \delta_{kj}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{kj}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0,$$

であることを利用した。これらの独立性を表す関係式に注意すれば,

$$[q_k, q_j] = 0, \quad [p_k, p_j] = 0, \quad [q_k, p_j] = \delta_{kj}, \quad (6.9)$$

なる関係式も得られる。手順が先ほどと同様であり, 容易に証明できるので, その手順を示すことは省略する。ポアソンの括弧式は, 量子力学では演算子の交換関係に姿を変えて登場する。関係式 (6.9) は, 量子力学では不確定性原理を表現する重要な公式に相当する。

### 6.4.2 点変換に対する不変性

ポアソンの括弧式は点変換に対して不変である。点変換とは, いわゆる座標変換である。つまり, 座標のとり方に関係なく, ポアソンの括弧式が一定ということは, ポアソンの括弧式が物理的に本質的な量であると考えてよさそうだ。

一般化座標  $q_1, q_2, \dots, q_f$  から別の座標  $q'_1, q'_2, \dots, q'_f$  に変換することを考えよう。できるだけ一般的な座標変換を考え, 線形変換にとらわれないことにする。新座標は,

$$q'_k = q'_k(q_1, q_2, \dots, q_f, t),$$

のような形, あるいは, その逆変換:

$$q_k = q_k(q'_1, q'_2, \dots, q'_f, t),$$

で記述できるとする。いくら任意の変換といっても, 1対1対応でなければ都合が悪いので, 1対1対応できる関数に限ることにする。新たな一般化座標も, 当然, 時間で微分することができ,

$$\dot{q}'_k = \dot{q}'_k(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = \frac{\partial q'_k}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial q'_k}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (6.10)$$

のように記述できる。座標の変換では,  $q_j$  と  $t$  にしか依存していなかったが,  $\dot{q}'_k$  の変換では  $\dot{q}_j$  の依存性も含まれていることに注意が必要だ。この変換は,

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q'_1, \dots, q'_f, \dot{q}'_1, \dots, \dot{q}'_f, t) = \frac{\partial q_k}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial q_k}{\partial \dot{q}'_j} \dot{q}'_j, \quad (6.11)$$

のように逆変換の形で書いてもよい。このような点変換によって, ラグランジアン  $L(q, \dot{q}, t)$  は  $L'(q', \dot{q}', t)$  のように変わる。とはいっても, ラグランジアンはエネルギーを表すので, 点変換によって値が変わるわけではなく,  $L' = L$  である。新しいラグランジアン  $L'$  は,

$$p'_k = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k},$$

のように、変換後の座標  $q'_k$  に共役な運動量  $p'_k$  を生成する。運動量は、解析学の公式を用いると、

$$p'_k = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_k} = \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_k} p_j, \quad (6.12)$$

なる変換式が導かれる。しかも、興味深いことに、

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial q_k}{\partial q'_j}, \quad (6.13)$$

なる関係が成立する。この関係は、(6.11) に注目すればよい。座標変換は非線形も許容していたのだが、(6.10) や (6.11) のように、 $\dot{q}_k$  や  $\dot{q}'_k$  についての依存性が1次なので、このような等式が成立するのだ。しかも、 $\dot{q}$  についての依存性は、もはや含まれない。運動量 (6.12) についても同様に  $p_j$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial p'_k}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial q'_k}, \quad (6.14)$$

が得られる。ここで、運動量の変換と座標の変換が逆変換の関係になっている<sup>4</sup> ことに注意が必要である。

座標変換によるポアソンの括弧式の振る舞いを考察しよう。力学変数  $u$  と  $v$  を新たな座標系で、それぞれ、 $u'$  と  $v'$  のように記述することにしよう。そのとき、ポアソンの括弧式は、

$$[u', v'] = \sum_k \left( \frac{\partial u'}{\partial q'_k} \frac{\partial v'}{\partial p'_k} - \frac{\partial u'}{\partial p'_k} \frac{\partial v'}{\partial q'_k} \right),$$

のように書けるはずだ。ポアソンの括弧式に含まれる偏微分に座標変換を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial q'_k} &= \sum_j \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_k} + \sum_j \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q'_k}, \\ \frac{\partial v'}{\partial p'_k} &= \sum_i \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial p'_k}, \end{aligned}$$

が得られる。第1式には  $\partial p_j / \partial q'_k$  の項が含まれるが、第2式には  $\partial q_j / \partial p'_k$  の項が含まれない。それは、 $p_j$  に  $q'_k$  の依存性が含まれるが、 $q_j$  には  $p'_k$  の依存性が含まれないからだ。これら偏微分の変換式を利用してポアソン括弧式の右辺の第1項を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial u'}{\partial q'_k} \frac{\partial v'}{\partial p'_k} &= \sum_k \left( \sum_j \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_k} + \sum_j \frac{\partial v}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q'_k} \right) \sum_i \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial p'_k} \\ &= \sum_k \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_k} \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial p'_k} - \sum_j \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q'_k} \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial p'_k} \right) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>この事実は、テンソルの知識があれば明らかである。運動量がスカラであるラグランジアン  $L$  を速度  $\dot{q}$  で偏微分することによって得られているので、速度の変換と運動量の変換は逆変換の関係になる。

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q_i} \right) \\
&= \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) = \sum_j \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j},
\end{aligned}$$

のように計算できる。第1行目から第2行目への変形には、直前に計算した導関数の変換を適用した。第3行目への変形では、(6.14)を利用した。右辺への数式変形には、 $\partial q_j / \partial q_i = \delta_{ij}$ ,  $\partial p_j / \partial q_i = 0$ なる関係に注意した。一方、同様の手順によって、

$$\sum_k \frac{\partial u'}{\partial p'_k} \frac{\partial v'}{\partial q'_k} = \sum_j \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j},$$

であることが示せる。したがって、

$$[u', v'] = [u, v], \quad (6.15)$$

が成立する。つまり、ポアソン括弧式は点変換に対して不変である。言い換えると、ポアソン括弧式は、座標の設定に依存しない物理量を表現している。つまり、ポアソン括弧式は本質的な物理量を与えると考えてよいだろう。

## 6.5 正準変換

一般化座標と共役な運動量を変数変換することによって、循環座標を増やすなど、取り扱いが簡単な系をつくることができる。そのような変数変換は正準変換と呼ばれる。

### 6.5.1 位相空間中の点変換

前節で確認したように、一般化座標  $q_k$  から  $q'_k$  への点変換はポアソン括弧式  $[u, v]$  を不変に保つ。このとき、ハミルトンの正準方程式は、

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

から、変換後の位相空間中の座標  $[q', p']$  に対応し、

$$\frac{dq'_k}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'_k}, \quad \frac{dp'_k}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q'_k},$$

に変換される。変換の前後の数式は、変数にプライム (') が付加されただけであり、同じ数式である。

自由度が  $f$  の位相空間は  $2f$  次元空間であるが、点変換は  $q_1, \dots, q_f$  の  $f$  個の変数を変換しただけにすぎず、運動量  $p_1, \dots, p_f$  は  $q_k$  につられて変換されたにすぎない。それに対し、 $p_k$  を自由変換することはできないかを考えてみよう。もっとも、 $q_k$  と無関係に  $p_k$  を変換すると、正準方程式やポアソン括弧式を不変に保つことができなくなる。そうすると、物理的に意味がない形になる。とはいえ、点変換より自由な変換が可能かどうか考察してみよう。

考察のための簡単な例として、1次元の調和振動子を調べてみよう。調和振動子のハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + m^2\omega^2x^2),$$

で与えられる。このハミルトニアンが  $H = E$  なる定数とすると、位相空間中に楕円を描く。ここで、楕円を円にするような変換を考えよう。とは言っても、単純に  $q \equiv m\omega x$  とすればよいわけではない。なぜならば、そのような定義のもとで、正準方程式が、

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{q}{m} = -\omega x,$$

のように、実際の  $\dot{p}_x$  と異なる結果を導くからだ。つまり、 $q \equiv m\omega x$  はハミルトニアンに円を描かせる、正準方程式がうまく機能しないのだ。その意味で、慎重に変換を選ばなければならない。変換の候補として、

$$q \equiv \gamma x,$$

を考えよう。ここで、 $\gamma$  は未知数であり、これからの考察の結果として決定のだ。この変換のもとでは、ラグランジアン  $L$  は、

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2x^2 = \frac{m}{2\gamma^2}(\dot{q}^2 - \omega^2q^2),$$

のように書き換えられる。ラグランジアン  $L$  によって、運動量  $p$  が、

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{m}{\gamma^2}\dot{q},$$

となるので、速度  $\dot{q}$  は、

$$\dot{q} = \frac{\gamma^2}{m}p,$$

である。処方箋にしたがってハミルトニアンを計算すると、

$$H = p\dot{q} - L = p \cdot \frac{\gamma^2}{m}p - \frac{m}{2\gamma^2} \left( \frac{\gamma^2}{m}p \right)^2 + \frac{m}{2\gamma^2}\omega^2q^2 = \frac{\gamma^2}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2}q^2,$$

が得られる。このハミルトニアンが新しい位相空間 ( $qp$  平面) で円を描くためには、

$$\frac{\gamma^2}{2m}p^2 = \frac{m\omega^2}{2\gamma^2},$$

でなければならない。ここで未知数  $\gamma$  が決定できるわけだ。すなわち、未知数  $\gamma$  は、

$$\gamma = \sqrt{m\omega}, \quad (6.16)$$

であるべきことが導かれた。したがって、

$$q = \sqrt{m\omega} x \quad p = \sqrt{\frac{m}{\omega}} \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p_x, \quad (6.17)$$

のように変換すれば、ハミルトニアン  $H$  は、

$$H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2), \quad (6.18)$$

となる。確かに、円を描く関数になっている。得られたハミルトニアンが、正準方程式によって、意味のある  $\dot{q}$  と  $\dot{p}$  を導いてくれるかが問題だ。正準方程式を用いて  $\dot{q}$  と  $\dot{p}$  を計算すると、

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega q,$$

が得られるわけだが、(6.17) に注意して、変数を  $x$  と  $p_x$  に戻すと、

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p_x, \quad \dot{p}_x = -m\omega^2 x,$$

のように、変換前と同一の数式に戻った。つまり、座標変換 (6.17) が、ハミルトニアンが円を描くだけでなく、正準方程式も一貫して成立させていることを意味する。

得られた変換によってハミルトニアンが円を描くようになった。全エネルギーを  $E$  とすると、その円の半径は  $\sqrt{2E/\omega}$  となる。しかも、図 6.4 に示すように、 $p$  軸を水平方向に、 $q$  軸を垂直方向にとると、時間経過に伴って運動軌跡は円周を反時計回りにまわるので、数学記述の上で好都合だ。図 6.1 では運動量を縦軸にとっていたので、数学的取り扱いを優

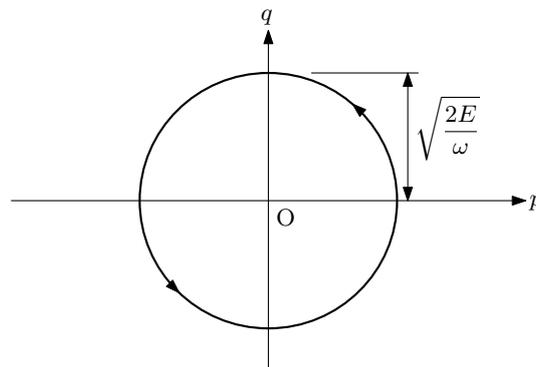


図 6.4: 点変換 (6.17) による 1次元調和振動子の位相空間

先し、座標軸のとり方を逆にしたわけだ。容易にわかるように、 $\dot{q} = \omega p$  と  $\dot{p} = -\omega q$  の組み合わせは、等速円運動に相当する。

位相空間を思い切って、極座標に変換するとどうだろう？ つまり、2次元座標  $[p, q]$  を極座標系  $[P, Q]$  に変換する。その変換は、

$$P = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad Q = \arctan \frac{q}{p}, \quad (6.19)$$

で与えるとよいだろう。このように定義すると、ハミルトニアンは、

$$\tilde{H} = \frac{\omega}{2} P^2,$$

となるのだが、このハミルトニアンに正準方程式を適用すると、

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega P, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0,$$

のように誤った結果が得られるのだ。つまり、この  $P$  と  $Q$  は正準方程式と一貫性がないのだ。もともと、 $Q$  は位相空間における位相角であり、位相空間で等速円運動をするはずだったので、 $\dot{Q} = \omega$  を期待していた。実際に (6.19) を時間微分すると、

$$\dot{Q} = \frac{\dot{q}p - q\dot{p}}{p^2 + q^2},$$

が得られ、この導関数に  $\dot{q} = \omega p$  と  $\dot{p} = -\omega q$  を代入すると、確かに  $\dot{Q} = \omega$  が得られる。それならば、 $\dot{Q} = \omega$  を前提条件にして、正準方程式が成立するような  $P$  を特定しよう。正準方程式によって、

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega,$$

となるはずなので、単純に  $\tilde{H} = \omega P$  としてみよう。もう一方の正準方程式が、

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q},$$

であり、この数式に  $\tilde{H} = \omega P$  を代入すると、 $\dot{P} = 0$  が導かれる。すなわち、 $P$  は定数だ。これは、直接的にハミルトニアンの時間微分がゼロであることも意味するので、エネルギー保存則と矛盾しない。得られた結果を書くと、

$$Q = \arctan \frac{q}{p}, \quad P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \quad \tilde{H} = \omega P, \quad (6.20)$$

のように変換式とハミルトニアンが特定された。この結果を見ると、 $\omega$  も  $P$  定数だから、確かにハミルトニアン  $H$  が定数になっている。新たに得られた位相空間  $[Q, P]$  を描くと図 6.5 が得られる。この位相空間における運動は、 $Q$  軸に平行に等速直線運動である。この結果にたどり着くまでには、実際の物理現象に忠実な  $x$  と  $p_x$  から始め、それらが位相空間中で描く楕円を円になるように  $q$  と  $p$  に変換し、さらに、 $P$  と  $Q$  に変換したわけだ。ここで、 $P$  を  $Q$  を本来の物理量  $x$  と  $p_x$  を用いて書くと、

$$Q = \arctan \frac{m\omega x}{p_x}, \quad P = \frac{p_x^2 + m^2\omega^2 x^2}{2m\omega}, \quad (6.21)$$

