

第3章 剛体の運動

本章では、有限の大きさをもち変形しない物体、いわゆる、剛体の運動を取り扱う。単なる質点とは異なり、有限の大きさをもつため、剛体は回転を伴う運動をする。そのため、前章で議論した角運動量などが解析の役に立つ。

3.1 質点系の力学

剛体は多数の質点の集合であると考えることができる。ただし、へ陰茎しないのだから、構成する質点間の距離は変化しない。剛体を取り扱う際、その距離の制約を束縛条件として取り扱うことになる。本節では、束縛条件を取り扱わず、複数の質点で構成される質点系について物理学を考える。

3.1.1 重心の運動方程式

質点 P_1, P_2, \dots, P_n のように、 n 個の質点で構成される質点を考えよう。それら質点は、それぞれ、質量 m_1, m_2, \dots, m_n を有し、位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ に存在する。その質点系における運動方程式は、

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \hat{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1,n-1} + \mathbf{F}_{1n}, \\
 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \hat{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2,n-1} + \mathbf{F}_{2n}, \\
 m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \hat{\mathbf{F}}_3 + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} + \cdots + \mathbf{F}_{3,n-1} + \mathbf{F}_{3n}, \\
 &\vdots \\
 m_n \ddot{\mathbf{r}}_n &= \hat{\mathbf{F}}_n + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_{n3} + \cdots + \mathbf{F}_{nn},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

のように書くことができる。ここで、力 $\hat{\mathbf{F}}_j$ は質点 P_j に作用する外力、 \mathbf{F}_{jk} は質点 P_k との相互作用で P_j に作用する力である。作用反作用の法則によって $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$ が成立する。これらの運動方程式をすべて加算すると、

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{F}}_j,$$

となる。質点どうしの相互作用による力は、作用反作用の法則によって相殺されている。ここで、系の全質量と外力の総和を、

$$M = \sum_{j=1}^n m_j, \quad \mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{F}}_j,$$

とおき、系の重心を、

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j,$$

と定義すると、系全体の運動方程式は、

$$M\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

のように書くことができる。つまり、内部で相互作用があっても、質点系の運動方程式は、外力と重心の関係だけで記述できるのだ。言い換えると、外力がなければ、どんなに内部で激しく相互作用していても、系の重心 \mathbf{r}_G に加速度が生じず、等速直線運動するわけだ。

系の内部で発生する相互作用による力は、どのような力であってもよい。質点同士の間には作用する重力や、電磁気力であってもよい。また、衝突の瞬間に力積を与える力であってもよい。

衝突問題 図3.1に示すような二体の衝突問題を考えてみよう。図は二つの球体の衝突を描いているが、球体でなくてもよい。初期状態として、質量 m_A の物体 A が x 軸方向に速さ v で運動し、静止している質量 m_B の物体 B に衝突する。その結果、A は x 軸と角度 θ をなす方向に運動する。このとき、A と B の速度 v_A と v_B 、B の運動方向 θ_B が決定すべき未知数である。なお、この衝突は弾性衝突であるとする。弾性衝突ということは、衝突前後

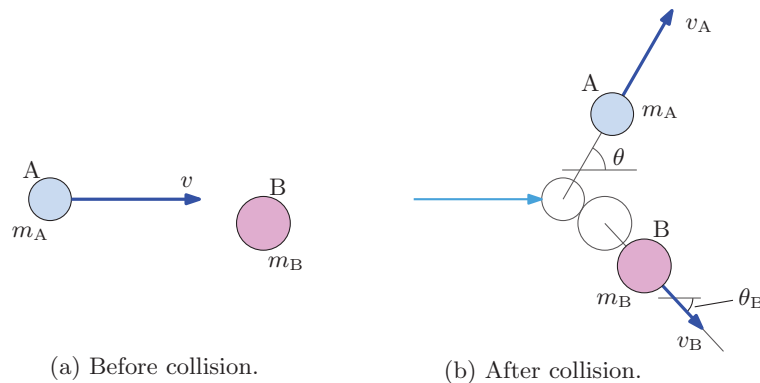


図 3.1: 物体の弾性衝突

で運動エネルギーの総和が保存されるということだ。その前提で方程式をつくと、

$$m_A v_A \cos \theta + m_B v_B \cos \theta_B = m_A v, \quad (3.3a)$$

$$m_A v_A \sin \theta - m_B v_B \cos \theta_B = 0, \quad (3.3b)$$

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v^2, \quad (3.3c)$$

が得られる。これらの数式は、左辺が衝突後の状態、右辺が衝突前の状態に対応する。第1式と第2式が運動量保存則、第3式が運動エネルギーの保存を表している。言うまでもなく、運動量保存則を $m_A + m_B$ で除すれば、重心の速度が衝突の前後で変化しないことを表現する数式が得られる。その重心の速度は x 軸方向に、

$$v_G = \frac{m_A v}{m_A + m_B}, \quad (3.4)$$

の速さをもつ。連立方程式 (3.3a) から (3.3c) を衝突後の二つの物体の運動が特定できる。とはいえ、もう少し簡単に運動を特定する方法を次の段落以降で説明しよう。

連立方程式 (3.3a) から (3.3c) を解くことは可能だが、もう少し簡単に衝突後の運動を特定する方法がある。それは、重心の運動が不変であることを利用するのだ。具体的に言うと重心とともに運動する観測者が見た座標系、いわゆる、重心系に変換してやるのだ。結果として、重心系における物体の弾性衝突は図 3.2 のようになる。図に描かれた内容を説明していこう。既に (3.4) で計算された重心の速さを用いると、衝突前における物体 A と B

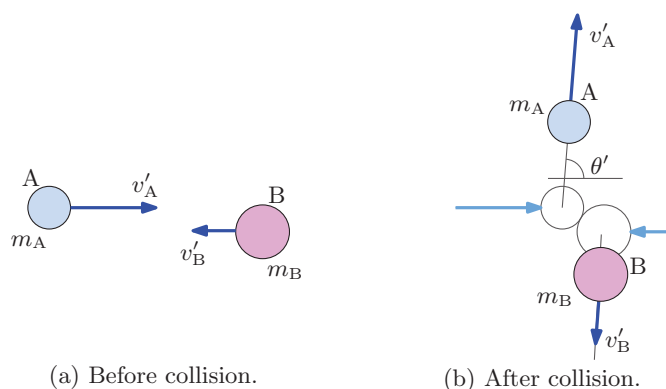


図 3.2: 重心系における物体の弾性衝突

の速さは、

$$v'_A = \frac{m_B v}{m_A + m_B}, \quad v'_B = \frac{m_A v}{m_A + m_B},$$

となる。言うまでもなく、 v_A と v_B は正反対に向かうベクトルだ。これで運動量の総和が確実にゼロになっている。続いて、衝突後 (b) を考察しよう。衝突後も運動量の総和がゼロでなければならないので、やはり、速度は互いに逆向きになる。しかも、運動エネルギーの総和も保存しなければならないので、物体 A と B の速さは、それぞれ、 v'_A と v'_B でなければならない。この場合、未知数は速度の方向 θ' だけだ。その未知数を得るには、静止系から見たとき、物体 A が x 軸と角度 θ をなす方向に運動する事実を使えばよい。すなわち、

$$\tan \theta = \frac{v'_A \sin \theta'}{v'_A \cos \theta' + v'_B},$$

を解けばよい。この数式は、

$$m_B^2 \cos^2 \theta' + 2m_A m_B \sin^2 \theta \cos \theta' + m_A^2 \sin^2 \theta - m_B^2 \cos^2 \theta = 0,$$

のように、 $\cos \theta'$ についての2次方程式である。この方程式の解は、

$$\cos \theta' = \frac{-m_A \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{m_B^2 - m_A^2 \sin^2 \theta}}{m_B},$$

のように計算できる。この解に対し、複号のうち適切な方を選択しなければならない。これによって未知数 θ' が特定できれば、問題が解けたことになる。実際の解は、重心座標における物体 A と B の速度ベクトルを計算し、それらを静止座標に変換すれば求まるわけだ。

万有引力 第1章では、恒星を公転する惑星の運動を解析し、ケプラーの法則を導出した。その際、恒星は惑星に比べ十分に大きな質量をもっていると仮定した。恒星が惑星と比較できる程度の質量の場合、恒星も惑星による重力のため運動することになる。そのような例を取り扱おう。

主星 A と伴星 B による二重星 (binary stars) の運動を考えよう。これらの天体は、互いの重力によって運動が規定され、外力が存在しないものとする。これまでの議論の通り、この二重星の重心に加速度が発生しない。ここで、この二重星の重心系で観測することを考える。主星 A と伴星 B の質量を、それぞれ、 m_A と m_B とする。さらに、A と B の距離を r としよう。そのとき、重心から A までの距離 r_A と、重心から B までの距離 r_B は、

$$r_A = \frac{m_B r}{m_A + m_B}, \quad r_B = \frac{m_A r}{m_A + m_B},$$

となる。A と B の間の万有引力は、A と B を結ぶ直線の方に大きさ $F = Gm_A m_B / r^2$ の引力として作用する。当然、作用反作用の法則のため、この万有引力は A にも B にも作用している。万有引力 F は、

$$F = \frac{Gm_A m_B}{r^2} = \frac{Gm_A}{r_A^2} \frac{m_B^3}{(m_A + m_B)^2} = \frac{Gm_B}{r_B^2} \frac{m_A^3}{(m_A + m_B)^2},$$

のように書き換えることができる。この数式の右辺として、 r_A^2 を分母にする形と、 r_B^2 を分母にする形の2種類で表現した。前者は、A に作用する万有引力が、重心に存在する質量 $m_B^3 / (m_A + m_B)^2$ から受ける力に見えることを意味する。同様に、後者は、B に作用する万有引力が、重心に存在する質量 $m_A^3 / (m_A + m_B)^2$ から受ける力に見えることを意味する。

二重星は主星も伴星も、重心のまわりをケプラーの法則にしたがい楕円軌道を描く。その例として、主星 (primary star) の質量が伴星 (secondary star) の2倍、すなわち、 $m_A = 2m_B$ である二重星の運動を図3.3に示す。この場合、主星と伴星を結ぶ線分を1:2で内分する点が重心の位置だ。主星から見ると重心に質量 $0.11m_A$ の天体が存在する場合と等価で

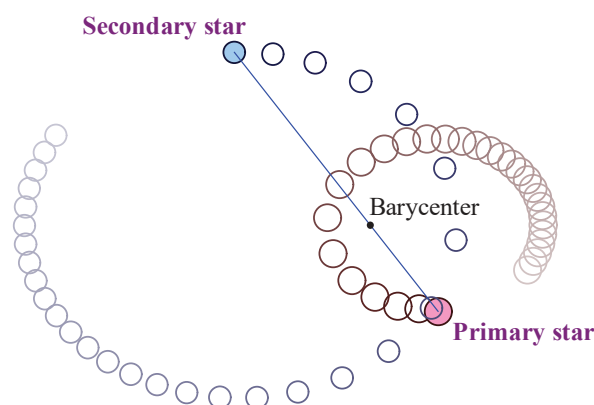


図 3.3: 楕円軌道を描く二重星 ($m_A = 2m_B$)

ある。一方、伴星から見ると重心に質量 $0.89m_A$ の天体が存在する場合と等価である。重心の位置を一定に保つため、主星と伴星の動きは完全に同期している。すなわち、主星が重心に最接近するとき、伴星も重心に最接近しているわけだ。

主星が明示的に楕円軌道を描くのは、伴星の質量が大きいため、自らの重力で主星を振り回すと解釈することもできる。この図ほど顕著ではないが、月は地球との質量比が、太陽系のどの衛星と惑星の比よりも顕著であるため、公転に同期して地球を振り回している。月の質量は地球の約 81 分の 1 にもなるため、約 4700 km の軌道長半径にて地球を振り回している。

3.1.2 運動量と運動エネルギー

実験室系と重心系の間で運動量と運動エネルギーの関係を調べよう。重心を \mathbf{r}_G とし、系に含まれる第 j 番目の質点の実験室系と重心系での位置ベクトルを、それぞれ、 \mathbf{r}_j と \mathbf{r}'_j とする。このとき、それらのベクトルは、

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j,$$

なる関係を満たす。この関係式から、実験室系における重心を計算すると、

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j) = \mathbf{r}_G + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j,$$

が得られる。ここで、 M は系の全質量:

$$M = \sum_{j=1}^n m_j,$$

とした。当然, 計算している重心は \mathbf{r}_G に等しくなければならないので,

$$\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j = 0, \quad (3.5)$$

が成立する。つまり, 重心系における重心は原点に存在するということだ。改めて成立すべき関係式として,

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j, \quad (3.6)$$

を書いておこう。この数式の両辺に M を乗じ, 時刻 t について微分すると,

$$M \dot{\mathbf{r}}_G = \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j,$$

