第2章　さまざまな運動の解析

本章では, ニュートンの運動方程式を利用し, 恒星のまわりを公転する惑星の運動, 加速度運動などを取り扱う。加速度運動に関して, 観測者が加速度運動している場合を想定し, 慣性力についても議論する。さらに, 本節では束縛運動についても議論する。

2.1　惑星の公転軌道

惑星の公転軌道は, 太陽の重力が支配的となってその形状が定まっている。そのような軌道を記述するには, 太陽を原点とした極座標が便利である。本節では, 運動方程式を解くことによって惑星の公転軌道を解析する。

2.1.1　ケプラーの法則

自らの質量に比べ巨大な質量を有する恒星を公転する惑星の軌道はケプラーの法則によって支配される。ケプラーの法則は, 17 世紀にケプラーがティコ・ブラーエの観測結果を火星の公転軌道を推定し, 一般的な惑星の軌道として定式化した法則だ。ケプラーの法則は, 次の三つの法則で構成される。

第 1 法則 (楕円軌道の法則) 惑星は, 太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く。軌道の形状は地球のようにほぼ円に近い軌道や, ハレー彗星のようにかなり扁平した軌道などのように多様である。

第 2 法則 (面積軌道一定の法則) 惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に掃く面積は一定である。楕円軌道において, 太陽から遠くを公転しているとき速度が小さく, 近くを公転しているときその距離に応じて速度が大きくなる。

第 3 法則 (調和の法則) 惑星の公転周期の自乗は軌道長半径の 3 乗に比例する。例えば, 軌道長半径が 9.54 天文単位の土星では, 公転周期が $9.54^{3/2} = 29.5$ 年となる。

上で述べたように, ケプラーは観測結果からこれらの法則を提唱した。当然だが, ケプラーの法則はニュートンの運動方程式から数学的に導出できる。数学的に導出できるということは, ケプラーの法則が厳密に正しいということだ。ここからケプラーの法則を導出しよう。

ケプラーの法則を導出するには, ニュートンの運動方程式を極座標で表現するのが便利だ。二次元のカルテシアン座標 $[x, y]$ を極座標 $[r, \theta]$ で表すと,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

となる。これらの数式を時間 t について微分すると,

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$$

が得られる。ここで, 数式記述を簡略化するため, 導関数はニュートンの表記法 ($\dot{x}$ など) にしたがって数式を記述した。引き続き, これらの数式を t について微分すると,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta, \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

が得られる。これが極座標における加速度だ。ここで加速度を動径成分 a_r と接線成分 a_θ を用いて記述しよう。その場合,

$$\ddot{x} = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta, \qquad \ddot{y} = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta,$$

となるはずなので,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \qquad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}, \tag{2.2}$$

が特定できる。太陽が原点に存在する場合, 太陽による重力は動径方向にしかはたらかず, $a_\theta = 0$ となる。したがって, 第 2 式は,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0, \tag{2.3}$$

のように書き換えることができる。つまり, この数式は,

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const}, \tag{2.4}$$

すなわち, 面積速度一定の法則を意味するのだ。この数式からわかるように, 万有引力が面積速度一定の法則の必要十分条件ではない。中心力であれば, すなわち, $a_\theta = 0$ でさえあればよいのだ。例えば, 自由に回転できる支点に端点を取り付けたバネのもう一端におもりをつけて, バネの伸び縮みを利用して運動させても面積速度一定の法則が成立するのだ。

動径方向の加速度 a_r に注目しよう。この加速度成分は太陽による重力に起因するはずなので, $a_r = -GM/r^2$ となるべきだ。したがって, 微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2}, \tag{2.5}$$

が得られる。ここで, 定数であるべき面積速度を,

$$r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = l, \tag{2.6}$$

とおけば, 微分方程式 (2.5) は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0, \tag{2.7}$$

のように変形できる。この微分方程式を解けば, 時刻 t における太陽と惑星の距離が決定できるわけだ。ここでは, 惑星の軌道の形状に関心をもつことにし, r を θ の関数で表現してみたい。その準備として, $\mathrm{d}^2 r/\mathrm{d}t^2$ を解析学の公式によって,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) &= \frac{t}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{l}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) \\ &= -\frac{l^2}{r^2}\left[\frac{2}{r^3}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2}\right],\end{aligned}$$

のように変形しておく。この結果を利用すると, 微分方程式 (2.7) は,

$$\frac{2}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2},$$

なる形で表できる。この微分方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{l^2}, \tag{2.8}$$

のように簡略化できるので, 容易に解くことができ,

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos\theta}, \tag{2.9}$$

なる解をもつことがわかる。ここで, $r_0 \equiv l^2/GM$ と e は積分定数である。特に, $0 \le e < 1$ であれば, 方程式の解 (2.9) は図 2.1 に示すように, 原点を焦点とする楕円を描く。図 2.1 において, 原点 O が太陽, 楕円に沿って運動する点 P が惑星に相当する。 図に示すように, 積分定数 e は楕円の中心から原点 O のずれを表すため, **離心率** (eccentricity) と呼ばれる。得られた解 (2.9) は, 観測結果に基づいて推測された楕円軌道の法則をニュートン力学によって厳密に証明した結果なのだ。

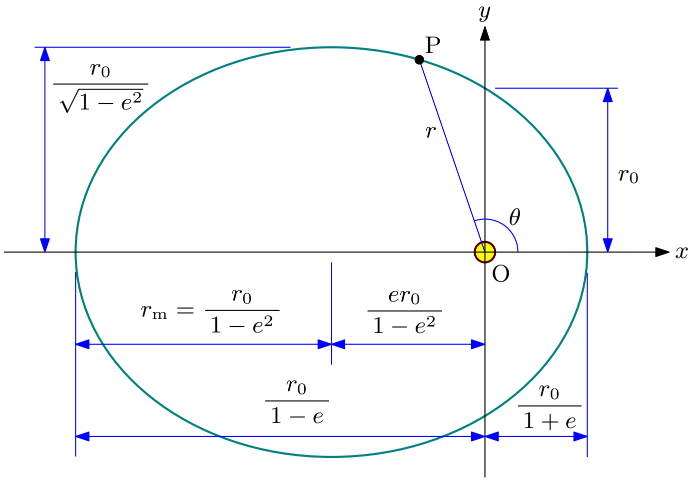


図 2.1: ケプラーの法則による惑星の楕円軌道

面積速度一定の法則と楕円軌道の法則が証明され, 調和の法則が残った。調和の法則を証明するには, 面積速度一定の法則を利用するのが便利である。図 2.1 に示すように, (2.9) が描く楕円は, 長半径が $r_0/(1-e^2)$, 短半径が $r_0/\sqrt{1-e^2}$ である。つまり, その楕円の面積は $\pi r_0^2/(1-e^2)^{3/2}$ となる。一方, (2.6) によって面積速度が $l/2$ である。楕円の面積を面積速度で除すれば公転周期が得られるのだ。実際に計算すれば,

$$T = \frac{2\pi r_0^2}{(1-e^2)^{3/2}\cdot l} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\left(\frac{r_0}{1-e^2}\right)^{3/2},$$

が得られる。ここで, $l = \sqrt{GMr_0}$ を利用した。さらに, 軌道長半径を r_m $(= r_0/(1-e^2))$ とおくと, 公転周期が,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r_\mathrm{m}^{3/2}, \tag{2.10}$$

であることが導かれる。この結果は, 公転周期の自乗 T^2 が軌道長半径の長半径の 3 乗 r_m^3 に比例することを意味する。したがって, 調和の法則が証明された。数式 (2.10) のように軌道長半径 r_m を用いて記述すると, 公転周期は離心率 e の依存性を排除できる。

2.1.2　離心率と軌道形状

前項で導出したように, 離心率 e が $0 \le e < 1$ の場合, 惑星は楕円軌道を描く。離心率は太陽の位置が楕円の中心からずれている度合いを表し, e が大きいほど扁平した楕円軌道となる。特別な場合として, $e = 0$ は円軌道となる。その場合, 前項での数式において, 必ず, $r = r_0$ となるため, $l = \sqrt{GMr_0}$ から, 天体の公転速度が $v = \sqrt{GM/r}$ であることが容易に導かれる。この速度が円軌道速度であり, 太陽による重力と円軌道を描くことによる遠心力が釣り合った状態である。

太陽系の天体の軌道について述べよう。地球の軌道は, 軌道離心率が 0.0167 であり, かなり円軌道に近い。それに対して, 水星が最も軌道離心率が大きく 0.2056, 続いて, 火星が 0.0935 である。太陽系の内惑星の軌道を図 2.2 に描いてみた。水星と火星でさえ, 楕円軌道になっているか確認するのは難しいが, 太陽の位置が中心からずれていることは容易にわかるだろう。 なお, 図 2.2 は春分点 (vernal equinox) が水平軸の右方向になるように描

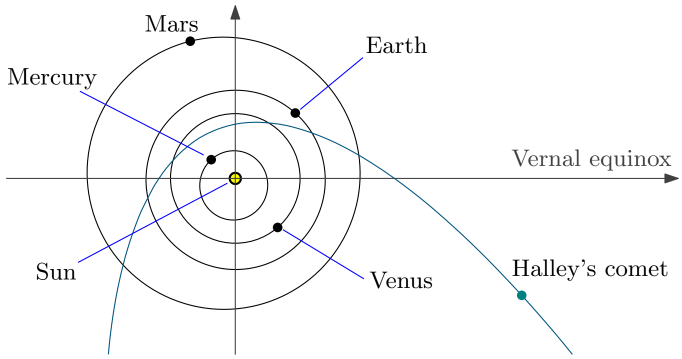


図 2.2: 太陽系の内惑星の公転軌道

いている。惑星に比べ, 周期彗星は大きな離心率の軌道を描く。例えば, ハレー彗星の軌道離心率は 0.967 である。この軌道は長半径が短半径の 3.925 倍となる扁平楕円である。