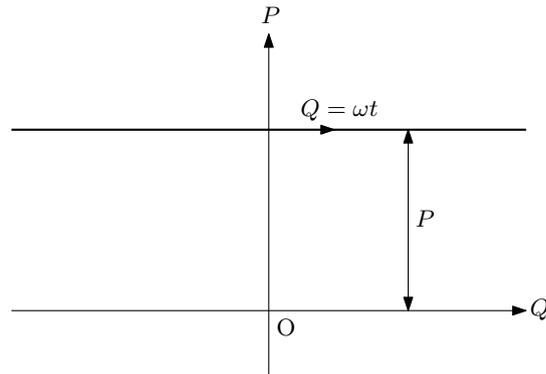


図 6.5: 点変換 (6.20) による 1 次元調和振動子の位相空間

のようになる。形式上,  $P$  は一般化運動量と呼ぶべきかもしれないが, このように変換すると  $P$  が実質的に運動量として機能するとはいいがたい。なにしろ, (6.21) に示すように,  $Q$  と  $P$  の双方に  $x$  と  $p_x$  が混在して影響しているのだ。とはいえ, うまく変換してやれば, 必要な座標軸を減らせることを例をもって示すことができた。

**作用変数と角変数** 一次元の調和振動子の位相空間は,  $[x, p_x]$  での表現では楕円を描いていた。その楕円の面積を評価してみよう。その面積は,

$$S = \oint p_x dx,$$

なる積分で計算できる。ここで, 位相空間中の楕円を 1 周する区間を積分する意味で周回積分の記号を用いた。調和振動子の振幅を  $A$  とすると, 実際の計算としては, 時間  $t$  の経過とともに,  $x$  を  $A$  から  $-A$  まで減少させながら積分し, その後,  $x$  を  $-A$  から  $A$  まで増加させながら積分する。ここで, 調和振動子の位置が  $x = A \sin(\omega t + \phi)$  で与えられるとすると,

$$dx = A\omega \cos(\omega t + \phi) dt, \quad p_x = mA\omega \cos(\omega t + \phi),$$

周回積分  $S$  は,

$$S = \oint p_x dx = \int_0^{2\pi/\omega} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt = \pi m\omega A^2,$$

のように計算される。ここで, 調和振動子が保存するエネルギーが,

$$E = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2,$$

であることに注目すると, 周回積分は,

$$\oint p_x dx = \frac{2\pi}{\omega} E,$$

のように、エネルギーと関係があることが導かれる。この関係を参考にして、

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint p_k dq_k, \quad (6.22)$$

なる周回積分は**作用変数**として定義される。一次元の調和振動子の場合、作用変数は、

$$J_x = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{E}{\omega}, \quad (6.23)$$

である。変換式 (6.21) によると、 $P$  がまさに、作用変数だったわけだ。

作用変数  $J_k$  は、いかなる一般化座標  $q_k$  の定義においても、エネルギーと時間の積に相当する次元をもつ。そのため、作用変数を一般化運動量とみなすと、それに共役な一般化座標は次元をもたない。一次元の調和振動子を参考に、そのような一般化座標は角度であるとの解釈で、**角変数**と呼ばれ、 $w_k$  なる記号で記述されることが多い。例えば、(6.21) で定義される  $Q$  は、図 6.4 において動点と原点を結ぶ線分が  $p$  軸となす角度である。

## 6.5.2 正準変換 I

前項では 1 次元調和振動について座標と運動量を位相空間内の座標と解釈し、遺贈空間ないで座標変換を適用することによって、ハミルトニアン  $\tilde{H}$  が  $Q$  に依存しない形に書き換えた。つまり、 $Q$  が循環座標となり、その結果、 $P$  を定数になったのだ。同様にして、任意の運動についても、位相空間に循環座標をつくっていくことが可能である。本項では、循環座標をつくる手法を一般的に説明する。

自由度が  $f$  の系について、一般化座標  $q_k$  と、それに共役な一般化運動量  $p_k$  が与えられたとき、これらの物理量と時間  $t$  の関数:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \\ Q_2 &= Q_2(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \\ &\vdots \\ Q_f &= Q_f(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \\ P_1 &= P_1(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \\ P_2 &= P_2(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \\ &\vdots \\ P_f &= P_f(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f, t), \end{aligned} \quad (6.24)$$

が、変換されたハミルトニアン  $\tilde{H}(Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f, t)$  に関して、変換前と同様の正準方程式:

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}, \quad (6.25)$$

を満たすとき、変換  $[q, p] \mapsto [Q, P]$  は**正準変換**と呼ばれる。点変換も正準方程式を成立させるので、点変換は正準変換の特殊な例である。

正準方程式が拡張されたハミルトンの原理から導かれるので、正準方程式 (6.25) を満たす  $[Q, P]$  の組み合わせを得るにはハミルトンの原理から始めるのがよいだろう。つまり、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) \right] dt = 0,$$

に基づいて  $[Q, P]$  を決めるのだ。この関係を満たす条件として、

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{dW}{dt}, \quad (6.26)$$

を考えよう。ここで、 $W$  は1価で連続な関数であり、 $Q_k, P_k, t$  に依存すると仮定する。とは言っても、 $Q_k, P_k$  が  $t$  に依存するため、 $W$  は  $t$  だけの関数と考えることができ、

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial W}{\partial t} dt = W(Q(t_2), P(t_2), t_2) - W(Q(t_1), P(t_1), t_1),$$

のように積分区間の両端 ( $t_1$  と  $t_2$ ) だけで値が決まり、途中の区間とは無関係である。つまり、 $W$  は変分の停留性とは無関係なので、解を考える際の自由度として、(6.26) の右辺の最終項を追加したわけだ。

数式 (6.26) は、 $q_k, p_k, Q_k, P_k, t$  といった  $4f+1$  個の変数を含む。とはいえ、変換式 (6.24) で  $[q, p]$  と  $[Q, P]$  の間の関係が規定されているので、 $4f+1$  個の変数のうち  $2f$  個は残りの  $2f+1$  を用いて記述できるはずだ。その前提条件のもとで、 $p, P$  を  $q, Q$  を用いて記述することにしよう。すなわち、取り扱う関数が  $q, Q, t$  の関数として表現できると考えるのだ。そのとき、 $W$  も  $W(q, Q, t)$  のような関数であるので、

$$\frac{dW}{dt} = \sum_k \left( \frac{\partial W}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial W}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right) + \frac{\partial W}{\partial t},$$

のように書くことができる。この数式を (6.26) に代入すると、

$$\sum_k \left( p_k - \frac{\partial W}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k - \sum_k \left( P_k - \frac{\partial W}{\partial Q_k} \right) \dot{Q}_k = H - \tilde{H} + \frac{\partial W}{\partial t},$$

が得られる。この数式が恒等的に成立するには、

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad P_k = \frac{\partial W}{\partial Q_k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (6.27)$$

でなければならない。特に、変換式 (6.24) が明示的に  $t$  を含んでいなければ、 $\partial W / \partial t = 0$  だから、

$$\tilde{H} = H, \quad (6.28)$$

となる。すなわち、ハミルトニアンは不変である。当初、解を考えるときの自由度として関数  $W$  を導入したのだが、(6.27) を見ると、皮肉にも、 $W$  が一般化運動量  $p_k$  や  $P_k$  を決めている。

**一次元調和振動子** 本項で説明した内容を事例によって示そう。例として、1次元調和振動子を考えよう。変換式(6.19)に注目すると、一般化運動量が、

$$p = \frac{q}{\tan Q}, \quad P = \frac{q^2}{2 \sin^2 Q},$$

なる数式で与えられることがわかる。これらの一般化運動量を導くためには、関数  $W$  は、

$$W = \frac{q^2}{2 \tan Q},$$

でなければならない。この  $W$  は、確かに、運動量  $p$  と  $P$  を、

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad P = \frac{\partial W}{\partial Q},$$

によって与えることが確認できる。しかも、時間  $t$  の依存性を含んでいないため、 $\tilde{H} = H$  である。

ここで示した調和振動子の例では、 $p(q, Q)$  と  $P(q, Q)$  から  $W(q, Q)$  を定めた。逆に、 $W$  を先に定めてから(6.27)を用いて  $p$  と  $P$  を決定することもある。そのような場合、関数  $W$  は、運動量やハミルトニアンの変換を与えることになるので、変換の**母関数**と呼ばれる。

### 6.5.3 正準変換 II

前項では、一般化座標  $q$  と  $Q$  を与え、母関数  $W(q, Q)$  を用いて一般化運動量  $p$  と  $P$  を得る方法を示した。本項では、 $q$  と  $P$  が与えられる場合を考えよう。考察を進めるため、(6.26)を、

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) = - \sum_k Q_k \dot{P}_k - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{d}{dt} \left( W + \sum_k P_k Q_k \right), \quad (6.29)$$

のように書き換えておく。ここで、

$$P_k \dot{Q}_k = \frac{d}{dt} P_k Q_k - Q_k \dot{P}_k,$$

なる関係を利用した。さらに、 $p$  と  $Q$  の関数として、

$$W' \equiv W + \sum_k P_k Q_k,$$

を定義すると、その時間微分は、

$$\frac{dW'}{dt} = \sum_k \left( \frac{\partial W'}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial W'}{\partial P_k} \dot{P}_k \right) + \frac{\partial W'}{\partial t},$$

となる。この導関数を (6.29) に代入すると,

$$\sum_k \left( p_k - \frac{\partial W'}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \sum_k \left( Q_k - \frac{\partial W'}{\partial P_k} \right) \dot{P}_k = H - \tilde{H} + \frac{\partial W'}{\partial t},$$

が得られる。この等式を恒等的に成立させるための条件として,

$$p_k = \frac{\partial W'}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial W'}{\partial P_k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial W'}{\partial t}, \quad (6.30)$$

が導出される。関数  $W$  が任意であるので、当然、 $W'$  も任意である。関数  $W'$  が、 $W' \equiv W + \sum P_k Q_k$  のように定義されていたとしても、関数の任意性には影響しない。

関数  $W$  は  $q$  と  $P$  の関数で与えられるだけでなく、 $p$  と  $Q$  の関数で与えられる場合についても同様に正準変換の公式を導出することが可能だ。既に導出した例を含めると、関数  $W$  は、 $W_{pP}(p, P, t)$ ,  $W_{pQ}(p, Q, t)$ ,  $W_{qQ}(q, Q, t)$ ,  $W_{qP}(q, P, t)$  の4種類が考えられる。それらについて、正準方程式の公式を並べると,

$$\text{for } W_{qP}(q, P, t): \quad p_k = \frac{\partial W_{qP}}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial W_{qP}}{\partial P_k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial W_{qP}}{\partial t}, \quad (6.31)$$

$$\text{for } W_{pQ}(p, Q, t): \quad q_k = -\frac{\partial W_{pQ}}{\partial p_k}, \quad P_k = -\frac{\partial W_{pQ}}{\partial Q_k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial W_{pQ}}{\partial t}, \quad (6.32)$$

$$\text{for } W_{qQ}(q, Q, t): \quad p_k = \frac{\partial W_{qQ}}{\partial p_k}, \quad P_k = -\frac{\partial W_{qQ}}{\partial Q_k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial H_{qQ}}{\partial t}, \quad (6.33)$$

$$\text{for } W_{pP}(p, P, t): \quad q_k = -\frac{\partial W_{pP}}{\partial p_k}, \quad Q_k = \frac{\partial W_{pP}}{\partial P_k}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial H_{pP}}{\partial t}, \quad (6.34)$$

のようになる。補足をしておくと、 $W_{qp}(q, p, t)$  や  $W_{QP}(Q, P, t)$  は考えていない。なぜなら、関数  $W$  は正準変換を与えるための関数であるので、変換前の物理量  $[p, q]$  と変換後の物理量  $[P, Q]$  の組み合わせを変数を変数として含むような関数でなければならないからだ。これらの正準変換を使った例を以下に示していこう。

**例 1: 恒等変換** 正準変換を与える関数  $W$  が,

$$W = \sum_k P_k q_k,$$

のように定義されるとき、上に示した公式によって,

$$p_k = P_k, \quad Q_k = q_k,$$

のように一般化座標と一般化運動量が変換される。変換されると言っても、単に、記号を入れ替えただけに過ぎない。このような変換は恒等変換と呼ばれる。

**例 2: カルテシアン座標と極座標** 二次元のカルテシアン座標  $[q_1, q_2] = [x, y]$  から極座標  $[Q_1, Q_2] = [r, \theta]$  への変換を考えよう。このとき, 空間座標と運動量の成分は,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$p_x = p_r \cos \theta - \frac{p_\theta}{r} \sin \theta, \quad p_y = p_r \sin \theta + \frac{p_\theta}{r} \cos \theta,$$

となるので, 一般化座標と一般化運動量として表記すると,

$$q_1 = Q_1 \cos Q_2, \quad q_2 = Q_1 \sin Q_2,$$

$$P_1 = p_1 \cos Q_2 - \frac{P_2}{Q_1} \sin Q_2, \quad P_2 = p_1 \sin Q_2 + \frac{P_2}{Q_1} \cos Q_2,$$

が得られる。ここで,  $Q$  と  $p$  を,  $q$  と  $P$  で表現してみると,

$$Q_1 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad Q_2 = \arctan \frac{q_2}{q_1},$$

$$p_1 = \frac{P_1 q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \frac{P_2 q_2}{q_1^2 + q_2^2}, \quad p_2 = \frac{P_1 q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + \frac{P_2 q_1}{q_1^2 + q_2^2},$$

が得られる。ここで, (6.32) に参照して変換の母関数  $W_{pQ}$  を決定すると,

$$W_{pQ} = P_1 \sqrt{q_1^2 + q_2^2} + P_2 \arctan \frac{q_2}{q_1},$$

が得られるのだ。得られた母関数を当初の記号で書き換えると,

$$W_{p_x r} = p_x \sqrt{x^2 + y^2} + P_\theta \arctan \frac{y}{x},$$

なる数式が得られる。

同じ点変換について,  $q$  と  $P$  を  $Q$  と  $p$  で表現すると, 変換の母関数は異なる形式の数式になる。準備として, 一般化座標と一般化運動量を記述すると,

$$q_1 = Q_1 \cos Q_2, \quad q_2 = Q_1 \sin Q_2,$$

$$P_1 = p_1 \cos Q_2 + p_2 \sin Q_2, \quad P_2 = -p_1 Q_1 \sin Q_2 + p_2 Q_1 \cos Q_2,$$

