第1章　ニュートンによる力学記述

解析力学を取り扱う前に, 力学をニュートンの記述によって取り扱おう。ニュートンの記述は, 我々が観測する力学現象を数学を用いて忠実に取り扱うので, 直感的に理解しやすい。本章で示すように, 運動方程式と呼ばれる基本方程式がすべての力学現象を説明できるというのが, ニュートンの記述である。

1.1　運動の記述

力学を記述するには物体の運動を数学表現することが重要である。物体の運動は時間経過に伴う物体の位置の変化を調べればよい。本節では, 物体の運動を記述するための数学表現を説明する。具体的には, 物体の運動を表すには, 位置, 速度, 加速度といった物理量を取り扱う。

1.1.1　力学における物理量

物体の運動を取り扱う際, 運動の軌跡を時間の関数として記述する場合がある。その軌跡の関数を議論するには, 物体の速度, さらには加速度といった物理量が重要である。

位置　物体の位置を表すには, 座標系を設定し, その座標を読むのが確実である。例えば, 地球上の位置を表すために北緯 35 度 40 分, 東経 139 度 20 分のように, 緯度と経度で場所を指定する。それが座標の一例である。

我々が生活する 3 次元空間では, 横断方向, 奥行方向, 高さ方向のように三つの座標が位置特定に必要である。このように, 互いに直交する座標軸による座標系は, デカルトによって提唱されたことから, カルテシアン (Cartesian[1]) 座標系と呼ばれる。カルテシアン座標系では, 図 1.1 (a) のように, 座標 $[x, y, z]$ を用いて 3 次元の位置を特定する。カルテシア

[1] カルテシアン座標系は, デカルト座標系とも呼ばれる。デカルト (Descartes) の冒頭の 3 文字 des はフランス語の不定冠詞 (英語の a と an) に相当するので省略し, 人名を形容詞化する接尾辞-ian をつけると Cartesian になる。

ン座標系は, 方眼紙のマス目が座標に例えられることから直感的に理解しやすい。座標の表現法は, 他にも, 円筒座標系, 球面座標系などがあり, それらは運動の形態によって使い分けられる。

円筒座標系は, 図 1.1 (b) に描くように, カルテシアン座標系の z 軸を対称軸とする座標系である。対称軸からの距離を r, カルテシアン座標系の x 軸からの回転角を θ とし, 座標 $[r, \theta, z]$ で 3 次元の位置を特定する。円筒座標系とカルテシアン座標系は,

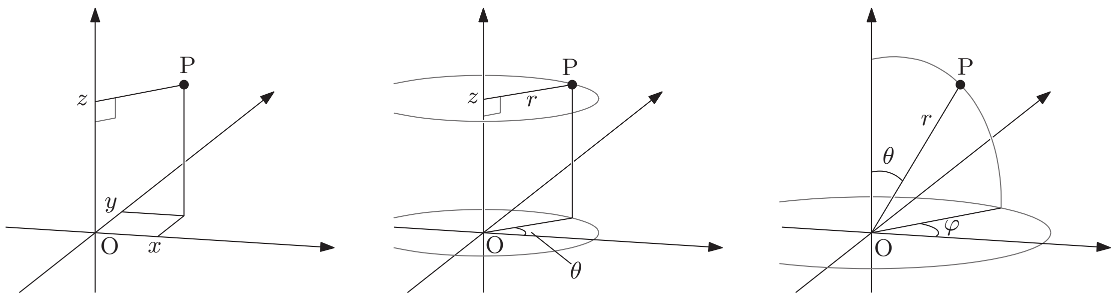
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$

のような関係で変換される。ある軸のまわりを回転する運動を記述するには円筒座標系を用いるのが便利である。

球座標系は, 図 1.1 (c) に描くように, カルテシアン座標系の z 軸を天頂方向とする球面における天頂角, 方位角によって 3 次元の座標を特定する。天頂角は, カルテシアン座標系の z 軸からの角度である。方位角はカルテシアン座標系の x 軸からの回転角度である。さらに, 原点からのユークリッド距離を座標成分として利用する。球面座標系の座標は, $[r, \theta, \varphi]$ を用いる。これらの座標成分は,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$$

によってカルテシアン座標系から変換される。ある特定の点に起因する力で支配される運動を記述すには球面座標系が便利である。



(a) Cartesian coordinates.　(b) Cylinderical coordinates.　(c) Spherical coordinates.