楕円軌道の遠日点では重力に打ち勝つには速度が不十分であるため, 太陽に引き寄せられる。その間に速度が増大し, 近日点では速度が円軌道速度を超え, 再び, 太陽から遠ざかる。その間に速度が減少し, 円軌道速度より小さくなるため, 太陽の重力によって引き戻される。その結果, 太陽との距離を変えながら速度の増減を繰り返す。それが楕円軌道を描く仕組みである。地球上で投げ上げた物体が放物線を描くのも, 実は, 楕円軌道の一部である。円軌道速度を超えないうちに地表に到達してしまっているだけの違いだ。

一方, 軌道離心率が 1 以上の値になる場合も軌道の形状が定義できる。軌道離心率が 1 に等しい場合, すなわち, $e = 1$ のとき, 天体は放物線軌道を描く。この場合, 天体は軌道のいたるところで, その時点での太陽の距離に対応した脱出速度で運動するため, 太陽の重力を振り切り, かろうじて無限遠に逃れることができる。

軌道離心率が 1 より大きい場合, すなわち, $e > 1$ のとき, 天体は双曲線軌道を描く。この場合, 天体は脱出速度より大きな速度で運動しているため, 余裕をもって太陽の重力を振り切って無限遠に逃れることができる。この軌道を描く典型的な天体が彗星だ。彗星は太陽から 1 光年離れたオールトの雲の天体であり, 太陽の重力に捕捉されて太陽の近くまで落下してくる。その後, 重力を振り切って無限遠に逃れていく。その軌道は, 概して 1 付近の値となる。ごく一部が木星の重力に捕まり, 再び, 太陽に引き戻され, ハレー彗星のように周期彗星となることがある。なお, 周期彗星になると楕円軌道を描くため, 軌道離心率は 1 より小さくなる。

2.1.3　有効ポテンシャル

重力ポテンシャルと運動エネルギーの和は, エネルギー保存則にしたがい保存される。重力源の周囲の軌道を運動する物体の運動エネルギーを動径方向と接線方向の運動エネルギーに分離し, 接線方向の運動エネルギーと重力ポテンシャルを加算して得られた和は有効ポテンシャルと呼ばれ, 物体が楕円軌道を描くメカニズムを説明するのに有効だ。

重力場における有効ポテンシャルを導入しよう。原点に存在する重力源の周囲を運動する物体の単位質量あたりのエネルギーの総和は,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{r^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{GM}{r}, \tag{2.11}$$

となる。面積速度一定の法則から, $r^2\dot{\theta} = l$ が成立することを利用すると, エネルギーの総和は,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r},$$

のように書き換えられる。当然, l は定数である。この数式に着目し,

$$V(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}, \tag{2.12}$$

なる関数を導入しよう。新たに導入された関数を利用すると, 単位質量あたりのエネルギーは,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(r), \tag{2.13}$$

なる形で記述できるようになる。この数式が表現する物理量は, 重力の影響を受ける物体の全エネルギーなので, 当然, 保存量である。重力ポテンシャルと接線方向の運動エネルギーの和 $V(r)$ が, あたかも, ポテンシャルエネルギーのように見える。そのため, $V(r)$ は**有効ポテンシャル**と呼ばれる。

有効ポテンシャルを距離 r の関数としてプロットすると図 2.3 に示す曲線を描く。グラフに記載している c は光速だ。グラフの横軸をわざわざ c^2 で正規化したのは, ディメンジョンを一致させるためだ。正規化に用いた分母が非常に大きな値であるので, 正規化された値が 10^8 オーダの大きな値になっている。例えば, 重力源の質量として太陽の質量 $M = 1.989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$ を仮定すると, グラフ横軸の目盛り 1 個は, ほぼ太陽と地球の距離に相当する。有効ポテンシャルには接線方向の運動エネルギーが含まれているので, 面積速度に関係する l に依存して有効ポテンシャルの形状が変化する。角運動量がゼロであれば, 有効ポテンシャルは $-GM/r$ となり, 原点に近づくほど低下する。この事実は, 接線方向に速度をもたない物体は, 重力源に衝突するまで落下することを意味する。一方, $l > 0$ ならば, 有効ポテンシャルは $r = 0$ の近傍で大きくなる。この事実は, 接線方向に速度をも

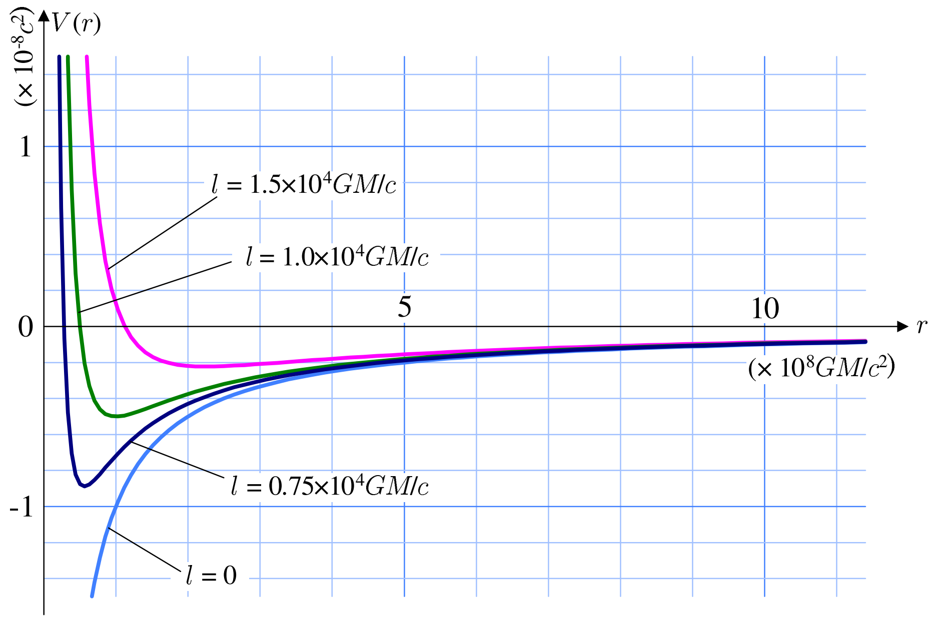


図 2.3: 角運動量と有効ポテンシャル

つ物体は, 重力源に向かって落下したとしても, 重力源の近傍のポテンシャル障壁に跳ね返され, 重力源から遠ざかるように運動方向を変えることを意味する。

エネルギーが有効ポテンシャルの極小値であれば, 重力源と物体の距離は安定し, 一定値となる。その安定状態は, 言い換えると, 物体が円軌道を描くことに相当する。安定状態に対応する距離は, 有効ポテンシャル $V(r)$ の r についての導関数がゼロになる条件, すなわち,

$$r = \frac{l^2}{GM},$$

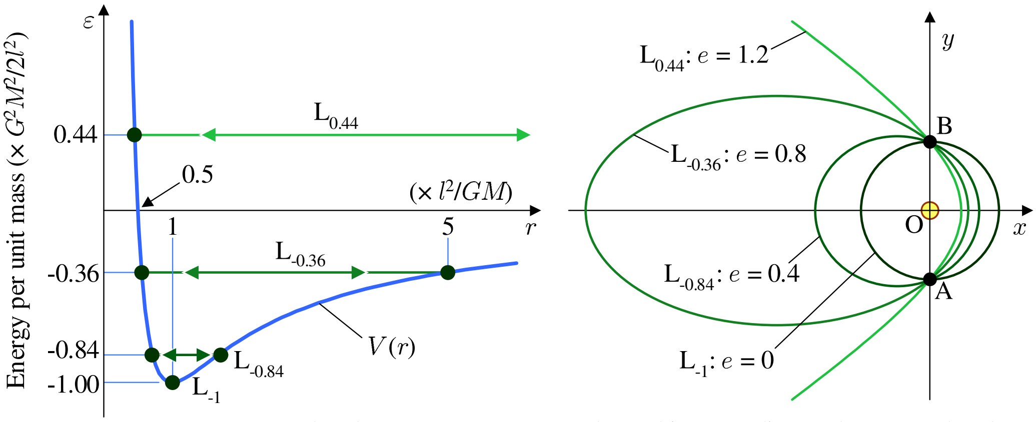
である。この数式が安定した円軌道の半径を与えるのだ。ここで, 軌道を周回する物体の速度を v と仮定すると, $l = rv$ だから, 円軌道半径は $r = r^2v^2/GM$ で与えられることになり, その結果, 円軌道を周回する物体の速度は,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \tag{2.14}$$

となる。この速度は, 既に紹介した円軌道速度であり, この速度では円軌道の周回によって生じる遠心力と重力が釣り合っている。

有効ポテンシャルは重力源を周回する軌道を考える上で便利である。有効ポテンシャルを, 運動する物体についてのエネルギー保存則とともに考えるのだ。エネルギー保存則によると, 有効ポテンシャルと動径方向の運動エネルギーの和は一定である。これは模式的には図 2.4 (a) のように示される。この図は, 横軸が重力源と物体の距離, 縦軸が物体のエ

ネルギーの総和を表している。エネルギーの総和とは, 重力の有効ポテンシャルと動径方向の運動エネルギーの和である。イメージとして, 物体は有効ポテンシャルの谷を上り下



(a) Energy level.　(b) Orbits regarding to the energy level.