が得られる。得られた数式は運動量の関係式だ。実験室系での運動量を $\mathbf{p}_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j$, 重心系での運動量を $\mathbf{p}'_j = m_j \dot{\mathbf{r}}'_j$ とおいてみる。さらに, 系全体を重心 \mathbf{r}_G に存在する質量 M の質点として取り扱い, その運動量を $\mathbf{p}_G = M \dot{\mathbf{r}}_G$ としよう。そのとき,

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_G, \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{p}'_j = 0, \quad (3.7)$$

が得られる。得られた第1式によると, 実験室系では, すべての質点の運動量の総和は, 系全体を質量 M の質点とみなしたときの運動量に等しい。第2式は, 重心系では系の運動量の総和がゼロであることを主張する。

運動エネルギーは運動量とは少し違った特徴を示す。運動エネルギーの定義にしたがい, 系に含まれる質点の運動エネルギーをすべて加算すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j (\dot{\mathbf{r}}_G^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}'_j + \dot{\mathbf{r}}_j'^2) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_G^2 \sum_{j=1}^n m_j + \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}'_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j'^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}_j'^2, \end{aligned}$$

のように計算できる。第4行目への数式変形は, 重心系における運動量がゼロであることを利用した。その結果, 系の運動エネルギーは, 重心を質量 M の質点とみなしたときの運動エネルギーだけでなく, 重心系からみた運動エネルギーを加算した値になっている。すなわち, 実験室系での運動エネルギーを K , 重心を質点とみなした運動エネルギーを K_G , 重心系での運動エネルギーを K' とおくと,

$$K = K_G + K', \quad (3.8)$$

が成立する。この関係式は、熱力学で、ある体積内に閉じ込めた気体のエネルギーを論じるときに重要だ。右辺の第1項は、気体を収容した体積の運動に起因するエネルギーであり、第2項は気体分子の熱運動に起因する運動エネルギーなのだ。その理由で、熱力学では右辺の第2項に相当するエネルギーは**内部エネルギー**と呼ばれる。

3.2 剛体運動の記述

剛体は変形しない質点系だ。変形をしないことが束縛条件となり、自由度を少なくしている。本節で説明するように、変形しない質点系に与えられる運動は、重心の平行移動と向きの変更(回転)のみだ。そのような運動によって自由度6が与えられる。

3.2.1 自由度

空間が3次元の場合、理想気体のように各質点は何の制約も受けず自由に運動できるなら、質点 n 個で構成される系の自由度は $6n$ となる。本節の冒頭で述べたように、剛体は構成する質点がどんなに多くなっても自由度は6である。本項では、その事実を説明しよう。

図3.4によって剛体の自由度を説明しよう。なお、全く変形しないことから、構成する質点の間の距離はすべて定められているとする。図3.4(a)は質点1個のみの系である。質点の位置として、座標 $[x, y, z]$ を自由に選ぶことができるので自由度3をもっている。表現する座標系はカルテシアン座標でなくてもよいが、いずれにしても、位置を特定するには、三つの座標成分が必要だ。

図3.4(b)は質点2個で構成される系である。第1の質点は上で説明したように、三つの座標成分によって定まる。第2の質点を定めるには、第1の質点から見た方向を決定する必要がある。例えば、図に示すように θ と φ の二つの座標があれば方向が決定できる。したがって、質点2個で構成される系の自由度は5である。

図3.4(c)は質点3個で構成される系である。第2の質点までは5個の座標成分で定まる。第3の質点の位置を定めるにあたって、質点1と質点2を結ぶ線を軸にして回転する自由度が許されている。図に示すように、回転角 ψ を決めれば第3の質点の位置が定まるわけだ。したがって、質点3個で構成される系の自由度は6である。

図3.4(d)は質点4個で構成される系である。第3の質点の位置を定めるために、既に自由度6を使っている。第4の質点の位置は、図から明らかなように、自由度なく一意的に決まる。系を構成する質点がさらに多くなっても、残された質点の位置は自由度なく一意的に定まるのだ。したがって、3個以上の質点で構成される剛体は自由度が6である。

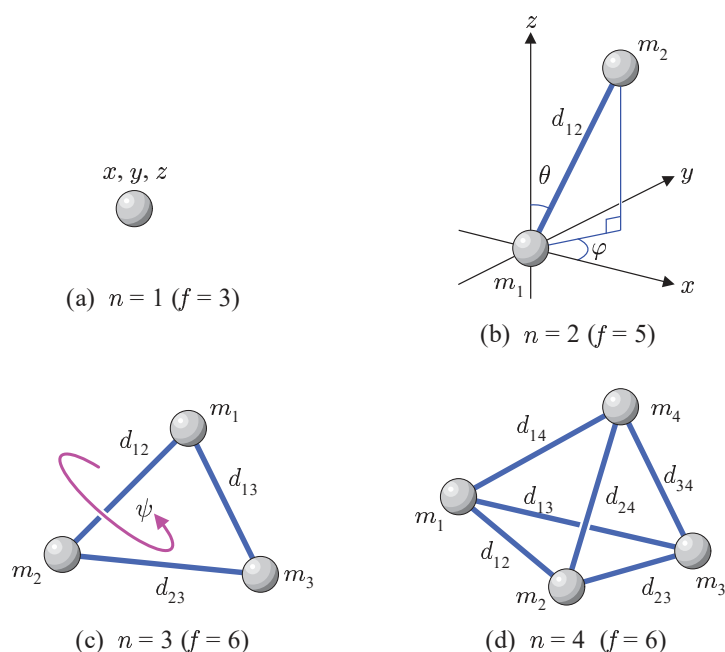


図 3.4: 寸法が規定された質点系の自由度

上に書いた質点の位置の定め方は一例に過ぎないが, $[x, y, z, \theta, \varphi, \psi]$ を決めれば剛体の位置や向きが特定できるということだ。決定したパラメータのうち, 前半の三つがカルテシアン座標成分であり, 後半は方向を与える角度である。その位置の定め方は剛体ができる運動形態にも対応している。剛体の運動は, 平行移動と回転運動に分類できる。平行移動は重心座標を移動するため, 前半三つの自由度に相当する。回転運動は, 定めた軸まわりの回転角を与えることによって実行するため, 後半三つの自由度に相当する。

3.2.2 回転運動

剛体は変形しないのだから, 剛体を構成する質点の運動は気体分子のような乱数的な運動ではない。変形をしないことが条件なのだから, 剛体を構成する質点は, 互いの距離を一定に保って運動する。互いの距離を一定に保つ運動とは, 平行移動と回転に分類できる。

平行移動はすべての質点が等しい変位だけ移動する運動である。形式的には, 時刻 t において $\mathbf{r}_j(t)$ に存在した第 j 番目の質点が, 時刻 $t + \Delta t$ では,

$$\mathbf{r}_j(t + \Delta t) = \mathbf{r}_j(t) + \mathbf{v} \Delta t,$$

に運動する。ここで, \mathbf{v} は速度に相当するベクトルであり, すべての質点に対して共通だ。この数式から明らかなように, 重心も,

$$\mathbf{r}_G(t + \Delta t) = \mathbf{r}_G(t) + \mathbf{v} \Delta t,$$

となる。つまり、平行移動とは、重心系では質点の座標が不変となる運動なのだ。

回転運動は、剛体の向き変える運動だ。簡単な運動の例として、質量が等しい二つの質点で構成される系を考えよう。二つの質点は、 xy 平面上で、

$$\begin{aligned}x_1(t) &= r \cos \omega t, & y_1(t) &= r \sin \omega t, \\x_2(t) &= -r \cos \omega t, & y_2(t) &= -r \sin \omega t,\end{aligned}$$

となるように運動する。この系の重心は常に原点だ。原点が移動しないので、この系の運動量は常にゼロとなる。とはいえ、静止しているものとしてこの系を取り扱うのは妥当ではない。なぜなら、この系には運動エネルギーをもつからだ。二つの質点はともに速さ $r\omega$ で運動しているのだから、この系は $mr^2\omega^2$ の運動エネルギーをもつ。ここで、 m は質点一つあたりの質量とした。

運動エネルギーだけでは回転運動を取り扱うのは不十分だ。運動エネルギーでは回転の方向を取り扱えないからだ。方向を取り扱うには、運動量のようなベクトルが好ましい。例えば、 $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ なるベクトル積を用いるのはどうだろうか？ここで、 \mathbf{r} は原点を始点とする位置ベクトルだ。上の数式に記載したような円運動の場合、質点1と質点2に対応するベクトル積は、

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = [0, 0, mr^2\omega],$$

となる。このベクトルは z 軸方向を向いている。つまり、回転軸の方向を向くベクトルだ。しかも、質点1と質点2に対応するベクトルはともに同じ方向を向いている。この新たなベクトルは、回転運動において運動量の代役となることを期待する。また、ベクトルの大きさが角速度に比例していることから、角運動量と呼んでみよう。

回転運動を取り扱うとき、角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ を取り扱うことが便利のように思える。とはいえ、上の例では、 \mathbf{r} が回転軸を基準に考えた位置ベクトルだった。当然、位置ベクトル \mathbf{r} の基準を変えると、 \mathbf{L} は変わってしまう。運動量 \mathbf{p} が原点を変えても不変だったことと比較し、そのような \mathbf{L} でも実用上、問題ないか考えてみよう。その検討をするため、カルテシアン座標系で $[x_0, y_0, z_0]$ を中心に、 xy 平面と平行に、半径 r で角速度 ω で運動する質点 P を考えよう。質点 P の位置ベクトル \mathbf{r} は時刻 t の関数として、

$$\mathbf{r} = [x_0 + r \cos \omega t, y_0 + r \sin \omega t, z_0],$$

のように記述できる。質点 P の質量を m とすると、角運動量 \mathbf{L} は、

$$\mathbf{L} = [-mz_0r\omega \cos \omega t, -mz_0r\omega \sin \omega t, mr\omega(x_0 \cos \omega t + y_0 \sin \omega t) + mr^2\omega],$$

となる。この角運動量は特徴のある形をしている。長時間にわたって平均すると、三角関数が相殺され、結果的に z 軸方向の成分 $mr^2\omega$ のみが残る。つまり、長時間にわたって平

均すれば、原点との相対位置に関する依存性が消え、回転半径 r と回転の速さ ω の依存性のみが残る。

長時間の平均をとるのでなく、複数の質点に対して角運動量を重ね合わせるとどうなるか考えてみよう。系には質点が n 個だけ含まれているとし、第 j 番目の質点の質量を m_j 、位置ベクトルを \mathbf{r}_j とする。特に、重心を \mathbf{r}_G を用い、 $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j$ であるとする。言い換えると、 \mathbf{r}'_j は重心系の位置ベクトルである。このとき、角運動量の重ね合わせは、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_j &= \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j \times \dot{\mathbf{r}}_j = \sum_{j=1}^n m_j (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_j) \times (\dot{\mathbf{r}}_G + \dot{\mathbf{r}}'_j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n m_j \right) \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + \mathbf{r}_G \times \sum_{j=1}^n m_j \dot{\mathbf{r}}'_j + \left(\sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j \right) \times \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{r}}'_j \\ &= M \mathbf{r}_G \times \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}'_j \times \dot{\mathbf{r}}'_j = \mathbf{L}_G + \mathbf{L}', \end{aligned}$$

のように計算される。第3行目への数式変形は、 \mathbf{r}'_j が重心系の位置ベクトルであることを利用した。また、 M は系の全質量である。その結果、系に含まれる質点の角運動量の和は、重心を質量 M の質点とみなしたときの角運動量と、重心を基準とした角運動量の和である。この関係は、運動エネルギーの関係に類似している。この関係式を見ると、 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ を回転運動を扱う物理量とする妥当性がわかる。

3.2.3 角運動量保存則

運動量と同様に、外力が存在しなければ角運動量も保存する。保存する物理量は、物理学の問題を解くうえで有力な鍵になる。本項では、外力の作用を受けない系で角運動量が保存することを証明する。

準備段階として、 $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ と同様に、角運動量の時間微分を $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{p}}$ なるベクトルを導入する。新たに定義された \mathbf{N} を計算すると、

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

が得られる。この計算において、 $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ 、すなわち、 $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = 0$ であることを利用して右辺が得られた。改めて \mathbf{N} の計算結果:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.9)$$

を記述しておこう。この物理量は、力のモーメントと呼ばれる。力のモーメントという名称は、 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ なる数式の直接的な呼び方である。これに対し、角運動量 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は運動量のモーメントというわけだ。

複数の質点によって構成される系における角運動量の時間微分は、各質点に作用する力のモーメントの総和である。つまり、系全体の角運動量の時間微分は、

$$\sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{L}}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{N} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j,$$