のようになる。これらの数式について, (6.32) を参照すると,

$$W_{pQ} = -p_1 Q_1 \cos Q_2 - p_2 Q_1 \sin Q_2,$$

なる変換の母関数が得られる。この関数を当初の記号を用いて書き換えると,

$$W_{pQ} = -p_x r \cos \theta - p_y r \sin \theta,$$

が得られる。母関数  $W_{pQ}$  が逆正接関数を含んでいたのに対し,  $W_{pQ}$  は正弦関数と余弦関数を含んでいる。このように, どの物理量で記述するかによって母関数の形式が大きく異なる。

**位相空間の回転運動** 時間  $t$  の依存性を明示的に含む変換を考えてみよう。変換の母関数  $W$  が,

$$W = \frac{q^2 \cos \omega t - 2qQ + Q^2 \cos \omega t}{2 \sin \omega t}, \quad (6.35)$$

のように定義されているとする。この  $W$  の定義からただちに,

$$Q = -p \sin \omega t + q \cos \omega t, \quad q = P \sin \omega t + Q \cos \omega t, \quad (6.36)$$

が得られる。第1の式は,  $p = \partial W / \partial q$  を計算して得られる方程式を  $Q$  について解けば導出できる。第2の式は,  $P = \partial W / \partial Q$  を計算して得れる方程式を  $q$  について解けば導出できる。これらの数式を整理すると,

$$P = p \cos \omega t + q \sin \omega t, \quad Q = -p \sin \omega t + q \cos \omega t, \quad (6.37)$$

$$p = P \cos \omega t - Q \sin \omega t, \quad q = P \sin \omega t + Q \cos \omega t, \quad (6.38)$$

なる関係が得られる。つまり,  $[p, q]$  を時間  $t$  の経過に対して角速度  $\omega$  で回転させると  $[P, Q]$  が得られるということだ。なお,  $W$  を  $t$  で偏微分すると,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{q^2 + Q^2 - 2qQ \cos \omega t}{2 \sin^2 \omega t} \omega = -\frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2),$$

となるので, 変換後のハミルトニアンは,

$$\tilde{H} = H(P, Q) - \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2),$$

となる。

前に示したように, 調和振動子の振幅を調整すれば, 位相空間を円運動するような形態を実現することが可能である。そのとき, ハミルトニアン  $H$  は,

$$H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2) = \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2),$$

であるので, 最終的なハミルトニアンが,

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

となってしまうのだ。実は, 時間  $t$  の依存性をもってしまった時点で, ハミルトニアンは系のエネルギーという意味ではなくなっている<sup>5</sup>。だから, ゼロになっても慌てる必要はない。ハミルトニアンがゼロになっていれば,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0,$$

<sup>5</sup>エネルギー保存則が表現できなくなっているのが理由だ。

が、ただちに得られるので、

$$Q = \text{const}, \quad P = \text{const},$$

が導かれるのだ。つまり、1次元振動についての位相空間を等速で回転運動させた新たな位相空間においては、振動子は静止する定点となる。このように書いたものの、運動しているものが定点に変換されると思ってはいけない。このような結果になるのは、時間依存性を明確に分離していることに起因するのだ。数式(6.36)に記述されている $q$ をもう少し変形すると、

$$q = \sqrt{P^2 + Q^2} \sin(\omega t + \phi),$$

のような数式に書き換えられる。ただし、 $\phi$ は定数である。これが、角速度 $\omega$ で運動する調和振動子でならば、 $P$ と $Q$ は振動子の振幅を与える定数なのだ。時間経過とともに運動する要素は、 $\sin(\omega t + \phi)$ に含まれている。

#### 6.5.4 ハミルトン・ヤコビの方程式

前項では調和振動子の物理量を様々な方法で変形し、最後にはハミルトニアンをゼロにした。他の運動でもそのような変形が可能であるかを調べよう。

位相空間における変換の母関数 $W$ から始めよう。母関数 $W$ は $q, P, t$ の関数であるとする。そのとき、正準変換は、(6.31)にしたがうので、

$$p_k = \frac{\partial}{\partial q_k} W(q, P, t), \quad Q_k = \frac{\partial}{\partial P_k} W(q, P, t), \quad (6.39)$$

で与えられる。変換後のハミルトニアン $\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$ が $\tilde{H} = 0$ となるためには、

$$\frac{\partial}{\partial t} W(q, P, t) = -H(q, p, t), \quad (6.40)$$

でなくてはならない。この条件を満たす $W$ が特定できれば、正準方程式によって、

$$\frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0, \quad (6.41)$$

となるので、 $P_k$ が一定となる。その定数を $\alpha_k$ としよう。つまり、 $P_k = \alpha_k$ とする。この数式を(6.39)の第1式に代入し、その結果を6.40に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} W(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f, t) + H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}, t\right) = 0, \quad (6.42)$$

が得られる。この数式が、変換の母関数 $W$ が満たすべき方程式であり、ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式と呼ばれる。さらに、この方程式の解 $W$ はハミルトンの主関数と呼ば

れる。ハミルトン・ヤコビの微分方程式 (6.42) は,  $q_1, \dots, q_f$  と  $t$  を変数とする 1 回の微分法定期なので, その解  $W$  には  $f + 1$  個の積分定数が現れる。つまり, その微分方程式だけでは解が不定となるので, 初期条件を与えて積分定数を決定すべきである。

ハミルトニアンがゼロ ( $\tilde{H} = 0$ ) ということは,  $P_k$  だけでなく  $Q_k$  も定数である。そこで,  $Q_k = \beta_k$  とおき,  $P_k = \alpha_k$  とともに (6.39) に代入すると,

$$p_k = \frac{\partial}{\partial q_k} W(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f, t), \quad (6.43a)$$

$$\beta_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} W(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f, t), \quad (6.43b)$$

が得られる。これらの方程式は,  $q_1, \dots, q_f$  と  $p_1, \dots, p_f$  の  $2f$  個の未知数を含むが, 方程式も  $2f$  個あるのですべての未知数が決定できる。この手法ではニュートンの運動方程式やラグランジュの運動方程式, さらに, ハミルトンの正準方程式を直接解かずに物体の運動を決定する。その手法の指針は, (6.42) を解くことによってハミルトンの主関数  $W$  を特定することである。

ハミルトニアンが,  $t$  の依存性を明示的に含まず,  $q$  と  $p$  のみの関数である場合, ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式は,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = 0, \quad (6.44)$$

となる。その場合,  $W$  を  $q$  の関数と  $t$  の関数の和として,

$$W = S(q_1, \dots, q_f) + \Theta(t),$$

であると仮定する。これを (6.44) に代入すると,

$$\frac{d\Theta}{dt} + H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = 0,$$

が得られる。第 1 項は  $t$  の関数であり, 第 2 項は  $q$  の関数である。この数式が恒等的に成立するには, 第 1 項と第 2 項の双方が定数でなければならない。そこで, 定数  $E$  を用いて  $H = E$  とすると,  $d\Theta/dt = -E$  である。つまり,

$$\Theta(t) = C - Et,$$

である。なお,  $C$  は積分定数である。また, 先ほど書いた  $H = E$  は丁寧に書くと,

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) = E, \quad (6.45)$$

である。この方程式もハミルトン・ヤコビの偏微分方程式と呼ばれる。この偏微分方程式を解いて関数  $S$  を特定するには,  $f$  個の積分定数が現れる。そのうちの一つは, 定数  $E$  と

の関係で決定できるので、新たに必要な定数は  $f - 1$  個である。それらの定数を  $\alpha_2, \dots, \alpha_f$  と書こう。個のように記号を設定したのは、 $\alpha_1$  が  $E$  との関係で決まることを意図している。そのとき、ハミルトンの主関数は、

$$W = S(q_1, \dots, q_f, \alpha_2, \dots, \alpha_f) - Et, \quad (6.46)$$

なる形で書くことができる。このとき、

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E} - t, \quad \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} \quad (k = 1, 2, \dots, f; j = 2, 3, \dots, f), \quad (6.47)$$

によって解を特定すればよい。これらの式は、 $2f$  の方程式による連立方程式である。数式に明示していないが、これらはすべて、 $q_1, \dots, q_f$  を変数として含んでいる。方程式を解いて、 $q_1, \dots, q_f$  と  $p_1, \dots, p_f$  を特定することによって運動が決定できるのだ。なお、特定される座標と運動量は、 $\beta_1, \dots, \beta_f, E, \alpha_2, \dots, \alpha_f$ , および、 $t$  の関数として表される。

**中心力場内の運動** ポテンシャル  $U(r)$  が与えられる中心力場を運動する質点の運動を考えよう。二次元の極座標  $[r, \theta]$  を用いて、ハミルトニアンを記述すると、

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 \right) + U(r),$$

となる。ハミルトニアンを、時間  $t$  を含まないハミルトン・ヤコビの偏微分方程式として書き換えると、

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + U(r) = E,$$

が得られる。中心力場において、 $\theta$  は循環座標であり、 $p_\theta$  は一定であるので、 $p_\theta = \alpha$  とおくことにする。そのとき、

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \alpha,$$

であるので、 $S = S_r(r) + \alpha\theta$  となるはずだ。これをハミルトン・ヤコビの偏微分方程式に代入すると、

$$\left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 = 2m[E - U(r)] - \frac{\alpha^2}{r^2},$$

がえられる。つまり、関数  $S_r(r)$  は、

$$S_r(r) = \pm \int \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{\alpha^2}{r^2}} \, dr,$$

である。したがって、関数  $S$  は、

$$S = \pm \int \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{\alpha^2}{r^2}} \, dr + \alpha\theta,$$

のように表される。関数  $S$  が特定できれば, (6.47) を用いて運動量と  $\beta$  を計算できる。具体的には,

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \pm \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{\alpha^2}{r^2}}, \quad (6.48a)$$

$$\beta_r = \frac{\partial S}{\partial E} - t = \pm \int \frac{m \, dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \alpha^2/r^2}} - t, \quad (6.48b)$$

$$\beta_\theta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \pm \int \frac{\alpha}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \alpha^2/r^2}} \frac{dt}{r^2} + \theta, \quad (6.48c)$$

となる。なお, 運動量の  $\theta$  成分は, 既に述べたように  $p_\theta = \alpha$  なる定数である。得られた第1式は, 言うまでもなく運動量の  $r$  成分である。第2式は原点からの距離  $r$  を時間  $t$  の関数で表現し, 軌道を与える。第3式は  $r$  と  $\theta$  の関係によって軌道の形状を与える。第2式と第3式から  $r$  を消去すれば,  $\theta(t)$  が得られる。

## 第7章 複数質点の微小振動

解析力学の応用として振動現象を取り扱おう。本章で扱う振動現象は、二重振り子のよ  
うに複数の振動子が連なった運動だ。複数の振動子が連なった構造は、物質内部の熱運動  
の解析や、連続体における歪みの伝搬などに応用される。複数の振動子が津習った構造で  
は、個々の振動子に作用する力の特定が難しいためニュートンの記述が容易ではない。そ  
のような問題は、解析力学を用いると比較的容易に解析できる。

### 7.1 二重振り子

二重振り子の問題は複数の振動子を取り扱う問題の基本となる題材だ。振動子が1個  
の場合に比べ、2個になっただけで問題はかなり複雑になる。一般的な二重振り子は解析  
的な手法での評価が困難であるので、本節では、微小振動に限定して解析することにする。  
限定された条件での取り扱いであるが、二重振り子で取り扱う解析的な手法は、本章の意  
向で取り扱う振動解析の基礎となる。

図7.1に示すように、原点Oに支点を設け、長さ $l_1$ のひもに質量 $m_1$ のおもりを取り付け  
る。さらに、そのおもりに、質量 $m_2$ のおもりを取り付けた長さ $l_2$ のひもを接続する。こ  
れらのおもりを自由に運動させた系が二重振り子だ。ここでは簡単のため、二重振り子を  
鉛直面内で小さく振動させる場合を考察する。

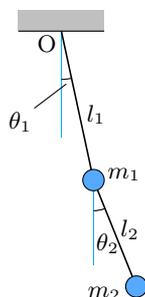


図 7.1: 二重振り子の条件設定

おもりに取り付けられたひも $l_1$ と $l_2$ が、それぞれ、鉛直下方となす角を $\theta_1$ と $\theta_2$ とする。  
これらを一般座標とする。ひもの長さ $l_1$ と $l_2$ が一定であるなら、その長さが束縛条件とな

り、おもりの位置は  $l_1$  と  $l_2$  の組み合わせで確定する。このとき、二重振り子全体の運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2,$$

となるはずだ。右辺の第1項がおもり  $m_1$  の運動エネルギー、第2項がおもり  $m_2$  の運動エネルギーだ。

二重振り子のポテンシャルエネルギーを考えよう。ポテンシャルエネルギーは、 $\theta_1 = \theta_2 = 0$  の場合を基準 ( $U = 0$ ) と考えると、

$$U = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)],$$

となる。取り扱いを簡単にするため、角度  $\theta_1$  と  $\theta_2$  が微小な場合に限定しよう。とはいえ、上の式は1次の項がないので2次近似をする。その結果、ポテンシャルエネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}m_1 g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g (l_1 \theta_1^2 + l_2 \theta_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2 \theta_2^2, \end{aligned}$$

なる形で書かれる。これでラグランジアンを決定する材料がそろった。微小振動をする二重振り子のラグランジアン  $L (= K - U)$  は、

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right. \\ &\quad \left. - (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 - m_2 g l_2 \theta_2^2 \right], \end{aligned} \quad (7.1)$$

のように定義できる。ラグランジアンが定義できれば、各質点に作用する力を特定しなくてもよいのが解析力学の利点だ。この場合、ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} = \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \quad (j = 1, 2),$$

から具体的な運動方程式を導けばよい。ラグランジアン of 運動方程式から得られる方程式は、

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 &= -(m_1 + m_2) g \theta_1, \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 &= -g \theta_2, \end{aligned} \quad (7.2)$$

となる。この微分方程式を解けば、微小振動の条件で、二重振り子の問題を解析できるわけだ。

本項ではさらに簡略化し、 $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$  のように限定しよう。その条件のもとでは、上に示した運動方程式は、

$$\begin{aligned} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 &= -2\gamma\theta_1, \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 &= -\gamma\theta_2, \end{aligned} \quad (7.3)$$

のように書き換えられる。ただし、 $\gamma \equiv g/l$ とおいた。この方程式を解くには、ラグランジュの未定乗数法を利用しよう。第2式に未定乗数 $\lambda$ を乗じて、第1式に加算するのだ。そのようにすると、

$$\frac{d^2}{dt^2} [(2 + \lambda)\theta_1 + (1 + \lambda)\theta_2] = -\gamma(2\theta_1 + \lambda\theta_2),$$