図 2.4: 有効ポテンシャルと軌道の関係

りすることで距離の増減を繰り返す。これが楕円軌道における重力源と距離の変化だ。例えば, 単位質量あたりの角運動量を l としたとき, エネルギーの総和が $-0.84G^2M^2/l^2$ であれば, 物体は離心率 0.4 の楕円軌道を描く (図 2.4 (b))。ここで, $r_0 = -l^2/GM$ とすると, 近点距離は $0.714r_0$, 遠点距離は $1.67r_0$ となる。なお, r_0 は真近点角が $\pm\pi/2$ となる点 A と点 B における物体と重力源の距離である。その定義から, r_0 は保存量である角運動量 l にのみ依存する。角運動量 l を保ったままエネルギーの総和を $-0.36G^2M^2/l^2$ に変化させると, 軌道は離心率 0.8 の楕円を描く。さらに, エネルギーを増加させ, $\varepsilon > 0$ とすれば, 軌道は双曲線となり, いったん重力源から離れると二度と戻ってこなくなる。なお, 角運動量を一定にしてエネルギーを変化させるには, 動径方向に外力を与えることで実現できる。図 2.4 (b) は, 真近点角が $-\pi/2$ となる点 A で重力源 O に向かって短時間に大きなインパルスを力として与えた場合を想定して描いた。その力の作用として軌道の離心率が変化するのだ。

2.2　ラザフォード散乱

惑星の公転軌道が重力に起因する中心力による運動だ。重力に類似した力の意味でクーロン力に着目しよう。クーロン力が重力と異なる点として, 斥力もある。しかし, 斥力であっても中心力であるので, クーロン力で弾き返される運動も面積速度一定の法則にしたがう。クーロン斥力で支配される運動の代表としてラザフォード散乱を解析しよう。

2.2.1　荷電粒子の軌跡

ラザフォード散乱は, 原子の中心に小さな原子核が存在することを検証した現象である。この現象は, 1909 年にガイガー (H. Geiger) とマースデン (E. Marsden) が実験し, ラザフォード (E. Rutherford) が実験結果を解析したことによって明らかになった。ガイガーとマースデンは薄い金箔にアルファ粒子を撃ち込む実験を実施した。実験の結果, ほとんどの粒子は金箔を通過するが, 8000 回に 1 回の確率で 90° 以上の角度で粒子が散乱する現象が観測されたのだ。この実験結果は, 原子の中心に非常に小さい正電荷が存在することを示唆した。それが原子核だ。

質量 M で電荷 Q の粒子に, 質量 m で電荷 q の粒子を撃ち込んだときの散乱軌跡を考察しよう。簡単のため, $M \gg m$ とし, 粒子を撃ち込まれても質量 M の粒子は動かないものとする。質量 M が座標の原点に静止しているとし, 撃ち込まれた荷電粒子 q の位置を極座標 $[r, \theta]$ で記述することにする。そのとき, その位置は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\, l^2}, \tag{2.15}$$

にしたがう。突然このような微分方程式が現れ驚くかもしれないが, 難しいことはない。この方程式は, 惑星の運動を解析した際に導出した (2.8) に含まれる GM を $-qQ/4\pi\varepsilon_0$ で置き換えただけだ。なお, この数式に含まれる l は,

$$l = r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

すなわち, 面積速度の 2 倍に相当する量である。微分方程式 (2.15) の形から, 一般解が,

$$\frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\, ml^2} + A\cos\theta + B\sin\theta,$$

なる形で記述できることが明らかだ。この数式において, A と B は初期条件によって決定される定数だ。

図 2.5 に描くように, 荷電粒子 q は $\theta = \pi$ の無限遠から, x 軸に平行に速さ v_0 で発射されたとする。無限遠で発射される瞬間の y 座標は y_0 だったとする。その初期状態での y 座標は**衝突径数**と呼ばれる。その初期条件に対し, 荷電粒子 q の軌跡は θ の関数として,

$$\frac{1}{r} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\, ml^2}(1+\cos\theta) + \frac{\sin\theta}{y_0}, \tag{2.16}$$

のように書ける。つまり, 先ほどの未知数 A と B は解決されている。これらの未知数は, $\theta = \pi - \varDelta\theta$ としたとき, $y_0 \simeq r\,\varDelta\theta$ となる条件によって決定されたのだ。さらに, 面積速度に対応する定数 l を決めておこう。 定数 l の決定には, 無限遠で荷電粒子 q が $y = y_0$ を x

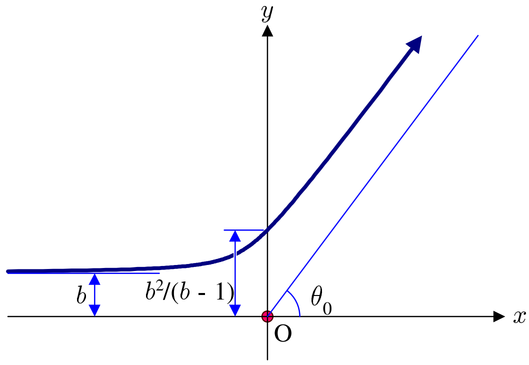


図 2.5: 原子核をかすめる正電荷の軌跡

軸と平行に速さ v_0 で運動していることを利用する。まず, 座標 $y_0 = r\sin\theta$ を時間について微分し,

$$0 = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta,$$

を得る。左辺は y_0 が定数だからゼロである。この等式から, $r\dot{\theta} = -\dot{r}\tan\theta$ となり, この両辺に r を乗じると,

$$l = r^2\dot{\theta} = -\dot{r}\cdot r\tan\theta \simeq y_0 v_0,$$

が得られる。ここで, $\theta \to \pi$ とした。既に導出された解 (2.16) に $l = y_0 v_0$ を代入すれば, 遠方から速さ v_0 で発射された荷電粒子の軌跡が特定できるわけだ。ところで,

$$r_0 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}, \tag{2.17}$$

なる r_0 を定義すれば, (2.16) は,

$$\frac{r_0}{r} = -\frac{r_0^2}{y_0^2}(1+\cos\theta) + \frac{r_0}{y_0},$$

なる形で書ける。さらに, $u \equiv r/r_0$, $a \equiv y_0/r_0$ のように無次元化した長さを用いると, (2.16) は,

$$\frac{1}{u} = -\frac{1+\cos\theta}{a^2} + \frac{\sin\theta}{a}, \tag{2.18}$$

のような形に書き換えられる。これがラザフォード散乱の荷電粒子の軌跡の本質的な数式表現だ。散乱される荷電粒子の軌跡を実際に計算すると, 図 2.6 に示す軌跡を描く。アルファ粒子の軌跡なら, 本来, 量子力学における不確定原理を考慮しなければならないが, ここでは古典力学 (ニュートン力学) による計算である。 正面方向, すなわち, x 軸上に撃ち込まれた荷電粒子は, ある距離まで近づくが, 逆方向に弾き返される。その最接近距離は,

$$r_{\min} = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} = 2r_0,$$

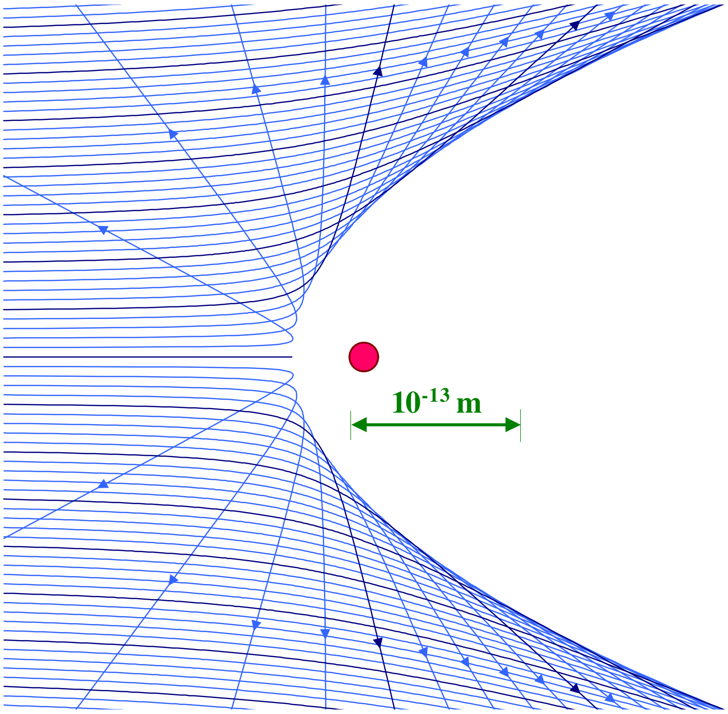


図 2.6: 金 Au の原子核に照射されたアルファ粒子の軌跡

である。つまり, 距離を正規化した際の正規化係数は最接近距離の 2 分の 1 にあたる距離だったわけだ。具体的に, 金の原子核の電荷 $Q = 1.26 \times 10^{-17}\,\mathrm{C}$, アルファ粒子の電荷 $q = 3.2 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, アルファ粒子の質量 $m = 6.68 \times 10^{-28}\,\mathrm{kg}$, 無限遠から打ち込まれる速度 $v_0 = 1.6 \times 10^{7}\,\mathrm{m/s}$ なる条件で計算すると, 最接近距離は $2r_0 = 4.25 \times 10^{-14}\,\mathrm{m}$ である。この距離は, 水素原子の半径の 1000 分の 1 に満たない非常に小さな距離だ。正面からずれた位置から照射すると, その位置に依存し, 特定の方向に散乱される。その散乱方向は次項で議論する。

2.2.2　微分散乱断面積

原子核に撃ち込まれた荷電粒子の散乱方向を特定し, 散乱現象の意味での原子核の大きさを考察しよう。散乱現象における原子核の大きさは散乱断面積という量で表現される。散乱断面積による評価によって, 原子核の大きさが原子の大きさと比較して非常に小さなスケールであることが明らかになる。

前項で導出した散乱される荷電粒子の軌跡 (2.18) から散乱方向が特定できる。散乱方向は, 荷電粒子を撃ち込む初期の位置 a によって一意的に決まる。荷電粒子が無限遠に飛ん

でいく方向をθとすれば, 数式 (2.18) において $1/u = 0$ とすればよいので,

$$a = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = \cot\frac{\theta}{2}, \tag{2.19}$$