となるわけだ。質点を受ける力 \mathbf{F}_j には、系の内部の質点に起因する力 \mathbf{F}_{jk} と、外力 $\hat{\mathbf{F}}_j$ が含まれる。ここで、 \mathbf{F}_{jk} は第 k 番目の質点によって第 j 番目の質点に作用する力とする。すなわち、

$$\mathbf{F}_j = \hat{\mathbf{F}}_j + \sum_{j=1}^n{}' \mathbf{F}_{jk},$$

である。ここで、プライム (') 付きの総和記号は $j = k$ を除外して総和をとるものとする。この関係に注意して角運動量の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \dot{\mathbf{L}}_j &= \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \left(\hat{\mathbf{F}}_j + \sum_{j=1}^n{}' \mathbf{F}_{jk} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \hat{\mathbf{F}}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n{}' \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \hat{\mathbf{F}}_j + \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \hat{\mathbf{F}}_j, \end{aligned}$$

が得られる。最終行への数式変形では、作用反作用の法則 $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$ を利用した。さらに、質点間の相互作用が \mathbf{F}_{jk} が、二つの質点を結ぶ $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ と同一方向 (または逆方向) を向いていることから、 $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} = 0$ となる。その結果、系全体の角運動量の時間微分は、外力のモーメントに等しい。したがって、外力が存在しなければ、角運動量の時間微分はゼロであるので、角運動量は保存するのだ。

面積速度一定の法則 公転する惑星の軌道に関する面積速度一定の法則は、角運動量保存の法則と同一である。この場合の系は、楕円軌道の焦点に存在する恒星と、公転する惑星によって構成される。ケプラーの法則のモデルでは、恒星の質量は惑星質量に比べ十分大きいので、恒星の位置が系の重心である。このとき、恒星を基準にした惑星の位置 \mathbf{r} と、惑星の速度 $\dot{\mathbf{r}}$ によって、角運動量は、

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}},$$

のように記述できる。ここで、 m は惑星の質量だ。特にベクトルの外積 $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ の大きさは、恒星と惑星を結ぶ線分と、惑星の速度ベクトルが張る平行四辺形の面積に等しい。その平行四辺形の面積は、恒星から見たときの惑星の方位を θ とすると、

$$|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = r^2 \dot{\theta},$$

であり、面積速度の2倍と等しいのだ。したがって、面積速度一定の法則と、惑星の軌道に関する面積速度一定の法則は同一法則ということだ。

エネルギー保存則との関係 角運動量保存則は物理学の基本原則ではない。本項では、運動量保存則と作用反作用の法則から角運動量保存則を導いたわけだから、角運動量保存則は、原理でなく定理である。ということは、角運動量保存則で説明される物理現象は、エネルギー保存則や運動量保存則などによって説明できるはずだ。以下の問題をそのような観点で考えてもらいたい。

スピンをしているフィギュアスケートの選手が、広げていた腕を引き寄せると回転が速くなる現象を見たことがあるだろう。その回転速度の加速は、しばしば、角運動量保存則で説明される。その現象を他の物理法則から説明してみたい。モデルとして、図3.5に示すように、原点Oと物体Pを長さ r のひもで結び回転させることを考えてみよう。ひもの長さを2倍にすると、角運動量保存則によって、回転速度が2分の1になるはずだ。する

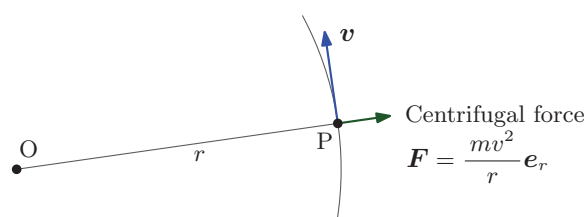


図 3.5: 円運動する物体に作用する遠心力

と、運動エネルギーが4分の1になるので、エネルギー保存則を満たさなくなる、という疑いが沸くのだ。その疑いを晴らし、角速度保存とエネルギー保存が両立することを示そう。

物体Pの質量を m とすると、半径 r で回転する物体には $F = mv^2/r$ の遠心力が作用している。遠心力は見かけの力だが、物体Pから見るとひもから受ける張力と遠心力が釣り合っているのだ。ここで、原点Oと物体Pを結ぶひもを Δr だけ長くすることを考えよう。遠心力のため、ひもを緩めれば物体Pは自発的に遠くに動いてくれる。実際、回転中に長さを Δr だけ伸ばすには、

$$\Delta W = -\frac{mv^2}{r} \Delta r,$$

の仕事が必要である。正確には、符号が負になっているので、物体が外部に仕事を施すという数式表現になっている。その仕事の量だけ、運動エネルギーが減少すると考えてみよう。ひもの長さを伸ばした結果、速さが $v + \Delta v$ になったとする。つまり、運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2}m(v + \Delta v)^2 \simeq \frac{1}{2}mv^2 + mv\Delta v,$$

である。つまり、運動エネルギーは $mv\Delta v$ だけ増加する。運動エネルギーの増分を方程式にすると、

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{v}{r},$$

なる微分方程式が得られる。この微分方程式を解くと、

$$v = \frac{v_0 r_0}{r},$$

が得られる。ここで、 $v_0 r_0$ は積分定数だ。この結果からただち、角運動量が $mvr = v_0 r_0$ のように定数になることがわかる。したがって、角運動量保存則で説明される物理法則が、実は、エネルギー保存則で説明できることがわかった。

力が釣り合った系における力のモーメント 力のモーメントは、一般的に、中心とする場所を特定しなければならない。中心とする位置を変えると力のモーメントは変化する。しかし、力が釣り合った系に限り、どこを中心にとっても力のモーメントが不変となる。その事実を示しておこう。位置ベクトルを $\mathbf{r}_j = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}'_j$ とする。ここで、 $\bar{\mathbf{r}}$ は任意の定ベクトルである。このベクトルは重心でなくてもよい。そのとき、力のモーメントは、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j &= \sum_{j=1}^n (\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}'_j) \times \mathbf{F}_j \\ &= \sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j \\ &= \bar{\mathbf{r}} \times \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}_j, \end{aligned}$$

のように計算できる。最終行での計算は、系全体で力が釣り合っていることに注意し、第1項がゼロとなっている。その結果、系全体の力のモーメントから $\bar{\mathbf{r}}$ の依存性が消えている。したがって、力が釣り合った系では、基準とする位置をどこにとっても力のモーメントは変化しない。物理学のテキストでは、力のモーメントを計算する際、基準位置を明らかにしないことがある。その場合、その系は力が釣り合っているはずだ。

てこの原理 力のモーメントはてこの原理の説明に用いられる。図3.6に示すように、水平方向に棒を渡し、点Oを支点とするてこを構成した場合を考える。支点より x_1 だけ左に下向きの荷重 F_1 をかけ、支点より x_2 だけ右に荷重 F_2 をかける。このてこが釣り合う条件は、

$$x_1 F_1 = x_2 F_2,$$

である。これは支点を中心とした力のモーメントの釣り合い条件だ。力のモーメントは、系における力のバランスを評価する物理量と考えることができる。上の数式に対し、右辺

を左辺に移項すると,

$$x_1 F_1 - x_2 F_2 = 0,$$

なる数式が得られる。この数式は支点 O に対して、左回りの力が正となるように表現した系全体の力のモーメントだ。この値がゼロになるということは、系全体でバランスがと

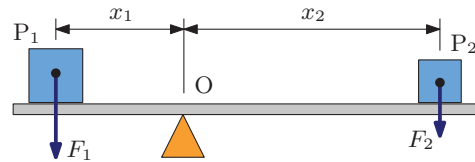


図 3.6: 釣り合ったてこ

れ、安定した状態であることを意味する。仮に、この数式が正になると、系は左回りに偏っていることになり、左側 P_1 が下がるということだ。

前で述べたように、角運動量保存則が物理の基本原則でないことと同様に、力のモーメントの釣り合いも基本原則ではない。てこの釣り合いは、てこの構成要素として水平方向にわたした棒の変形(歪み)が関係している。てこの両端に荷重をかけることによって、棒が歪み、その歪みを復元しようとする力が棒を伝搬する。伝搬した力は、力のモーメントに比例する大きさとなって支点 O に作用する。荷重 F_1 と F_2 に起因するそのような力が釣り合うため、結果的に $x_1 F_1 - x_2 F_2 = 0$ が満たされる。だから、力のモーメントでてこの原理が説明できるのだ。一方、てこの原理の物理現象を細かく説明するには、上で述べたように、棒の変形を取り扱うため、弾性体の物理学の知識が必要である。

3.3 慣性モーメント

慣性モーメントという量を定義すると、回転運動における角運動量と運動エネルギーが、質点の運動量や運動エネルギーと同形の数式で記述できる。そのとき、質量が加速に対する抵抗の大きさであると同様に、慣性モーメントは回転の開始や停止に対する抵抗の大きさである。

3.3.1 慣性モーメントの導入

図 3.7 に示すように、複数の質点によって構成される剛体が z 軸まわりを回転する場合を取り扱おう。そのモデルにおいて角運動量と力のモーメントを計算し、質点の運動量や力との関係を調べるのだ。剛体を構成する質点のうち、第 j 番目の質点の位置を $\mathbf{r}_j = [x_j, y_j, z_j]$,

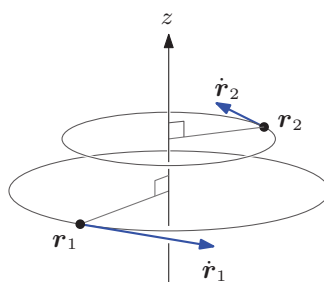


図 3.7: 軸まわりに回転する質点

質量を m_j とする。このとき、剛体の角運動量は、 z 成分を書くと、

$$L_z = \sum_{j=1}^n m_j (x_j \dot{y}_j - y_j \dot{x}_j),$$

となる。これを時間について微分すると、力のモーメントの z 成分:

$$N_z = \sum_{j=1}^n m_j (x_j \ddot{y}_j - y_j \ddot{x}_j),$$

が得られる。この時点では、質点が xy 平面に平行な面内で運動しているという極めて一般的なモデルだ。続いて、剛体が角速度 ω で回転している条件を適用する。つまり、上で書いた数式に、

$$x_j = r_j \cos \varphi_j, \quad y_j = r_j \sin \varphi_j,$$

を代入すればよい。ここで、 r_j は z 軸からの距離であり、時間に依存しない。一方、 φ_j は x 軸から反時計回りに測った角度であり、いうまでもなく、時間の関数である。これらの座標を時間微分すると、

$$\dot{x}_j = -r_j \omega \sin \varphi_j, \quad \dot{y}_j = r_j \omega \cos \varphi_j,$$

が得られる。これらの数式を利用すると、角運動量の z 成分は、

$$L_z = \sum_{j=1}^n m_j r_j^2 \omega = \omega \sum_{j=1}^n m_j (x_j^2 + y_j^2), \quad (3.10)$$

が得られる。ここで、**慣性モーメント**:

$$I = \sum_{j=1}^n m_j (x_j^2 + y_j^2), \quad (3.11)$$

を定義すると、角運動量の z 成分は、

$$L_z = I\omega, \quad (3.12)$$

のように簡単な数式で記述できる。慣性モーメント I は時間に依存していないため、容易に時間微分でき、

$$N_z = I\dot{\omega}, \quad (3.13)$$

が得られる。力が質量と加速度の積であることと同様に、モーメントは、慣性モーメントと角速度の時間微分の積である。つまり、慣性モーメントは角速度の変化に対する抵抗である。慣性モーメント面とが大きいほど、回転速度の加速や減速が難しいのだ。また、角運動量は慣性モーメントと角速度の積である。この量も、運動量が質量と速度の積であることと同形の数式である。慣性モーメントを用いると、運動エネルギーも、

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (3.14)$$

のように見慣れた形式の数式で記述できる。見慣れた形式の数学で記述する考えは、本書の後半で取り扱う解析力学の根本となる重要な思想である。

回転軸を任意方向にとった場合、角速度ベクトルは、回転軸に平行であり、角速度 ω を大きさとするベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を設定すればよい。回転軸に平行なベクトルの方向は、回転方向に対して右ねじの方向に設定するのだ。そのとき、角速度、力のモーメント、運動エネルギーは、

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{N} = I\dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad K = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (3.15)$$

のように記述される。ディメンジョンは異なるが、運動量、力、エネルギーの関係式と同形の数式で記述できることが興味深い。あたかも、慣性モーメント I が質量、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が速度であるかのように見えるのだ。そのとき、角運動量 \mathbf{L} が運動量、力のモーメント \mathbf{N} が力に相当する。

原点 O を通る軸を回転する質点 \mathbf{r}_j について、回転軸 $\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{r}_j のなす角を θ とすると、回転半径は $r_j \sin \theta$ である。質点が角速度 ω で回転しているとする、その速度 $\dot{\mathbf{r}}_j$ は、 $r_j \omega \sin \theta$ を大きさとするベクトルである。しかも、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が回転方向と直交していることから、 $\dot{\mathbf{r}}_j$ は $\boldsymbol{\omega}$ と直交する。同時に、 $\dot{\mathbf{r}}_j$ は \mathbf{r}_j とも直交する。したがって、速度ベクトル $\dot{\mathbf{r}}_j$ は、

