

第4章 一般化座標

本章から解析力学を取り扱う。解析力学は、力学における数学体系を追求する学問である。力学はニュートンの運動方程式によって確実に記述されるのだが、ベクトルの成分表示をすると適用する座標系によって記述が異なる。解析力学は、力学を取り扱う以上、ニュートンの運動方程式と互換性をもつ一方で、座標系の選び方に関わらず数式記述の統一を追求した力学である。

4.1 解析力学への動機づけ

運動エネルギーを例に挙げ、解析力学への動機づけをしよう。本書で既に説明したように、質量が m で速度 v で運動する物体の運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad (4.1)$$

となることがわかっている。それに対して、質量 m で半径が r の円板が角速度 ω で回転している場合を考えよう。先に結果を示しておく、回転運動による円板の運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (4.2)$$

のように、同一形式の数式で記述できるのである。ここで、 I は慣性モーメントである。既に計算したように、半径 r の円板の質量が m の円板では、慣性モーメントは $I = mr^2/2$ によって与えられる。回転する円板が運動エネルギーをもつのは、円板を構成する内部が速度をもっているからだ。とはいえ、回転軸からの距離を a としたとき、その速さが $a\omega$ となるように、円板の位置によって速度が異なる。そのため、回転運動を扱う場合、速さは本質的な物理量とは言えず、むしろ、角速度 ω を使うべきだ。慣性モーメントを用いた運動エネルギーの表現 $E = I\omega^2/2$ は、その意味で理にかなっている。

回転運動における運動エネルギー $E = I\omega^2/2$ には注意を要する。それは、 $E = mv^2/2$ と同一の数学形式をとっているとはいえ、次元が異なるのだ。質量、長さ、時間の次元を、それぞれ、 M , L , T と書くと、慣性モーメントの次元は ML^2 、角速度の次元は T^{-1} である。このように、数学形式の統一をはかるため、取り扱う物理量の次元が異なることがある。

これから学習する解析力学では、このように、物理量の次元が、通常取り扱う速度や運動量とは次元が異なる場合がある。

4.2 座標系と運動方程式

ニュートン力学では、あらゆる運動が運動方程式 $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ によって支配される。運動方程式は、カルテシアン座標系の x 成分では、 $F_x = m\ddot{x}$ のようになるし、 y 成分や z 成分も同様だ。ところが、極座標のように異なる座標系において、運動方程式はこんな単純に記述できないのだ。本節では、2次元の極座標と3次元の球面座標において運動方程式を記述し、運動方程式の問題を考察する。

二次元の極座標 二次元の極座標における運動方程式は、第1章で惑星の運動を解析した際に取り扱った。本節では改めて、極座標における運動方程式を導出する。

準備段階として、カルテシアン座標と極座標の関係を調べておこう。カルテシアン座標 $[x, y]$ は極座標 $[r, \theta]$ との間に、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

なる関係を満たす。カルテシアン座標系でベクトルを扱う際に、各座標軸と平行な単位ベクトル \mathbf{e}_x と \mathbf{e}_y が用いられる。極座標では、動径方向と接線方向に平行な単位ベクトル \mathbf{e}_r と \mathbf{e}_θ が用いられる。各単位ベクトルは次のように考えれば抽出できる。動径方向の単位ベクトルは \mathbf{e}_r は、位置ベクトル \mathbf{r} を動径方向に微小変化したときの変化率である。正確には、その変化率を長さが1となるように調整したベクトルが単位ベクトル \mathbf{e}_r なのだ。つまり、単位ベクトル:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = r \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y,$$

を r で偏微分して得られるベクトルが動径方向の単位ベクトル \mathbf{e}_r だ。接線方向の単位ベクトルは、位置ベクトルを θ について偏微分して長さを調整すれば得られる。結果を書くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \cdot \mathbf{e}_x + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_y, \end{aligned} \tag{4.3}$$

である。この方程式の逆変換は、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \cos \theta \cdot \mathbf{e}_r - \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \cdot \mathbf{e}_r + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \tag{4.4}$$

である。この単位ベクトルの変換公式に注意して、一般のベクトル \mathbf{A} のカルテシアン座標表示と極座標表示が、

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta,$$

となるように座標成分を変換すると、

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta, & A_x &= A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta, \\ A_\theta &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta, & A_y &= A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.5)$$

が得られる。各行の左右の数式は互いに逆変換の関係にある。ここまですべて準備段階だ。

上記の準備を利用し、運動方程式に必要な加速度ベクトルを極座標で記述しよう。最初に位置ベクトル \mathbf{r} を時間微分し、速度ベクトルの成分をカルテシアン座標で表現しよう。その結果は、

$$v_x = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad v_y = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta, \quad (4.6)$$

となるはずだ。ここで、 $v_x \equiv \dot{x}$, $v_y \equiv \dot{y}$ とした。準備段階で導出したベクトル成分の変換公式 (4.5) に注意すると、極座標系における速度ベクトルの成分は、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad (4.7)$$

となることがわかる。この数式のように、速度ベクトルは簡単な成分表示で記述できるが、加速度ベクトルは多少複雑になる。数式 (4.6) を時刻 t について微分すると、

$$a_x = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \sin \theta, \quad (4.8)$$

$$a_y = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \theta, \quad (4.9)$$

が得られる。ここで、加速度ベクトルの成分として $a_x \equiv \ddot{x}$, $a_y \equiv \ddot{y}$ を定義した。速度ベクトルと同様に、(4.5) に注意しながら動径成分 a_r と接線成分 a_θ に分解すると、

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}, \quad (4.10)$$

が得られる。この計算結果に示されるように、 $a_r \neq \dot{v}_r$, $a_\theta \neq \dot{v}_\theta$ である。このように、極座標表示で速度と加速度の成分が単純な関係を示さないのは、動径方向が角度 θ の依存性をもっているからだ。つまり、 θ を変化させると、その影響を受けて r も変化するのだ。

加速度に物体に質量 m を乗じると物体に作用する力が得られる。すなわち、物体に作用する力の動径成分 F_r と接線成分 F_θ は、

$$F_r = m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2), \quad F_\theta = m(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}), \quad (4.11)$$

のように特定される。この数式が2次元の極座標における運動方程式だ。カルテシアン座標系の運動方程式 $F_x = m\ddot{x}$ と比べると複雑である。一般的な形態が複雑に見えるが、特

定の点からの影響による平面運動を記述するには、この座標系が便利なのだ。例えば、物体に作用する力が中心力の場合、 $F_\theta = 0$ であるので、

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0,$$

である。この微分方程式は、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0,$$

のように変形できるので、 $r^2\dot{\theta}$ が一定である。これは面積速度一定の法則だ。中心力という前提条件だけで、面積速度が一定であることがただちに示せる。これが座標系を選択する理由だ。とはいえ、運動方程式がカルテシアン座標と異なることは問題点として認識しておこう。

球面座標 球面座標系の運動方程式はさらに複雑だ。後に解析力学の恩恵をしっかりと感ずるために、ここで苦勞して球面座標における運動方程式を導出してみよう。導出の開始点は座標変換:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (4.12)$$

である。球面座標においても、座標成分に関する単位ベクトルは2次元の極座標と同様の手順で得られる。つまり、座標変換(4.12)を座標成分で偏微分すれば単位ベクトルが得られるのだ。そのような操作を実行すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \cdot \mathbf{e}_r - \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (4.13)$$

が得られる。この方程式の逆変換を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_y + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_y - \sin \theta \cdot \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_x + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (4.14)$$

が得られる。我々は、これを利用して、球面座標での運動方程式を導出しようとしている。この時点で計算が大変そうだ。

準備段階として、一般のベクトル \mathbf{A} の成分について、カルテシアン座標から球面座標への変換を確認しよう。変換を確認するには、素直にベクトル \mathbf{A} を成分分解してやればよい。すなわち、

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned}
&= (A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta) \mathbf{e}_r \\
&\quad + (A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta) \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + (-A_z \sin \varphi + A_y \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi,
\end{aligned}$$