なる方程式が得られる。現時点で、 $\lambda$ は未知だが、成立する方程式の一次結合をとっただけなので、その結果の等式も成立するという考えに基づく。ここで、左辺の被微分関数が右辺の定数倍になるように $\lambda$ を選んでみよう。つまり、

$$\frac{2 + \lambda}{1 + \lambda} = \frac{2}{\lambda},$$

を満たす $\lambda$ を選べばよい。この方程式は容易に解くことができ、 $\lambda = \pm\sqrt{2}$ が特定できるので、運動方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2} [\sqrt{2}\theta_1 \pm \theta_2] = -(2 \mp \sqrt{2})\gamma [\sqrt{2}\theta_1 \pm \theta_2],$$

のように書き換えられる。ここで、複合同順とする。このような形になると、方程式の解は容易にわかる。ここで、

$$\omega_1 \equiv \sqrt{(2 - \sqrt{2})\gamma}, \quad \omega_2 \equiv \sqrt{(2 + \sqrt{2})\gamma},$$

なる角速度を定義すると、運動方程式の一般解は、

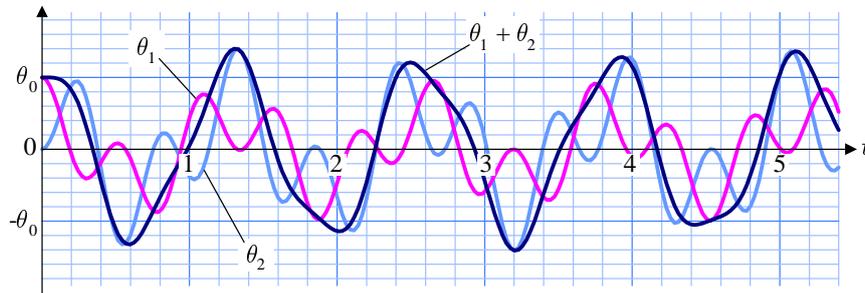
$$\begin{aligned} \sqrt{2}\theta_1 + \theta_2 &= A \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ \sqrt{2}\theta_1 - \theta_2 &= B \cos(\omega_2 t + \beta), \end{aligned} \tag{7.4}$$

と書くことができる。これらを組み合わせて $\theta_1$ と $\theta_2$ を特定すると、

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [A \cos(\omega_1 t + \alpha) + B \cos(\omega_2 t + \beta)], \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} [A \cos(\omega_1 t + \alpha) - B \cos(\omega_2 t + \beta)], \end{aligned} \tag{7.5}$$

が得られる。ここで、 $A, B, \alpha, \beta$ は積分定数であり、初期条件を与えれば決定できる。ここでは、条件を簡略化したが、一般的な条件としての $m_1, m_2, l_1, l_2$ についても同様の解法で解が決定できる。

二重振り子の運動は、概して、複雑な運動になる。微小振動に限定したとしても、異なる周波数の振動の重ね合わせになる。さらに、数式を見ると、下のおもりの振れ角 $\theta_2$ は、上のおもりの振れ角 $\theta_1$ の $\sqrt{2}$ 倍になることもわかる。二重振り子の解の一例として、図7.2に描くような関数が得られる。この例では、 $l = 0.25 \text{ m}$ の振り子において、初期条件とし



初期条件:  $\theta_1(0) = \theta_0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ .

図 7.2: 二重振り子の解 ( $l = 0.25 \text{ m}$ )

て質点1を $\theta_0$ の変角で固定し、質点2をその下に静止状態でぶら下げた状態を想定した。つまり、 $t = 0$ において、 $\theta_1 = \theta_0, \theta_2 = 0$ であり、 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$ となるように定数を選んだ。二重振り子の運動を構成する二つの振動は、 $\omega_1$ が周期1.31秒、 $\omega_2$ が周期0.54秒に相当する。それらの振動を合成し、二重振り子の運動が表現される。質点2の変角 $\theta_2$ は、質点1の鉛直下方に対する角度である。一方、振り子の支点に対する質点2の位置は、偏角が十分に小さい条件において、近似的に $\theta_1 + \theta_2$ である。

上で示したように、二重振り子は複雑に運動するのだが、 $\sqrt{2}\theta_1 \pm \theta_2$ が(7.4)に示すように単振動になることが興味深い。解析力学の手法として、この特徴を利用するなら、

$$Q_1 = \sqrt{2}\theta_1 + \theta_2, \quad Q_2 = \sqrt{2}\theta_1 - \theta_2,$$

を一般化座標として定義するのがよい。このような一般化座標を用いると、時間についての2階微分が、

$$\ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1, \quad \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2, \quad (7.6)$$

のように単純な形で書けるはずだ。確認のため、上で記述した数式を変形して(7.6)が得られることを検証してみよう。一般化座標の定義から、

$$\theta_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2),$$

を取り出しておく。これらの記号を、ラグランジアン:

$$L = \frac{ml^2}{2}(2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{mgl}{2}(2\theta_1^2 + \theta_2^2),$$

に代入すると、

$$L = \frac{ml^2}{8} \left[ (2 + \sqrt{2}) \dot{Q}_1^2 + (2 - \sqrt{2}) \dot{Q}_2^2 \right] - \frac{mgl}{4} (Q_1^2 + Q_2^2),$$

が得られる。このラグランジアンについて、ラグランジュの運動方程式を評価すると、

$$\ddot{Q}_1 = -(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l} Q_1, \quad \ddot{Q}_2 = -(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l} Q_2,$$

が導出できる。確かに、(7.6) が得れることが確認できた。既に述べたように、一般化座標  $Q_1$  と  $Q_2$  は、角周波数が  $\omega_1$  と  $\omega_2$  であるような単振動である。そのような運動の簡略化は、本来の座標を特別な比率で重ね合わせた結果であり、そのような単振動は、**基準振動**、あるいは、**ノーマルモード**と呼ばれる。また、基準振動が記述される座標  $Q_1$  と  $Q_2$  は**基準座標**と呼ばれる。

## 7.2 振動解析の数学処方

振動は物体の復元力によって発生する。安定に釣り合って静止している物体に力を加え、釣り合いの状態から変位を与えると、その変位を戻して釣り合いの状態に戻そうとする復元力が発生する。とはいえ、復元力に任せると、物体は慣性の法則のため釣り合いの位置を通り過ぎ、反対側へ変位してしまう。すると、その変位を打ち消そうするため、逆方向に復元力が発生し、振動が発生するのだ。

### 7.2.1 振動の定式化

自由度が  $n'$  であるような系を考え、運動を記述する一般化座標を  $q_1, q_2, \dots, q_{n'}$  とする。前節で取り扱った  $\theta_1$  と  $\theta_2$  は一般化座標の一例である。この系でのラグランジアン  $L (= K - U)$  は  $t$  を直接含まず、ポテンシャル  $U$  は  $q$  のみの関数であり、速度  $\dot{q}$  に依存しないものとする。すなわち、

$$K = K(q, \dot{q}), \quad U = U(q),$$

である。ここで、座標系が静止していると仮定する。すなわち、 $\dot{q} = 0$  のとき  $K = 0$  でなければならない。その制約事項は、運動エネルギー  $K$  は  $\dot{q}$  の 1 次の項を含まず、2 次の同次式:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j,k} K_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (7.7)$$

なる形式で記述されなければならないことを意味している。なぜなら、運動エネルギー  $K$  は非負なので、 $K = 0$  がエネルギーの最小値だからだ。そのとき、 $\dot{q} = 0$  において  $\partial K / \partial \dot{q}_k = 0$  でなければならない<sup>1</sup> ので、 $K$  に  $\dot{q}$  の 1 次の項が含まれてはならないのだ。さらに、上の数式は  $\dot{q}_j$  と  $\dot{q}_k$  を交換しても不変であるべきなので、 $K_{jk} = K_{kj}$  でなければならない。

<sup>1</sup>これを満たさなければ、運動エネルギー  $K$  が  $\dot{q} = 0$  において滑らかでない特性をもつので原理として都合が悪いと考えるのだ。

ラグランジュの運動方程式が静止状態を解とする場合を考えてみよう。つまり、運動方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n'),$$

が静止状態に相当する特別な解:

$$q_j = q_j^{(0)} = \text{const} \quad (j = 1, 2, \dots, n'),$$

をもつ場合を考えるのだ。これは、 $\dot{q} = 0$ ,  $q = q^{(0)}$  のとき、

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n'), \quad (7.8)$$

を満たすことに相当する。これは次のように説明できる。ラグランジアンと運動エネルギーは  $\dot{q}$  の微分に対して同形式:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j},$$

である。この量を  $t$  について微分すると、 $\dot{p}_j$  が得られるわけだが、その値は  $\dot{q} = 0$ ,  $\ddot{q} = 0$  においてゼロになってしまう。これが、数式 (7.8) が成立する理由だ。その方程式から特定できる解  $q_j^{(0)}$  が平衡の位置を与えるのだ。

平衡状態をとる位置  $q_j^{(0)}$  が原点となるように座標変換しよう。具体的には、 $q_j - q_j^{(0)} \mapsto q_j$  なる変換をすればよい。その平衡の位置 (新しい原点) の近くで、運動を解析することにして、ポテンシャル:

$$U = U_0 + \sum_j b_j q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk} q_j q_k,$$

を使うことにしよう。このポテンシャルは原点を中心とするテイラー級数だと考えればよい。なお、 $U_0$  は原点でのポテンシャルだ。運動エネルギー (7.7) に含まれる係数  $K_{jk}$  も  $q_j$  のべき級数で記述できるが、数式 (7.7) において2次の微小量  $\dot{q}_j \dot{q}_k$  が乗じられるので、係数  $K_{jk}$  はゼロ次の項だけを考えればよいだろう。その理由で、係数  $K_{jk}$  は  $q$  に依存しない定数と考えても差し支えない。そのように考えると、 $\partial K / \partial q_j = 0$  になるので、数式 (7.8) は、

$$\left( \frac{\partial U}{\partial q_j} \right)_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n'),$$

を満たす。ここで、 $(\cdot)_0$  は原点における関数値を意味する。得られた数式によると、ポテンシャル  $U$  は  $q$  に関する1次の項をもたないことになるから、

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk} q_j q_k, \quad (7.9)$$

なる形で表される。当然、 $q_j$  と  $q_k$  を交換してもポテンシャルは不変であるべきなので、 $c_{jk}$  は  $K_{jk}$  と同様に対称である。

言うまでもなく、平衡の位置はポテンシャル  $U$  が極小となる位置だ。そのためには、ポテンシャル (7.9) は正値 2 次形式でなければならない。正値 2 次形式とは、原点以外で、必ず、正の値になる 2 次の同次式を意味する。

既に述べたように、運動エネルギーも非負であるので、 $\dot{q}$  に関する正値 2 次形式である。したがって、原点で平衡となる系は、

$$L = K - U = \frac{1}{2} \sum_{j,k} K_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk} q_j q_k, \quad (7.10)$$

のように、二つの正値 2 次形式によって記述される。

## 7.2.2 永年方程式

複数の質点が振動する系では、複数の基準振動が発生する。振動解析の最初のステップは基準振動を特定することだ。本稿では、基準振動を特定する手段として永年方程式を紹介する。

解析力学の開始はラグランジュの方程式だ。複数の質点による振動のラグランジアンは前項で定式化した。そのラグランジアンから、ラグランジュの運動方程式をつくると、

$$\sum_{k=1}^{n'} K_{jk} \ddot{q}_k - \sum_{k=1}^{n'} c_{jk} q_k = 0, \quad (7.11)$$

が得られる。ここで、系の自由度を  $n'$  とした。この運動方程式から基準振動を解析しよう。基準振動が発生しているとき、すべての  $q_k$  が共通の角速度  $\omega$  で振動しているので、

$$q_k = A_k \cos(\omega t + \alpha),$$

なる解を仮定する。この解を運動方程式 (7.11) に代入すると、運動方程式は、

$$\sum_{k=1}^{n'} (K_{jk} \omega^2 - c_{jk}) A_k \cos(\omega t + \alpha) = 0,$$

のように書き換えられるので、係数だけを取り出し、

$$\sum_{k=1}^{n'} (-K_{jk} \omega^2 + c_{jk}) A_k = 0, \quad (7.12)$$

なる方程式が得られる。この問題では未知数が  $A_k$  なので、この方程式は、

$$\begin{bmatrix} K_{11}\omega^2 - c_{11} & K_{12}\omega^2 - c_{12} & \cdots & K_{1n'}\omega^2 - c_{1n'} \\ K_{21}\omega^2 - c_{21} & K_{22}\omega^2 - c_{22} & \cdots & K_{2n'}\omega^2 - c_{2n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n'1}\omega^2 - c_{n'1} & K_{n'2}\omega^2 - c_{n'2} & \cdots & K_{n'n'}\omega^2 - c_{n'n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n'} \end{bmatrix} = 0, \quad (7.13)$$

のように行列を用いて記述することができる。

方程式 (7.13) は未知数と方程式の数がともに  $n'$  個であるので、問題なく解けるように思えるかもしれない。しかし、それでは都合が悪い。すべての振幅  $A_k$  が一意的に決まるということは、物理現象として、その振幅でなければ許容されないということだ。言い換えると、限りなくゼロに近い振幅が許されず、いきなり、有限値の振幅の振動しか許されないということだ。そう考えると、都合が悪そうだ。むしろ、 $A_1$  は自由に選べ、他の振幅  $A_2, A_3, \dots$  は  $A_1$  との関係で決まる方が違和感がない。そのように考えると、未知数の数は  $n' - 1$  個であり、方程式 (7.13) は冗長であるべきだ。そのような条件を満たすには、

$$\begin{vmatrix} K_{11}\omega^2 - c_{11} & K_{12}\omega^2 - c_{12} & \cdots & K_{1n'}\omega^2 - c_{1n'} \\ K_{21}\omega^2 - c_{21} & K_{22}\omega^2 - c_{22} & \cdots & K_{2n'}\omega^2 - c_{2n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n'1}\omega^2 - c_{n'1} & K_{n'2}\omega^2 - c_{n'2} & \cdots & K_{n'n'}\omega^2 - c_{n'n'} \end{vmatrix} = 0, \quad (7.14)$$

のように、係数行列の行列式がゼロになっていけばよい。実は、基準振動の角速度  $\omega$  が未知数なので、この条件を満たすように  $\omega$  が決定されるのだ。方程式 (7.14) は、 $\omega^2$  について  $n' - 1$  次の方程式なので、 $\omega^2$  の解として、重根を含め、 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{n'-1}^2$  のように  $n - 1$  の解をもつ。しかも、 $K$  と  $U$  が正値 2 次形式であるならば、得られる  $n'$  の解はすべて正でなければならない。実際の角周波数  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n'}$  は得られた解の平方根であり、数学的には正と負の値をとることができる。とはいえ、実数解のみを考えるのであれば、双方とも物理的意味が同じなので、慣習として正の平方根のみをとる。得られる角速度  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n'}$  は、**固有振動数**と呼ばれる。また、方程式 (7.14) は**永年方程式**と呼ばれる。