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j, \quad (3.16)$$

なる関係を満足する。この関係式は、以降の数式変形でしばしば活用する有用な公式である。

3.3.2 慣性モーメントの平行移動

慣性モーメントは、物体固有の物理量というだけでなく、回転軸の選び方に依存する。とはいえ、回転軸の選択によって複雑に変化するのではなく、慣性モーメントは単純な規則によって変換できる。本節では、回転軸を変更したときの慣性モーメントの変換について説明する。

空間中に存在する質量 M の剛体について、重心を通過する軸 A_G まわりの慣性モーメントが I_G であるとする。軸 A_G から距離 d を隔て、 A_G に平行な軸 A まわりの慣性モーメント I は、

$$I = I_G + Md^2, \quad (3.17)$$

で与えられる。この関係式は、剛体の形状に依存せずに成立する。この公式を利用すれば、重心を通る軸まわりの慣性モーメントがわかっているならば、任意の軸まわりの慣性モーメントを容易に計算できる。また、重心以外の軸まわりの慣性モーメントが計算しやすいので

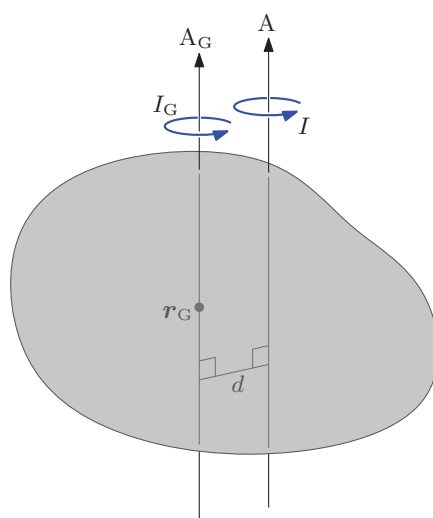


図 3.8: 慣性モーメント計算のための軸の移動

あれば、計算しやすい軸を選んで計算した後に、この公式を用いて重心を通る軸まわりの慣性モーメントに変換することもできる。そのように考えると、この公式は有用なのだ。

関係式 (3.17) を証明しよう。重心の位置をカルテシアン座標で $\mathbf{r}_G = [x_G, y_G, z_G]$ とする。重心 \mathbf{r}_G を通り、 z 軸に平行な軸を A_G とする。この軸まわりのモーメントが I_G である。一方、 z 軸を A 軸とし、その軸まわりのモーメント I を計算する。なお、 A 軸と A_G の距離は d であるとする。剛体に含まれる質点の位置が、

$$x_k = x_G + x'_k, \quad y_k = y_G + y'_k, \quad z_k = z_G + z'_k,$$

であるとする。そのとき、慣性モーメントの定義にしたがって計算すると、

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^N m_k [(x_G + x'_k)^2 + (y_G + y'_k)^2] \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (x_G^2 + y_G^2) + 2 \sum_{k=1}^N m_k (x_G x'_k + y_G y'_k) + \sum_{k=1}^N m_k (x_k'^2 + y_k'^2) \\ &= (x_G^2 + y_G^2) \sum_{k=1}^N m_k + I_G = Md^2 + I_G, \end{aligned}$$

が得られる。第2行目の第2項(の総和)はゼロである。また, A 軸と A_G 軸の距離が d であるので, 第3行目において $x_G^2 + y_G^2 = d^2$ である。その結果, (3.17) が得られる。

慣性モーメントの平行移動に関する公式(3.17)は, 運動エネルギーを考えるとわかりやすい。回転軸を z 軸に選び, 角速度 ω で剛体を回転させたとする。このとき, 剛体に含まれる質点は, 重心を通る軸 r_G のまわりを運動するのだが, 重心 r_G も半径 d で z 軸のまわりを回転している。そのため, 剛体の運動エネルギーは, A_G 軸まわりの回転エネルギーと, 重心の回転運動による運動エネルギーの和であると考えられる。つまり, 剛体の運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2}I_G\omega^2 + \frac{1}{2}Md^2\omega^2,$$

である。右辺の第1項が重心まわりの回転エネルギー, 第2項が重心運動に伴う剛体の運動エネルギーである。ここで, $K = I\omega^2/2$ を利用して慣性モーメント I を計算すると, (3.17) が導かれる。

3.3.3 斜面を転がる球

重力の作用によって斜面を転がる球の運動を解いてみよう。球の半径は a , 質量は M とする。また, 斜面の角度は α とする。この球は, 滑らずに転がりながら斜面を下降する。解析の便宜上, 斜面下方に x , 斜面と垂直方向に y 軸を設定する。さらに, 球が転がった量として, 時計回りに回転角 θ を設定する。

転がる球には, 図 3.9 に示すような力が作用する。球の重心には重力 Mg が作用する。その重力は, 成分分解すると, $Mg \sin \alpha$ で球を斜面下方に引っ張り, $Mg \cos \alpha$ で斜面を垂直に押している。その反作用として, 斜面から急に垂直抗力 N が作用するため, 球が斜面

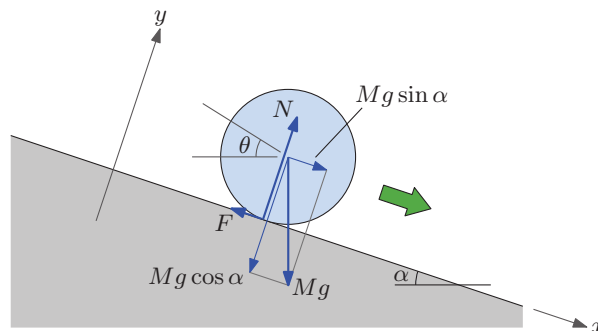


図 3.9: 斜面を転がる球に作用する力

に潜り込むことがない。つまり, $N = Mg \sin \alpha$ である。一方, 球と斜面の設置点では摩擦力 F が斜面上方に向かって作用する。

運動を解析するにあたり, 力の釣り合いに注目し, 運動方程式を記述しよう。この問題

は、斜面に沿った運動を取り扱うため、仕事をしない垂直抗力 N について考える必要がない。球には、重力によって $Mg \sin \alpha$ が斜面下方に、摩擦力 F が斜面上方に作用する。一方、球の重心まわりのモーメントが球を回転させるトルクになる。重力は重心に作用するため、モーメントを発生させない。摩擦力 F は重心から a だけ離れ、球の接線方向に作用するので、モーメント aF を発生させる。したがって、

$$M\ddot{x}_G = Mg \sin \alpha - F, \quad (3.18a)$$

$$I_G \ddot{\theta} = aF, \quad (3.18b)$$

なる運動方程式が得られる。この条件設定において、 $F < Mg \sin \alpha$ である。摩擦力 F が大きくなれば、球を回転させるモーメントが大きくなるのだが、斜面下方に引っ張る合力が小さくなるので、回転する必要性が失われる。球に作用するモーメントと、下方に引っ張る力のつじつまが合う条件を方程式から特定するのだ。ここで、球が転がった長さだけ斜面を下る事実から、 $x_G = a\theta$ であり、これを方程式に代入するとともに、 F を消去すると、

$$(Ma^2 + I_G) \ddot{\theta} = a^2 Mg \sin \alpha,$$

が得られる。球の重心まわりの慣性モーメントが、

$$I_G = \frac{2}{5} Ma^2,$$

であることに注意すると、上の微分方程式は、

$$\frac{7Ma^2}{5} \ddot{\theta} = Ma^2 g \sin \alpha,$$

のように計算される。ここで、 $x_G = a\theta$ を用いると、

$$\ddot{x}_G = \frac{5}{7} g \sin \alpha, \quad (3.19)$$

が得られる。この結果によると、回転せずに摩擦力なしで滑るのに比べ、加速度が $5/7$ 倍でゆっくりと加速することがわかる。この斜面を転がり続け、高さ h だけ (斜面に沿って $h/\sin \alpha$) 下がったとすると、その時点での重心の運動エネルギーは、

$$K_G = \frac{5}{7} Mgh,$$

となるはずだ。ポテンシャルエネルギーが Mgh だけ低下するので、エネルギー保存則では $2Mgh/7$ が不足することになる。実は、その不足分が球の回転に使われている。つまり、斜面を転がり落ちる球は、運動エネルギーの約 28.6% が回転運動のエネルギーなのだ。

3.4 慣性乗積と慣性主軸

一般の物体を回転させたときの角運動量の表記では、慣性モーメントがテンソルとして振る舞う。しかし、座標軸をうまく設定すれば、テンソルは対角成分以外のすべての成分をゼロにすることができ、数学記述を簡略化できる。

3.4.1 慣性モーメントテンソル

内部の固定点 O を中心に回転する剛体を考えよう。固定点 O を原点にとり、座標 $[x, y, z]$ を設定しよう。この座標は絶対静止系の座標であるとする。一方、剛体の回転とともに回転する座標 $[\xi, \eta, \zeta]$ を設定する。この座標の原点も O であるとする。この剛体が、原点 O を通る ω 軸を回転軸として (角速度 ω で) 回転する。

剛体が n 個の質点 \mathbf{r}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) で構成されると仮定する。各質点の質量を m_k とする。このとき、剛体の回転による角運動量は、

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k),$$

となる。ここで、位置ベクトル \mathbf{r}_k を、

$$\mathbf{r}_k = \xi_k \mathbf{e}_\xi + \eta_k \mathbf{e}_\eta + \zeta_k \mathbf{e}_\zeta,$$

のように、剛体とともに回転する座標で表現しよう。このとき、角運動量の ζ 成分は、

$$\begin{aligned} L_\zeta &= \sum_{k=1}^n m_k \left[\eta_k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)_\zeta - \zeta_k (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)_\eta \right] \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \left[\eta_k (\omega_\xi \eta_k - \omega_\eta \zeta_k) - \zeta_k (\omega_\zeta \xi_k - \omega_\xi \zeta_k) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n m_k (\eta_k^2 + \zeta_k^2) \omega_\xi - \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \eta_k \omega_\eta - \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \zeta_k \omega_\zeta, \end{aligned}$$

のように計算できる。他の成分 L_ξ と L_η も同様に計算でき、その結果として、角運動量 \mathbf{L} は、

$$\begin{bmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\xi\xi} & -I_{\xi\eta} & -I_{\xi\zeta} \\ -I_{\eta\xi} & I_{\eta\eta} & -I_{\eta\zeta} \\ -I_{\zeta\xi} & -I_{\zeta\eta} & I_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

のように行列表現できる。この数式において、慣性モーメントはテンソルであり、**慣性モーメントテンソル**と呼ばれる。その対角成分は、

$$I_{\xi\xi} = \sum_{k=1}^n m_k (\eta_k^2 + \zeta_k^2), \quad I_{\eta\eta} = \sum_{k=1}^n m_k (\zeta_k^2 + \xi_k^2), \quad I_{\zeta\zeta} = \sum_{k=1}^n m_k (\xi_k^2 + \eta_k^2),$$

となる。また、非対角成分は、

$$I_{\xi\eta} = I_{\eta\xi} = \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \eta_k, \quad I_{\eta\zeta} = I_{\zeta\eta} = \sum_{k=1}^n m_k \eta_k \zeta_k, \quad I_{\zeta\xi} = I_{\xi\zeta} = \sum_{k=1}^n m_k \xi_k \zeta_k,$$

となる。この計算結果によると、慣性モーメントテンソルは、対称テンソルである。また、非対角成分は**慣性乗積**と呼ばれる。

慣性乗積は回転軸の独立性の悪さ、または、不安定さを表す。慣性乗積がゼロでなければ、ある軸の回転が他の軸の角運動量に影響を及ぼすということだ。つまり、回転軸のぶれを引き起こす。例えば、剛体中の座標系をカルテシアン座標で表現したとき、 $\mathbf{r}_1 = [\xi_1, 0, \zeta_1]$ のみ質量 m の質点が存在したとする。その条件のもとで、 ζ 軸まわりに角速度 ω_ζ で剛体を回転させたとすると、角運動量は、

$$L_\xi = -m\xi_1\zeta_1\omega_\zeta, \quad L_\eta = 0, \quad L_\zeta = -m(\xi_1^2 + \eta_1^2)\omega_\zeta,$$

となる。この状況は、原点から離れた位置に質点が1個しかないのでバランスが悪く、 ξ 軸まわりにぶれが起きていることを示唆する。これを避けるため、質量 m の質点 $\mathbf{r}_2 = [-\xi_1, 0, \zeta_1]$ を配置する。その結果、 ξ と ζ による慣性乗積が相殺され、 ζ 軸まわりの回転に対して角運動量は、

$$L_\xi = 0, \quad L_\eta = 0, \quad L_\zeta = -2m(\xi_1^2 + \eta_1^2)\omega_\zeta,$$