のように計算を実行する。第1行目は単にカルテシアン座標で成分分解しただけだ。第2行目以降では、(4.13)を利用して単位ベクトルを変換し、数式を整理した。これによって、ベクトルの成分が、

$$\begin{aligned}
A_r &= A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta, \\
A_\theta &= A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta, \\
A_\varphi &= -A_z \sin \varphi + A_y \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

のように変換できることがわかる。この変換の逆変換が、

$$\begin{aligned}
A_x &= A_r \sin \theta \cos \varphi + A_\theta \cos \theta \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi, \\
A_y &= A_r \sin \theta \sin \varphi + A_\theta \cos \theta \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi, \\
A_z &= A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

であることも簡単な計算で導出できる。とはいえ、このベクトルの変換式は2次元の極座標よりも複雑だ。これで球面座標における運動方程式を導出する準備が整った。

準備が整ったので、運動方程式を計算しよう。カルテシアン座標 $[x, y, z]$ を時間微分して得られるベクトル $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ は速度ベクトルなので、 $[v_x, v_y, v_z] \equiv [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ のように記述しよう。座標変換 (4.12) を時間微分して得られる数式:

$$\begin{aligned}
v_x &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi, \\
v_y &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi, \\
v_z &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

を、ベクトルの変換式 (4.16) と比較すると、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta, \tag{4.18}$$

なる変換が得られる。これが球面座標における速度ベクトルの表示だ。続いて、加速度を計算しよう。二次元の極座標のときと同様に考えると、加速度 $[a_x, a_y, a_z]$ は、(4.17) を時間微分することによって得られる。その手順は正しいのだが、実際に計算を実行してみると、結構手間がかかる。その代わりに、速度ベクトルそのもの:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\varphi,$$

を時間微分してみると,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \frac{d}{dt} (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi) \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \end{aligned} \quad (4.19)$$

が導かれる。ここで注意すべきことがある。球面座標における単位ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ は (4.14) に示すように、位置によって変化するので、時間変化に対して定ベクトルとは限らない。つまり、球面座標における単位ベクトルの時間微分は、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\sin\theta \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \quad (4.20)$$

のように、ゼロではない。これらの導関数を (4.19) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\mathbf{e}_\varphi, \end{aligned}$$

のように計算できる。したがって、球面座標における加速度の成分は、

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta, \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta, \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta, \end{aligned} \quad (4.21)$$

となるわけだ。したがって、球面座標系での運動方程式は、

$$\begin{aligned} F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta), \\ F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta), \\ F_\varphi &= m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta), \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。かなり複雑そうな方程式になってしまった。当然だが、 $\theta = \pi/2$ に限定 ($\dot{\theta} = 0$) すると、この運動方程式は2次元の極座標における運動方程式と一致する。これらの運動方程式は、本来の運動方程式 $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ から大きく形が変わっている。座標変換によって、運動方程式がここまで変わってしまうことは問題と考えることができるだろう。

4.3 一般化力

前節で実演したように、座標系が異なると同一の数学形式で運動方程式が記述できない。正確に言うと、取り扱っている座標系での分解した力の成分が、他の座標系と同一の数学

形式で記述できないのだ。本節では、力の定義を変更し、座標系を変更しても同一の数学形式で力を定義する方法を模索する。そのためには、なりふりに構わず、本来の力の次元でなくても許容するような寛容性が必要かもしれない。

異なる座標系で共通の力の定義を探るため、2次元のカルテシアン座標における運動量の成分が $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$ であることに注目しよう。カルテシアン座標系では、力が運動量の時間微分:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad (4.23)$$

である。一方、運動エネルギーが、

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (4.24)$$

であることに注意すると、

$$p_x = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}}, \quad p_y = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}}, \quad (4.25a)$$

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}}, \quad F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{y}}, \quad (4.25b)$$

が得られる。このように、カルテシアン座標系では、運動量と力が運動エネルギーから派生できる。この性質を足掛かりに検討を進めよう。

極座標系ではカルテシアン座標系とは同一ではない。速度ベクトルの成分が、 $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$ であることに注意すると、極座標系における運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad (4.26)$$

となるはずだ。カルテシアン座標系を参考に、運動エネルギーを \dot{r} と $\dot{\theta}$ について微分すると、

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = p_r, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = rp_\theta,$$

が得られる。得られた数式のうち、第2式は運動量とは次元が異なる。その理由は、 $\dot{\theta}$ と \dot{r} の次元が異なるからだ。これらの数式を、さらに t について微分すると、力とは異なる量が導かれる。具体的に計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} &= 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = rF_\theta, \end{aligned}$$

が得られる。第1式には、 F_r だけでなく、遠心力 $mr\dot{\theta}^2$ が現れている。第2式は、次元が異なることを除けば、接線方向の力が得られている。次元が異なるのは、上と同様、速度と次元が異なる物理量で微分しているからだ。

力 \mathbf{F} を作用させて物体を微小変位 $d\mathbf{r}$ だけ移動させる仕事 dW について考えよう。二次元のカルテシアン座標の場合、仕事 dW は、

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy = m\ddot{x} dx + m\ddot{y} dy,$$

となる。この数式に、(4.8) と (4.9) を代入すると、

$$\begin{aligned} dW &= m\ddot{x} dx + m\ddot{y} dy \\ &= (F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta) dx + (F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta) dy \\ &= F_r dr + rF_\theta d\theta, \end{aligned}$$

が得られる。第3行目への数式変形には、 $x = r \cos \theta$ と $y = r \sin \theta$ の全微分:

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

を利用した。得られた結果より、 $f_r \equiv F_r$, $f_\theta = rF_\theta$ を定義すれば、微小仕事 dW は、

$$dW = f_r dr + f_\theta d\theta, \quad (4.27)$$

のように、カルテシアン座標と同様の数学形式で表現できる。つまり、 f_r と f_θ を座標系によらず共通の数学形式で記述できる**一般化力**として定義すると面白そうだ。ところが、前に書いたように、

$$\frac{d}{dt} \frac{dK}{dr} = F_r + mr\dot{\theta}^2$$

であるので、カルテシアン座標のように $(\partial/\partial t) \partial K / \partial \dot{r}$ が力になるわけではない。その意味で、一般化力の定義には工夫が必要だ。ここで、

$$\frac{\partial K}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0,$$

であることに注意すると、

$$f_r \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial K}{\partial r}, \quad f_\theta \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial K}{\partial \theta}, \quad (4.28)$$

のように一般化力が定義できることがわかる。異なる成分においても同一の数学形式で一般化力が記述できている。カルテシアン座標系であれば、

$$f_x \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial K}{\partial x}, \quad f_y \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (4.29)$$

と考えればよい。実際に計算すればわかるとおり、 $f_x = F_x$, $f_y = F_y$ であることが導かれる。このように2次元のカルテシアン座標系と極座標系で共通の数学形式で力を定義できた。実際のところ、(4.28) と (4.29) は、極座標でしか成立できないかもしれない。次節以降では、一般的な座標系において一般化力を考察する。

4.4 一般化座標

物体の運動を記述するにあたり、成分表示するのであれば、3個の座標成分が必要である。複数の物体から構成される系を記述するのであれば、各物体の座標を取り扱うことが必要になる。ここで考える系は、剛体のように特別な束縛条件をもつ系だけでなく、理想気体など束縛条件なしに各質点が自由に運動できる系も包括的に含む。つまり、系全体を取り扱うには、 N 個の物体の座標:

$$[x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2], [x_3, y_3, z_3], \dots, [x_N, y_N, z_N],$$

をすべて取り扱うということだ。これらの座標を特定するには、 $3N$ 個の方程式を連立することになるから、数式表現の上では、

$$[x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \dots, x_N, y_N, z_N],$$

のような $3N$ 次元のベクトルを扱っていると考えてもよいだろう。そう考えるなら、むしろ、

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}],$$

のように、ベクトル成分を x, y, z のように区別せず、すべてを x で統一した方が取り扱いやすい。さらに、物体の数 N という概念も取り払い、 n 次元のベクトル:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n],$$

を取り扱うと考えよう。この場合、 $n \equiv 3N$ である。前節までは $n = 2$ の例を考えていたということだ。特定の1個の物体を3次元空間で扱う場合、 $n = 3$ となる。さらに、10000個の物体を3次元空間で扱うのであれば、 $n = 30000$ となる。