を満たすことになる。右辺が $\cot(\theta/2)$ となることは, 半角の公式を利用して導かれた。この公式によると, 図 2.7 のように, x 軸から距離 a をなす円環から発射された荷電粒子は, 天頂角 θ の方向に散乱される。この天頂角は, x 軸となす角度である。入射される荷電粒子の集合も, 散乱される荷電粒子も円環をなすが意味が異なるので注意が必要だ。入射される荷電粒子が構成する円環は原子核に近づくまではほとんど広がらないが, 原子核の近傍を通過した後, 原子核を中心に放射状に広がるのだ。

図 2.7 のように, 入射する荷電粒子を半径 a から微小幅 $\mathrm{d}a$ の円環を構成するように照射した場合を考えよう。このとき, 散乱される天頂角 θ も幅をもつはずだ。その幅を評価するには, (2.19) の微分:

$$\mathrm{d}a = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\sin^2(\theta/2)},$$

に注目すればよい。散乱解析の慣習にしたがい, **微分散乱断面積**を導入しよう。微分散乱断面積は, 入射側が微小面積 $\mathrm{d}\tilde{\sigma}$ に撃ち込まれた粒子が, 散乱されて立体角 $\mathrm{d}\Omega$ に広がるモデルによって, $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ で定義される量だ。 微小面積 $\mathrm{d}\tilde{\sigma}$ が波線記号 (∼) を伴っているの

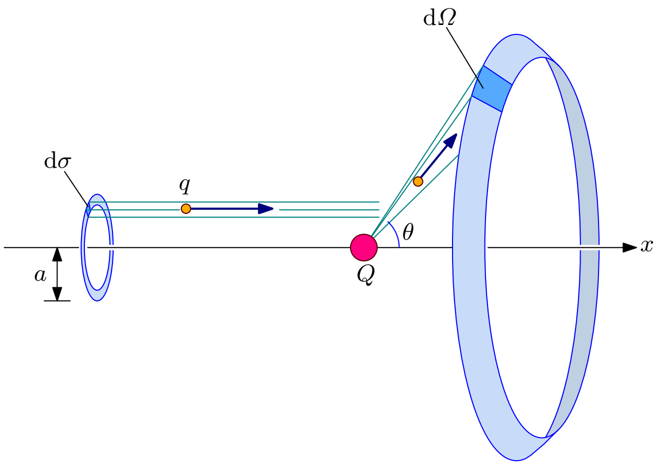


図 2.7: 微分散乱断面積のモデル

は, 正規化された無次元量だからだ。ひととおりの計算を終えた後で面積の次元に戻すことにする。入射側について, x 軸から a だけ離れ, 幅 $\mathrm{d}a$ の円環の面積は, $\mathrm{d}\tilde{\sigma} = 2\pi a\,\mathrm{d}a$ だ。散乱側について, 天頂角 θ で角度幅 $\mathrm{d}\theta$ の円環がつくる立体角は, $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ となる。これらの数式から,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{a}{2\sin^2(\theta/2)\sin\theta},$$

が得られる。ここで, 入射位置 a と散乱角 θ の関係 (2.19) に注意すると, 微分散乱断面積は,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\sin^4(\theta/2)}, \tag{2.20}$$

となる。ひととおり計算が終わったので, 微小断面積 $\mathrm{d}\tilde{\sigma}$ を面積の次元をもつ量 $\mathrm{d}\sigma$ に戻そう。本稿での計算過程は, 正面方向から打ち込まれた荷電粒子が最接近する距離の半分にあたる r_0 で正規化されている。正規化の基準 r_0 は, (2.17) のように定義されている。微小断面積を面積の次元に戻すには, $\mathrm{d}\sigma = r_0^2\,\mathrm{d}\tilde{\sigma}$ とするべきだ。したがって,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \tag{2.21}$$

が得られる。この数式は, **ラザフォードの散乱公式**と呼ばれる。

ラザフォードの散乱公式を用いて, 撃ち込まれた荷電粒子が 90° 以上の散乱を受ける断面積を計算しよう。すなわち, 微分散乱断面積 (2.21) を, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ にわたって積分すればよい。実際に計算してみると,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \left(\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2(\theta/2)} \\
&= 2\pi \left(\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2\cos(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sin^3(\theta/2)} \\
&= 8\pi \left(\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}(\sin\eta)}{\sin^3\eta} = -4\pi \left(\frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 \left[\frac{1}{\sin^2\eta}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \pi \left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2,
\end{aligned}$$

が得られる。前項で挙げたラザフォード実験の条件を代入すると, この断面積は $\sigma = 1.42 \times 10^{-27}\,\mathrm{m}^2$ という小さな面積になる。断面積 σ は, 金の原子間隔 $2.57 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ が張る面積 $6.60 \times 10^{-20}\,\mathrm{m}^2$ に比べ[1] 非常に小さい。実験に使用した金箔の厚さが $1\,\mu\mathrm{m}$ であれば, 貫通するためには, 金の原子 3890 層を通過しなければならない。そのように考えると, 撃ち込まれたアルファ線が 90° 以上の角度で散乱される確率は,

$$3890 \times \frac{1.42 \times 10^{-27}\,\mathrm{m}^2}{6.60 \times 10^{-20}\,\mathrm{m}^2} \simeq \frac{1}{1.19 \times 10^4},$$

のように計算される。つまり, 約 12000 回に 1 回は 90° 以上の角度で散乱されるわけだ。これが, ガイガーとマースデンの実験で, ごく少数のアルファ線のみが大きく散乱される理由だ。その実験によって, 原子内部に電荷が広く分布している (トムソンモデル) ではなく, 中心に正電荷をもつ原子核が存在することが明らかになったのだ。

[1] この原子間隔は, 金の質量数 179, 金の密度 $19.32\,\mathrm{g/cm^3}$ から計算すれば得られる。

2.3　加速度運動と慣性力

加速する電車や, 自転する地球のように, 加速度運動するする足場に乗っている観測者は, 足場の加速度運動に起因して慣性力と呼ばれる力を感じる。例えば, ブレーキをかける電車では, 身体が前方に押されるような力を感じる。それが慣性力である。慣性力は実際に生じている力でなく, 足場との相対速度が変化することに伴って知覚する見かけの力である。本節では, 加速度運動に伴う見かけの力を取り扱う。

2.3.1　ガリレイ変換

基準となる静止系を K 系としよう。K 系に対し, x 軸方向に一定の速度 v で運動する K′ 系を考えよう。速度の方向に沿った K′ 系の位置は x' なる座標で表されるとする。時刻 $t = 0$ において, K 系と K′ 系の原点が重なっていると仮定する。つまり, $t = 0$ のとき $x = 0$ と $x' = 0$ が一致すると仮定するのだ。そのとき, 二つの座標系は,

$$x' = x - vt, \tag{2.22}$$

のように関係づけられる。例えば, K 系から見て $x = 100\,\mathrm{m}$ に存在する物体 A を観測しているとする。速度 $v = 10\,\mathrm{m/s}$ で走る K′ 系から物体 A を観測した場合, $t = 0$ では $x' = 100\,\mathrm{m}$ だが, $t = 2\,\mathrm{s}$ の時点では $x' = 80\,\mathrm{m}$ の位置に移動しているように見える。このように, 二つの等速度運動[2] する座標系の間での座標変換は**ガリレイ変換**と呼ばれる。

ガリレイ変換の数式は, 時間 t について微分すると, 二つの座標系の間での速度の変換式を与える。実際にガリレイ変換を微分すると,

$$\dot{x}' = \dot{x} - v, \tag{2.23}$$

が得られる。この数式において, $\dot{x}$ が K 系から見た物体の速度, $\dot{x}'$ が K′ 系から見た物体の速度と考えればよい。例えば, K 系から見て速度 $30\,\mathrm{m/s}$ で移動する物体 A を $10\,\mathrm{m/s}$ で移動する K′ 系から見た場合, その物体は $20\,\mathrm{m/s}$ で移動するように見える。ガリレイ変換の時間微分は, 我々の日常と合致する速度の変換則に相当するのだ。

ガリレイ変換をさらに時間 t について微分すると, 加速度の対応関係を得ることができる。実際に得られる結果は,

$$\ddot{x}' = \ddot{x}, \tag{2.24}$$

なのだ。加速度は K 系から見ても K′ から見ても同一なのだ。この加速度変換の両辺に物体の質量 m を乗じると $m\ddot{x}' = m\ddot{x}$ が得られる。物体に作用する力が F であるとき, ニュー

[2]静止状態は, 速度ゼロで等速度運動していると考えればよい。

トンの運動方程式は $F = m\ddot{x}$ であるので, 同時に $F = m\ddot{x}'$ が成立する。つまり, K 系で成立するニュートンの運動方程式は, その形を変えることなく, K$'$ 系でも成立する。これがガリレイの相対性原理である。

2.3.2　等加速度運動する座標系

座標系が加速度運動している場合, 前項で紹介したガリレイの相対性原理が成立しない。具体的には, ニュートンの運動方程式の形が, 静止系との間で差異が現れるのだ。その際は, 慣性力なる見かけの力に起因する。

K$'$ 系が等加速度運動する場合の座標変換を考えよう。時刻 $t = 0$ において, 互いの座標系の原点が一致し, そのとき, K$'$ 系が K 系に対して x 軸方向に速さ v_0 で運動しているとする。K$'$ 系は, さらに, x 軸方向に加速度 a で運動しているとする。このとき, K$'$ 系の座標 x' は,

$$x = x' + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

のように記述できる。この数式を t について微分すると,

$$\dot{x} = \dot{x}' + v_0 + at,$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}' + a,$$