となり、軸が安定するわけだ。

3.4.2 対角化と慣性主軸

慣性モーメントテンソルは、座標系を選べば対角成分以外の成分をすべてゼロにすることができる。つまり、慣性モーメントテンソルは対角テンソルに変換できるということだ。そのような座標系では、回転運動の取り扱いが簡略化されるはずだ。例えば、ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を変換行列 T によって $\boldsymbol{\xi}'$ に変換すると考えよう。つまり、

$$\boldsymbol{\xi}' = T\boldsymbol{\xi},$$

のように変換される。このベクトルは、行列表現において、

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

のような列ベクトルである。これに対して、

$$\boldsymbol{\xi}^\dagger = [\xi_1^\dagger \quad \xi_2^\dagger \quad \xi_3^\dagger],$$

のような行ベクトルを使うと便利である。その行ベクトルは**余ベクトル**と呼ばれる。例えば、ベクトルの長さを ξ とすると、

$$\xi^2 = \boldsymbol{\xi}^\dagger \boldsymbol{\xi},$$

のように行列の積で書くことができる。余ベクトルが 1×3 の行列であり、一般の列ベクトルが 3×1 の行列であるので、その積は 1×1 の行列、すなわち、スカラになる。上に書いたように、列ベクトルが $\boldsymbol{\xi}' = T\boldsymbol{\xi}$ のように変換されるのなら、余ベクトルは $\boldsymbol{\xi}'^\dagger = \boldsymbol{\xi}^\dagger T^{-1}$ のように変換される。なぜなら、

$$\xi'^2 = \boldsymbol{\xi}'^\dagger \boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}^\dagger T^{-1} T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^\dagger \boldsymbol{\xi} = \xi^2,$$

のように、ベクトルの長さは座標変換によらず一定値であるべきだからだ。このような行列表記を用いると、慣性乗積によるテンソルは、

$$I = I_0 - \sum_{k=1}^n m_k \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^\dagger, \quad (3.21)$$

のようによく書くことができる。ここで、 I_0 は、

$$I_0 = \sum_{m=1}^n m_m \xi^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

なる対角行列である。変換された座標系 ξ' において、(3.21) の右辺の第2項は、

$$\sum_{k=1}^n m_k \boldsymbol{\xi}'_k \boldsymbol{\xi}'_k{}^\dagger = \sum_{k=1}^n m_k T \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^\dagger T^{-1} = T \left(\sum_{k=1}^n m_k \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^\dagger \right) T^{-1},$$

のように変形される。右辺の括弧の中は 3×3 の行列である。線形代数の定理によって明らかのように、ある行列 P が与えられたとき、変換行列 T を適当に選べば、 TPT^{-1} を対角行列にできる。そのような操作は対角化と呼ばれる。しかも、上で述べたように ξ^2 が座標変換に対して不変であるので、(3.21) の右辺の第1項は、座標変換をしても対角行列である。

座標系 $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ で、慣性モーメントテンソルが対角化されたとする。この座標系は直交座標とは限らない。このとき、慣性モーメントテンソルは、

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix},$$

のように対角行列となる。その座標系において、角運動量が $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ とすると、角運動量は、

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 L_1 \\ \omega_2 L_2 \\ \omega_3 L_3 \end{bmatrix},$$

のような簡単な数式で表される。このような座標系では ξ_1 軸, ξ_2 軸, ξ_3 軸が回転に関して独立しているということだ。この性質によって、どのような形状でも安定した回転軸が三つ選べることになる。そのような安定した軸は**主軸**と呼ばれる。

3.5 オイラーの運動方程式

主軸 ξ_1, ξ_2, ξ_3 が特定できたものとして、回転に関する運動方程式を導出しよう。各主軸の方向における単位ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とする。そのとき、角運動量をそれらの1次結合:

$$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3,$$

とする。この角運動量を時間微分すると、

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{L}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{L}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{L}_3 \mathbf{e}_3 + L_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + L_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + L_3 \dot{\mathbf{e}}_3, \quad (3.22)$$

が得られる。計算にあたって、そもそも座標系 $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ が回転しているので、単位ベクトルも時間微分がゼロでないことに注意が必要である。単位ベクトルが、回転軸 $\boldsymbol{\omega}$ のまわりを回転しているのだから、単位ベクトルの時間微分は、

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3,$$

と書けるはずだ。一方、角運動量ベクトルの成分 L_1, L_2, L_3 は、

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3,$$

だから、その時間微分は単純に、

$$\dot{L}_1 = I_1 \dot{\omega}_1, \quad \dot{L}_2 = I_2 \dot{\omega}_2, \quad \dot{L}_3 = I_3 \dot{\omega}_3,$$

となる。これらの数式を (3.22) に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= I_1 \dot{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \mathbf{e}_3 + I_1 \omega_1 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) + I_2 \omega_2 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2) + I_3 \omega_3 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) \\ &= I_1 \dot{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}, \end{aligned}$$

が得られる。第2行目への数式変形では、

$$\mathbf{L} = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3,$$

であることに注意した。ここで、 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$ の第1成分が、

$$\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 = \omega_2 \omega_3 I_3 - \omega_3 \omega_2 I_2 = (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3,$$

であることに注意しよう。同様の手順で、第2成分や第3成分も計算でき、その結果、

$$N_1 = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \quad (3.23a)$$

$$N_2 = I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \quad (3.23b)$$

$$N_3 = I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2, \quad (3.23c)$$

が得られる。これらの方程式は、**オイラーの運動方程式**と呼ばれる。

3.5.1 対称ゴマの運動

対称ゴマとはある特定の回転軸に対して軸対称になっている形状の回転体である。例えば、 ξ_3 軸を回転軸とするとき、剛体の形状が $\xi_1 \xi_2$ 平面で円形であれば、確実に対称ゴマである。楕円であれば対称ゴマではない。他にも、 ξ_3 軸が重心を通るように描かれた正多角形など、対称ゴマは無数に存在する。

対称ゴマの条件を考えてみよう。慣性乗積 $I_{\xi\eta}$ を考えたとき、その定義: $I_{\xi\eta} = \sum \xi_k \eta_k$ に基づき、ある質点 $\mathbf{r}_k = [\xi_k, \eta_k]$ に対して、別の質点 $\mathbf{r}_l = [\xi_k, -\eta_k]$ が存在する。ただし、すべての質点が同一の質量 m をもつと仮定した。その場合、慣性乗積が相殺されて $I_{\xi\eta} = 0$ となる。他の慣性乗積についても同様の考察をすると、慣性モーメントテンソルが対角行列であることがわかる。

対称軸が ξ_3 である場合、 ξ_1 軸と ξ_2 軸は区別がつかない。そのように考えると、 $I_1 = I_2$ でなければならない。その条件のもとでオイラーの運動方程式を書くと、

$$N_1 = I_1 \dot{\omega}_1 - (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3, \quad (3.24a)$$

$$N_2 = I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \quad (3.24b)$$

$$N_3 = I_3 \dot{\omega}_3, \quad (3.24c)$$

が得られる。外力によるモーメントが作用しなければ、 $\mathbf{N} = 0$ なので、第3式は $\dot{\omega}_3 = 0$ のように書き換えられる。すなわち、 ω_3 は定数である。その定数を $\omega_3 = \omega_0$ と書くことにしよう。そのとき、オイラーの運動方程式の第1式と第2式は、

$$\dot{\omega}_1 - \lambda \omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 + \lambda \omega_1 = 0,$$

のように書き換えられる。ここで、

$$\lambda = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0,$$

とおいた。得られた微分方程式から ω_2 を消去すると、

$$\ddot{\omega}_1 + \lambda^2 \omega_1 = 0,$$

が得られる。この微分方程式は容易に解くことができ、

$$\omega_1 = A \cos(\lambda t + \alpha), \quad \omega_2 = -A \sin(\lambda t + \alpha), \quad (3.25)$$

となるのだ。ここで、 A と α は積分定数である。得られた結果によると、対称ゴマの運動は、対称軸以外の軸成分がゼロでない場合、図 3.10 に示すように対称軸 ξ_3 を周回するように角運動ベクトルが変化する。このような回転軸の変動は**章動**と呼ばれる。数式 (3.25)

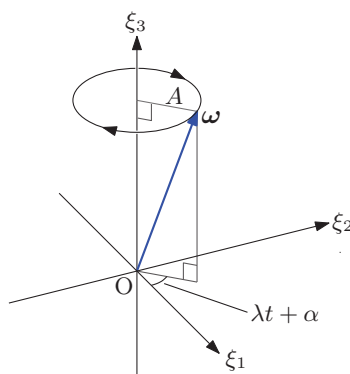


図 3.10: 対称ゴマの章動

によると、角運動量ベクトルの変化は、 $I_3 > I_1$ であれば $\lambda > 0$ となるので、 ξ_3 の正から原点を見ると時間経過とともに時計回りに回転する。章動は、歳差運動に類似しているが、発生原理が歳差運動とは異なる。歳差運動は後に議論するように、外力に起因する運動であるが、章動は慣性モーメントの成分に起因するのだ。

章動の現象は、地球の自転運動でも観測されている。地球の対称軸は北極点と南極点を結ぶ軸である。地球の慣性モーメントは、 $(I_1 - I_3)/I_1 \simeq 1/298$ 程度である。自転の角速度 ω_0 は1日の長さの逆数である。よって、自転軸の揺らぎの角速度 λ は $\omega_0/300$ 程度の値となり、自転軸が300日程度で揺らぐことが予想される。実際の揺らぎの周期は434日程度である。予想と異なるのは、地球が完全な剛体でなく、マントル等が滞留する構造に起因する。章動に起因する自転軸の動揺はチャンドラスカー振動と呼ばれ、北極点や南極点の付近での自転軸のずれは10メートル程度である¹。

¹ Alfred Leick, "GPS Satellite Surveying," John Wiley & Sons, Inc., 3rd Ed., ISBN 0-471-05930-7 pp.13-15, 2004.

3.5.2 回転による運動エネルギー

慣性主軸を座標軸に設定すると、任意の回転において単純な数式で運動エネルギーが記述できる。運動エネルギーを導出するにあたり、剛体に含まれる各質点が $m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2/2$ の運動エネルギーをもつことに注意しよう。しかも、これまで扱ったように、質点の速度は $\dot{\mathbf{r}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k$ なる関係を満たす。この前提のもとで、剛体の運動エネルギーを計算すると、

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k [(\omega_2 \xi_3^{(k)} - \omega_3 \xi_2^{(k)})^2 + (\omega_3 \xi_1^{(k)} - \omega_1 \xi_3^{(k)})^2 + (\omega_1 \xi_2^{(k)} - \omega_2 \xi_1^{(k)})^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k [\omega_2^2 (\xi_3^{(k)})^2 - \omega_2 \omega_3 \xi_2^{(k)} \xi_3^{(k)} + \omega_3^2 (\xi_2^{(k)})^2 \\ &\quad + \omega_3^2 (\xi_1^{(k)})^2 - \omega_1 \omega_3 \xi_1^{(k)} \xi_3^{(k)} + \omega_1^2 (\xi_3^{(k)})^2 \\ &\quad + \omega_1^2 (\xi_2^{(k)})^2 - \omega_1 \omega_2 \xi_1^{(k)} \xi_2^{(k)} + \omega_2^2 (\xi_1^{(k)})^2] \\ &= \frac{1}{2} [\hat{I}_{11} \omega_1^2 + \hat{I}_{22} \omega_2^2 + \hat{I}_{33} \omega_3^2 - 2(\hat{I}_{12} \omega_1 \omega_2 + \hat{I}_{23} \omega_2 \omega_3 + \hat{I}_{13} \omega_1 \omega_3)], \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 \hat{I}_{kl} は慣性モーメントテンソルの成分である。座標軸が慣性主軸になるように選ばれているならば、慣性乗積がゼロになるはずなので、運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2), \quad (3.26)$$

のように簡単な数式で表現できる。また、 I_k は慣性モーメントテンソルの対角成分、すなわち、 $I_k = \hat{I}_{kk}$ である。

3.6 歳差運動

コマは外力の影響で回転軸を変化させる、いわゆる、歳差運動と呼ばれる運動をする。地上で回すコマが歳差運動をするのは、地球の重力が要因だ。地球でさえ歳差運動をする。地球は公転面から約 23.4° 自転軸が傾いている。地球の自転軸は太陽の重力のため、約 25,800 年周期で自転軸の向きが変化している。本節では歳差運動を解析する手法を取り扱う。

3.6.1 オイラー角

歳差運動するコマは、回転軸が鉛直方向から傾き回転する。そのような運動をする剛体を解析するには、回転軸を明らかにしたうえで、剛体自体がどれくらい回転したか表現することが重要である。その表現のため、**オイラー角**と呼ばれる三つの角度 θ , φ , ψ を用いる。

オイラー角の表現方法はいくつも存在するが、図 3.11 を用いて一例を示そう。初期状態として、3次元のカルテシアン座標 $[x, y, z]$ を考える。その座標から、次の手順によって、剛体における座標系 $[\xi, \eta, \zeta]$ を得る。