図 1.1: 三次元の座標系の例

位置を取り扱う際, 3 次元における三つの座標成分を書くよりも, それらをまとめて一つの記号 $\boldsymbol{r}$ $(= [x, y, z])$ を用いる方がが便利である。その記号はベクトルと呼ばれる。このベクトル $\boldsymbol{r}$ は, 原点から対象位置に向かうベクトルである。例えば, 図 1.1 の例では $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となるわけだ。このような位置ベクトルを書くと, 位置に依存する関数が $f(x, y, z)$ と書く代わりに $f(\boldsymbol{r})$ のように書けるので便利だ。

速度　運動する物体は時間経過とともに位置が変化する。その位置の変化率は速度と呼ばれる。速度は時間軸における位置の変化率である。つまり, 移動によって生じた変位を移動に要した時間で除すれば, その物体の平均速度が得られる。実質的に, その時間を長くとれば細かい精度が得られるだろうが, ここでは数学的観点で速度を考える。

速度は単位時間当たりの位置の変化率である。例えば, 5 秒間に 50 m だけ移動する物体は, 10 m/s の速度で運動していることになる。とはいえ, 物体は加速/減速する場合もある。上の例のように, 5 秒も時間が経過すると速度が変化しているかもしれない。瞬時的な速度を得るためには, 十分短い時間で速度を計測しなければならない。十分短い時間 Δt における位置の変化が Δx だとすると, 速度は $\Delta x/\Delta t$ である。ここで, 平均速度を計算するための対象時間 Δt を極限まで短く, すなわち, Δt とすると, 微分の定義式:

$$v = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

となるのだから, 速度 v は位置 x の時間についての導関数である。位置は単に x 座標だけでなく, カルテシアン座標系なら, y や z 座標があるので, 一般的に位置を表す表記として位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いると, 速度ベクトルは,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}, \tag{1.1}$$

のように書くことができる。ここで, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ は微分におけるライプニッツの記法, $\dot{\boldsymbol{r}}$ はニュートンの記法である。ライプニッツの記法は演算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ が t についての常微分を与える。この演算子について, t を別の記号に置き換えると, 任意変数による微分演算子を記述することができる。一方, ニュートンの記法 $\dot{\boldsymbol{r}}$ は時間についての微分に特化した記法である。数学記述が簡単であるのでニュートン記法も頻繁に利用される。本書は必要に応じて, ライプニッツ記法とニュートン記法の双方を用いる。

カルテシアン座標系 $\boldsymbol{r} = [x, y, z]$ の場合, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は, 座標成分ごとに時間について微分し, 得られた導関数を成分としたベクトルである。すなわち,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \left[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right],$$

である。しかし, 円筒座標や球面座標で速度ベクトルを表現するには, このような単純な計算にならないことは後に説明する。

加速度　物体の運動速度が一定でない場合, その物体は加速度をもつという。加速度は単位時間あたりの速度の変化である。速度の定義を応用すると, 加速度は速度の時間微分であるということだ。すなわち, 加速度 $\boldsymbol{a}$ は,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

のように, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を時間 t で 2 階微分して得られる 2 階の導関数である。この数式の第 1 行目はライプニッツ記法, 第 2 行目はニュートン記法で書いている。後に例を示すが, 加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と平行とは限らない。

1.1.2　典型的な運動

前項で定義したように, 変位を時間について微分すると, 速度・加速度が得られる。本項では, 典型的な運動について変位を数式で表現し, 時間微分することによって速度・加速度を記述していこう。

等速直線運動　物体は力の作用を受けなければ, 一定の速度で運動を続ける。この性質は後に説明する慣性の法則である。つまり, 速度 $\boldsymbol{v}$ が定数であり, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v}\,t,$$

なる数式で書けるわけだ。なお, $\boldsymbol{r}_0$ は $t = 0$ の時点で物体が存在する位置である。数学的には, $\boldsymbol{v}$ を t について積分した際の積分定数である。一方, $\boldsymbol{v}$ が定数であるので, それを時間 t について微分した導関数がゼロになるため, 加速度は $\boldsymbol{a} = 0$ である。