理論構築の上で、カルテシアン座標は取り扱いやすいので、カルテシアン座標を出発点をして利用しよう。カルテシアン座標は、 $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ と記述することにする。カルテシアン座標から任意の座標変換で変換される座標系を $[q_1, q_2, \dots, q_n]$ とする。新たな座標系は、特定の座標を意識しているわけではなく、**一般化座標**と呼ばれる。一般化座標は、

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \end{aligned}$$

のようにカルテシアン座標と座標変換で関係づけられているとする。注意すべき点として、一般化座標は、必ずしも、長さの次元をもっているとは限らない。例えば、角度 θ のように無次元であってもよい。

カルテシアン座標系における速度ベクトルの成分 \dot{x}_k は、解析学の公式を用いて、

$$\dot{x}_k = \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j,$$

で与えられる。総和記号は、 $j = 1, 2, \dots, n$ にわたって演算するものとする。この数式に表すように、 \dot{x}_k は $\{\dot{q}_j\}$ の1次関数であるが、その展開係数 $\partial x_k / \partial q_j$ は、一般的に $\{q_j\}$ の関数である。

速度 \dot{x}_k は、上で述べたように、 $\{q_j\}$ と $\{\dot{q}_j\}$ の関数であるので、形式的に、

$$\dot{x}_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n),$$

と記述できる。とはいえ、 \dot{x}_k は \dot{q}_j に関して1次関数であるので、

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad (4.30)$$

が成立する。興味深いことに、カルテシアン座標系と一般化座標系の偏微分の関係が、速度ベクトルの間での偏微分の関係と一致する。

物体が力の作用を受けて微小変位を生じたときの仕事について考えよう。解析学の公式によって、微小変位は、

$$dx_k = \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j,$$

で与えられる。物体に作用する力を F_k とすると、微小仕事は、

$$dW = \sum_k F_k dx_k = \sum_k \sum_j F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j,$$

である。一般化座標系 q_k における一般化力 f_j は、

$$f_j = \sum_k F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad (4.31)$$

のように変換される。このように定義された一般化力 f_j を用いると、微小仕事は、

$$dW = \sum_j f_j dq_j,$$

のように記述できる。この記述において、 $f_j dq_j$ がエネルギーの次元をもつのだが、 f_j が力の次元をもつとは限らない。なぜなら、 dq_j が長さの次元をもたない場合があるからだ。例えば、 q_j が方位角である場合、 dq_j は次元をもたないので、 f_j がエネルギーの次元をもっているはずだ。結果的に、 dW がエネルギーの次元をもっていればよい。

力 F_k がポテンシャル U による保存力の場合、対応する一般化力は特別な関係式で記述できる。カルテシアン座標系では、保存力は、

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k},$$

のように表現できる。この関係式を (4.31) に代入すると、

$$f_j = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

が得られる。改めて結果を記述すると、

$$f_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad (4.32)$$

となる。保存力の場合、一般化力はカルテシアン座標系の力と同一の数式で計算できる。一般化座標は長さの次元をもっているとは限らないが、次元を気にすることなく、カルテシアン座標の場合と同一の数式で力を計算してよいのである。

4.5 ラグランジュの運動方程式

カルテシアン座標系を参考に、運動エネルギーから運動量を導く規則を定義しよう。カルテシアン座標系では、運動エネルギーを速度ベクトルの成分で偏微分することによって運動量が得られていた。一般化座標系でも同様に、

$$p_k \equiv \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}, \quad (4.33)$$

によって**一般化運動量**を定義する。前にも言及したように、一般化速度 \dot{q}_k が速度の次元をもたないことがあるので、一般化運動量 p_k が運動量の次元をもたない場合があることに注意が必要である。

解析力学は、次元を気にせず、想定した定義にしたがって機械的に計算を進めればよい。一般化運動量の定義式 (4.33) に、解析学の公式を適用し、

$$p_k = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k},$$

のように数式変形する。この数式は、カルテシアン座標系での運動量から一般化座標系への変換である。カルテシアン座標での運動量が $\partial K / \partial \dot{x}_j = m_j \dot{x}_j$ であることに注意すると、

$$p_k = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k},$$

のように一般化運動量を表現できる。なお、この数式変形には (4.30) を利用した。一般化運動量を時刻 t について微分すると、

$$\dot{p}_k = \sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad (4.34)$$

が得られる。右辺の第1項は一般化力 f_k を与える。カルテシアン座標系で、 $m_j \ddot{x}_j = F_j$ であり、(4.31) に注意すれば、右辺の第1項が一般化力であるとわかるのだ。一方、第2項は遠心力のような見かけの力を与える。

運動エネルギー K を一般化座標 q_k について微分した導関数についても考察しよう。もともと、 K は x_k の依存性は含まないが、 \dot{x}_k の関数であり、さらに、 \dot{x}_k が q_k の関数であるので、 K には q_k の依存性が含まれるわけだ。したがって、

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k}, \quad (4.35)$$

と書くことができる。一方、

$$\dot{x}_j = \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \dot{q}_m,$$

を q_k で偏微分すると、

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} = \sum_m \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_m} \dot{q}_m = \sum_m \frac{dq_m}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial q_m} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k},$$

が得られる。この数式を (4.35) に代入すると、

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k},$$

なる関係が導かれる。この数式の右辺は、(4.34) の右辺の第2項であるので、

$$\frac{d}{dt} p_k = f_k + \frac{\partial K}{\partial q_k}, \quad (4.36)$$

に帰着する。ここで、一般化運動量の定義 $p_k = \partial K / \partial \dot{q}_k$ に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} = f_k, \quad (4.37)$$

が得られる。得られた数式は、カルテシアン座標系ではニュートンの運動方程式に変形できるので、この方程式は一般化座標における運動方程式だと考えればよい。ニュートンの運動方程式とは異なり、いかなる座標系においても、この形式の方程式で運動方程式が記述できるわけだ。

運動方程式 (4.37) において、右辺がポテンシャル U による保存力である場合を考えよう。数式 (4.32) に注意すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0,$$

が導かれる。ポテンシャル U は \dot{q}_k の依存性を含まないので、

$$L \equiv K - U, \quad (4.38)$$

で定義される **ラグランジアン** を導入すると、運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (4.39)$$

のように変形される。この方程式は、**ラグランジュの運動方程式** と呼ばれる。方程式 (4.37) において、一般化力 K_k の中に摩擦力のように、運動エネルギーを熱エネルギーなど、ポテンシャル以外に変化させる力が含まれる場合、その成分は右辺に吸収されず、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = f'_k, \quad (4.40)$$

のように右辺に残る。この数式が一般的なラグランジュの運動方程式である。なお、この数式によって、(4.28) と (4.29) が一般化できたことになる。なお、一般化運動量の定義を、

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad (4.41)$$

のように、ラグランジアン の偏微分として定義してもよい。運動方程式が座標系の選び方によらず同一の数学形式で記述できることは、実際に計算する立場で考えると好ましいことだ。とはいえ、形式の美を優先するあまり、手順が複雑化してしまったのでは現実的でない。例を用いて、ラグランジュの運動方程式の有用性を確認しよう。

斜面を転がる球 第 3.3.3 項で取り扱った問題をラグランジュの運動方程式によって解析しよう。第 3.3.3 項と同一設定として、半径 a で質量 M の球を取り扱う。球が転がる斜面の角度を α とする。この球は、滑らずに転がりながら斜面を下降する。解析の便宜上、斜面下方に x 、斜面と垂直方向に y 軸を設定する。さらに、球が転がった量として、時計回りに回転角 θ を設定する。

転がる球には、図 4.1 に示すような力が作用する。球の重心には重力 Mg が作用する。その重力は、成分分解すると、 $Mg \sin \alpha$ で球を斜面下方に引っ張り、 $Mg \cos \alpha$ で斜面を垂直に押ししている。