1. 座標系を z 軸まわりに角度 φ だけ回転させる。回転後の座標系を $[x', y', z']$ とする。このとき、 z' 軸は z 軸と一致している。
2. 座標系を y' 軸まわりに角度 θ だけ回転させる。回転後の座標系を $[x'', y'', z'']$ とする。この回転によって、図中の円板 D_1 は D_2 の位置に回転する。このとき、 y'' 軸は y' 軸と一致する。また、 $[x, y, z]$ 座標系から見ると、方位角 φ , 天頂角 θ の方向に新たな z'' 軸が向いていることになる。
3. 座標系を z'' 軸まわりに ψ だけ回転させる。回転後の座標系が最終的な座標系 $[\xi, \eta, \zeta]$ である。なお、図では座標軸が込み合うため、 η 軸は省略した。

この手順の中で、手順 1 と手順 2 によって剛体の回転軸が定まる。手順 3 は、定まった回転軸における回転によって、局所的な座標軸 $[\xi, \eta, \zeta]$ の方向を決めているわけだ。剛体の運動を記述するには、 $[\xi, \eta, \zeta]$ でなく、回転軸の方向と、回転軸まわりの回転角を表す θ , φ , ψ を用いる。

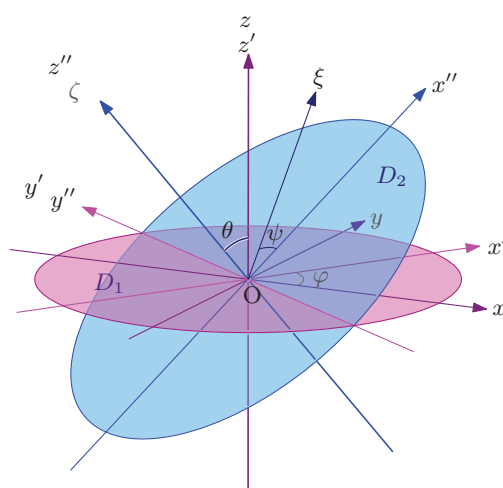


図 3.11: オイラー角の説明図

剛体の運動の取り扱いには、回転軸の方向 θ , φ と、回転軸まわりの回転角 ψ の変化を解析するのだ。そのためには、慣性主軸まわりの角速度 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ の寄与で構成す

ることが重要である。それらの角運動量の構成は、次のように段階的に構成するとわかりやすい。なお、説明を簡潔に書くため、 $\Delta\omega_{x''}$ のような記号で角運動量に対する寄与を表記する。この $\Delta\omega_{x''}$ は、 x'' 軸まわりの角運動量の増加分を表すことにする。

$\dot{\psi}$ による寄与 この回転角の変化は、 z'' 軸 (= ζ 軸) まわりの回転であるので、その寄与は明らかである。つまり、 $\dot{\psi}$ は角運動量の変化 $\Delta\omega_{\zeta} = \dot{\psi}$ を発生させる。一方、 ω_{ξ} と ω_{η} の増減にはまったく寄与しない。

$\dot{\theta}$ による寄与 この回転角の変化は、 y'' 軸 (= y'' 軸) まわりの回転であるので、角運動量の変化 $\Delta\omega_{y''} = \dot{\theta}$ を発生させる。この回転によって得られた座標系 $[x'', y'', z'']$ は、引き続き、 z'' 軸 (= ζ 軸) のまわりに角度 ψ だけ回転して、座標系 $[\xi, \eta, \zeta]$ に変換される。このとき、 ζ 軸は y'' 軸と直交するので、 $\Delta\omega_{y''}$ は ω_{ζ} には寄与しない。結果として、 $\Delta\omega_{y''}$ は、 $\Delta\omega_{\xi} = -\Delta\omega_{y''} \sin \psi$ と、 $\Delta\omega_{\eta} = \Delta\omega_{y''} \cos \psi$ に分配される。

$\dot{\varphi}$ による寄与 この回転角の変化は、 z 軸 (= z' 軸) まわりの変化であるので、角運動量の変化 $\Delta\omega_{z'} = \dot{\varphi}$ を発生させる。その回転によって得られた座標系 $[x', y', z']$ は、引き続き、 y' 軸 (= y'' 軸) まわりに角度 θ だけ回転し、 $[x'', y'', z'']$ に変換される。新たな座標系では、 $\Delta\omega_{z'}$ は $\omega_{x''} = -\dot{\varphi} \sin \theta$ と、 $\omega_{z''} = \dot{\varphi} \cos \theta$ に成分分解される。引き続き、座標系 $[x'', y'', z'']$ は z'' 軸 (= ζ 軸) まわりに角度 ψ だけ回転し、 $[\xi, \eta, \zeta]$ に変換される。その結果、 $\Delta\omega_{z''}$ は $\Delta\omega_{\zeta} = \Delta\omega_{z''}$ のように引き継がれるが、 $\Delta\omega_{x''}$ は、 $\omega_{\xi} = \Delta\omega_{x''} \cos \psi$ と $\omega_{\eta} = \Delta\omega_{x''} \sin \psi$ に分配される。

上で書いた説明は、オイラー角の時間微分が図 3.12 に示すように角運動量の成分として分配されることを述べている。ここで、座標系 $[\xi, \eta, \zeta]$ が慣性主軸になるよう座標軸が設

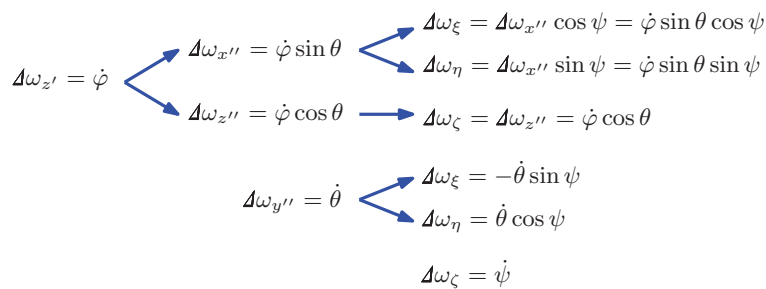


図 3.12: オイラー角の変化による角運動量への寄与

定されていると仮定し、 ω_{ξ} , ω_{η} , ω_{ζ} を、それぞれ、 ω_1 , ω_2 , ω_3 と書くことにしよう。図 3.12 に描かれた寄与に注意しながら角運動量を特定すると、

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (3.27a)$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (3.27b)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \quad (3.27c)$$

が得られる。剛体による任意の回転体は、この方程式を解くことによって解析できるのだ。

3.6.2 対称ゴマの運動

本項では対称ゴマの運動を解析する。対称軸を ζ 軸とし、 $I_1 = I_2$ の条件を設定する。また、対称軸(ζ 軸)まわりの慣性モーメントを I_3 とする。ゴマの質量を M としておく。このとき、対称ゴマの運動方程式を導出しよう。

ゴマの脚が原点 O で接地しているとし、原点からゴマの重心までの距離が l であるとする。前項で議論したオイラー角 φ, θ, ψ は、それぞれ、対称軸の傾斜方向、対称軸の傾斜角、ゴマの回転角に対応する。対称軸が鉛直方向から傾いている場合、すなわち、 $\theta \neq 0$ のとき、ゴマは重力で倒れないように歳差運動している。歳差運動は $\dot{\varphi} \neq 0$ に対応する。

ゴマに作用する力のモーメントは、図3.13に示すように三つの要因で発生する。それらの要因は、重力、歳差運動による遠心力、歳差運動によるゴマ自身の角運動量の変化だ。

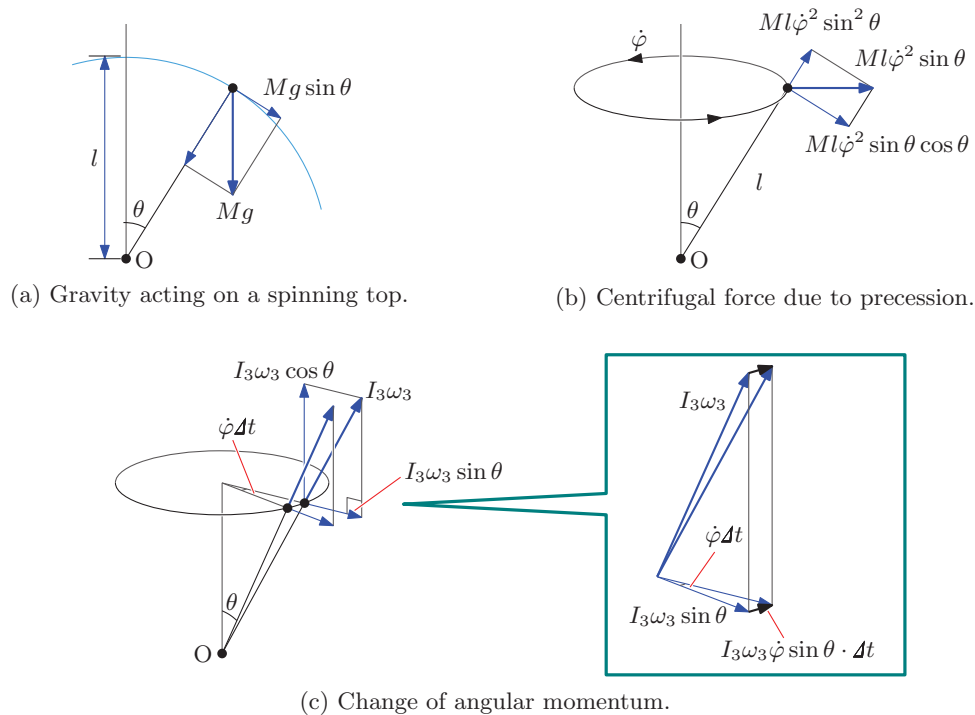


図 3.13: 対称ゴマに作用する力のモーメントの要因

それらの要因は、ゴマが重力を受けて傾くことを発端にして、ゴマ自身が自己制御をかけて発生する。歳差運動のメカニズムは本項では触れず、歳差運動しているゴマに作用する力のモーメントを考察する。それら三つの要因に起因する力のモーメントの合計がゴマに作用している。

重力 図3.13 (a)に示すように、コマの重心には、鉛直下方に重力 Mg が作用する。そのとき、原点から半径 l の円の接線方向の成分がコマを倒す力なので、コマには力のモーメント $N_g = Mgl \sin \theta$ が作用する。この力のモーメントは、 θ を増加する方向に作用している。

歳差運動による遠心力 歳差運動は対称軸の方向を変化させる運動だ。上に書いたようにコマは $\dot{\varphi}$ の角速度で対称軸の向きを変える。この歳差運動によって、コマの重心は半径 $l \sin \theta$ の円を描く。円運動をするために、コマの重心は歳差運動の内側に向かう水平方向に $l\dot{\varphi}^2 \sin \theta$ の加速度で運動している。そのとき、回転するコマの重心の立場では、図3.13 (b)に示すように、遠心力として、 $l\dot{\varphi}^2 \sin \theta$ なる加速度が外側にはたらいっている。これが、コマをさらに倒そうとするわけだ。重力と同様に、鉛直面に描いた半径 l の円の接線方向の成分がコマを倒す加速度となる。すなわち、 $l\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$ がその成分だ。支点から長さ l の位置でこの加速度となるので、傾き角 θ の2階微分への寄与は $\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$ となる。したがって、遠心力に起因する力のモーメントは $N_c = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$ となる。この成分も θ を増加させる方向に作用する。

歳差運動による角運動量の変化 コマが対称軸のまわりを ω_3 の角速度で回転している場合、図3.13 (c)に示すように、その軸方向に $I_3 \omega_3$ の角運動量をもつ。対称軸が鉛直方向から θ だけ傾いているので、角運動量は水平方向に $I_3 \omega_3 \sin \theta$ 、鉛直方向に $I_3 \omega_3 \cos \theta$ の成分に分解できる。歳差運動によって、微小時間 Δt の間に対称軸は水平方向に $\dot{\varphi} \Delta t$ だけ変化する。対称軸の変化によって、角運動量の鉛直方向の成分は変化を受けないが、水平方向の成分が変化する。図3.13 (c)の吹き出しの中に描くように、水平方向の成分の変化は、大きさが $I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta \cdot \Delta t$ で、その方向は、歳差運動の進行方向だ。つまり、コマの重心は歳差運動によって、 $N_a = I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta$ なる力のモーメントを受けている。コマの立場では、慣性力として、その逆方向に見かけの力のモーメントを受ける。その力のモーメントは、 θ を減少する方向に、すなわち、コマを起き上がらせる方向に作用する。

上で記述した考察によって、回転するコマに作用する力のモーメントが明らかになった。上で用いた記号を使うと、運動方程式は $I_1 \ddot{\theta} = N_g + N_c - N_a$ となる。これらの記号の正体を展開すると、運動方程式:

$$I_1 \ddot{\theta} = Mgl \sin \theta + I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} \sin \theta, \quad (3.28)$$

が得られる。この方程式を得るために、上のような考察が必要となることを考えると、コマの回転は複雑に感じるかもしれない。後の章で解析力学の手法を用いて、(3.28) がもっと簡単に導出できることを示す。

微分方程式 (3.28) の最も簡単な解は $\theta = 0$ である。この解は、対称軸が鉛直方向に直立して回転する状況に相当する。オイラー角の定義上、このケースでは、 ξ 軸が xy 平面上