が得られる。得られた 2 階微分について, 両辺に m を乗じ, $F = m\ddot{x}$, $F' = m\ddot{x}'$ とおくと,

$$F' = F - ma, \tag{2.25}$$

が得られる。この数式において, F が K 系における力, F' が K$'$ 系における力である。つまり, 加速度 a で加速する系での観測では, 必ず, $-ma$ なる力が作用しているように見える。その力は**慣性力**と呼ばれる。例えば, 走行中のバスがブレーキをかけたときに身体が前方に力を受けたように感じる。それが慣性力だ。実際には, 乗客の身体が力を受けているのでなく, バスの車体がブレーキによって減速するための力を受けている。乗客は, バスという座標系と自分の相対速度が変化する事態を見て, あたかも自分が力を受けているかのように錯覚する。それが慣性力だ。つまり, 慣性力は実際に作用している力でなく, 見かけの力である。

2.4　回転する座標系

回転運動する座標系における物理現象を記述しよう。回転運動は向心力によって引き起こされるため, 前節で取り扱った慣性力の観点では, 向心力と逆方向に見かけの力が発生するはずだ。その見かけの力は, 遠心力と呼ばれる力である。

2.4.1　回転運動する系での運動方程式

基準とする座標系 K の座標をカルテシアン座標 $[x, y, z]$ で記述しよう。このとき, この座標系の z 軸を回転軸にして角速度 ω で回転している。その回転する回転する座標系 K$'$ をカルテシアン座標で $[x', y', z']$ と記述することにする。この回転座標系における運動方程式を導出しよう。

前提条件として, K 系がニュートンの運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ にしたがう。ここで, 力 $\boldsymbol{F}$ はカルテシアン座標系で $[F_x, F_y, F_y]$ のように成分表示されるとする。例えば, x 成分が $m\ddot{x} = F_x$ となるわけだ。座標系 K$'$ は K 系に対して角速度 ω で回転しているならば, 立場を逆にして, K 系は K$'$ 系に対して角速度 $-\omega$ で回転していることになる。この関係を数式で書くと,

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t, \quad y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t, \quad z' = z,$$

となる。これらの数式を t について微分すると,

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= \dot{x}\cos\omega t + \dot{y}\sin\omega t + \omega\,(-x\sin\omega t + y\cos\omega t),\\ &= \dot{x}\cos\omega t + \dot{y}\sin\omega t + \omega\eta, \end{aligned} \tag{2.26a}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}' &= -\dot{x}\sin\omega t + \dot{y}\cos\omega t - \omega\,(x\cos\omega t + y\sin\omega t),\\ &= -\dot{x}\sin\omega t + \dot{y}\cos\omega t - \omega\xi, \end{aligned} \tag{2.26b}$$

$$\dot{z}' = \dot{z}, \tag{2.26c}$$

が得られる。これらの数式を再び t について微分すると,

$$\ddot{x}' = \ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\sin\omega t + \omega\,(-\dot{x}\sin\omega t + \dot{y}\cos\omega t) + \omega\dot{y}', \tag{2.27a}$$

$$\ddot{y}' = -\ddot{x}\sin\omega t + \ddot{y}\cos\omega t - \omega\,(\dot{x}\cos\omega t + \dot{y}\sin\omega t) - \omega\dot{x}', \tag{2.27b}$$

が得られる。得られた結果の第 1 式と第 2 式は, 右辺に K 系と K$'$ 系の座標成分が混在しているが, 1 階の導関数を利用すれば K 系の座標成分を消去でき,

$$m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2\xi, \tag{2.28a}$$

$$m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2\eta, \tag{2.28b}$$

$$m\ddot{z}' = F_{z'}, \tag{2.28c}$$

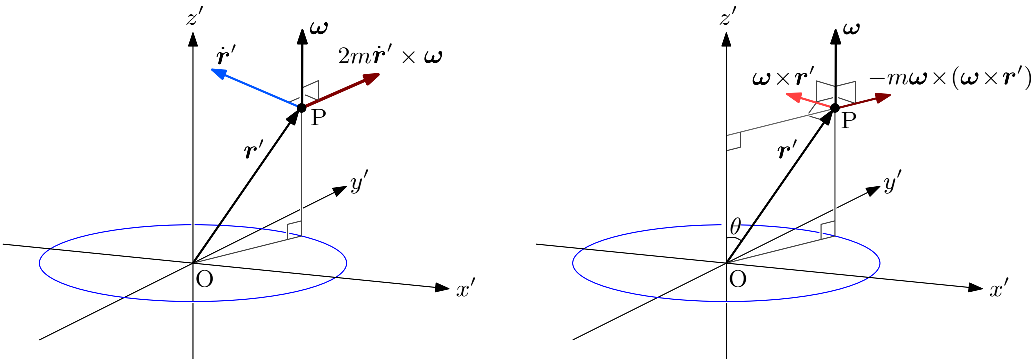
のように K$'$ 系の座標成分だけで記述できる。ここで, ベクトル成分 $[F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}]$ は, ベクトル $\boldsymbol{F}$ を K$'$ 系の座標で表現した成分である。つまり, 物体に作用する力は, K 系から見ると $\boldsymbol{F}$ であるにも関わらず, K$'$ 系から見ると $\boldsymbol{F}$ とは異なるということだ。

数式によって判明したように, 回転する座標系から見ると, 物体に作用する力が, 単に力のベクトルを座標回転に合わせて成分を読み替えただけではない。このように, 回転する座標系から見ると新たな力が発生しているように見えるのは, 観測者自身が加速度運動していることに起因する。上で導出した (2.28a) と (2.28b) の右辺の第 3 項は遠心力である。第 2 項はコリオリの力と呼ばれる力である。

回転する座標系から物体の運動を観測すると, 前段落で導出したように, ポテンシャルに起因する力だけでなく, コリオリの力や遠心力といった見かけの力が現れる。上で導出した結果をベクトル表記すると,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = -\nabla U + 2m\dot{\boldsymbol{r}}' \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'), \tag{2.29}$$

が得られる。この数式で新たに記述したベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は, 角速度 ω を大きさとし, 回転軸 (z 軸) を向くベクトルだ。ベクトルの方向は, 回転方向に関して右ねじの方向にとるものとする。今後, 回転速度をベクトルで扱う場合, このように回転軸方向に角速度を大きさとするベクトルで表現する。また, (2.29) に含まれる “×” なる演算子は, ベクトル積を与える。ベクトル積は本項の最後で説明することにする。ベクトル表記 (2.29) に基づいて, 回転する座標系から見た見かけの力, すなわち, コリオリの力と遠心力は図 2.8 に示すようなベクトルとなる。この図において, 座標は ζ 軸を回転軸とし, 角速度 ω で回転している。 回転する座標系 $[x', y', z']$ から見たとき, 物体 P が $\dot{\boldsymbol{r}}'$ で運動しているとする。なお, 角速度に対応するベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は, 便宜上, z' 軸の方向を向き, 角速度 ω を大きさとするように設定する。このベクトルの向きは, 回転方向に対する右ねじの方向である。このベクトル設定のもとで, コリオリの力は図 2.8 (a) に示す方向に作用するわけだ。遠心力は物体 P の速度 $\dot{x}'$ には依存せず, 回転軸 (この例では z' 軸) からの距離に依存する。図 2.8 (a) に示すように, 物体の P の天頂角を θ とすると, $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$ は, 大きさが $x'\omega \sin\theta$ であり, 回転の接線方向に向かうベクトルである。大きさに含まれる $x' \sin\theta$ は, 物体 P と回転軸 (z' 軸) との距離と考えてもよい。遠心力 $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ は, 大きさが $mr'\omega^2 \sin\theta$ であり, 回転軸に対して外側に向かうベクトルである。



(a) Coriolis force.　(b) Centrifugal force.

図 2.8: 回転する座標系から見た見かけの力

ベクトル積　二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がカルテシアン座標系で $\boldsymbol{A} = [A_x, A_y, A_z]$, $\boldsymbol{B} = [B_x, B_y, B_z]$ のような成分をもつとする。このとき, これら二つのベクトルのベクトル積は,

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left[\ A_yB_z - A_zB_y,\quad A_zB_x - A_xB_z,\quad A_xB_y - A_yB_x\ \right],$$

のように計算される。成分表示ではわかりにくいかもしれないが, ベクトル積は図 2.9 に示すベクトルだ。簡単に証明できるように, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のどちらにも直交するベクトルである。 ベクトルの方向は, 右手系において, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ が, それぞれ, 右手系

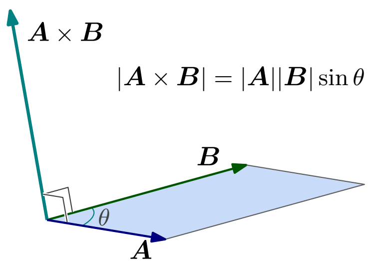


図 2.9: ベクトル積の説明図

の第 1 ベクトル, 第 2 ベクトル, 第 3 ベクトルなるように定められる。つまり, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を交換すると,

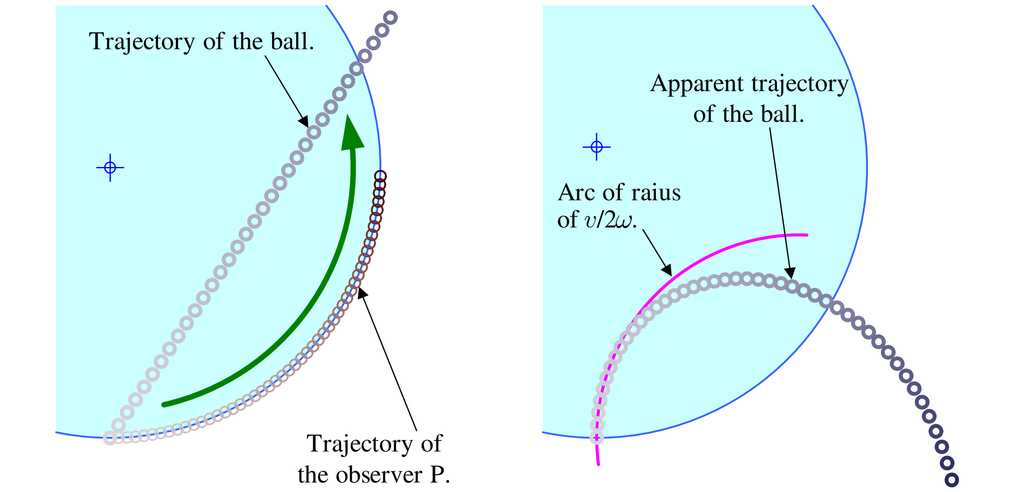
$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B},$$