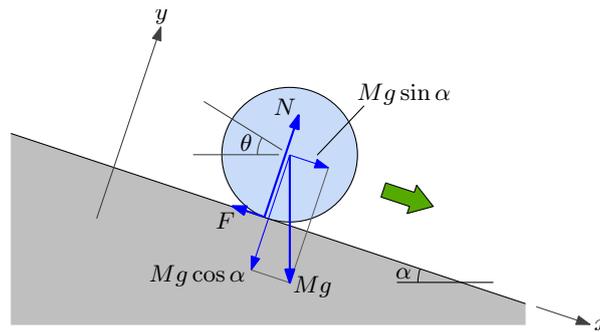


図 4.1: 斜面を転がる球に作用する力

解析力学はラグランジアンを設定するところから始まる。ラグランジアンは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差であるので、

$$L = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I_G}{a^2} \right) \dot{x}_G^2 + Mgx_G \sin \alpha,$$

のように定義できる。ここで、球が斜面を滑ることなく転がっていると仮定し、 $a\dot{\theta} = \dot{x}_G$ である。つまり、回転による運動エネルギーが $I_G \dot{\theta}^2 / 2 = I_G \dot{x}_G^2 / 2a^2$ となることから、ラグランジアンが上のように記述できるのだ。このラグランジアンのもと、ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} - \frac{\partial L}{\partial x_G} = 0,$$

を計算すると、この問題における運動方程式が得られる。運動方程式の決定に必要な要素を計算すると、

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = Mg \sin \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = \left(M + \frac{I_G}{a^2} \right) \dot{x}_G,$$

が得られる。第2式を t について微分すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_G} = \left(M + \frac{I_G}{a^2} \right) \ddot{x}_G = \frac{7}{5} M \ddot{x}_G,$$

が得られる。したがって、ラグランジュの運動方程式は、

$$\ddot{x}_G = \frac{5}{7} g \sin \alpha,$$

のように、ニュートンのアプローチと同一の微分方程式が得られる。ここに示したように、解析力学的アプローチでは、斜面との接触抵抗が球を回転させるモーメントになるとの意識がなくても、正しい運動方程式が導出できるのだ。

球面座標の運動方程式 ラグランジュの方程式を利用して、逆に球面座標におけるニュートンの運動方程式を導出しよう。ニュートンの運動方程式を球面座標に変換する作業が煩

雑であることは既に実証済みだ。その作業がラグランジュの方程式を利用すると簡略化される。導出作業は、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta,$$

から始める。これらの関係式はニュートンの運動方程式を変換する際の間接系として導出した数式だ。この数式の導出までは容易なのだが、これらを時間微分するのが煩雑だった。ここでは、この速度ベクトルを用いて、運動エネルギー：

$$K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta),$$

を書いておく。ここで、自由空間を仮定し、ポテンシャルエネルギーは $U = 0$ とする。つまり、ラグランジアンは $L = K$ である。ラグランジアンを \dot{r} , $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ で微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta,$$

が得られる。これらを時間微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{r}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 2mr\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \theta + 2mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta + mr^2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

が得られる。一方、ラグランジアンを r , θ , φ について微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 + m\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

が得られるので、ラグランジュの運動方程式を構成すると、

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) &= 0, \\ mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) &= 0, \\ mr \sin \theta \cdot (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) &= 0, \end{aligned}$$

が得られる。これらの数式において、括弧で囲んだ要素が前に導出した加速度成分 a_r , a_θ , a_φ と一致しているはずだ。ラグランジュの方程式を利用すると、球面座標におけるニュートンの運動方程式が比較的簡単に導出できたことになる。また、これらの数式は、それぞれ、一般化力 f_r , f_θ , f_φ に相当する。

対称ゴマの運動方程式 第3.6.2項で、歳差運動する対称ゴマの運動方程式を導出した。その際、対称ゴマに作用する力のモーメントを丁寧に考察することが必要だった。ここでは、ラグランジュの運動方程式を用いると、簡単に同じ結果が導出できることを示す。

回転ゴマの運動を考えるには、第3.6.2項のようにオイラー角を意識することが重要だ。特に、ゴマの対称軸を ζ として、前提条件として微分方程式(3.27a)から(3.27c)に注意する。これらの微分方程式を解くには、ラグランジアンが必要だ。ラグランジアンを書き下すには、運動エネルギーが、

$$\begin{aligned} K &= \frac{I_1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2} \omega_3^2 \\ &= \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2, \end{aligned}$$

であることに注目する。右辺を得るには、第1行目の数式に(3.27a)から(3.27c)を代入すればよい。原点からゴマの重心までの距離を l とし、重力加速度 g の様な重力場を仮定するならば、ゴマのポテンシャルエネルギーは、

$$U = Mgl \cos \theta,$$

で与えられる。その結果、ラグランジアン($L = K - U$)は、

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta, \quad (4.42)$$

となる。ラグランジュの運動方程式に、このラグランジアンを代入すれば重力の影響下でのゴマの運動を解析できるのだ。

導出したラグランジアン(4.42)は、 φ と ψ (導関数は除く)を含んでいない。つまり、 φ と ψ は循環座標である。したがって、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta = \text{const}, \quad (4.43a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = \text{const}, \quad (4.43b)$$

が得られる。特に、第2式は、

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \text{const}, \quad (4.44)$$

のように、対称軸まわりの角速度ベクトルが一定であることに読み換えられる。この性質を利用すると、第1式も、

$$L_z = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta = \text{const}, \quad (4.45)$$

のように書き換えられる。この数式は、角運動量ベクトルの鉛直成分が一定であることを示唆している。この数式の第1項が歳差運動によって周回する重心の角運動量であり、第2項が対称軸のまわりを回転するゴマの角運動量である。

ラグランジュの運動方程式に基づいて、 θ について方程式を変形すると、

$$I_1 \ddot{\theta} = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta + Mgl \sin \theta, \quad (4.46)$$

が得られる。得られた微分方程式は、第 3.6.2 項で導出した (3.28) と同一の方程式である。ラグランジュの運動方程式を用いると、コマに作用する力のモーメントを特に考察することもなく運動方程式を得ることができたのだ。これが、解析力学の効果だ。

4.6 エネルギー保存則

本節ではラグランジュの運動方程式からエネルギー保存則を導く。これまでの議論が正しいければ、エネルギー保存則が導かれるはずだ。

エネルギー保存則を導くため、作用する力が保存力の場合に制限して考える。ラグランジアン L は、 q_k と \dot{q}_k の関数であるが、それらが時刻 t の依存性をもっているため、 L は t に依存する。解析学の公式によって、

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k,$$

が得られる。ラグランジュの運動方程式から、

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

であるから、 dL/dt は、

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left[\dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] = \frac{d}{dt} \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

のように変形できる。この計算結果は、

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right] = 0, \quad (4.47)$$

のような形式で書くこともできる。この数式は、ブラケット ($[]$) の中が一定であることを意味している。それを表す意味で、定数 E を用いて、

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = E, \quad (4.48)$$

と書いてみよう。ラグランジアンが $L = T - U$ であり、 U は \dot{q}_k の依存性を含まず、 K が \dot{q}_k に関する 2 次の同次式であるから、

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2K,$$

となる。その事実注意到すると、(4.48)は、 $2K - L = E$ なる数式に変形できる。ここで、 $L = K - U$ に注意すると、

$$K + U = E, \quad (4.49)$$

が導かれる。つまり、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定であるということだ。それは力学的エネルギー保存則に他ならない。

本節で示したように、ある物理量 F が、 $dF/dt = 0$ を満足する場合、 F は時間経過において一定である。そのような量は**保存量**と呼ばれる。中心力の作用で運動する物体の p_θ が保存量の例である。特に、(4.49)は**エネルギー積分**と呼ばれる。

保存力しか存在しない系において、ラグランジュの運動方程式が、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k},$$

のように書けることから、ラグランジアン L が q_k に依存しないのであれば、 $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ は保存量になる。中心力の系における p_θ が保存量であるのは、そのような条件が整っているからである。その条件を満たす一般化座標は**循環座標**と呼ばれる。循環座標が多くなれば、数学的な取り扱いが容易になることは言うまでもないだろう。そのため、数学的な取り扱いのため、できるだけ多く循環座標がとれるように一般化座標を選ぶべきである。循環座標を確保するための変換については、第6章で説明する。