で x 軸を角度 $\varphi + \psi$ だけ回転した位置に存在する。一方, (3.27c) に $\theta = 0$ を代入すると, $\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}$ が得られる。これらの事実は, コマの回転角が $\varphi + \psi$ であり, 一定の角運動量 ω_3 がその回転角の時間微分であることを意味している。すなわち, この解が意味するのは, 対称軸を鉛直方向に直立させ, 対称軸まわりに一定の角速度で回転を続けるコマである。そのようなコマは, **眠りコマ** と呼ばれる。

3.6.3 歳差運動

重力場で回転するコマは, 対称軸が鉛直方向からずれていると, 重力の影響で中心軸を鉛直軸まわりに揺らしながら回転する。そのような運動は歳差運動と呼ばれる。歳差運動は (3.28) の解として導出される。

微分方程式 (3.28) を直接的に解くのは難しいので, エネルギー保存則を利用して現象を解析しよう。つまり, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和 $E \equiv K + U$ が一定であることを利用するのだ。エネルギーの和 E は,

$$E = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta, \quad (3.29)$$

となる。この方程式を評価するにあたり, 系全体の角運動量保存則を考えるのがよい。系全体の角運動量の鉛直成分 L_z は,

$$L_z = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_3 \cos \theta,$$

である。第1項は歳差運動におけるコマの重心の角運動量であり, 第2項は対称軸まわりを回転するコマの角運動量である。それらの和として与えられる L_z は定数だ。その事実を利用し,

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - I_3 \omega_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta},$$

に注意しよう。既に述べたように, ω_3 も定数である。そこで,

$$V(\theta) = \frac{I_3}{2} \omega_3^2 + Mgl \cos \theta + \frac{(L_z - I_3 \omega_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}, \quad (3.30)$$

なる有効ポテンシャルを導入すると, コマの全エネルギーは,

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + V(\theta), \quad (3.31)$$

のように, 対称軸の傾き θ の関数で記述できるのだ。数式 (3.30) で定義される有効ポテンシャル $V(\theta)$ は, 図 3.14 に示す曲線を描く。このポテンシャルは, $\theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi$ の極限で, $V(\theta) \rightarrow \infty$ のように振る舞い, 区間 $(0, \pi)$ に含まれる一か所 (例えば θ_0) で極小値をとる。

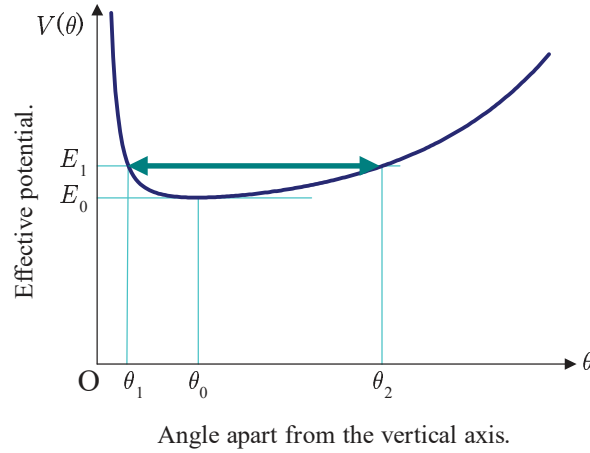


図 3.14: 対称コマの有効ポテンシャル

その有効ポテンシャルの極小値を E_0 とすると, (3.31) で表される全エネルギーが $E > E_0$ であれば, コマはポテンシャルの谷間を往復運動する。例えば, 全エネルギーが図 3.14 に示す E_1 であると, コマの回転軸は θ_1 と θ_2 の間で変動する。そのような運動は**章動**と呼ばれる。全エネルギーが E_0 となれば, コマの回転軸は θ_0 で安定する。この場合, コマの回転軸は, 鉛直方向と角度 θ_0 を保って周回する, いわゆる, **歳差運動**をする。

コマが歳差運動をする状況に限定して解析しよう。回転軸の傾き θ は一定値であるので, $\ddot{\theta} = 0$ である。このとき, 微分方程式 (3.28) は,

$$I_1 \dot{\varphi}^2 \cos \theta_0 - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} + Mgl = 0,$$

となる。歳差運動の条件が成立することから $\theta = \theta_0$ とした。この微分方程式は, $\dot{\varphi}$ に関する 2 次方程式である。ここで,

$$I_3^2 \omega_3^2 - 4Mgl I_1 \cos \theta \geq 0, \quad (3.32)$$

が成立するならば, 2 次方程式には実数解が存在する。その場合, φ は一定値をとるということだ。その一定値を Ω とおけば,

$$I_1 \Omega^2 \cos \theta_0 - I_3 \omega_3 \Omega + Mgl = 0, \quad (3.33)$$

が成立するわけだ。コマは回転軸を角速度 Ω で z 軸まわりを周回しながら歳差運動するのだ。特にコマが高速回転する条件では, ω_3 が十分に大きく, 2 次方程式 (3.33) の 2 次の項が無視できる。その場合,

$$\Omega \simeq \frac{Mgl}{I_3 \omega_3}, \quad (3.34)$$

の角速度でコマの回転軸が回転することになる。この数式によると, コマの角速度が大きくなるほど, Ω が小さい, すなわち, 歳差運動での回転軸の振れが遅くなる。

一方, ω が小さくなると, 2次方程式 (3.33) が条件 (3.32) を満たすことができず, 実数解をもたない。その場合, θ が大きくなれば解をもつことができる。この事実は, 接地点との摩擦によってコマの回転速度 ω_3 が低下すると, 傾きが大きくなり, コマはいずれ地面に倒れこむことになる。

3.7 コマが倒れない理由

回転をするコマは重力の作用を受けて回転軸を傾斜させるが, 歳差運動をすることによって倒れない。その現象は謎めいて見えるかもしれない。回転するコマが重力に逆らって見えることから, 回転運動と反重力を結びつけたくなるかもしれない。確かに, 宮崎駿監督の「となりのトトロ」ではコマに乗って浮遊するシーンがあった。ファンタジーとは異なり, 現実としてコマの運動が反重力につながらないことを本節で説明する。コマを使って反重力装置を発明しようとしても無駄なのだ。

3.7.1 角運動量保存の観点

コマの運動は角運動量保存によって簡潔に説明できる。一般の物理学のテキスト² は, 角運動量によってコマの歳差運動を説明している。第 3.6.2 項でコマに作用する力のモーメントの要因として取り上げた角運動量の変化が, 角運動量保存則に基づく変化だという説明だ。角運動量保存則は, 重力の作用によってコマが歳差運動をすることを簡潔に説明してくれる。

既に導入したように, 複数の質点で構成される剛体の角運動量は $\mathbf{L} = \sum m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k$ によって与えられる。回転する対称コマの場合, 図 3.15 に描くように, 角運動量 \mathbf{L} は回転軸方向を向いたベクトルである。コマは, 脚が床に接地し, その接地点を固定点として回転している。回転軸が鉛直方向から傾いていると, 重力の作用を受けて倒れようとする。接地点からコマの重心までの距離が l であり, コマの質量が M であるとする。コマの回転軸が鉛直方向から角度 θ だけずれている場合, 重力 Mg は, 接地点に向かう成分 $Mg \cos \theta$ と, 軸を倒そうとする成分 $Mg \sin \theta$ に分離できる。そのうち, 接地点に向かう成分は, コマの構造の中で反作用成分との間で釣り合っているはずだ。そのため, 軸を倒そうとする成分がコマの運動に影響を与える。その力は, 接地点 O を中心とする大きさ $Mgl \sin \theta$ のモーメントを形成する。力 \mathbf{F} に起因するモーメントが $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ となるので, この例においては, 図 3.15 に描くように, モーメント \mathbf{N} は角運動量 \mathbf{L} と直交する。このモーメントは角運動量の向きを変化させるのだ。

²例えば, 阿部龍蔵, “力学・解析力学,” 岩波書店, 第 4 版, ISBN 4-00-007921-2, p. 183, 1999.

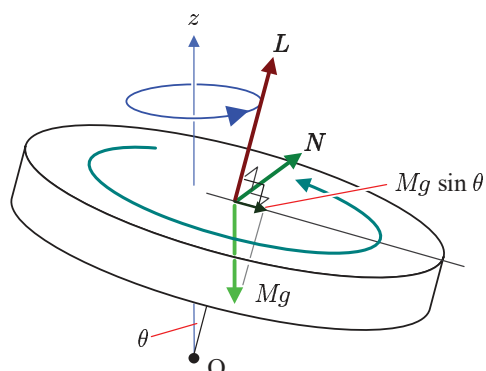


図 3.15: 歳差運動するコマ

角運動量とモーメントの関係は、速度と加速度の関係と同一である。速度と直交する力は、速さを一定に保ちながら運動方向を変化させる。同様に、角運動量と直交するモーメントは、角運動量の大きさを一定に保ちながらベクトルの向きを変える。言いかえると、角運動量の大きさが一定のもとで、回転軸が変化するのが、その様子は、微小時間 Δt における角運動量の変化として、図 3.16 に描いた。モーメント \mathbf{N} が角運動量 \mathbf{L} と直交するので、 \mathbf{L} の大きさは不変である。微小時間に角運動量が増える量は、図に示すように $Mgl \sin \theta \Delta t$

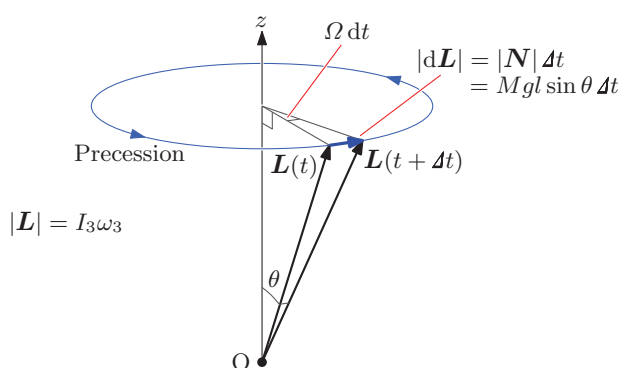


図 3.16: 歳差運動による角運動量の変化

である。そのとき、角運動量は、 $Mgl \sin \theta \Delta t / I_3 \omega_3$ だけベクトルの向きが変わる。この角運動量の変化による歳差運動は、角運動量ベクトルの先端の動きを回転面における角度で評価する。微小時間 Δt に歳差運動で変化した方位を $\Omega \Delta t$ としよう。そのとき、

$$\Omega = \frac{Mgl}{I_3 \omega_3},$$

となる。この Ω が歳差運動による回転軸の変化率を表している。この値は、前節で算出した、高速回転しているコマにおける歳差運動の速さと一致する。

本項で説明したように、角運動量を用いると、コマの重心に作用する重力が回転軸を変化させるためのモーメントになることを簡潔に説明している。そのため、回転するコマは

歳差運動しながら、回転を持続できるのだ。しかし、筆者は次のような理由で、角運動量の説明だけでは不十分であると考えている。

1. 角運動量やモーメントは数学記述の道具であり、そのベクトルの方向が実際の力の方向と一致していないので、直接的に物体に作用する力の関係がわかりづらい。
2. 歳差していない状態から歳差運動に入る過渡的な状態がわかりづらい。

これらの点について現象を解説するため、次項ではコマに作用する力を直接的に解析する。

3.7.2 慣性力による観点

回転運動するコマを構成する要素(質点)は、回転運動を強いられているので、常に遠心力などの慣性力が作用している。その慣性力が、重力で倒れることなく回転を維持するためのからくりだと考え、本項ではコマの運動について解説する。

歳差運動せずに直立状態で回転するコマはわかりやすい。図のように、四方からコマを外向きに引っ張る力が釣り合った状態でコマは回転しているのだ。コマの回転軸が傾くとどうなるだろうか? 回転軸がずれるため、コマを構成する質点は円運動をしなくなる。運動形態が円運動でなくなるので、質点に作用する遠心力などの慣性力は時間経過とともに変化する。その変化を調べてみよう。

任意の運動は複雑なので、安定的に歳差運動をする形態に限定して説明しよう。コマを構成する微小部分に着目し、図 3.17 に示すように、微小部分には慣性力が作用していると考えられる。この図は、コマの外周上の点 P に作用する力を図示している。慣性力を評価するには、特定の点 P の位置を時間 t の関数として数式で表現し、時間についての 2 階微分を計算する。その導関数に質量を乗じて符号反転すれば質点 P に作用する慣性力 \mathbf{F} が得