この運動では, 物体の軌跡は直線を描くため, **等速直線運動**と呼ばれる。常に同じ速さで, 直線を描くことがその名称の由来である。物理学では, 速度が単なる速さだけでなく向きを含む物理量であるため, 等速直線運動の代わりに**等速度運動**と呼ぶこともある。この名称は, 等速度が直線運動になることを意味しているからだ。

等加速度運動　一定の加速度 $\boldsymbol{a}$ によって運動する物体の速度と位置は,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}\,t, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\,t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\,t^2,$$

によって特定できる。これらの数式は, $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{a}$ を積分し, $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{v}$ を積分することによってられた。なお, $\boldsymbol{v}_0$ と $\boldsymbol{r}_0$ は積分定数であり, それぞれ, $t = 0$ における速度と位置を表す初期値である。

位置ベクトルをカルテシアン座標 $\boldsymbol{r} = [x, y, z]$ とし, それに対応する速度ベクトルを $\boldsymbol{v} = [v_x, v_y, v_z]$ とする。簡単のため, 加速度ベクトルと速度ベクトルが x 軸方向に向いている, すなわち, $\boldsymbol{a} = [a, 0, 0]$、$\boldsymbol{v} = [v, 0, 0]$ とすると,

$$v = v_0 + at, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

と記述できる。これらの数式から,

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,(x - x_0),$$

なる関係式が導出できる。この数式は後に紹介するエネルギー保存則に対応する数式である。これらの数式を使うと, 停止状態から $5\,\mathrm{m/s^2}$ の一定加速度で加速する自動車が距離 $400\,\mathrm{m}$ を通過する時間が約 12.65 秒であることがわかる。しかも, $400\,\mathrm{m}$ を通過するとき, 自動車は $63.2\,\mathrm{m/s}$ $(= 228\,\mathrm{km/h})$ まで加速されている。

放物線運動　地表の近くでは, あらゆる物体に一定の加速度 g $(\simeq 9.8\,\mathrm{m/s^2})$ がかかるように重力が鉛直下方に作用する。その理由で g は重力加速度と呼ばれる。水平方向には重力が作用しないため, 空中に放り出された物体の運動は,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -g,$$

なる微分方程式で記述できる。ここで, 水平方向を x, 鉛直上方を z とした。これらの方程式を 2 回だけ t について積分すると,

$$x = v_0 t \cos\theta, \qquad z = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2,$$

が得られる。ここで, $t = 0$ のとき物体が位置 $[x, z] = [0, 0]$ において, 水平から角度 θ をなす上方に速さ v_0 で投げ出されたものとして積分定数を決定した。これらの数式から t を消去すると,

$$z = x\tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta}\left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g},$$

が得られる。この数式は, 空中に放り出された物体が描く軌跡を表している。この軌跡は, z が x の 2 次関数として表現されている。いわゆる, 放物線である。地表近くの一様重力の場 $(g = -9.8\,\mathrm{m/s})$ において物体を $\theta = 60^\circ$ の角度で $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$ の初速度で打ち出したときの軌跡を図 1.2 に示す。 打ち出された時刻を $t = 0$ とすると, 物体は $t = 2.2\,\mathrm{s}$ に最高点に達し, $t = 4.4\,\mathrm{s}$ に地面に到達する。放物線という名称は空中に放り出された物体が描く軌跡であることに由来している。物体が, 地上 $z = 0$ に到達する位置を水平座標 x_1 で表現すると,

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g},$$

であることが上の方程式から容易にわかる。図 1.2 の例では $x_1 = 55.2\,\mathrm{m}$ となる。得られた公式によると, x_1 が最大となる角度は $\theta = \pi/4$, すなわち, 角度 45° である。