永年方程式で固有振動を特定する問題は固有値問題と等価だ。その事実を示してみよう。運動エネルギーの係数行列を  $\hat{K} \equiv [K_{jk}]$ 、ポテンシャルエネルギーの係数行列を  $\hat{C} \equiv [c_{jk}]$  なる記号で書くことにしよう。その記号を用いると、(7.13) は、

$$(\omega^2 \hat{K} - \hat{C})\mathbf{A} = 0,$$

のように書くことができる。この数式に、左から  $\hat{K}^{-1}$  を乗じると、 $(\omega^2 I - \hat{K}^{-1}\hat{C})\mathbf{A} = 0$  が得られる。ここで、 $I$  は単位行列である。この関係式は、

$$\hat{K}^{-1}\hat{C}\mathbf{A} = \omega^2\mathbf{A}, \quad (7.15)$$

のように書き換えられる。この数式によると、固有振動数の自乗  $\omega^2$  は、行列  $\hat{K}^{-1}\hat{C}$  の固有値であり、振幅  $\mathbf{A}$  は固有ベクトルである。したがって、永年方程式による固有振動の特定は、固有値問題と等価なのだ。

### 7.2.3 基準振動の特定

永年方程式を解いて固有振動数  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n'}$  が決定できたら, (7.13) を解くことによって振幅を決定する。ただし, 永年方程式が満足されているので, (7.13) のランクは  $n'$  より小さくなっている。とりあえず,  $A_1 = 1$  として解を決めると考えよう。当然, 方程式 (7.13) は, 異なる固有振動数  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n'}$  ごとに異なる解が得られるべきだ。例えば,  $m$  番目の固有振動数  $\omega_m$  に対して, 振幅が  $A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, \dots, A_{n'}^{(m)}$  のように特定できるとしよう。それを数式で表現すると,

$$\sum_{k=1}^{n'} (K_{jk}\omega_m^2 - c_{jk}) A_k^{(m)} = 0, \quad (7.16)$$

となる。一方, 他の固有振動数  $\omega_{m'}$  に関しても, 同様に,

$$\sum_{j=1}^{n'} (K_{kj}\omega_{m'}^2 - c_{kj}) A_j^{(m')} = 0, \quad (7.17)$$

が成立する。ここで, さりげなく添え字  $j$  と  $k$  を交換していることが重要だ。さらに,  $K_{jk}$  と  $c_{jk}$  の対称性を利用しつつ, (7.16) に  $A_j^{(m')}$  を乗じて  $j$  について和をとる。一方, (7.17) に  $A_k^{(m)}$  を乗じて  $k$  について和をとる。そのようにすると,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} (K_{jk}\omega_m^2 - c_{jk}) A_k^{(m)} A_j^{(m')} &= 0, \\ \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} (K_{jk}\omega_{m'}^2 - c_{jk}) A_k^{(m)} A_j^{(m')} &= 0, \end{aligned}$$

が得られる。これらの数式の差をとると,  $c_{jk}$  が相殺されるので,

$$(\omega_m^2 - \omega_{m'}^2) \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} K_{jk} A_k^{(m)} A_j^{(m')} = 0,$$

となるが,  $\omega_m \neq \omega_{m'}$  であるので,

$$\sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} K_{jk} A_k^{(m)} A_j^{(m')} = 0, \quad (7.18)$$

なる重要な関係式が得られる。この関係式は, 固有振動数  $\omega_m$  と  $\omega_{m'}$  における解  $A_k^{(m)}$  と  $A_j^{(m')}$  の直交関係を表す。実際には,  $A_k$  は 3次元空間のベクトル成分であるとは限らず, 複数の質点からなる系の成分である。例えば, 第  $j$  番目の粒子の  $x$  方向の振幅が  $A_{3j-2}$  のように表される場合も考えられる。そのような場合も含め, 多数の質点の振幅を  $n'$  個の成分として取り扱うのは, 数学的に  $n'$  次元空間のベクトルを取り扱うことと同じだ。仮に,  $K_{jk} = \delta_{jk}$  であれば,  $n'$  次元のカルテシアン空間としてベクトルを取り扱えばよい。それ以外の一般の  $K_{jk}$  の (定数の) 場合は, 斜交座標系と考えればよい。

前段落で導出した (7.18) の左辺をベクトルの内積とみなし、ベクトル解析において自身自身の内積がノルムの自乗であることに倣って、

$$\sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} K_{jk} A_j^{(m)} A_k^{(m)} = 1, \quad (7.19)$$

を満たすように振幅  $A_j^{(m)}$  を規定しよう。この規定によって、ベクトルのノルムを1にするように振幅が調整されるため、このような手続きは**正規化**、あるいは、**規格化**と呼ばれる。また、 $m = m'$  も許容するように、添え字を一般化すると、(7.18) と (7.18) は、

$$\sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} K_{jk} A_j^{(m)} A_k^{(m')} = \delta_{mm'}, \quad (7.20)$$

のように書くことができる。この数式は  $A_k^{(m)}$  の規格直交化条件を表す。

振幅  $A_j^{(m)}$  をもつ振動は、系の含まれる任意の変位  $q_k(t)$  に寄与する。その変位の一般解は、

$$q_k(t) = \sum_{m=1}^{n'} A_k^{(m)} a_m \cos(\omega_m t + \alpha_m), \quad (7.21)$$

のように表されるはずだ。この解は、複数の固有振動数  $\omega_m$  による寄与の重ね合わせで表現されている。振幅  $A_k^{(m)}$  は正規化されているので、任意の振幅を与えるため、 $a_m$  なる係数を導入した。また、位相に加算される定数  $\alpha_m$  も固有振動数ごとに個別に与えられる。これらのパラメータ  $a_m$  と  $\alpha_m$  は初期条件などによって決まる定数だ。一般解 (7.21) は二重振動のモデルの応用だと考えればよい。

数式 (7.21) に、 $\sum_j K_{kj} A_j^{(p)}$  を乗じ、 $k$  について総和をとると、

$$\sum_{k=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} K_{jk} A_j^{(p)} q_k(t) = \sum_{k=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} \sum_{m=1}^{n'} K_{kj} A_j^{(p)} A_k^{(m)} a_m \cos(\omega_m t + \alpha_m),$$

が得られる。この計算結果に、 $A_k^{(m)}$  の正規直交化条件 (7.20) を適用すると、

$$\sum_{k=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} K_{jk} A_j^{(p)} q_k(t) = a_p \cos(\omega_p t + \alpha_p),$$

のように右辺に  $a_p \cos(\omega_p t + \alpha_p)$  だけが残る。得られた数式は、二重振り子における (7.4) に相当する。ここで、この数式の左辺を基準座標  $Q_k(t)$  として定義しよう。すなわち、

$$Q_k(t) = \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} K_{jk} A_j^{(p)} q_k(t), \quad (7.22)$$

が新たに定義された基準座標だ。ここで、 $Q_k(t) = a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k)$  に注意しながら (7.21) を書き換えると、

$$q_j(t) = \sum_k A_j^{(k)} Q_k(t), \quad (7.23)$$

なる関係式が導出される。一般化座標  $q_k$  と基準座標  $Q_k$  は, (7.23) と (7.22) によって, 互いに変換されるのだ。一般化座標  $q_k$  では, 異なる角速度の振動が重ね合わされた状態だが, (7.22) によって基準座標  $Q_k$  に変換すれば独立した単振動で運動を取り扱うことができるのだ。

**振動状態の縮退** 振動を特定する方程式 (7.11) が重根をもつ場合を考えよう。そのような状況は, 振動が縮退していると呼ばれる。複数の角振動数  $\omega_k$  のうち,  $\omega_1 = \omega_2$  であり, 他の角振動数  $\omega_3, \omega_4, \dots$  はすべて異なる値であるとする。さらに,  $\omega_k$  に対応する振幅  $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots$  をまとめてベクトル  $\mathbf{A}^{(k)}$  なる記号で表現しよう。つまり,

$$\mathbf{A}^{(k)} \equiv [ A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \dots, A_{n'}^{(k)} ],$$

のように定義したわけだ。なお,  $n'$  は系の自由度だ。何らかの手段で方程式 (7.11) を解き,  $\omega_1 = \omega_2$  に対応する解が二つ得られたとする。それらの解を  $\mathbf{A}', \mathbf{A}''$  としよう。 $\mathbf{A}'$  と  $\mathbf{A}''$  は一次独立であり, 他の解  $\mathbf{A}^{(3)}, \mathbf{A}^{(4)}, \dots$  と直交する。補足すると,  $\mathbf{A}'$  と  $\mathbf{A}''$  は一次独立だが直交するとは限らない。

解  $\mathbf{A}'$  と  $\mathbf{A}''$  の位置次結合をつくり,  $\mathbf{A}'$  と直交させることを考えよう。すなわち,  $\mathbf{A}''' \equiv c_1 \mathbf{A}' + c_2 \mathbf{A}''$  なるベクトルを定義し,  $\mathbf{A}'$  と  $\mathbf{A}'''$  が直交するように, 展開係数  $c_1$  と  $c_2$  を決めてやればよい。ベクトルの直交条件  $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}''' = 0$  から, ただちに,

$$\frac{c_1}{c_2} = - \frac{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}''}{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}'},$$

が特定できる。この条件を満足する展開係数にてつくられる一次結合によって, ベクトル  $\mathbf{A}', \mathbf{A}''', \mathbf{A}^{(3)}, \mathbf{A}^{(4)}, \dots$  がすべて直交するのだ。さらに,

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A}''' \cdot \mathbf{A}''' = 1,$$

のように正規化すれば,  $\mathbf{A}^{(1)} \equiv \mathbf{A}', \mathbf{A}^{(2)} \equiv \mathbf{A}'''$  のようにベクトルを再定義する価値がある。そのように再定義されたベクトルを用いれば,

$$\mathbf{A}^{(j)} \cdot \mathbf{A}^{(k)} = \delta_{jk},$$

なる関係が成立する。最後に補足しておく, 縮退した状態に対応する解  $\mathbf{A}^{(1)}$  と  $\mathbf{A}^{(2)}$  は一意的ではない。例えば,  $\mathbf{A}^{(1)} \equiv \mathbf{A}''$  としても同様に正規直交条件  $\mathbf{A}^{(j)} \cdot \mathbf{A}^{(k)} = \delta_{jk}$  を満足する解が構成できるのだ。

## 7.3 微小振動の解析例

前節までに定式化した微小運動の取り扱いにおける処方箋について, 例を挙げて解析していこう。第1の例は二酸化炭素分子の振動, 第2の例は1次元の格子振動である。

### 7.3.1 二酸化炭素分子

二酸化炭素 ( $\text{CO}_2$ ) の分子は, 図 7.3 に示すように, 炭素原子 C を中心とし, その両側に酸素原子 O が一直線上に結合した構造である。炭素と酸素の距離は両側とも同じ値  $a$  である。この分子の平衡状態における分子軸の方向を  $x$  軸にとり, それと直交するように  $y$  軸,  $z$  軸をとる。中心に位置する炭素原子の平衡状態からの変位を  $X_0, Y_0, Z_0$  とし, 両側に位置する酸素原子の変位をそれぞれ,  $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$  と記述することにする。つまり,  $\text{CO}_2$  分子の運動はこれら 9 個の座標成分によって記述される。

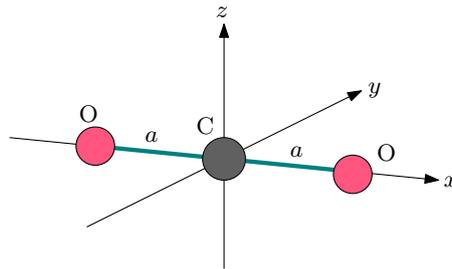


図 7.3: 平衡状態における  $\text{CO}_2$  分子の構造モデル

構成原子の変位のうち  $x$  座標成分は原子間の距離の伸縮である。ここでは, 簡単のため, 伸縮がないものとし, 原子の変位は分子軸からのずれのみとする。すなわち, 変位は  $y$  成分と  $z$  成分のみである。そのとき, 図 7.4 に示すように, 分子構造において変角  $\theta$  が現れる。その変角に依存して復元力が発生する。変角が小さければ, 復元力のポテンシャルは,

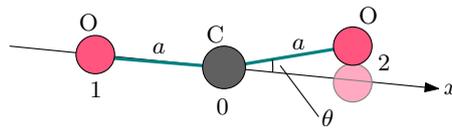


図 7.4:  $\text{CO}_2$  分子の構成原子の変位と変角

$$U = \frac{\kappa}{2} \theta^2,$$

なる形で与えられるだろう。ここで, 比例係数  $\kappa$  は変角に対してバネ定数としてはたらく。変角が  $\theta$  ならば, 原子 1 から原子 0 への延長線上から原子 2 がずれている距離は  $a\theta$  であるはずだ。その距離は, 原子の変位を用いて,

$$a\theta = \sqrt{(2Y_0 - Y_1 - Y_2)^2 + (2Z_0 - Z_1 - Z_2)^2},$$

と記述できる。新たなバネ定数  $k \equiv \kappa/a^2$  を定義すると, 分子構造の変形によるポテンシャルは,

$$U = \frac{k}{2} \left[ (2Y_0 - Y_1 - Y_2)^2 + (2Z_0 - Z_1 - Z_2)^2 \right]$$

$$= \frac{k}{2} [4Y_0^2 - 4Y_0(Y_1 + Y_2) + (Y_1 + Y_2)^2] \\ + \frac{k}{2} [4Z_0^2 - 4Z_0(Z_1 + Z_2) + (Z_1 + Z_2)^2],$$

となる。この数式において、 $(Y_1 + Y_2)$  と  $(Z_1 + Z_2)$  を展開していない理由はこの後の計算の便宜のためだ。この先、数式を変形していくと、この形で数式を書いている利点が見えてくるだろう。

分子構造が変形する途中、もしくは、復元する途中は、構成原子が運動をしているので、 $\text{CO}_2$  分子は運動エネルギーをもっている。その運動エネルギーを定式化しておこう。運動エネルギーを記述するため、C原子の質量を  $M$ 、O原子の質量を  $m$  とすると、運動エネルギーは、

$$K = \frac{M}{2}(\dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2) + \frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2 + \dot{Y}_2^2 + \dot{Z}_2^2) \\ = \left[ \frac{M}{2}\dot{Y}_0^2 + \frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2) \right] + \left[ \frac{M}{2}\dot{Z}_0^2 + \frac{m}{2}(\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2) \right]$$