のように向きが逆になる。しかも, ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$ は, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が張る平行四辺形の面積に等しい。例えば, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が角度 θ をなすのであれば, $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta$ である。容易にわかるように, 互いに平行なベクトルどうしのベクトル積はゼロ, すなわち, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$ である。

2.4.2　遠心力とコリオリの力

前項で導出した数式 (2.29) の右辺の第 2 項と第 3 項は回転する座標系から観測した見かけの力である。観測対象の物体が等速度運動であっても, 回転する座標系から見ると湾曲した軌跡を描くため, 力の作用を受けるように見えるのだ。

コリオリの力は, 観測者に対して相対速度をもつ場合にのみ観測される。後に説明するが, 台風の渦が北半球で反時計回りに流れるのはコリオリの力の影響である。コリオリの力の発生原理は, 回転テーブルに立った観測者が容易な説明モデルである (図 2.10)。テーブルは角速度 ω で回転し, 観測者 P は回転軸から R だけ離れた場所に立ち, テーブルとともに回転している。観測者 P が回転軸に向かって, ボールを速度 v で投げたとする。観測者 P が見ると, 時間経過とともに投げられたボールは回転軸の方向から逸れるように湾曲し, 最終的には, 大きく右に回って観測者の後方に抜けていくのだ (図 2.10 (b))。



(a) Observed by a stationary observer. (a) Observed by the observer P on the rotating disk

図 2.10: 回転円板によるコリオリの力

上で書いたボールの軌跡は, ボールに力が作用しているのでなく, 観測者 P が回転していることによる見かけの運動軌跡である。静止している観測者から見ると, ボールは等速度運動をする。例えば, 回転テーブル上の観測者 P の位置が,

$$x_0 = R\sin\omega t, \qquad y_0 = -R\cos\omega t,$$

であるとする。時刻 $t = 0$ に観測者 P がボールを回転軸に向かって投げたとする。静止する観測者から見たボールの位置を $[x, y]$ で記述したとすると,

$$x = R\omega t, \qquad y = -R + vt,$$

となるはずだ。上記の観測者 P の位置とボールの位置は図 2.10 (a) のように図示できる。これが静止する観測者から見た状況である。観測者 P はボールを回転軸に向かって投げたつもりであるが, 静止した観測者から見ると, ボールは回転軸とは異なる方向に等速直線運動するのだ。

これを回転テーブルに立つ観測者 P から見た場合, 回転によって座標軸もともに回転することを考慮し,

$$\begin{aligned} x' &= (x - x_0)\cos\omega t + (y - y_0)\sin\omega t, \\ y' &= -(x - x_0)\sin\omega t + (y - y_0)\cos\omega t, \end{aligned}$$

となる。この様子は図 2.10 (b) のように描かれる。なお, 図 2.10 (b) に重ねて描いた曲線は, 半径 $\rho = v/2\omega$ の円弧である。観測者が投げた直後, ボールはこの円弧に沿って動いている。

図2.10に示した円弧の半径は簡単な計算で予想された曲率半径である。数式(2.29)によると, コリオリの力によって, $2\dot{\boldsymbol{r}}' \times \boldsymbol{\omega}$ なる加速度が発生する。この加速度は速度ベクトルに直交している。速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}'$ と角運動量ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が角度 α をなすと仮定すれば, コリオリの力によって, 速度ベクトルと垂直方向に大きさ $2v\omega \sin\alpha$ の加速度を生じる。ここで, ボールの速さを v とした。ボールは, 微小時間 $\varDelta t$ の間に, 垂直方向に $2v\omega\cos\alpha\,\varDelta t$ の速度成分を得ることになる。つまり, この微小時間の間に進行方向が $\varDelta\varphi = 2\omega\cos\alpha\,\varDelta t$ だけ変化することを意味する。ボールの軌跡の曲率半径が ρ であるとすると, 曲率の中心から角度 $\varDelta\varphi$ で見込んだ長さが $\rho\,\varDelta\varphi = v\,\varDelta t$ となるはずだ。その条件で曲率半径 ρ を決定すると,

$$\rho = \frac{v}{2\omega\sin\alpha}, \tag{2.30}$$

が得られるわけだ。図2.10の例において, この曲率半径の予想は的中していると言えるだろう。

地球上でも回転テーブルと同様にコリオリの力が作用する。地球の場合, 北極点と南極点を結ぶ軸が回転軸である。自転による地球表面の回転速度は, 緯度によって異なる。例えば, 赤道上の場所は464 m/sで回転しているが, 北緯30°では回転速度は402 m/sである。慣性の法則がゆえに, 低緯度から高緯度に移動すると, 一定経度にとどまらず, 東向きに運動する傾向を示す。それが見かけの力(コリオリの力)として観測されるのだ。

地球上におけるコリオリの力の影響の一例は, 台風の渦の回転方向である。台風の渦は, 中心に向かって反時計回りに流れる。大気は台風の中心に集まっていくはずだが, コリオリの力のため, 右に曲げられる。曲げられた位置で再び, 大気は台風の中心に流れようとするのだが, 同様に右に曲げれる。繰り返し右に曲げられながら台風の中心を目指して進む大気は, 台風を反時計回りに流れるのだ。

2.4.3　フーコーの振り子

コリオリの力による効果として, フーコーの振り子が有名である。フーコーの振り子とは, 東西南北の任意方向に振動できるように設置した振り子であり, 初期状態で南北に振動していたとしても, 時間の経過とともに振動方向が変化し, そのうち, 東西に振動する現象を示す振り子である。さらに, 時間が経過すると, 振動方向の変化がさらに持続する。そのような振り子の振動方向の変化はコリオリの力に起因する。地球上の緯度を天頂角 θ で表そう。その緯度の任意の地上において, 東を x 軸, 北を y 軸, 鉛直上方を z 軸とする。このとき, ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は天頂から θ の角度をなす北を向いている。すなわち, 地上のカルテシアン座標系 $[x, y, z]$ では, $\boldsymbol{\omega}$ は,

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\ 0,\ \ \omega\sin\theta,\ \ \omega\cos\theta\ \right],$$

のように成分表示できる。一方, 振り子の運動が真東から角度 ϕ だけ反時計回りの方位を向いているとすると,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \left[\ v\cos\phi,\quad v\sin\phi,\quad 0\ \right],$$

のように表されるだろう。ここで, v は振り子の速さである。この条件において, 振り子の運動は,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}x + 2\omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}y - 2\omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cos\theta,$$

なる微分方程式にしたがう。双方の数式において, 右辺の第 1 項は, 重力による振り子の復元力である。 なお, g は重力加速度, l は振り子のひもの長さである。なお, この数式は

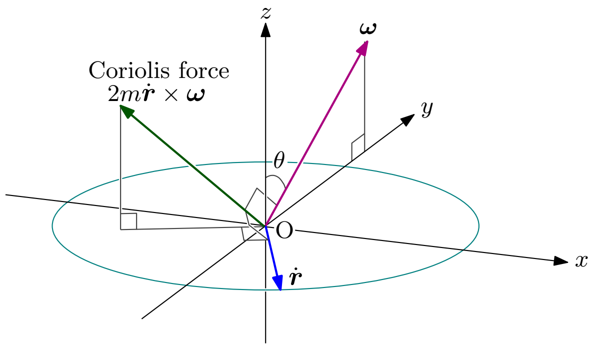


図 2.11: フーコーの振り子の原理

振り子の振れ角が十分小さい場合の近似である。また, 自転による遠心力は無視した[3]。第 1 式に y を乗じ, 第 2 式に x を乗じて, 互いの差をとれば,

$$y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 2\omega\cos\theta\cdot\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

が得られる。簡単な計算によって, この微分方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right) = \omega\cos\theta\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2),$$

なる形に書き換えられる。この数式の両辺を積分すると,

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \omega\,(x^2+y^2), \tag{2.31}$$

[3]現実的な振り子の運動速度の場合, コリオリの力よりも遠心力の方が大きい。コリオリの力とは異なり, 遠心力は観測場所 (緯度) にのみ依存し, 運動速度に依存しない。その性質のため, 遠心力は重力加速度がわずかに変化させる程度の効果しか示さず, 振り子は運動軌跡へ与える影響が極めて小さい。それが遠心力を無視した理由だ。

が得らえる。ここで, 振り子は, 必ず, 原点を通過するものとし, $x = y = 0$ を条件にして積分定数を決定した。新たに得られた微分方程式を解くため,

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi,$$

としよう。ここで, r は原点から振り子の距離, ϕ は振り子の方位である。これらの数式を微分方程式 (2.31) に代入すると,

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\omega\cos\theta, \tag{2.32}$$

が得らえる。この結果は, r に時間依存性を含ませていないかのように見えるかもしれないが, そうではない。仮定として, r と ϕ の双方に時間依存性を含ませて計算した。その計算過程で $\dot{r}$ が消えてくれたのだ。結果として, 振り子の方位 ϕ は,

$$\phi = \phi_0 - \omega t\cos\theta, \tag{2.33}$$

であることが導かれる。ここで, ϕ_0 は $t = 0$ における方位である。この結果によると, 北半球 $(\cos\theta > 0)$ では, 振り子は時間経過とともに振動方向を時計回りに回転させる。しかも, 振動方向は $T = 2\pi/\omega\cos\theta$ で 1 回転するのだ。世界の都市について, フーコーの振り子の振動方向の回転周期を計算すると, 表 2.1 のような値を得た。計算するにあたり, 高緯度になるほど天頂角 θ が小さくなることに注意が必要だ。この表では, 北半球では周期が負になっているのは, フーコーの振り子が時間経過とともに時計回りに回転することを意味する。南半球では反時計回りに回転するので周期は正となっている。なお, この計算