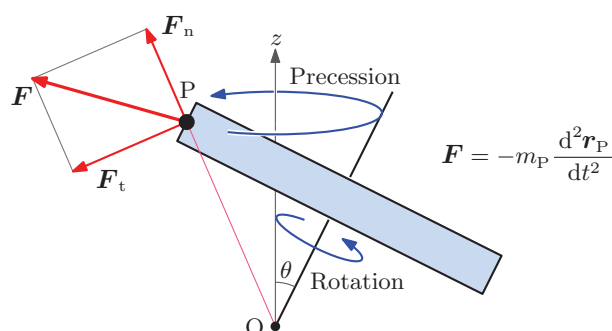
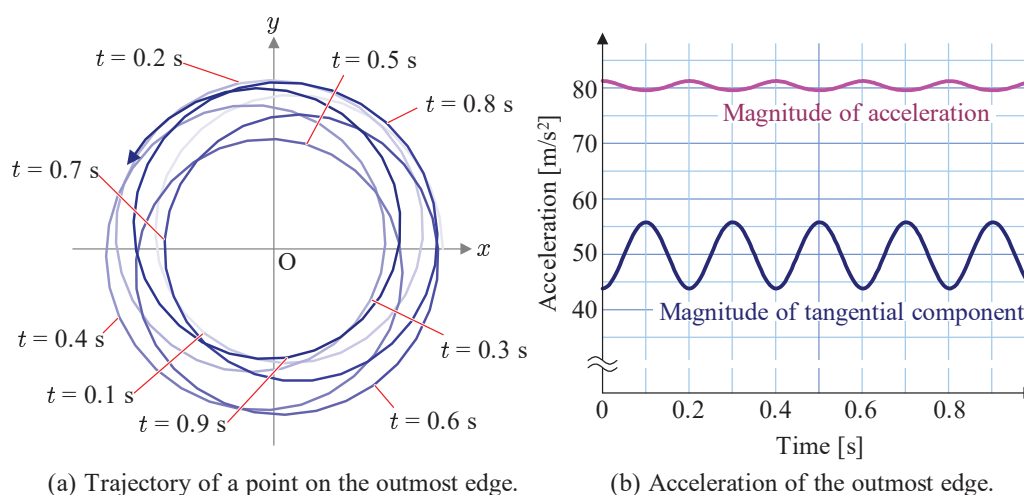


図 3.17: 回転するコマの構成要素に作用する慣性力

られるわけだ。次のステップとして、 \mathbf{F} を法線成分 \mathbf{F}_n と接線成分 \mathbf{F}_t に分解することが重要である。コマがいかなる力に対して変形しないと仮定するならば、コマの運動は \mathbf{F}_n に

よる影響を受けない。コマは自らの構造に基づき、 \mathbf{F}_n を相殺するだけの力を供給できるからだ。一方、 \mathbf{F}_t は原点Oを中心に、コマを回転させようとする。つまり、質点に作用する慣性力のうち接線成分 \mathbf{F}_t を特定することが重要である。図を見てもわかるように、歳差運動の内側に位置する外周は、加速度が上向きに作用するため、回転軸を引き戻そうとする。逆に、歳差運動の外側に位置する外周は、回転軸をさらに大きく倒そうとする。コマの動きは、それらの大小関係によって決まるわけだ。

一例として、半径5 cmの円板で構成されるコマを考えよう。コマの支点から重心までの距離が4 cmとなるように、円板に回転軸が取り付けられているとする。計算するにあたり、コマは $\omega_3 = 40 \text{ rad/s}$ で回転し、 $\Omega = 9 \text{ rad/s}$ で歳差運動する状態を仮定した。計算結果として、図3.18 (a)にコマの外周の軌跡を、同図 (b)に外周の加速度をプロットする。コマの外周は、ほぼ0.1秒ごとに、歳差運動の外側と内側を切り替えながら運動している。外周にかかる加速度が 80 m/s^2 にも達するのは驚く事実だ。計算対象のコマの大きさも回



コマ支点と重心の距離 $l = 4 \text{ cm}$, コマの半径 $r = 5 \text{ cm}$,
 回転速度 $\omega_3 = 40 \text{ rad/s}$, 歳差速度 $\Omega = 9 \text{ rad/s}$.

図 3.18: 回転するコマの外周の軌跡と加速度の変化

転速度も、遊びの中で簡単に実現できる数値であるにも関わらず、そのコマの外周には重力加速度の8倍もの加速度が生じているのだ。図3.18の(a)と(b)を比べると、外周が歳差運動の外側に位置するとき加速度が大きくなっていることがわかる。しかし、加速度の接線成分は歳差運動の内側に位置するときの方が、外側に位置するより 10 m/s^2 以上も大きい。上で述べたように、外周に作用する慣性力は、歳差運動の外側で回転軸を倒す方向に、内側で引き起こす方向に働くので、コマ全体としては回転軸を引き起こす方向に力が働くことが予想できる。コマのすべての構成要素に作用する力の総和が、重力に負けなければ、コマは倒れないのだ。

コリオリの力による現象説明 上で一例をあげて説明したように、コマが倒れずに回転を継続できるのはコマの各構成要素に作用する慣性力に起因する。図 3.18 (a) に示したように、静止系から見るとコマに含まれる特定の点は円運動でないため、加速度の計算が単純ではない。簡単に現象理解するにはコリオリの力を考えるとよいだろう。コリオリの力は、回転運動する観測者が観測する見かけの力である。この場合、歳差運動によって生じるコマの回転軸と一緒に運動する観測者の目線で物理現象を考えてみるのだ。鉛直軸を z 軸にとり、コマと一緒に歳差運動している観測者の目線では、図 3.19 のようにコマの状態が描かれる。コマは、 xz 平面内で傾いているとしよう。既に説明したように、質量 m_k に作用

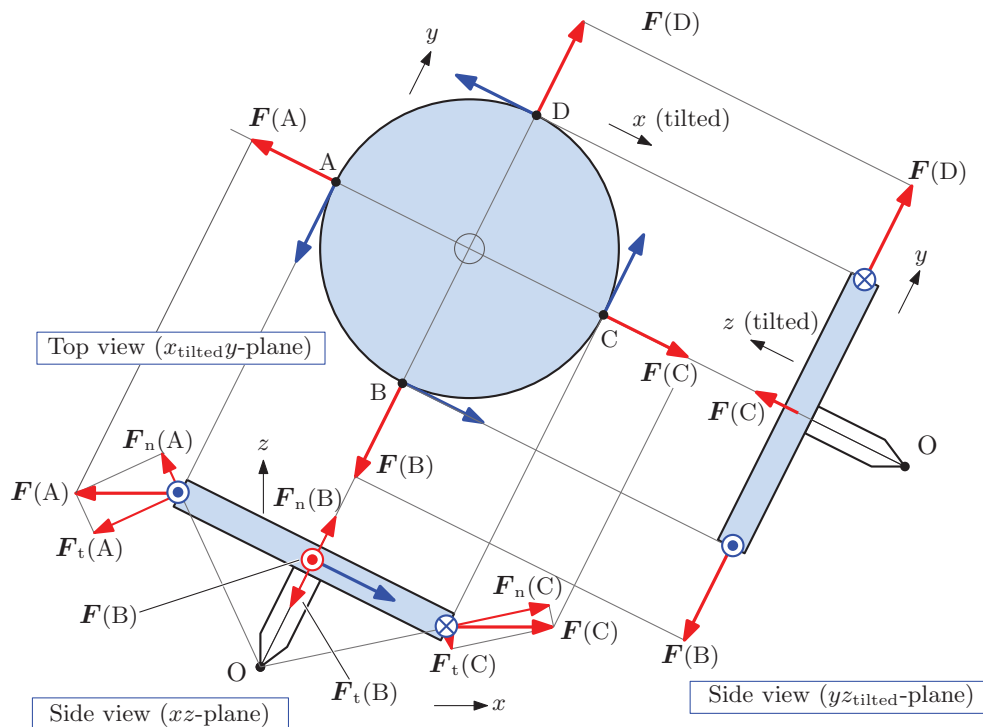


図 3.19: 歳差運動するコマに作用するコリオリの力 ($\varphi = 0$)

するコリオリの力は $m_k \dot{\mathbf{r}}_k \times \boldsymbol{\omega}$ で与えられる。ここで、 $\dot{\mathbf{r}}_k$ は質量 m_k の速度であり、 $\boldsymbol{\omega}$ は角速度ベクトルである。角速度ベクトルは、回転の角速度を大きさとし、回転軸方向を向いたベクトルである。コリオリの力を特定するため便宜的に設けられたベクトルと考えればよい。歳差運動が z 軸まわりの運動なので、歳差に関する角速度ベクトルは z 軸の正の方向を向いている。コマは本来の軸を中心に回転しているので、回転による速度軸を図 3.19 のように描く。図では、コマの外周の 4 点: 点 A, 点 B, 点 C, 点 D に速度ベクトルを描いた。それらの速度ベクトルに対応するコリオリの力は、 $\mathbf{F}(A)$, $\mathbf{F}(B)$, $\mathbf{F}(C)$, $\mathbf{F}(D)$ のように描かれる。描かれた力によると、 $\mathbf{F}(B)$ と $\mathbf{F}(D)$ は均衡がとれているが、 $\mathbf{F}(A)$ と $\mathbf{F}(C)$ が一直線上にないため注意が必要だ。この場合、線分 BD のまわりに回転するところであるが、コマの軸がしっかりと固定されているのであれば、むしろ、自由に動ける O を支点として回転をしようとする。その場合、 $\mathbf{F}(A)$ と $\mathbf{F}(C)$ を、支点 O から見た法線成分と接線

成分に分けると便利だ。法線成分が $F_n(A)$, $F_n(C)$ であり, 接線成分が $F_t(A)$, $F_t(C)$ である。図から明らかなように, 接線成分が点 A と点 C で異なり, コマを鉛直軸に向かって持ち上げようとする力がコマに作用している。その力がコマに作用する重力と釣り合えば, 安定に歳差運動し, コマは倒れないのだ。一方, 法線成分はコマを変形させようとする力となるが, コマの剛性によって内部で反作用がはたらき変形を免れているはずだ。

歳差運動発生メカニズム 前段落では, 歳差運動するコマには重力に逆らってコマを持ち上げようとする力が作用することを説明した。本段落では, どのような仕組みによって歳差運動が開始するのかを説明する。回転するコマを傾けて設置すると, 少しだけ重力で下がった後, 歳差運動が始まる。その下がるという運動が重要である。図 3.20 に, 重力で下がるコマに作用するコリオリの力を描いた。重力の作用でコマは支点 O を中心に回転しながら落下する。この図は, 落下運動する観測者から見たコリオリの力を描いている。

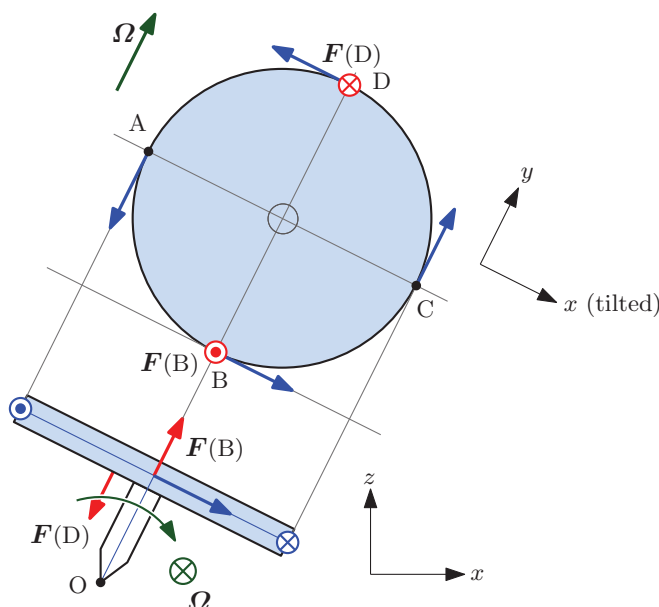


図 3.20: 歳差運動の原動力 ($\varphi = 0$)

コマの回転軸が xz 平面上で発生している場合, 便宜上設定される角速度ベクトル Ω は y 軸の正の方向を向いている。図のように, コマの外周に点 A, 点 B, 点 C, 点 D を設定し, 各点におけるコリオリの力を調べてみよう。点 A と点 C ではコマの回転による速度が角速度ベクトルと平行なのでコリオリの力は発生しない。それに対して, 点 B と点 D では速度が角速度ベクトルと直角をなし, コリオリの力が最大になる。発生するコリオリの力は, 点 B と点 D で逆方向になるので, 上から見たとき, コマの回転軸を反時計回りに回転させる。これが歳差運動が発生するメカニズムである。

歳差運動を発生させるメカニズムはよくできていて, コマの回転速度と歳差運動の速度

が自動的に釣り合う仕組みを自然に実現している。コマの回転速度が小さく重力が優勢のとき、コマは下がり、その間に歳差運動が速くなる。逆に、歳差運動が速すぎる場合、コマは重力を振り切って直立しようとするが、軸が上に向かって運動すると、歳差運動にブレーキがかかる。どちらにしても、歳差運動によるコリオリの力が重力と釣り合う位置を回転するコマが自ら探して安定化するのだ。これは、初期状態でふらついていたコマが、回るうちに軸のブレが少なくなって安定化する過程に相当する。