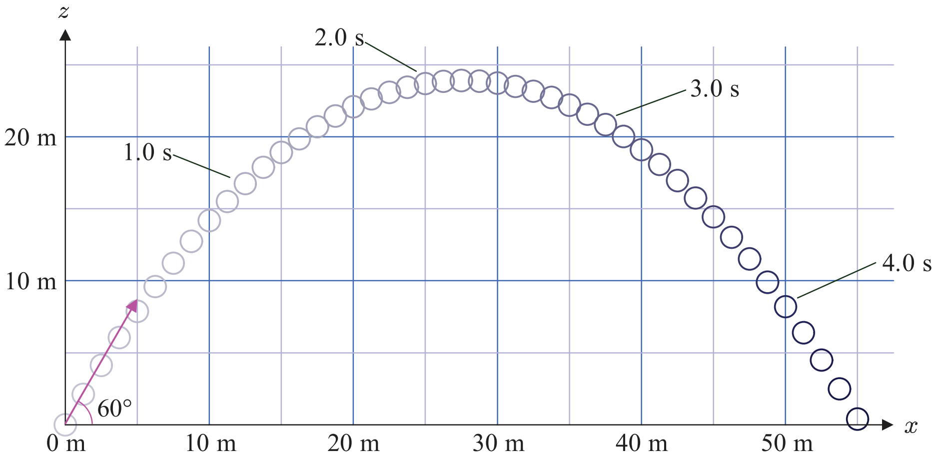


図 1.2: 一様な重力の場における放物線運動 ($v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$)

等速円運動　物体が半径 A の円周上を一定の角速度 ω で運動する状況を考えよう。物体の速さは一定であるが, 円周上を運動するということは, 時間の経過とともに向きが変わるということだ。つまり, 速度は変化をしているので加速度が生じていることになる。その加速度を図によって表現すると, 図 1.3 を考えればよい。物体の速さは常に $v = A\omega$ である。微小時間 Δt だけ経過すると, 運動方向は $\omega\Delta t$ の角度だけ回転するはずだ。図に示したように, その微小時間を隔てて, 速度ベクトルは運動方向と直交する方向に $v\omega\Delta t = A\omega^2\Delta t$ だけ速度差が生じているはずだ。したがって, 単位時間あたりに生じる速度差, すなわち, 加速度は $a = v\omega = A\omega^2 = v^2/A$ となる。

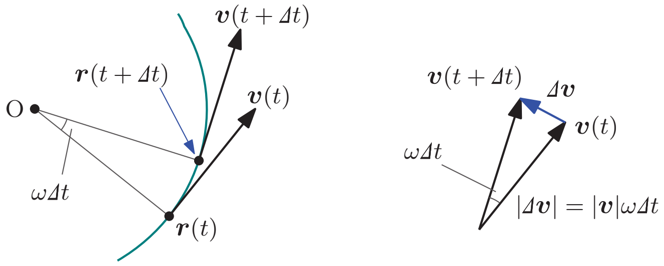
特定した加速度を数学的に検証してみよう。運動が xy 平面上となるように座標をとり, 原点を中心とする円軌道を描くとすると,

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = A\sin\omega t,$$

である。これらの数式を微分すると,

$$\begin{aligned} v_x &= -A\omega\sin\omega t, & v_y &= A\omega\cos\omega t, \\ a_x &= -A\omega^2\cos\omega t, & a_y &= -A\omega^2\sin\omega t, \end{aligned} \tag{1.3}$$

が得られる。得られた導関数から, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ が導かれるので, 速度ベクトルと加速度ベクトルが直交していることがわかる。 さらに, $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$ となる。物体が原点を中心とする半径 A の円周を運動するので, $|\boldsymbol{r}| = A$ である。したがって, $a = |\boldsymbol{a}| = A\omega^2$ となるので, 図 1.3 を利用して特定した加速度と一致する。等速円運動の事例から, 一つの知見が得られる。それは, 速度と直交する加速度は物体の速さを変えないが, 運動の向きを変えるという事実だ。



(a) Trajectory of circular motion.　(b) Change of velocity vector.