表 2.1: 世界の都市におけるフーコーの振り子の周期 (hh:mm:ss)

都市	緯度	周期	都市	緯度	周期
ヘルシンキ	60.17°N	−27:30:24	ブラジリア	15.83°S	87:44:29
ロンドン	51.51°N	−30:34:43	ケープタウン	33.92°S	42:53:26
ニューヨーク	40.71°N	−36:41:47	メルボルン	37.65°S	39:10:59
東京	35.68°N	−41:02:09	クライストチャーチ	43.53°S	34:45:05
バンガロール	12.58°N	−109:53:26	プンタ・アレナス	53.16°S	29:54:23
シンガポール	1.35°N	−1015:54:12	昭和基地	69.01°S	25:58:08

において, 地球の自転周期が 23 時間 54 分 4 秒という値を用いた。赤道に近いほど周期が長くなるとはいうものの, シンガポールでの周期は驚く長さだ。振動方向が一巡するのに 42 日を要する。

フーコーの振り子の振動方向の変化は, 北極点や南極点では容易に想像ができる。振り子自体は単振り子であり, 常に同じ方向に振動している。観測者は地球の自転に伴い, 24

時間周期で回転する床に座って振り子を観測している。その観測者の立場では, 振り子は24時間周期で振動方向が回転するように見えるはずだ。北極点では, 振り子は時計回りに, 南極点では反時計回りに回転する。

2.5　遠心力

前節で, 回転する座標系では見かけの力として遠心力が発生することを確認した。回転する座標系では見かけの力として, コリオリの力も発生するが, コリオリの力は運動している物体にしか作用しない。それに対し, 遠心力は誰にでも作用する。身の回りに遠心力の発生が頻繁に目撃できるので, 遠心力の例を取り扱ってみよう。

円錐振り子　円振り子は回転運動する振り子だ。図 2.12 に示すように, おもりを支持するひもが鉛直下方から傾いている。ひもの傾きによって, おもりに作用する重力とひもの張力との合力で, 内側に作用する力が発生する。内側に向く力が向心力として作用し, おもりが水平面で円運動するのだ。

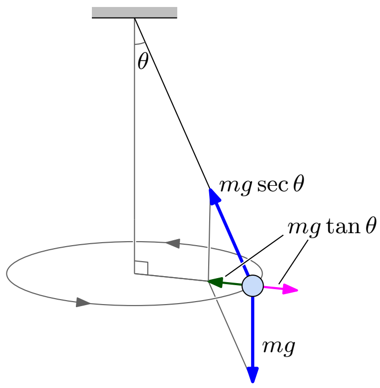


図 2.12: 円錐振り子

鉛直方向から測ったひもの傾き角を θ としよう。おもりには鉛直下方に重力 mg が作用しているので, ひもの張力は $mg\sec\theta$ となり, 重力と張力との合力 $mg\tan\theta$ が向心力としてはたらき, おもりは円運動する。一方, おもりから見ると, 円運動によって遠心力が発生するので, 向心力と釣り合い, 一定の回転半径を保持している。ひもの長さが l のとき, 円錐振り子の回転半径は $l\sin\theta$ なので, 向心力 (= 遠心力) は,

$$ml\omega^2\sin\theta = mg\tan\theta,$$

を満たさなければならない。この方程式から, 円錐振り子の角速度が,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}},$$

であることが導かれる。したがって, 傾斜角 θ の円錐振り子の周期は,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}, \tag{2.34}$$

である。なお, 右辺の記述に関して, $h \equiv l\cos\theta$ を用いた。円錐振り子のおもりの立場に立つと, 自分が回転運動をしているため, 遠心力という見かけの力が発生する。遠心力は, 重力の分力である向心力と釣り合っている。その釣り合いがゆえに, おもりは z 軸との距離を一定に保っているのだ。

円錐振り子は, 速く回転させる θ が大きくなる。それに伴い, 張力 $mg/\cos\theta$ が大きくなる。この張力が, ひもが支えられる限界を超えると, ひもが切れてしまうのだ。

ローラコースタ　遊園地の人気遊具の一つであるローラコースタは逆さに走行しても, 乗員が落下しないように設計されている。一般的に, ローラコースタの設計には遠心力が利用されている, と表現されるかもしれない。しかし, 遠心力は回転運動する観測者から見たときの見かけの力であることに注意が必要だ。

ローラコースタの外部で静止している観測者が見たときの力は, 図 2.13 に示す関係になっている。ローラコースタはループの最高点の手前 θ の角度を速度 v で上昇中とする。ループの回転半径を R, ローラコースタ質量を m とし, ローラコースタとループ (レール)

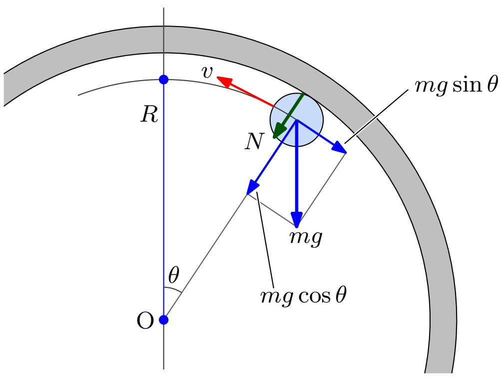


図 2.13: ローラコースタに作用する力

の間に摩擦がないものとする。ローラコースタには鉛直下方に重力 mg が作用している。その重力は, ループの中心を向く $mg\cos\theta$ と, ループの接線方向に向かう $mg\sin\theta$ に分解できる。そのうち, ループ中心に向かう力がローラコースタを円運動させるための向心力として使われる。速さ v で半径 R の円を描く物体に作用する向心力は mv^2/R なので, このローラコースタは,

$$mg\cos\theta \leq \frac{mv^2}{R},$$

を満たさなければならない。この条件を満足できなければ, 向心力 $mg\cos\theta$ はさらに半径が小さい円を描くことになり, ループから外れて自由落下することになる。上記の不等式を満たす場合, 不足した力はレールから垂直抗力 N が補われ,

$$mg\cos\theta + N = \frac{mv^2}{R}, \tag{2.35}$$

が満たされているのだ。ローラコースタに動力が装備されなく, 単に惰性で運動しているのであれば, エネルギー保存則から,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\left(1+\cos\theta\right) = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

が成立する。ここで, v_0 はループの最下点から侵入するときの突入速度とする。突入速度 v_0 を用いて (2.35) を書き換えると,

$$mg\cos\theta + N = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg\left(1+\cos\theta\right),$$

が得られる。この数式を変形すると, レールから与えられる垂直抗力:

$$N = m\left[\frac{v_0^2}{R} - g\left(2+3\cos\theta\right)\right],$$

が得られる。垂直抗力 N が負になると, もはや, ローラコースタはレールに接することなく, 自由落下しているということだ。容易に予想できるように, 最も垂直抗力が弱くなるのは, ローラコースタが最高点 ($\cos\theta = 1$) にいるときだ。その条件で落下しないように突入速度を計算すると,

$$v_0 \geq \sqrt{5gR},$$

となる。例えば, ループの半径が $R = 15\,\mathrm{m}$ であれば, 突入速度は $v_0 > 27.1\,\mathrm{m}$ でなければならない。あくまでも, これは摩擦がない条件でのぎりぎりの速度であるので, 実際にはもっと大きな突入速度が必要だろう。

2.6　束縛運動

束縛運動とは, 物体の運動に制約を設けて自由度を減少させた運動である。本書において, 既に束縛運動を扱ってきた。例えば, 斜面を滑る物体の運動が束縛運動の例だ。斜面を滑る運動を取り扱う際, 物体の座標は斜面に沿った 1 次元の座標しか考えなかった。本来, 3 次元空間の現象ならば三つの座標成分が必要であるが, 運動に制約事項を設けることによって解析する次元が減少しているのだ。

2.6.1　束縛力と束縛条件

運動を束縛するには, 自由度を与えないように物体に力を与える必要がある。ただし, 単に力を与えると物体が加速してしまうので, 安定させるためには作用反作用の原理で釣り合った状態を維持するのだ。そのような力は束縛力と呼ばれる。束縛力は物体の運動の自由度を奪い, 少ない座標成分での解析を可能とする。運動の自由度が奪われた状態は, 束縛条件として数学的に記述できる。本項では, いくつかの運動において, 束縛力と束縛条件を確認する。

斜面を滑る物体　この運動が最も簡単な束縛運動の例だろう。図 2.14 に示すように, xy 平面に斜面があり, 物体はその斜面に沿って運動するという設定だ。本来の空間は 3 次元空間であり, 残った座標軸 z は紙面の奥行方向に向いている。ここで考える束縛条件は, 斜面に沿って物体が運動するということだ。物体の質量を m とすると, 物体には y 軸の負方向 (鉛直下方) に重力 mg が作用している。斜面の傾斜角が α であるなら, その重力は, 斜面を押す力 $mg\cos\alpha$ と, 斜面に沿った力 $mg\sin\alpha$ に分解できる。 特に, 斜面を垂直に押す力