のように記述できる。面白いことに、ポテンシャル  $U$  も運動エネルギー  $K$  も、 $y$  成分と  $z$  成分の寄与が和の形で分離されている。この分離のおかげで、 $y$  成分による寄与と  $z$  成分を個別に取り扱ってもよい。そのような理由で  $y$  成分の寄与だけ取り扱おう。数式から明らかのように、 $y$  と  $z$  の寄与は同じ形で表されるので、後に  $y$  成分の考察結果をまねて  $z$  成分の寄与をつくり、互いに重ね合わせ用という魂胆だ。その前提において、 $y$  成分の寄与を表すラグランジアンは、

$$L_y = \frac{M}{2}\dot{Y}_0^2 + \frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2) - 4Y_0^2 - 4Y_0(Y_1 + Y_2) + (Y_1 + Y_2)^2, \quad (7.24)$$

なる形で記述できる。方程式 (7.24) を解くテクニックとして、点変換:

$$Y_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 + Y_2), \quad Y_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_2), \quad (7.25)$$

を利用してみよう。この点変換は、 $Y_1 Y_2$  平面で座標軸を  $45^\circ$  回転することに相当する。逆に、 $Y_1$  と  $Y_2$  を、新たな記号  $Y_+$  と  $Y_-$  を用いて記述すると、

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_+ + Y_-), \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_+ - Y_-), \\ \dot{Y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Y}_+ + \dot{Y}_-), \quad \dot{Y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Y}_+ - \dot{Y}_-),$$

となるので、

$$\dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2 = \dot{Y}_+^2 + \dot{Y}_-^2,$$

であることがわかる。このことに注意すると、ラグランジアン  $L_y$  は、

$$L_y = \frac{M}{2}Y_0^2 + \frac{m}{2}Y_+^2 + \frac{m}{2}Y_-^2 - \frac{4k}{2}Y_0^2 + 2\sqrt{2}kY_0Y_+ - \frac{2k}{2}Y_+^2, \quad (7.26)$$

のように記述できる。このラグランジアンに対して、

$$q_0 = \sqrt{M}Y_0, \quad q_1 = \sqrt{m}Y_+, \quad q_2 = \sqrt{m}Y_-, \quad (7.27)$$

なる一般化座標を定義しよう。言うまでもなく、これらの時間微分は、

$$\dot{q}_0 = \sqrt{M}\dot{Y}_0, \quad \dot{q}_1 = \sqrt{m}\dot{Y}_+, \quad \dot{q}_2 = \sqrt{m}\dot{Y}_-,$$

である。新たに定義した一般化座標を用いてラグランジアンを記述すると、

$$L_y = \frac{1}{2}(\dot{q}_0^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{4k}{2M}q_0^2 - \frac{2k}{2m}q_1^2 + \frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{Mm}}q_0q_1, \quad (7.28)$$

が得られる。得られたラグランジアンから、永年方程式を構成するための要素  $K_{jk}$ ,  $c_{jk}$  は、

$$K_{jk} = \delta_{jk}, \quad c_{00} = \frac{4k}{M}, \quad c_{11} = \frac{2k}{m}, \quad c_{01} = -\sqrt{\frac{2}{Mm}}2k,$$

であることがわかる。ただし、ここに挙げていない  $c_{jk}$  はすべてゼロである。

得られた情報を利用すると、ラグランジュの運動方程式は、

$$\ddot{q}_0 = -\frac{4k}{M}q_0 + 2k\sqrt{\frac{2}{Mm}}q_1, \quad \ddot{q}_1 = 2k\sqrt{\frac{2}{Mm}}q_0 - \frac{2k}{m}q_1, \quad \ddot{q}_2 = 0, \quad (7.29)$$

のように記述できる。この方程式から、 $q_0$  と  $q_1$  は連成振動を形成するが、復元力がゼロである  $q_2$  は振動しないことがわかる。不思議に感じるかもしれないので、物理的イメージをつかむため、 $q_0, q_1, q_2 \neq 0$  を仮定してみよう。その条件では、

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 + Y_2 = 0, \quad Y_1 - Y_2 = 0,$$

となるので、 $Y_1 = -Y_2$  が導かれる。この状態は、中央の炭素原子が動かず、両端の酸素原子が分子軸と垂直の方向に互いに逆方向に運動する状態である。すなわち、その運動は、炭素原子を支点とした回転運動だ。この考察から、 $q_2 \neq 0$  は回転運動にあたるのだ。そのまま回転すると、微小運動 ( $\theta \ll 1$ ) という仮定に反してしまうので、以降の議論では  $q_2 = 0$  に限定することにしよう。

上の考察のように、 $q_2 = 0$  を束縛条件とすれば、取り扱うべき自由度は  $q_0$  と  $q_1$  のみである。つまり、自由度は2だ。この問題における永年方程式は、

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{4k}{M} & 2k\sqrt{\frac{2}{Mm}} \\ 2k\sqrt{\frac{2}{Mm}} & \omega^2 - \frac{2k}{m} \end{vmatrix} = 0,$$

となる。この方程式の解  $\omega^2$  として、0 と  $4k/M + 2k/m$  が得られるので、

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}},$$

の二つの角速度を基準振動として考察しよう。特定された  $\omega$  を永年方程式に代入し、振幅  $A_1$  と  $A_2$  の比を計算すると、

$$\begin{aligned} \text{For } \omega_1 = 0: \quad & \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(2)}} = \sqrt{\frac{2m}{M}}, \\ \text{For } \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}}: \quad & \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(2)}} = -\sqrt{\frac{M}{2m}}, \end{aligned}$$

が得られる。振幅ベクトルの内積は、 $K_{jk} = \delta_{jk}$  であるので、

$$\mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(k)} = A_1^{(1)} A_1^{(k)} + A_2^{(1)} A_2^{(k)},$$

のように簡単な関係で記述できる。この関係から、 $\mathbf{A}^{(1)}$  と  $\mathbf{A}^{(2)}$  が直交することがわかる。ベクトルを正規化すると、

$$\begin{aligned} \text{For } \omega_1 = 0: \quad & A_1^{(1)} = \sqrt{\frac{M}{M+2m}}, \quad A_2^{(1)} = \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}, \\ \text{For } \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}}: \quad & A_1^{(2)} = \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}, \quad A_2^{(2)} = -\sqrt{\frac{M}{M+2m}}, \end{aligned}$$

のように成分が特定できる。さらに、(7.22) の処方箋にしたがい、 $Q_k(t) = \sum A_j^{(k)} q_j$  で定義される基準座標に変換すると、

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{\frac{M}{M+2m}} q_0 + \sqrt{\frac{2m}{M+2m}} q_1, \\ Q_2 &= \sqrt{\frac{2m}{M+2m}} q_0 - \sqrt{\frac{M}{M+2m}} q_1, \end{aligned} \tag{7.30}$$

が得られる。前節で述べたことだが、基準座標  $Q_k$  に変換するのは、基準座標ごとに独立した単振動に分解できることを狙っている。この変換の逆変換は、

$$\begin{aligned} q_0 &= \sqrt{\frac{M}{M+2m}} Q_1 + \sqrt{\frac{2m}{M+2m}} Q_2, \\ q_1 &= \sqrt{\frac{2m}{M+2m}} Q_1 - \sqrt{\frac{M}{M+2m}} Q_2, \end{aligned} \tag{7.31}$$

となる。さらに,  $q_0, q_1$  をもとの物理量  $Y_0, Y_1, Y_2$  に戻すと, 変換式は,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{MY_0 + m(Y_1 + Y_2)}{\sqrt{M + 2m}}, \\ Q_2 &= \sqrt{\frac{Mm}{2(M + 2m)}} [2Y_0 - (Y_1 + Y_2)], \end{aligned} \quad (7.32)$$

なる形で書き換えられる。ここで,  $q_2 = Q_2 = 0$  で, かつ,  $Q_1 \neq 0$  を考えると, (7.32) の第2式をゼロとして,  $Y_1 + Y_2 = 2Y_0$  がわかる。これを第1式に代入すると,  $Q_1 = \sqrt{M + 2m} Y_0$  が特定できる。この結果を (7.31) に代入すると,  $q_0 = \sqrt{M} Y_0$  と  $q_1 = \sqrt{2m} Y_0$  が導かれる。続いて, (7.27) に注目し,  $q_2 = 0$  を第3式に適用すると,  $Y_1 = Y_2$  が特定できる。これを第2式に代入すると,  $q_1 = \sqrt{2m} Y_1$  が得られる。つい先ほどの考察で  $q_1 = \sqrt{2m} Y_0$  が得られていたので,  $Y_0 = Y_1$  であることがわかるのだ。したがって,

$$Y_0 = Y_1 = Y_2,$$

が結論できる。つまり, この解は  $y$  方向に平行移動する運動を意味している。これでは復元力が発生せず, 当然,  $\omega_1 = 0$  となるわけだ。

これまでに確認した解の候補は, 回転運動と平行移動であり, 振動しない運動だった。結局, 残された自由度は  $Q_2$  のみであり, 変角の振動に対応する。ラグランジュの運動方程式は,

$$\ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2,$$

となり, その角速度が,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}},$$

で与えられる。ただし,  $k = \kappa/a^2$  である。

ここまで, ラグランジアンから  $y$  に対応する成分のみを取り出して議論してきた。一方,  $z$  に対応する成分も同様であり, 回転と平行移動に相当する運動が解として得られる。それを取り除くと, 同一の角速度  $\omega_2$  が得られる。二つの方向の振動について, 同一の角速度  $\omega_2$  が基準振動であるので, 縮退しているわけだ。その運動を,

$$\begin{aligned} q_0 &= \sqrt{M} Y_0, & q_1 &= \sqrt{m} Y_+, & q_2 &= \sqrt{m} Y_-, \\ q_3 &= \sqrt{M} Z_0, & q_4 &= \sqrt{m} Z_+, & q_5 &= \sqrt{m} Z_-, \end{aligned}$$

という6個の一般化座標で特定される6次元の位相空間のベクトルで表現されるものとする。基準振動に対する振幅ベクトル  $\mathbf{A}^{(k)}$  を位相空間の成分として記述すると, (7.30) で記述したように,

$$\mathbf{A}^{(2)} = \left[ \sqrt{\frac{2m}{M + 2m}}, -\sqrt{\frac{M}{M + 2m}}, 0, 0, 0, 0 \right],$$

となる。それに対して、 $z$  方向の変角振動は、

$$\mathbf{A}^{(2')} = \left[ 0, 0, 0, \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}, -\sqrt{\frac{M}{M+2m}}, 0 \right],$$

のように記述できるはずだ。これらの成分表示から、振幅ベクトルの直交性  $\mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{A}^{(2')} = 0$  が明らかに成立する。実際の炭素分子の振動は、これらの基準振動の重ね合わせとなり、しかも、 $y$  方向と  $z$  方向は同一の角速度だが位相がずれているのが一般的だ。その結果、その振動は  $yz$  平面上で楕円を描く。

### 7.3.2 格子振動

固体の結晶は熱によって振動する。固体振動は隣り合う原子、あるいは、分子との間に一定の距離を保っているが、振動によって歪み、その歪みが復元力を発生させ振動している。一般的な格子は3次元構造であるが、本稿では基本的なモデルとして1次元格子の振動を取り扱う。

図7.5に示すように、多数の質量  $m$  の質点が、長さ  $d$  でバネ定数  $k$  のバネに数珠つなぎになっているとする。数珠つなぎになった質点の鎖を、滑らかな水平面に置き、長さ方向に微小振動させる場合を考えよう。

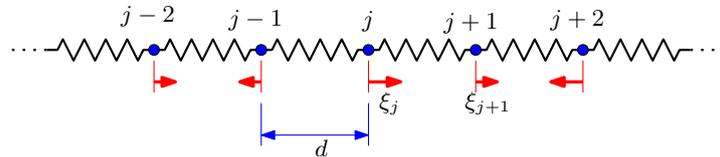


図 7.5: 1次元の格子振動

数珠つなぎになった質点は左から順に番号づけされていて、第  $j$  番目の質点の変位を  $\xi_j$  とする。この系の運動エネルギーは、

$$K = \frac{m}{2} \sum_j \dot{\xi}_j^2, \quad (7.33)$$

であり、バネのポテンシャルエネルギーの総和は、

$$U = \frac{k}{2} \sum_j (\xi_{j+1} - \xi_j)^2 = k \sum_j (\xi_j^2 - \xi_j \xi_{j+1}), \quad (7.34)$$

となる。したがって、ラグランジュの運動方程式は、

$$m\ddot{\xi}_j = -k(2\xi_j - \xi_{j+1} - \xi_{j-1}), \quad (7.35)$$

なる形で記述できる。仮に,

$$\xi_{j+1}(t) + \xi_{j-1}(t) \propto \xi_j(t),$$

であれば, 運動方程式 (7.35) は単振動の方程式に帰着するので, 簡単に解けるようになる。

この系の基準振動が特定できたとして, そのうちの第  $n$  番目の基準振動のみが励起されている場合を考えよう。その励起状態は, (7.21) において,  $a_n \neq 0$  であり, その他の  $a_j$  がすべてゼロである状態である。混交での記号では,  $\xi_j$  が一般化座標  $q_j$  に相当するので, (7.21) に倣って数式を記述すると,

$$\xi_j(t) = A_j^{(n)} a_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) = A_j^{(n)} Q_n(t),$$

のように振動を表現できるわけだ。このとき,

$$A_{j+1}^{(n)} + A_{j-1}^{(n)} \propto A_j^{(n)},$$

であれば上記の過程に合致する。それに関して, 正弦関数の公式:

$$\sin(j+1)\eta + \sin(j-1)\eta = 2 \cos \eta \sin j\eta,$$

との類似性を利用し,  $A_j^{(n)} \propto \sin j\eta_n$  となるように振幅を設定すればよさそうだ。ここで, 規格化の定数  $C_n$  を導入し, 変位を,

$$\xi_j(t) = C_n \sin j\eta_n \cdot Q_n(t), \quad (7.36)$$

のように定義してみよう。この定義を運動方程式 (7.35) に代入すると,

$$\ddot{Q}_2 = -\frac{2k}{m}(1 - \cos j\eta_n) Q_n,$$

なる微分方程式が得られる、この微分方程式から, 基準振動の角速度は,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}(1 - \cos \eta_n)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\eta_n}{2},$$