4.7 回転運動とローレンツ力

回転運動する系から観測される物理現象は、絶対静止系から時間依存する回転角度で座標変換することで計算できる。座標変換が時間の関数になるため、本章での議論が適用できる。数学的な解析によって、回転運動する系からの観測と、電磁気学におけるローレンツ力が類似することがわかる。

4.7.1 回転運動する系からの観測

回転運動する系から物理量を観測する場合、自らの回転運動を理由に、遠心力やコリオリの力といった見かけの力が観測される。本項では、ラグランジュの運動方程式を用いて、それら見かけの力を導出する。

絶対静止系を $[x, y, z]$ なる座標で、原点を中心に角速度 ω で回転する座標系を $[\xi, \eta, \zeta]$ で表すとき、これらの座標系は、

$$x = \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t, \quad y = \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t, \quad z = \zeta,$$

なる座標変換で関係づけられる。この座標変換を時間について微分すると、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\xi} \cos \omega t - \dot{\eta} \sin \omega t - \omega (\xi \sin \omega t - \eta \cos \omega t), \\ \dot{y} &= \dot{\xi} \sin \omega t + \dot{\eta} \cos \omega t + \omega (\xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t), \\ \dot{z} &= \dot{\zeta},\end{aligned}$$

が得られる。これが、任意の物体を観測したときの速度ベクトルを与えればよい。その対象物体の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned}K &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{m}{2} [(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) - 2\omega(\dot{\xi}\eta - \xi\dot{\eta})],\end{aligned}$$

のように計算できるはずだ。ここで、物体の運動はポテンシャル $U(\xi, \eta, \zeta)$ の影響を受けるものとする。いうまでもなく、ポテンシャルは物体の速度には依存しない。このとき、ラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2} [(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) - 2\omega(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi)] - U, \quad (4.50)$$

となる。ラグランジアンを速度ベクトルの成分で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m(\dot{\xi} - \omega\eta), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m(\dot{\eta} + \omega\xi), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} = m\dot{\zeta}, \quad (4.51)$$

が得られる。これらは、共役運動量の成分である。さらに、ラグランジアンを座標成分で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = m(\omega^2\xi + \omega\dot{\eta}) - \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta} = m(\omega^2\eta - \omega\dot{\xi}) - \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \zeta} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad (4.52)$$

が得られる。したがって、ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} - \frac{\partial L}{\partial \zeta} = 0,$$

に上記の計算結果を代入すると、

$$\begin{aligned}m\ddot{\xi} &= -\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\omega\dot{\eta} + m\omega^2\xi, \\ m\ddot{\eta} &= -\frac{\partial U}{\partial \eta} - 2\omega\dot{\xi} + m\omega^2\eta, \\ m\ddot{\zeta} &= -\frac{\partial U}{\partial \zeta},\end{aligned}$$

なる運動方程式が得られる。この運動方程式は、カルテシアン座標系で加速度を計算し、数式を整理する労力に比べると計算が楽になっている。それがラグランジュの運動方程式の効果である。得られた数式は、回転座標系から見た加速度に物体の質量を乗じた量であるので、回転座標系から見た力を表す。各座標成分に対応する微分方程式について、右辺の第2項がコリオリの力、第3項が遠心力である。それらの力は、回転座標系からの観測される見かけの力である。

4.7.2 ローレンツ力

本項では電磁気学におけるローレンツ力を取り扱う。突然、電磁気学に話題が変わって驚くかもしれないが、ローレンツ力を取り扱うには、前項の回転座標系の知識が役に立つのだ。ローレンツ力と回転座標系の類似性から、本項の最後にはラーモアの定理を紹介する。

既に前項で回転座標系を取り扱い、そこで生じる見かけの力としてコリオリの力と遠心力の存在を認識した。回転座標系から見た位置ベクトル ξ と、回転の角速度ベクトル ω が与えられると、質量 m の物体は、コリオリの力 $-2m(\dot{\xi} \times \omega)$ 、遠心力 $-m\omega \times (\omega \times \xi)$ なる見かけの力を受けるのだ。

電磁気学において、磁場の中を荷電粒子が運動するとローレンツ力の作用を受ける。そのローレンツ力が、回転座標系におけるコリオリの力に類似している。例えば、電場 \mathbf{E} 、磁束密度 \mathbf{B} の中で電荷 e をもった荷電粒子が速度 \mathbf{v} で運動する場合を考えよう。荷電粒子は電場からクーロン力を受けるだけでなく、磁束密度に起因するローレンツ力を受ける。荷電粒子が受ける力は、

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.53)$$

のように記述される。右辺の第1項が電場から受けるクーロン力、第2項がローレンツ力である。これを見ると、コリオリの力における ω を \mathbf{B} に置き換えればローレンツ力になるという類似性がわかるだろう。

簡単のため、磁束密度が z 成分しかもたない状況 ($B_x = B_y = 0, B_z = B$) を考えよう。さらに、静電ポテンシャルを ϕ とする。このとき、荷電粒子の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -e\frac{\partial\phi}{\partial x} + eB\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -e\frac{\partial\phi}{\partial y} - eB\dot{x}, \quad m\ddot{z} = -e\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad (4.54)$$

となる。このように成分分解しても、前項で取り扱った回転座標系に類似している。このような運動方程式を導けるようなラグランジアンを考えると、

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2}(xy - yx) - e\phi, \quad (4.55)$$

であることが容易にわかる。このラグランジアンを、ラグランジュの運動方程式に代入して検算すると上に書いた運動方程式が得られるはずだ。

電磁場と回転座標系のラグランジアンの比較し、共通点を考察してみよう。回転座標系のラグランジアンは前項で既に導出したが、再び、ここで書き出してみよう。前節で導出した回転座標系のラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2} \left[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - 2\omega(\dot{x}y - \dot{y}x) + \omega^2(x^2 + y^2) \right] - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (4.56)$$

なる形をしていた。ただし、前項で用いた回転座標系の座標 $[\xi, \eta, \zeta]$ は $[x, y, z]$ として書き換えた。条件を整理しておく、前項で取り扱ったのは、 z 軸を回転軸とする回転座標から見た物理現象を取り扱った。これに対して、本項の現時点では、 z 軸方向に磁束密度が向いている電磁場における荷電粒子の運動を取り扱っている。なお、回転座標系におけるポテンシャルに関して完全に z 軸について軸対称とすると、その依存性は、 $x^2 + y^2$ と z についてのみとなる。その場合、座標軸が回転していても常に一定となり、時間依存性がなくなる。そのような条件を満たすのが (4.56) で記述されるラグランジアンだ。このラグランジアンと、電磁場におけるラグランジアン (4.55) との比較によって、**ラーモアの定理**が導かれる。

ラーモアの定理 電場が z 軸に対して軸対称であるとき、その環境下にある荷電粒子に、さらに z 軸方向の意思ような磁場 (磁束密度が B) を加えたときの運動は、 $B = 0$ のときの運動を角速度 $\omega = eB/2m$ で z 軸のまわりを回転する回転座標系から見た状況と同一である。ただし、 ω^2 の項を無視するものとする。

ラーモアの定理によると、磁束密度が存在しない状況で荷電粒子が電場の影響を受けながら運動している様子を角速度 $\omega = eB/2m$ で回転する回転座標系から観測すると、 ω^2 の項を無視すれば、磁束密度 B の影響を受けたときと等価な状況を観測できるとも解釈できる。なお、その座標回転の角速度 $\omega = eB/2m$ は**ラーモア周波数**と呼ばれる。

磁場を定義する際にベクトルポテンシャルを用いることも多いので、ベクトルポテンシャルを用いた表記も言及しておこう。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

によって磁束密度 \mathbf{B} を与える。磁場が z 軸方向にのみ成分をもつ場合 ($B_z = B$)、ベクトルポテンシャルは、

$$A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0,$$

となる。このベクトルポテンシャルをラグランジアン (4.55) に代入すると、

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) - e\phi,$$

が得られるわけだが、この成分表示から一般的なベクトル表記において、

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - e\phi, \quad (4.57)$$

となることが容易に想像できる。このベクトル表記を利用して、 z 成分以外をもつ一般的な磁束密度を考えると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z,$$