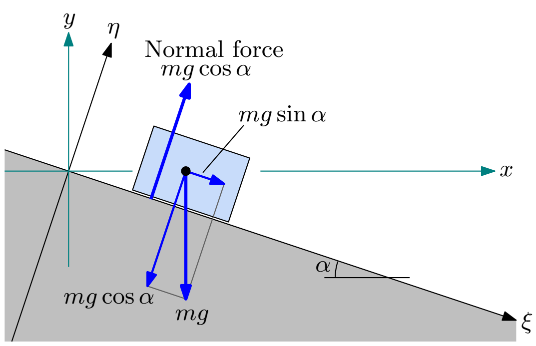


図 2.14: 斜面を滑る物体に作用する力

に対して, 作用反作用の法則によって, 物体は斜面から等しい力 (垂直抗力) $mg\cos\alpha$ で押し返される。垂直抗力, 斜面垂直方向における力は釣り合い, 物体は斜面にもぐることがなければ, 飛び上がることもない。この場合, 斜面からの垂直抗力が束縛力として機能している。重力を分解したもう一方の成分, すなわち, 斜面下方に向かう $mg\sin\theta$ が全体の合力として物体に作用する力である。その結果, 物体の運動は斜面に沿った運動となる。

上に書いた束縛条件に基づいて運動方程式を記述してみよう。そもそも, 斜面に対して垂直に作用する力を議論する代わりに, 運動は斜面上に限定されるという拘束条件を課すのだ。つまり, 拘束条件は

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0, \tag{2.36}$$

である。このとき, 物体に作用する力は斜面下方に向かう力のみを考えればよく, ニュー

トンの運動方程式は,

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha\cos\alpha, \qquad m\ddot{y} = -mg\sin^2\alpha, \tag{2.37}$$

となる。ここで, 斜面下方に向かう座標 ξ と, その垂直方向の座標 η を用いることにすると, その新たな座標は,

$$x = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha, \qquad y = -\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha,$$

によって $[x, y]$ から座標変換される。すなわち, $[x, y]$ を角度 α だけ回転すれば $[\xi, \eta]$ が得られる。この座標回転を束縛条件 (2.36) に適用すると,

$$\eta = 0, \tag{2.38}$$

なる単純な数式が得られる。この数式は, 物体が必ず斜面の上に存在するという拘束条件を与える。一方, 運動方程式 (2.37) を座標回転すると,

$$\ddot{\xi}\cos\alpha + \ddot{\eta}\sin\alpha = mg\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$-\ddot{\xi}\sin\alpha + \ddot{\eta}\cos\alpha = -mg\sin^2\alpha,$$

が得られる。これらの数式に, 拘束条件 $\eta = 0$ を代入すると, これら二つの方程式はともに,

$$m\ddot{\xi} = mg\sin\alpha, \tag{2.39}$$

なる一つの方程式に変形される。したがって, 拘束条件を利用して, 運動方程式の未知数を減らすことができた。通常, 我々はこのような回りくどいことをせずに, 無意識のうちに斜面下方に沿った座標軸を設定し, 運動方程式 (2.39) を記述していることだろう。斜面下方に沿った座標時を設定するのは, ここに示したように, 束縛条件から規定される数学に基づくことが, この例から理解できるだろう。

単振り子　図 2.15 に示す振り子の運動を考えよう。振り子は原点を支点とし, 長さ l のひもに取り付けられた質量 m の物体が運動する。なお, 物体の大きさは無視できるくらい小さいとする。 厳密に考えると, 物体に作用する力によって, ひもは伸縮するのだが, ここではひもの伸縮は考えないことにする。さらに, ひもがたるんだ状態の運動も考えないことにすると, 拘束条件は,

$$x^2 + y^2 = l^2, \tag{2.40}$$

のように表される。振り子の位置を特定するため, 鉛直下方から角度 θ だけ離れた位置に振り子が運動している瞬間を考えよう。振り子は鉛直下方に重力 mg 作用を受ける。その重力は, 原点から振り子を結ぶひもの方向の成分 $mg\cos\theta$ と, その垂直方向の成分 $mg\sin\theta$

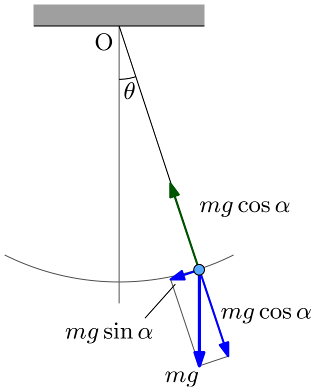


図 2.15: 振り子に作用する力

に分離できる。そのうち, 前者はひもの張力によって相殺される。そうでなければ, ひもが伸びるかたるむかの運動をするはずだ。ここでは, ひもはたるみもしなければ, 伸縮もしないので, ひもの方向の力は完全に相殺されている。したがって, 考えるべきは, ひもと垂直な成分 (接線成分) のみである。上で議論した斜面の例に基づき, 振り子の運動方程式を 2 次元のカルテシアン座標について記述すると,

$$m\ddot{x} = -mg\sin^2\theta, \qquad m\ddot{y} = -mg\sin\theta\sin\theta,$$

となる。ここで, 座標 $[x, y]$ が,

$$x = l\sin\theta, \qquad y = l\cos\theta,$$

によって変換されることに注意すると, 運動方程式は,

$$m\ddot{\theta} = -\frac{mg}{l}\sin\theta, \tag{2.41}$$

のように変換される。ここまでに書いた思考も我々が無意識に実行していることかもしれないが, 束縛運動の考えに基づき, x と y の 2 次元の問題を, θ だけの問題に簡略化したのだ。さらに面白いことに, ニュートンの運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ のように, 位置ベクトルの 2 階微分を取り扱っていたのだが, 変換された方程式は角度 θ の 2 階微分である。このように, 取り扱う物理現象に依存し, 解析すべき変数のディメンジョンが異なる。これは, 本書の後半で説明する解析力学における一般化座標につながる。

2.6.2　束縛と自由度

前項で確認したように, 束縛運動では束縛条件を利用することによって, 取り扱う座標成分を少なくできる。取り扱う座標成分が少ないということは, その運動による未知数が

少なくなるということだ。そのような運動における未知数の数は自由度と呼ばれる。自由度が減少するのは数学的に好ましい。

一般的に, 3 次元空間で N 個の質点の運動を一括して取り扱おうとすると, $3N$ 個の成分を取り扱う必要がある。本書の後半で取り扱う解析力学の手法では, それらの座標成分を一括して, 座標系 $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の運動を取り扱う。ここで, $n = 3N$ とおいた。束縛がない任意の運動であれば, 未知数が n 個も存在することになる。束縛運動となると, 束縛条件によって未知数が減少するわけだ。一般的に, 束縛条件は,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

のような数式で表現される。束縛条件の例として, 前項で扱った斜面の問題では $x \sin\alpha + y \cos\alpha = 0$, 単振り子の問題では $x^2 + y^2 = l^2$ である。このように, 明確な関数で表現できる束縛は**ホロノミックな束縛** (holonomic contraint) と呼ばれる。

ホロノミックな束縛が未知数を減少させることを斜面の問題で考えてみよう。既にみたように, $x \sin\alpha + y \cos\alpha = 0$ なる束縛条件が, 座標系 $[x, y]$ から別の座標系 $[\xi, \eta]$ に変換した結果, $\eta = 0$ のように簡略化された。その結果, 運動方程式に含まれる未知数が ξ だけになったのだ。この変化を一般化すると次のように考えられる。束縛条件を考慮し, 座標系 $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ から適当な座標系 $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$ に変換すれば, $q_n = \mathrm{const}$ とすることができる。その結果, 未知数が明示的に減るわけだ。複数の束縛条件が設定できれば, その数だけ未知数が減る。

運動方程式で決めるべき未知数の数は**自由度**と呼ばれる。一つの物体の 3 次元空間での運動は, $[x, y, z]$ が未知数となるため, 自由度 3 をもつ。任意の二つの物体の運動は自由度 6 をもつ。その自由度は束縛条件によって減少する。一般的に, n 個の座標成分を取り扱う問題において, 束縛条件を設定でき, $q_n = \mathrm{const}$ となれば, 未知数が $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ になる。例えば, 2 原子分子の運動を記述する場合, 原子間の距離が拘束条件となり, 決定すべき未知数は, x, y, z, θ, φ の 5 個である。すなわち, 自由度は 5 である。なお, 前半の三つの未知数は重心の位置を表す座標, 残りの二つは原子間を結ぶ線分の方向 (天頂角と方位角) である。さらに, 3 原子分子になると, 各原子の位置を表す座標は全部で 9 個であるが, 拘束条件が三つ現れる[4] ため, 自由度は 6 となる。一般的には, n 次元の一般化座標において, 拘束条件が k 個だけ設定されると, 自由度は $n - k$ になる。

拘束条件はホロノミックな拘束だけではない。例えば, 振り子の運動の場合, $x^2 + y^2 \leq l^2$ が非ホロノミックな拘束である。この場合, 左辺等辺が不等号で結ばれているため, ひものたるみが許容されているのだ。具体的には, 等号が成立しているとき, ひもが張り詰めている状態であり, 不等号がたるんだひもに対応する。例えば, 振り子が $\theta < \pi/2$ となる

[4] 拘束条件の設定方法は複数ある。例えば, 二つの原子間の距離を拘束条件として設定できる。三原子分子では, 原子間の距離は 3 通り設定できるので, 拘束条件が三つ設定できるということだ。

まで上昇すると, 下降時にはひもがたるむ。非ホロノミックな拘束は, 数学的に未知数を減少させることができず, 解法が難しい。非ホロノミックは拘束の場合, 問題ごとに個別に解法を設定することになる。

時間依存する束縛条件　束縛条件は, 時間依存するように設定することも可能だ。その一例が, 動く支点に取り付けられた振り子の運動だ。支点の位置が時間の関数 $\boldsymbol{r}_0(t)$ であるとき, 振り子の位置 $\boldsymbol{r}$ は,

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(t)| = l,$$

なる束縛を受ける。このように, 束縛条件が時間の関数となることも想定できるわけだ。時間依存する束縛条件を一般的に扱うには, 現時点では難しい。この問題は, 本書の後半で解析力学のトピックとして取り扱いたい。