のように特定できる。この数式には, まだ未知数  $\eta_n$  が含まれている。続いて,  $\eta_n$  の特定を試みよう。

未知数  $\eta_n$  を特定するために境界条件を利用しよう。質点が 0 から  $N$  まで番号づけされているとし, 両端の質点が固定されていると仮定する。つまり,  $\xi_0 = \xi_N = 0$  である。既に導入した質点の変位の関数表現 (7.36) に関して,  $j=0$  のとき  $\sin j\eta_n = 0$  であるので境界条件を満足する。同様に,  $j=N$  で境界条件を満足するためには,

$$\eta_n = \frac{n\pi}{N} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

でなければならない。この系において、自由度として使えるのは、 $j = 1, 2, \dots, N-1$ である。つまり、自由度は  $N-1$  ということだ。したがって、系は  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}$  なる変位で記述され、それに対応する基準座標は  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{N-1}$  となる。

続いて、規格化の定数  $C_n$  を特定しよう。規格化定数は、 $A_j^{(n)}$  が正規直交系をなすように設定される。これまでの考察から、 $A_j^{(n)}$  が、

$$A_j^{(n)} = C_n \sin \frac{\pi j n}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1),$$

であることがわかっている。正規直交系をなすということは、

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin \frac{\pi j n}{N} \sin \frac{\pi j n'}{N} = \frac{N}{2} \delta_{nn'},$$

を利用すればよい。したがって、

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{N}},$$

が導かれる。その結果、

$$A_j^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{\pi j n}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1), \quad (7.37)$$

が得られる。振幅の関数形が特定できたので、第  $j$  番目の質点の変位について、第  $n$  番目の基準振動による寄与が、

$$\xi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{\pi j n}{N} \cdot Q_n(t), \quad (7.38)$$

であることがわかる。ただし、 $Q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t + \alpha_n)$  であり、その角速度は、

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi n}{2N},$$

である。解 (7.38) は、図 7.6 のような両端を節とする定在波である。この格子振動は、本当は縦波なのだが、見た目のわかりやすさを優先し横波として描いた。図中の太い曲線とその上にある格子点が定在波の振幅である。これに時間の関数  $Q_n(t)$  が乗算された積 (7.38) が、網掛け部を振動するわけだ。ここで、平衡状態におけるバネの長さが  $d$  であることから、系の左端から測った長さを  $x$  をすると、 $x = jd$  なので、

$$\frac{\pi j n}{N} = \frac{\pi n x}{Nd},$$

である。さらに、 $\omega_n$  に対応する波長が  $\lambda_n = 2Nd/n$  であることに注意すると、

$$\frac{\pi j n}{N} = \frac{2\pi x}{\lambda_n},$$

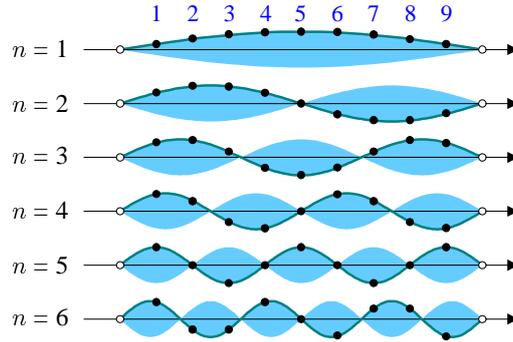


図 7.6: 1次元の格子振動の基準振動

であることがわかるので, (7.38) は,

$$\xi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n} \cdot Q_n(t), \quad (7.39)$$

と書くことができる。通常物質の結晶は3次元構造であるが、格子状の構造であれば、ほぼ同様のアプローチによって解析が可能だ。

### 7.3.3 連続体の振動

前項で取り扱った格子振動について、格子の間隔を小さくし、質点の数を大きくすると連続体を取り扱えるようになる。連続体の振動と言えば、弾性波や水面波などが代表例だ。

前項で取り扱った格子の間隔  $d$  を小さくしよう。その際に、格子点に存在する質点の質量が  $m$  である場合、長さ  $d$  あたりの質量が  $m$  であるので、その1次元の系は  $\rho = m/d$  なる密度をもつと考える。一方、バネ定数  $k$  の代わりに、長さの伸長率に対する比例係数  $e$  でバネに作用する力を記述しよう。すなわち、長さ  $d$  のバネを平衡状態から  $x$  だけ伸ばすのに必要な力は、

$$kx = e \frac{x}{d},$$

となるはずだ。この等式から、 $k = e/d$  であることがわかる。パラメータ  $e$  はヤング率と物体の断面積の積だと考えればよい。新たに定義されたパラメータ  $\rho$  と  $e$  に注意してラグランジアンを書き換えると、

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_j \left[ m \dot{\xi}_j^2 - k (\xi_{j+1} - \xi_j)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_j d \left[ \frac{m}{d} \dot{\xi}_j^2 - kd \left( \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{d} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_j d \left[ \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - e \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\xi_j$  は、位置と時間の関数  $\xi(x, t)$  とみなして数式を記述した。右辺の第2項を記述するにあたり、

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{d},$$

なる関係を利用した。右辺の総和記号が、系の長さ全体を対象にし、 $d$  が長さ方向の微小長さであることに注意すると、このラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2} \int \left[ \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - e \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (7.40)$$

のように書き換えることができる。なお、この数式の被積分関数:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - \frac{e}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \quad (7.41)$$

は単位長さあたりのラグランジアンと解釈できるので、**ラグランジアン密度**と呼ばれる。このラグランジアン密度に基づき、オイラーの運動方程式を計算してみよう。ラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  が  $\xi$  によって記述されているのだが、 $\xi$  が  $x$  と  $t$  の関数であることに注意が必要だ。その場合、オイラーの運動方程式は、

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi'} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0,$$

なる形となる。ここで、 $\xi$  の導関数のうち、 $\xi'$  は  $x$  についての微分、 $\dot{\xi}$  は  $t$  についての微分である。オイラーの運動方程式を得るための微係数を計算すると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi'} = \rho \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = -e \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

が得られる。これらを利用してオイラーの運動方程式を計算すると、

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{e}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (7.42)$$

が導出される。導出された (7.42) は波動方程式だ。この波動方程式によると、変位情報  $\xi(x, t)$  は速さ  $c = \sqrt{\rho/e}$  で伝搬する。波動方程式 (7.42) の一般解は、

$$\xi = f(x \pm ct), \quad (7.43)$$

なる形をとる。ここで、 $f$  は任意の関数を意味する。この解のうち、複号が正符号である解は  $x$  の負方向に伝搬する波、負符号である解は  $x$  の正方向に伝搬する対応する。つまり、波動方程式 (7.42) の一般解は、 $x$  の正方向と負方向に伝搬する波の重ね合わせだ。どのような比率で重なるかは境界条件によって決まる。

有限の長さ  $L$  をもつ1次元の連続体の振動について境界条件を適用しよう。座標  $x = 0, L$  が固定された条件、すなわち、 $\xi(0, t) = \xi(L, t) = 0$  を境界条件とする。解  $\xi(x, t)$  を任意関

数とすると取り扱いが厄介なので、角速度が $\omega$ である解に限定して解析しよう。一般的な解を得るには、後に異なる角速度の解を重ね合わせればよい。角速度が $\omega$ であれば、波の周期は $2\pi/\omega$ となる。その時間で波は $2\pi c/\omega$ の長さを伝搬する。これが波長 $\lambda$ にあたるわけだ。つまり、速さ $c$ で伝搬する角速度 $\omega$ の波では、

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

なる関係が成立する。ここで、 $k \equiv 2\pi/\lambda$ なる波数を用いると、

$$x \pm ct = \frac{c}{\omega} = \left( \frac{\omega}{c} \pm \omega t \right) = \frac{c}{\omega},$$

であるので、波動方程式の一般解は、

$$\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \alpha) + B \cos(kx + \omega t + \beta),$$

なる形で書くことができる。この後の取り扱いを考えるなら、一般解は、

$$\xi(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t) + A_2 \sin(kx - \omega t) + B_1 \cos(kx + \omega t) + B_2 \sin(kx + \omega t),$$

と書いた方がよいだろう。この解に対して、境界条件 $\xi(0, t) = 0$ が、

$$(A_1 + B_1) \cos \omega t - (A_2 - B_2) \sin \omega t = 0,$$

であることに注意しよう。この境界条件が、 $t$ に関わらず常に成立するためには、 $A_1 = -B_1$ 、 $A_2 = B_2$ でなければならない。その条件を反映させると、一般解は、

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A_1 [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] + A_2 [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] \\ &= 2 \sin kx (A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) \\ &= 2A \sin kx \cos(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

のように変形できる。第2行目への数式変形には、三角関数の和と積の公式を利用した。第3行目への数式変形は、単に、記号を $A_1$ と $A_2$ から $A$ と $\alpha$ に戻しただけだ。この計算結果によると、時刻 $t$ に関係なく $\xi(L, t) = 0$ であるためには、 $kL = n\pi$ でなければならない。ただし、 $n$ は任意の整数だ。波数 $k$ が $k = 2\pi/\lambda$ であるので、その条件は、

$$L = \frac{n\lambda}{2}, \tag{7.44}$$

のように書くことができる。つまり、連続体の長さ $L$ が半波長の整数倍となるような波長の波しか存在できないということだ。得られた解において、 $2A \sin kx$ が振幅にあたり、その中を時間の関数 $\cos(\omega t + \alpha)$ の振動が発生している。振幅は時間に依存しない位置 $x$ の関数であるので、得られた解は定在波だ。

上で述べたように、解  $\xi(x, t)$  には  $x$  の正方向に伝搬する解と負方向に伝搬する解が重ね合わされている。正方向に伝搬する解を  $\xi_+(x, t)$ 、負方向に伝搬する解を  $\xi_-(x, t)$  なる記号で書くと、

$$\xi_+(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t) + A_2 \sin(kx - \omega t),$$

$$\xi_-(x, t) = B_1 \cos(kx + \omega t) + B_2 \sin(kx + \omega t),$$

となる。既に境界条件を検討して、 $A_1 = -B_1$ 、 $A_2 = B_2$  であることがわかっているのので、それらの解は、

$$\xi_+(x, t) = A_1 \cos(kx - \omega t) + A_2 \sin(kx - \omega t),$$

$$\xi_-(x, t) = -A_1 \cos(kx + \omega t) + A_2 \sin(kx + \omega t),$$

のように書き換えられる。記号  $A_1, A_2$  を  $A, \alpha$  に戻すと、解  $\xi_+(x, t)$  と  $\xi_-(x, t)$  は、

$$\xi_+(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \alpha), \quad \xi_-(x, t) = A \sin(kx + \omega t - \alpha), \quad (7.45)$$

であることがわかる。この数式から  $x = 0, L$  での関数値を確認すると、

$$\xi_+(0, t) = -\xi_-(0, t), \quad \xi_+(L, t) = -\xi_-(L, t),$$

となっている。得られた特徴の解釈として、図 7.7 に示すように、正方向に伝搬する  $\xi_+(x, t)$  と負方向に伝搬する  $\xi_-(x, t)$  を考えればよい。正方向に伝搬する  $\xi_+(x, t)$  は  $x = L$  で反射する際に位相が  $180^\circ$  反転し、反射波  $\xi_-(x, t)$  は負方向に伝搬し、 $x = 0$  で反射する際に位相が  $180^\circ$  反転する。そのように往復する信号の重ね合わせが定在波  $\xi(x, t)$  を形成するのだ。反射するときに位相が  $180^\circ$  反転する振る舞いは、固定端反射と呼ばれ、電磁波の反射

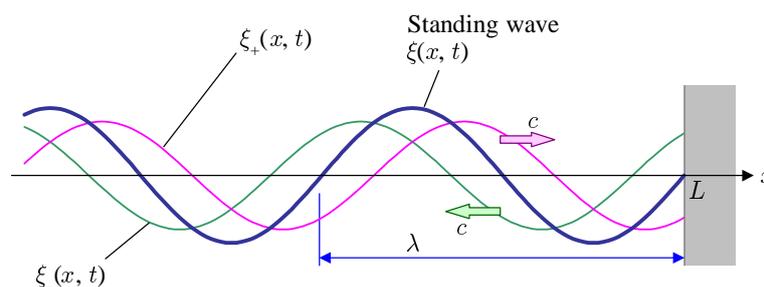


図 7.7: 境界での固定端反射によって形成される定在波

などの境界条件と同様である。図は  $x = L$  での反射を描いているが、同様の反射が  $x = 0$  でも起きている。上で書いた  $L = n\lambda/2$  の条件が満たされていれば、反射を繰り返す波が同一地点で同位相となり、安定して定在波が形成される。仮に、 $L \neq n\lambda/2$  であれば、反射を繰り返すたびに、同一地点で異なる位相が重なり合い、波が相殺されてしまう。その理由で  $L = n\lambda/2$  を満たす波しか存在できないのだ。



## 第8章 電磁気現象の解析力学

電場や磁場は運動する荷電粒子に、いわゆるローレンツ力を作用させる。ローレンツ力によって荷電粒子は運動軌跡を変化させる。そのような電磁気現象においても解析力学は適用できる。本章では多少の基本的説明をするが、電磁気学や特殊相対性理論における数式を取り扱う。

### 8.1 荷電粒子が受ける力

本節は、特殊相対性理論が適用されない条件、すなわち、光速に比べ十分に遅い速度における荷電粒子の運動を取り扱う。電磁気学の基本方程式はマクスウェルの方程式であり、さらに、運動する荷電粒子はローレンツ力と呼ばれる力の作用を受ける。本節は、基本方程式を解説し、その後、ローレンツ力から解析力学としての定式化をはかる。

#### 8.1.1 基本方程式

電磁気学は電気現象と磁気現象を統合した物理学の分野である。その統合はマクスウェルの方程式によってなされた。マクスウェルの方程式は、電気現象と時期現象を統合しただけでなく、電磁波の存在を示し、現代の文明に大きく貢献した。電磁気の基本方程式となるマクスウェルの方程式は、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

なる四つの方程式で構成される。これらの方程式において、 $\mathbf{D}$  が電束密度、 $\mathbf{E}$  が電場、 $\mathbf{H}$  が磁場、 $\mathbf{B}$  が磁束密度である。なお、等方性の媒質では、誘電率  $\varepsilon$  と透磁率  $\mu$  を用いて、 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  なる関係が成立する。一方、電場と磁場の源となるのが、電荷密度  $\rho$  と電流密度  $\mathbf{j}$  である。上記の方程式のうち、第1行目の第1式がガウスの法則であり、電荷が電場の源であることが表現されている。第2式がアンペールの法則であり、電流を周回