であるから、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right),$$

が導き出せる。他の成分(y と z)についても同様なので、記述は省略する。ここで、 dA_x/dt と $\partial A_x/\partial t$ との違いは、前者は x, y, z に含まれる t の依存性を含めての微分係数であり、後者は明示的な t による偏微分係数である。一方、

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e \frac{dA_x}{dx} \dot{x} + e \frac{dA_y}{dx} \dot{y} + e \frac{dA_z}{dx} \dot{z} - e \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

であるので、ラグランジュの運動方程式は x 軸方向について、

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + e \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \dot{y} - e \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \dot{z} \\ &= -e \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_x + e \dot{y} (\nabla \times \mathbf{A})_z - e \dot{z} (\nabla \times \mathbf{A})_y \\ &= -e \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_x + e [\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_x, \end{aligned}$$

のように数式変形できる。ここで、静電ポテンシャルやベクトルポテンシャルとの電磁場の関係:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

に注意すると、ラグランジュの運動方程式が、

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B},$$

なる運動方程式に帰着することが結論づけられる。つまり、ローレンツ力が電磁場のラグランジアン(4.57)から導出できたのだ。なお、(4.57)の右辺における $-e\phi$ の項が、回転座標系における $-U$ に相当する。

4.8 束縛運動

束縛運動は、既に第 2.6 で取り扱っているが、ここでは、解析力学の立場で束縛運動を考察しよう。前に学んだように、束縛運動における束縛条件を利用すると、取り扱う座標成分を減らすことができる。座標成分の減少は、自由度の減少、さらに、未知数の減少を意味する。未知数が減ることは問題を解くうえで好ましいことだ。

4.8.1 束縛条件と自由度

既に説明したように、さまざまな形態の運動を同一形式の数学で取り扱うためには、一般化座標の取り扱いが有効だ。一般化座標が $[q_1, q_2, \dots, q_n]$ である場合、座標成分として n 個の未知数が存在する。しかし、束縛条件を利用し、未知数が n より少なくなるように一般化座標を設定することが問題を解くうえで有効だ。

束縛運動を取り扱うにあたり、束縛条件が未知数を減少させる。既に学んだように、束縛条件は一般的に、

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0,$$

のような数式で表現される。このように、明確な関数で表現できる束縛は**ホロノミックな束縛**と呼んだのだった。好ましい形として、束縛条件が $q_n = \text{const}$ のように表現できると、未知数が明示的に減るわけだ。この時点で未知数が q_1, q_2, \dots, q_{n-1} となっているので、自由度は $n - 1$ である。

複数の未知数が設定され、一般化座標をうまく設定することによって、 $q_n = \text{const}$, $q_{n-1} = \text{const}$, \dots , $q_{n-k+1} = \text{const}$ のように表現できたとしよう。つまり、束縛条件が k 個も設定できている。このとき、自由度は $n - k$ となる。

4.8.2 時間依存する束縛条件

第 2.6 節では時間依存する束縛を取り扱わなかった。その説明に一般化座標の知識が必要だったからだ。本章で一般化座標を取り扱ったので、時間依存する束縛条件の取り扱い準備が整ったわけだ。

時間依存する束縛運動の例として、移動する支点に取り付けられた振り子の運動を考えよう。図 4.2 に示すように、振り子の支点は時間の関数 $x = F(t)$ で表される。振り子の長さは l で、その先端に質量 m のおもりが取り付けられている。当然である、振り子の運動

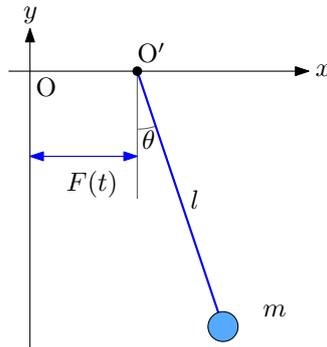


図 4.2: 支点が移動する振り子

は支点の移動 $F(t)$ によって影響を受ける。支点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_0(t)$ なる記号で書くならば、振り子の位置 \mathbf{r} は、

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)| = l,$$

なる束縛を受ける。簡単のため、ホロノミックな束縛を考えよう。つまり、ひもの長さ l が定数であり、たるむ場合を想定しないものとする。時間の依存性を含む場合、ホロノミックな束縛条件は一般的に、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0,$$

なる形式で記述できる。束縛条件となる関数に t の依存性が含まれている。

解析の準備 支点が運動する振り子を解析する準備として、数学的な処方箋を少し整理した方がよいだろう。処方箋を整理することによって、始点が運動していたとしても、すなわち、時間依存の束縛条件があったとしても、ラグランジュの方程式が形を変えないことを示しておく。

既に説明したように、束縛条件は自由度を減少させる。ここでは、空間の次元が n であるが、束縛条件によって自由度が n' に減少しているとする。すなわち、 $n' < n$ である。このとき、座標 x_k は、

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_{n'}, t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.58)$$

なる関数で表される。ここで、一般化座標 q_j は、束縛条件に依存する成分が $n' < j \leq n$ となる成分になるよう座標が変換されている。つまり、運動解析において一般化座標の第 $n'+1$ 成分以降を考えなくてもよいということだ。そのとき、一般化座標や時間の微小変化によって、座標成分 x_k には、

$$dx_k = \sum_{j=1}^{n'} n' \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_k}{\partial t} dt,$$

なる微小変化が生じる。この微小変化が微小時間 dt における変化だとすると、変化率は、

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^{n'} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad (4.59)$$

となるはずだ。右辺の最終項が時間による束縛条件に相当する。その項は、 $\partial x_k / \partial t$ であり、 dx_k / dt ではない。その最終項は、明示的に含まれる t の依存性について x_k を微分した導関数にすぎない。実際、 x_j は q_j の依存性を含み、さらに、その内部に t の依存性を含んでいる。含まれる t の依存性すべてについて微分した導関数が dx_k / dt なのだ。

数式 (4.59) によると、 \dot{x}_k は \dot{q}_j について 1 次式で表現される。このとき、 $\partial x_k / \partial t$ は定数項として振る舞う。すなわち、時間依存の束縛条件を含まないときと同様に、

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad (4.60)$$

が成立する。この対称性は後で利用することになる。

物体に力 F_k を作用させることによって微小変位 dx_k が生じたとき、力 F_k は、

$$dW = \sum_{k=1}^n F_k dx_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n'} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_j + \sum_{k=1}^n F_k \frac{\partial x_k}{\partial t} dt,$$

なる微小仕事を実行する。一般化力 f_j を用いると、

$$dW = \sum_{j=1}^{n'} f_j dq_j + \sum_{k=1}^n F_k \frac{\partial x_k}{\partial t} dt, \quad (4.61)$$

なる数式で微小仕事が表現できる。ここで、一般化力 f_j は、

$$f_j \equiv \sum_{k=1}^n F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j},$$

によって定義される。数式 (4.61) の右辺第 2 項は、時間依存の束縛条件を創り出す系が実行する仕事を表す。例えば、振り子の支点が運動することによって時間依存の束縛条件が発生しているのであれば、その支点が振り子を移動するのに要する仕事である。

時間依存の束縛条件によって物体の運動が時間依存をもつはずであるから、系全体の運動エネルギー K には t の依存性が明示的に含まれるはずだ。そのため、共役運動量:

$$p_k \equiv \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k},$$

も明示的に t の依存性を含む。運動量の時間微分 \dot{p}_k は、時間依存の束縛条件がない場合と同様に、

$$\dot{p}_k = \sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad (4.62)$$

が成立するのだが, \dot{x}_j を q_k で偏微分した導関数は, 時間依存の束縛条件の影響を受け,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} &= \sum_{m=1}^{n'} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_m \partial q_k} \dot{q}_m + \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial t} \\ &= \sum_{m=1}^{n'} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial t},\end{aligned}$$

のようになる。ここで, 微分演算子 $\partial/\partial t$ が,

$$\frac{d}{dt} = \sum_{m=1}^{n'} \dot{q}_m \frac{\partial}{\partial q_m} + \frac{\partial}{\partial t},$$

であることに注意すると, 偏導関数 $\partial \dot{x}_j / \partial q_k$ は,

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad (4.63)$$

と書けることがわかる。この偏導関数の性質を (4.62) に代入すると,

$$\dot{p}_k = \sum_{j=1}^n m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_k},$$

が得られる。この数式の右辺第1項は一般化力 f_k に他ならず, 第2項は $\partial K / \partial q_k$ に等しいので, この数式全体は,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = f_k + \frac{\partial K}{\partial q_k},$$

となり, 時間依存の束縛条件がない場合と数学的に同形である。なお, 一般化力 f_k はポテンシャル U を用いて,

$$f_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k},$$

となることも時間依存の束縛条件がない場合と同様である。時間依存の束縛条件によって, ポテンシャル U は, $U(q_1, q_2, \dots, q_{n'}, t)$ のように, 空間に関する自由度が $n' (< n)$ になり, t の依存性を含んではいるが, ラグランジアン¹⁾の定義や, ラグランジュの運動方程式は時間依存の束縛条件がない場合と同一である。つまり, ラグランジュの手法は, 様々なケースにおいて同一の数学形式での記述を可能とすることが長所である。

運動の解析 準備が整ったので, 図4.2に描く振り子を, 時間依存の束縛条件を含む系の例としてと解析しよう。振り子の支点は x 軸上を動き, 時刻 t において $x = F(t)$ に支点が位置すると仮定しよう。振り子の長さは l であり, 視点から見た鉛直下方を基準とし, 角度 θ で振り子の位置を表すとする。このとき, 振り子の位置は,

$$x = l \sin \theta + F(t), \quad y = -l \cos \theta,$$

である。言うまでもなく、角度 θ には時刻 t の依存性が隠れている。これらを時刻 t で微分すると、

$$\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta + F'(t), \quad \dot{y} = l\dot{\theta} \sin \theta,$$

なる速度ベクトルの成分が得られる。振り子の質量を m とすると、運動エネルギーは、

$$K = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta} F'(t) \cos \theta + \frac{m}{2} [F'(t)]^2, \quad (4.64)$$

なる。ただし、 $F'(t)$ は $F(t)$ の導関数である。右辺の第2項と第3項が、視点の運動に関する影響であり、特に、第2項には、 θ と $\dot{\theta}$ の依存性が含まれている。なお、束縛条件は、

$$(x - F(t))^2 + y^2 - l^2 = 0, \quad (4.65)$$

のように、 x, y だけでなく t の依存性が含まれる。この例において、ポテンシャルエネルギーが、

$$U = -mgl \cos \theta,$$

であるので、ラグランジアンは、

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta} F'(t) \cos \theta + \frac{m}{2} [F'(t)]^2 + mgl \cos \theta, \quad (4.66)$$

である。このラグランジアンに基づき、ラグランジュの運動方程式のための要素を計算しておこう。ラグランジアンを $\dot{\theta}$ で偏微分した導関数、すなわち、一般化運動量 $p_{\dot{\theta}}$ は、

$$p_{\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} + ml F'(t) \cos \theta,$$

となる。この数式を時間微分すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \ddot{\theta} + ml F''(t) \cos \theta - ml \dot{\theta} F'(t) \sin \theta,$$

が得られる。一方、ラグランジアンを一般化座標 θ で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml \dot{\theta} F'(t) \sin \theta - mgl \sin \theta,$$

が得られる。これでラグランジュの運動方程式を具体的に記述する材料がそろった。したがって、支点が動く振り子に関するラグランジュの運動方程式として、

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = -\frac{F''(t)}{l} \cos \theta, \quad (4.67)$$

が得られる。具体例として、支点の運動が正弦関数 $F(t) = A \cos \omega t$ で記述できる場合において、 θ が十分に小さい前提条件で運動方程式を書くと、

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = \frac{A\omega^2}{l} \cos \omega t, \quad (4.68)$$

なる微分方程式が得られる。いうまでもなく、 $\sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1$ なる近似を適用した。得られた微分方程式は、この系が強制振動であることを示唆している。微分方程式(4.68)の解を調べるため、その方程式を、

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = B \cos \omega t,$$

のように簡略化しておこう。ここで、 $\omega_0^2 = g/l$, $B = A\omega^2/l$ である。この方程式の一般解は、

$$\theta = C \cos(\omega_0 t + \phi) - \frac{B}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega t, \quad (4.69)$$

のように書くことができる。この数式の第1項は微分方程式の右辺をゼロとしたとき、すなわち、斉次微分方程式の一般解であり、第2項は与えられた微分方程式の特殊解である。この一般解によると、 ω が ω_0 に近づくと第2項の振幅が増大する。特に、 $\omega = \omega_0$ の場合、第2項が発散する。その現象は**共振**と呼ばれる。この例では摩擦を考慮していないので、共振条件において振幅が発散する。実際の物理現象では、摩擦があるため、共振条件でも振幅は有限である。

共振の条件を満たすとはいえ、突如として振幅が無限大になるわけではない。時間の関数として強制振動の解を調べてみよう。そのためには、条件を与えて積分定数 B と ϕ を決定する必要がある。条件として、 $t = 0$ において、 $\theta = 0$, $\dot{\theta} = \alpha$ としよう。その条件は、

$$C \cos \phi = \frac{B}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad -C\omega_0 \sin \phi = \alpha,$$

なる数式で表現できる。未知数 C と ϕ を直接決定する代わりに、この数式を $C \cos(\omega_0 t + \phi)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} C \cos(\omega_0 t + \phi) &= C \cos \phi \cos \omega_0 t - C \sin \phi \sin \omega_0 t \\ &= \frac{B}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \end{aligned}$$

が得られるので、微分方程式の解は、

$$\theta = \frac{B}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega t) + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega t, \quad (4.70)$$

であることがわかる。この解の第1項は、 $\omega = \omega_0$ のとき、分子と分母がともにゼロとなるので、発散を免れるかもしれない。その可能性を確かめるため、 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ としてみよう。ここで、 $\Delta\omega$ は十分に小さいものとする。そのとき、

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \simeq \frac{1}{2\omega_0 \Delta\omega},$$

なる近似が成立する。一方、

$$\cos \omega_0 t - \cos \omega t \simeq t \sin \omega_0 t \cdot \Delta\omega,$$

なる近似も成立する。したがって、

$$\theta = \frac{1}{\omega_0} \left(\alpha + \frac{B}{2}t \right) \sin \omega_0 t$$

が得られる。ここで、 $B = A\omega_0^2/l$ ($\omega \simeq \omega_0$ なので) によって記号を戻し、 $\alpha = 0$ に限定すると、

$$\theta = \frac{A\omega_0}{2l} t \sin \omega_0 t, \quad (4.71)$$

なる解が得られる。この解は、 $\alpha = 0$ に限定したため、 $t = 0$ で完全に静止している状態からの強制振動だ。この解は、強制振動によって、振幅が時刻 t に比例して増大することを意味している。比例するということは、 A が小さくても時間をかければ振幅が十分に大きくなることを示唆する。つまり、共振条件を満たせば、小さな力であっても大きな振幅が得られるということだ。

本項で解析した運動は、時間の関数としてグラフ表示すると図 4.3 のような曲線を描く。このグラフは、初期状態が $\theta = 0$ で停止している条件における数式 (4.70) である。つまり、 $\alpha = 0$ とした解だ。強制振動の角速度 ω が ω_0 と大きく違う場合、振幅が小さい。一方、 ω