するように磁場が発生することを主張している。第2行目の第1式が磁場におけるガウスの法則であり、磁気単極が存在しないことを意味する。第2式はファラデーの法則であり、磁場の時間変動によって起電力が発生することを主張している。

電磁場の記述において、静電ポテンシャルとベクトルポテンシャルを導入すると便利なので紹介しておこう。静電ポテンシャル  $\phi$  と、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (8.2)$$

によって定義される。この定義において、第2式は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  の要請を満たすような定義だ。つまり、任意ベクトルの回転は、発散をとるとゼロになることからベクトルポテンシャルを定義したわけだ。一方、第1式はファラデーの法則に基づく定義式だ。ただし、勾配ベクトルの回転がゼロであることを利用し、自由度  $\phi$  を設けておいた。その自由度が静電ポテンシャルというわけだ。

### 8.1.2 荷電粒子の運動

荷電粒子は、電場によって力を受ける。さらに、運動する荷電粒子は磁場の影響も受ける。荷電粒子の運動を取り扱えば、電磁気現象が力学に影響することがわかる。電荷  $e$  をもつ荷電粒子の運動を考えよう。運動する荷電粒子はローレンツ力:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (8.3)$$

の作用を受ける。ここで、 $\mathbf{v}$  は荷電粒子の速度である。ここで、荷電粒子の質量を  $m$  とすると、ニュートンの運動方程式として  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}}$  が成立するので、荷電粒子に関する仮想仕事の原理は、

$$[m\dot{\mathbf{v}} - e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \delta\mathbf{r} = 0, \quad (8.4)$$

のように記述できる。ここで、 $\mathbf{r}$  は荷電粒子の位置ベクトルとした。さらに、

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{r} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}) - \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v},$$

に注意をしておこう。解析力学の記述のため、場の量を直接記述する代わりにポテンシャルを使ってみよう。つまり、電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  を (8.2) によって定義したポテンシャルを使って書き直すのだ。ポテンシャルを使って、場の量を書き換えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{r} &= -\delta\mathbf{r} \cdot \nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= -\delta\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \cdot \delta\mathbf{r} \end{aligned} \quad (8.5a)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{r} &= [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \cdot \delta \mathbf{r} \\
&= \sum_{k=1}^3 (\mathbf{v}_k \nabla A_k - v_k \nabla_k \mathbf{A}) \cdot \mathbf{r} \\
&= \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{A} - [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}] \cdot \delta \mathbf{r},
\end{aligned} \tag{8.5b}$$

が得られる。ただし、 $\delta\phi$  と  $\delta\mathbf{A}$  は、それぞれ、 $\delta\mathbf{r}$  に沿ったときの  $\phi$  と  $\mathbf{A}$  の変化分である。書き換えられた物理量 (8.5a) と (8.5b) を仮想仕事の原理 (8.4) に代入すると、

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}) + e \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right) \cdot \delta\mathbf{r} - m\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} + e(\delta\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = 0, \tag{8.6}$$

が得られる。この数式変形にあたり、

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}) = m\dot{\mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{r} + m\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v},$$

であることを利用した。仮想仕事の原理 (8.6) は、さらに、

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}) + e \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} + e\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \delta \left( -\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\phi - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) = 0, \tag{8.7}$$

のように書き換えることができる。この数式変形には説明が必要だろう。得られた数式 (8.7) の第2項は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \frac{d\mathbf{A}}{dt},
\end{aligned}$$

の結果を利用している。重要なのは、 $\partial\mathbf{A}/\partial t$  と  $d\mathbf{A}/dt$  の違いである。前者は、数式の上で明示的に含まれる  $t$  について偏微分した偏導関数である。それに対し、後者は  $x, \dot{x}$  などに含まれる  $t$  の依存性についても微分した導関数である。さらに、

$$\delta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{A},$$

なる関係も利用した結果として、(8.7) が得られた。変分 (8.7) を時刻  $t_0$  から  $t_1$  にわたって積分すると、

$$\left[ (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \delta\mathbf{r} \right]_{t_0}^{t_1} - \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right] dt = 0,$$

が得られる。ここで、積分路の支点 ( $t = t_0$ ) と終点 ( $t = t_1$ ) において  $\delta\mathbf{r} = 0$  とすれば、上記の積分結果は、

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right] dt = 0, \tag{8.8}$$

と書くことができる。この方程式がハミルトンの原理における作用積分だと考えると、被積分関数はラグランジアンである。すなわち、電磁場のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (8.9)$$

となる。第5章によると、運動エネルギー  $K$  とポテンシャルエネルギー  $U$  が与えられたとき、ラグランジアンが  $L = K - U$  だった。この類推から、 $e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$  がポテンシャルエネルギーのように振る舞うこといえる。

**磁場中の荷電粒子の運動** 電磁場のラグランジアンが定義できたので、ラグランジュの方程式によって一様磁場を運動する荷電粒子の軌跡を考察しよう。磁束密度は、 $z$  軸方向に大きさ  $B$  のベクトルであるとする。磁束密度が  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  であることから、

$$\mathbf{A} = -\frac{B}{2} [y, -x, 0],$$

とすれば、磁束密度が  $\mathbf{B} = [0, 0, B]$  となる。つまり、ラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eB}{2}(y\dot{x} - x\dot{y}),$$

となる。なお、運動は  $xy$  平面上に限定した。ラグランジュの方程式を記述するため、ラグランジアンを偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{eB}{2}\dot{y}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + \frac{eB}{2}y, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{eB}{2}\dot{x}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} - \frac{eB}{2}x, \end{aligned}$$

が得られる。ここで設定した座標では、ラグランジュの運動方程式が、

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0,$$

となるから、先ほど計算した偏微分を代入し、

$$\ddot{x} = -\frac{eB}{m}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{eB}{m}\dot{x},$$

なる運動方程式が得られる。第1式を時間について微分すると、

$$\ddot{\dot{x}} = -\frac{eB}{m}\ddot{y} = -\frac{e^2 B^2}{m^2}\dot{x},$$

が得られる。右辺を得るには、運動方程式の第2式を利用した。得られた微分方程式は  $\dot{x}$  についての2階の常微分方程式と考えればよい。その微分方程式の一般解は、

$$\dot{x} = A \cos\left(\frac{eB}{m}t + \alpha\right),$$

と書くことができる。ここで、 $A$ と $\alpha$ は任意の定数である。この解を運動方程式の第2式に代入し、 $\dot{y}$ について解くと、

$$\dot{y} = A \sin\left(\frac{eB}{m}t + \alpha\right),$$

がただちに得られる。得られた $\dot{x}$ と $\dot{y}$ を積分すると、

$$x = \frac{mA}{eB} \sin\left(\frac{eB}{m}t + \alpha\right) + x_0, \quad y = -\frac{mA}{eB} \cos\left(\frac{eB}{m}t + \alpha\right) + y_0,$$

が得られる。これが荷電粒子の軌跡だ。なお、 $x_0$ と $y_0$ は積分定数だ。この結果は、荷電粒子が半径 $mA/eB$ の円軌道を描くことを示唆している。また、荷電粒子の速さは一定値 $A$ である。検算のため、得られた円軌道を描くための向心力を計算してみよう。質量 $m$ の物体が、速さ $v = A$ で軌道半径 $r = mA/eB$ の円軌道を描くための向心力は、

$$m \frac{v^2}{r} = m \frac{eB}{mA} A^2 = eBA,$$

である。つまり、向心力は電荷と磁束密度と速さの積であり、ローレンツ力と一致する。したがって、ラグランジュの運動方程式からローレンツ力による荷電粒子の軌跡が正しく計算できた。さらに振り返ると、(8.9)が電磁場におけるラグランジアンとして意味のある形式が得られていたことが示されたということだ。



## 第9章 他分野における解析力学の応用

本章では、これまでに定式化してきた解析力学を力学以外の分野に応用する処方箋を紹介する。具体的には、電磁気学、特殊相対性理論、量子力学を取り扱う。

### 9.1 電磁気学

### 9.2 特殊相対性理論

特殊相対性理論は、電磁気学の延長として派生した物理学の分野だ。電磁気学におけるマクスウェルの方程式によって電磁波(光)が光速で伝搬することが予想された。その光速が光源や観測者の運動に関わらず、常に一定であることから、光速不変の原理を発端に特殊相対性理論が提唱された。光速不変の原理は、運動によって長さや時間の尺度が変化すること、エネルギーと質量が等価であることを主張した。

#### 9.2.1 物理量の変換

特殊相対性理論は、光速が有限である物理に適用できるようガリレイの相対原理を修正した物理学だ。ある基準の慣性系  $K$  とそれに対して  $x$  軸方向に速度  $v$  で運動する慣性系  $K'$  が存在するとき、ガリレイ変換では両者の座標系は、

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

によって変換される。座標系はカルテシアン座標とした。プライム (') を付した座標が  $K'$  系の座標だ。通常、ガリレイ変換では時間  $t$  が変換を受けことは想定外なので  $t'$  を用いないのだが、後の比較のためあえて、 $t' = t$  なる変換式を書いておいた。

特殊相対性理論では、光速不変の原理のため、観測者が運動すると長さや時間の尺度が異なる。その結果、 $K$  系と  $K'$  系の座標変換は、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

のようになる。この座標変換は**ローレンツ変換**と呼ばれる。ここで、 $c$ が光速であり、 $\beta \equiv v/c$ である。言うまでもなく、 $c \rightarrow \infty$ の極限で、ローレンツ変換はガリレイ変換と一致する。興味深いことに、ローレンツ変換を微分すると、

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c'^2 dt'^2,$$

が得られる。つまり、この関係式は、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (9.1)$$

が慣性系に依存せず一定であることを意味している。このような関係が成立する空間はミンコフスキー空間と呼ばれる。なお、微小距離  $ds$  はミンコフスキー空間の線素である。

**光速不変の原理** ミンコフスキー空間の線素から、光速不変の原理が導かれる。本来、光速不変の原理から開始した物理学の理論なので導かれて当然なのだが、簡単に確認しよう。伝搬する光が微小時間  $dt$  の間に、微小変位  $[dx, dy, dz]$  が生じるとする。光速が  $c$  であるので、

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2,$$

でなければならない。この等式を書き換えると、

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0,$$

が得られるわけだ。これは線素が  $ds = 0$  である状況だ。上で述べたように線素は慣性系に関わらず不変であるので、 $K'$ 系では

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = 0,$$

が成立するはずだ。つまり、いかなる慣性系から見ても光速は  $c$  ということだ。それは光速不変の原理に他ならない。

**速度の合成**  $K$ 系から見て速度  $[u_x, u_y, u_z]$  で運動する物体の速度は  $K'$ 系から見るとどうなるだろうか？ ガリレイ変換では、異なる慣性系から見た物体の速度はベクトルの加算（あるいは減算）で計算できたが、相対性理論では長さは時間の尺度が変わるため単純ではない。導出は省略するが、ローレンツ変換を微分することによって、

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2},$$

が得られる。これが相対性理論における速度の合成則だ。宣言したとおり、合成された速度は単純な和になっていない。仮に、 $K$ 系から見た速度が  $c$  に等しい場合、 $K'$ 系から見た速度も  $c$  に等しくなる。当然だが、光速不変の原理と合致している。

**運動量とエネルギー** ニュートン力学では、質量が  $m$  で速度  $\mathbf{u}$  で運動する物体の運動量が  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$  であり、運動エネルギーは  $K = mu^2/2$  だ。それらの物理量は、相対性理論では異なる値となる。相対性理論における運動量と運動エネルギーは、

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (9.2)$$

である。運動量は  $c \rightarrow \infty$  の極限でニュートン力学の運動量と一致する。運動エネルギーはその極限において、 $K = mc^2 + mu^2/2$  となる。つまり、この運動エネルギーの表記では、 $\mathbf{u} = 0$  のとき  $K = mc^2$  となる。その意味で、 $mc^2$  は静止エネルギーと呼ばれる。一般の速度  $\mathbf{u}$  において、(9.2) は、

$$K^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4,$$

が成立する。

## 9.2.2 作用積分

解析力学において、運動を決定するには作用積分を最小化が必要だ。作用積分は、

$$I = \int L dt,$$

となる。運動を決定する、作用積分の被積分関数  $L$  を特定しなければならない。既に議論してきたように、被積分関数  $L$  はラグランジアンだ。ラグランジアンは座標系に依存せず不変でなければならない。ところが、前項で述べたように、運動エネルギーは異なる慣性系で変換されてしまうため、運動エネルギーを用いた表記では都合が悪い。相対性理論に適したラグランジアンを考察しよう。

座標系に対する作用積分の不変性の要請から、ラグランジアンの候補として相対性理論における不変量を考えるのがよい。その代表がミンコフスキー空間の線素:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

だろう。この線素に  $-1/c^2$  を乗じて平方根をとると、固有時間の微小変化:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} dt,$$

が得られる。この数式の平方根の部分をラグランジアン、すなわち、

$$L = \alpha \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}, \quad (9.3)$$

のように定義すれば、作用積分は、

$$I = \alpha \int d\tau,$$

のように固有時間の定数倍に相当する。このように定義されれば、作用積分は座標系に依存せず一定である。ここで、固有時間からラグランジアンに変換するための定数  $\alpha$  が特定できるか確かめてみよう。

定数  $\alpha$  を得るだけならば、一般化座標と一般化運動量の関係  $p_k = \partial L / \partial q_k$  を利用するのがよいだろう。ここで、一般化座標  $q_k$  の代わりに  $x$  を取り上げ、それに対応する一般化運動量  $p_k$  が  $p_x$  となるのだから、 $p_x = \partial L / \partial \dot{x}$  が成立するはずだ。ラグランジアン  $L$  を  $\dot{x}$  について偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{\alpha \dot{x} / c^2}{\sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) / c^2}},$$

が得られる。ここで、 $u_x = \dot{x}$ ,  $u_y = \dot{y}$ ,  $u_z = \dot{z}$  であり、 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = u^2$  とすれば、その偏導関数は、

$$\frac{\partial L}{\partial u_x} = -\frac{\alpha u_x / c^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}},$$

のように書き換えることができる。この式から明らかなように、 $\alpha = -mc^2$  であれば、 $\partial L / \partial \dot{x}$  が運動量ベクトルの  $x$  成分となるわけだ。他の成分についても同様だ。したがって、

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}, \quad (9.4)$$

が特殊相対性理論におけるラグランジアンである。

### 9.3 量子力学