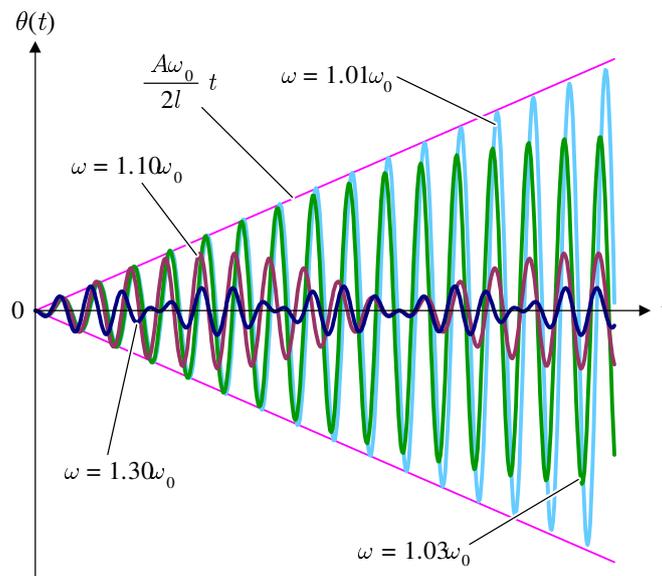


図 4.3: 強制振動の解

が ω_0 に近づくと、時間とともに振幅が増大する。グラフに記載した直線 $A\omega_0 t/2l$ は完全に共振条件が確立したとき ($\omega = \omega_0$) の振幅の増大を表す。数式 (4.70) で計算した曲線は、 $\omega = 1.01\omega_0$ の条件で、この直線に沿って振幅が増大していることがグラフから読み取れる。

共振は建築において注意すべき重要な点である。その地域で発生しやすい地震の周波数と共振しないように建築物の共振周波数を設計する必要があるのだ。万一、共振してしまうと、小さな地震であっても建築物が倒壊する危険性があるからだ。共振したときの振る

舞いは、上で示したように、時間の経過とともに振幅が増加し続け、建造物が倒壊することになるのだ。

4.9 散逸関数

現実の物体の運動は、摩擦力、または、抵抗力によってエネルギーを失っていく。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから単純に形成されるラグランジアンでは、エネルギー損失が表現されていない。解析力学においてエネルギー損失を取り入れるには散逸関数を導入する。

例として、速度に比例する抵抗力が発生する系を考えよう。物体の変位を x_k なる座標で書き、抵抗力の比例係数として γ_k を用いるとしよう。そのとき、物体に作用する抵抗力 F'_k は、

$$F'_k = -\gamma_k \dot{x}_k,$$

である。抵抗力は速度ベクトルと逆方向に作用するので右辺は負符号を伴っている。なお、この問題はカルテシアン座標系で取り扱うものとする。ここで、微小変位 dx_k に対する抵抗力がする仕事は、抵抗力と微小変位の内積:

$$\delta'W = -\sum_k \gamma_k \dot{x}_k dx_k,$$

である。この変位が微小時間 dt で発生すると仮定するなら、 $\dot{x}_k = dx_k/dt$ なので、

$$\frac{\delta'W}{\delta't} = -\sum_k \gamma_k \dot{x}_k^2,$$

なる等式が書ける。この等式は、抵抗力によって単位時間あたりに失うエネルギーを表す。この数式を2分の1倍して符号反転した量:

$$D \equiv \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k \dot{x}_k^2, \quad (4.72)$$

を**散逸関数**として定義する。この関数はレイリー卿によって1873年に導入された。この定義を見ると、運動エネルギーの規定割合が散逸関数になっている。

レイリーが導入した散逸関数を用いると、ラグランジュの微分方程式に散逸関数に基づく項を追加するだけで抵抗力を伴う系の運動が記述できる。散逸関数 D は、

$$F'_k = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_k},$$

なる形式にて抵抗力と関連づけられる。一般化座標 q_k に対応し、抵抗力を一般化力 Q'_k として記述するならば、

$$Q'_k = \sum_j F'_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = - \sum_j \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k},$$

なる等式が得られる。この等式は、(4.30) を利用すると、

$$Q'_k = - \sum_j \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_k},$$

のように書き換えることができ、結局、

$$Q'_k = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}, \quad (4.73)$$

なる形に落ち着くのだ。散逸関数を導入した時点ではカルテシアン座標系に限定して記述していた数式と同じ形で一般化座標でも記述できたということだ。外力を伴う運動方程式 (4.40) を参考にすると、散逸関数に基づく項は、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad (4.74)$$

のような形でラグランジュの運動方程式に取り込まれる。

支点が移動する振り子 前節で取り扱った支点が移動する振り子に散逸関数を適用してみよう。散逸関数として、 $D = \rho \dot{\theta}^2$ を仮定しよう。その仮定では、散逸関数による一般化力は、

$$Q'_k = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = -2\rho \dot{\theta},$$

となる。言うまでもなく、 Q'_k は粘性抵抗に相当する。前節での運動方程式 (4.68) を参考に、散逸関数を用いたときの運動方程式を書くと、

$$\ddot{\theta} + 2\rho \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = B \cos \omega t, \quad (4.75)$$

が得られる。ここで、前節と同様に、 $\omega_0^2 = g/l$, $B = A\omega^2/l$ である。この微分方程式に関して $\omega_0^2 > \rho^2$ なる条件を設けると、その一般解は、

$$\theta = C_0 e^{-\rho t} \cos \left[\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} (t + \phi_0) \right] + \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \phi), \quad (4.76)$$

なる形で記述できる。ここで、 C_0 と ϕ_0 は任意の積分定数だ。一方、右辺の第2項に含まれる ϕ も積分定数であるが、

$$\tan \phi = - \frac{2\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

なる条件を満たす定数だ。特に、 $\rho \rightarrow 0$ の極限で、解(4.76)は、前節で導出した解(4.70)に近づくはずだ。解(4.76)の右辺の第1項は固有振動だが、時定数 $1/\rho$ の減衰振動になっている。パラメータ ρ は単位時間に減衰するエネルギーに相当するので、 ρ が大きいほど時定数が小さいというわけだ。一方、右辺の第2項は強制振動項に相当する。時刻 t が十分大きくなった自転を想定すると、第1項は無視できるくらいまで減衰するので、第2項のみに注目すればよいだろう。残された第2項の振幅は ω_0 と ω の関係によって決まる。その振幅を $C(\omega)$ 、すなわち、

$$C(\omega) \equiv \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}},$$

と定義しよう。散逸関数のパラメータ ρ が $\rho \ll \omega_0$ であれば、 $C(\omega)$ は $\omega \simeq \omega_0$ で最大値をとり¹、その値は $C(\omega_0) = B/2\rho\omega$ である。振幅 $C(\omega)$ は、周波数特性として図4.4に示すような曲線を描く。典型的に想定される ρ は $\rho \ll \omega_0$ なので、 $C(\omega)$ は $\omega = \omega_0$ において鋭く

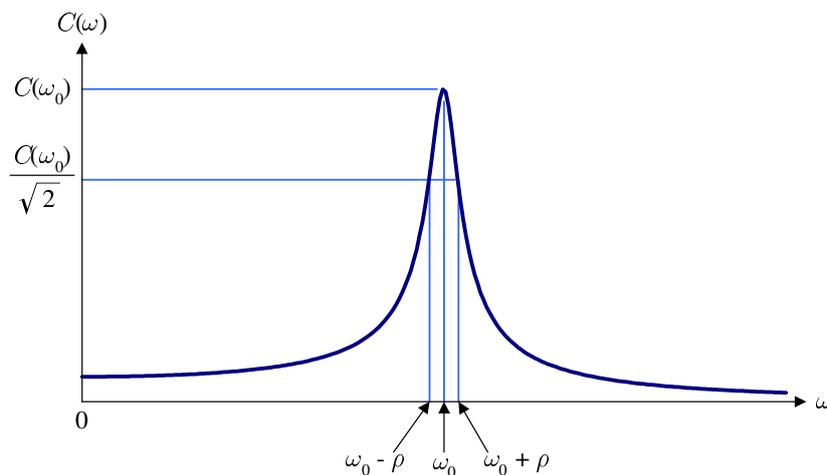


図 4.4: 強制振動の振幅の周波数特性

尖った特性を示す。また、 $C(\omega)$ は $\omega \simeq \omega_0 \pm \rho$ で最大振幅の $1/\sqrt{2}$ 倍になる。最大エネルギーの2分の1にあたるため、 2ρ が角速度の軸におけるエネルギー半値幅である。いうまでもなく、 $C(\omega)$ が最大値をとる周波数が共振周波数である。散逸関数があるため、共振周波数であっても振幅が発散しないのだ。

¹振幅 $C(\omega)$ を時間について微分すれば明らかのように、厳密には、 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\rho^2}$ で最大値をとる。