図 1.3: 等速円運動における速度ベクトルの変化

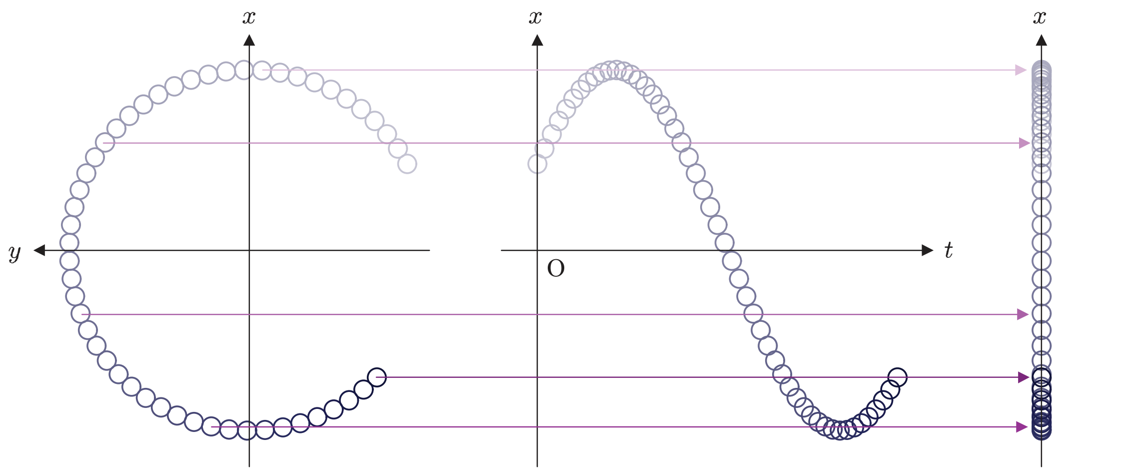
単振動　等速円運動における物体の軌跡を, 図 1.4 に示すように 1 次元に投影すると. 単振動と呼ばれる運動が現れる。等速円運動が xy 平面上の運動だとすると, 物体の位置 $[x, y]$ は時刻 t の関数である。例えば, その x 成分のみを取り出せば単振動にあたる物体の軌跡ということだ。すなわち,

$$x = A\cos\omega t,$$

が単振動となる物体の位置だ。この数式のように, 単振動では 1 次元で運動し, その位置は時間経過に対して正弦関数で表現できる。単振動は加速度を有する運動である。その性質を調べるため, 変位 x を時刻 t について微分すると,

$$v = -A\omega\sin\omega t, \qquad a = -A\omega^2\cos\omega t,$$

が得られる。当然だが, 速度も加速度も正弦関数で表現されている。速度は, 変位が $x = 0$ で最大となる。一方, $x = 0$ において加速度は $a = 0$ となる。 興味深いことに, 単振動で



(a) Circular motion.　(b) Position versus time.　(c) Simple harmonic oscillation.

図 1.4: 等速円運動から単振動への投影

は加速度が $a = -\omega^2 x$ のように, 加速度が中立点からの変位に比例する。中立点から大き

くずれるほど, 大きな加速度で中立点に戻そうとする力がはたらく。後に説明する運動方程式によると, 加速度に物体に質量を乗じると力になるので, $F=-kx$ なる関係が成立するはずだ。ここで, $k\equiv m\omega^2$ とおいた。この力の公式は, バネ定数 k におけるフックの法則である。つまり, 単振動は理想的なバネに取り付けられた物体の運動モデルである。

1.2　力の作用と運動方程式

前節では運動の軌跡を記述するために, 速度や加速度を導入した。本節では, 加速度を発生させる要因として力を説明する。ニュートン力学では, 位置の2階微分が力に起因するとの考えをとっている。物体の運動を解析するには, 力を見極めることが重要である。

1.2.1　ベクトルとしての力

力は物体の運動に影響を与える。単なる大きさだけでなく, 方向という属性をもっているため力はベクトルである。特定の物体に複数の力が作用すれば, その物体は, それらの力の総和によって運動が影響される。力の総和は, ベクトルの加算である。逆に, 特定の力が複数の方向に影響を与える場合もある。その場合, 力を成分分解することによって力の影響を調べることができる。

力の合成　二つの力によって合成された力は, ベクトル和であるため, 平行四辺形の作図によって特定できる。図1.5に示すように, 合成する二つの力が平行四辺形の隣り合う辺であるように作図すれば, その平行四辺形の対角線が合力である。力 F_1 と F_2 が角度 θ をなす場合, 合力 F は,

$$F^2=F_1+F_2+2F_1F_2\cos\theta,$$

によって計算できる。言うまでもなく, 二つの力が同一の方向を向いているとき, すなわち, $\theta=0$ のとき, 合力は最大 $F=F_1+F_2$ となる。 最小は, 二つの力が反対側を向いてい

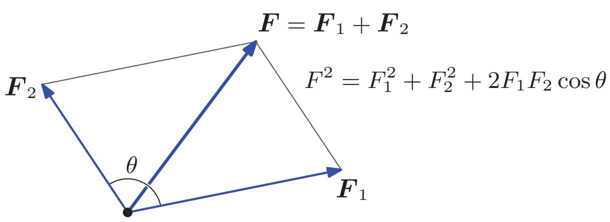


図 1.5: 力の合成

るとき, すなわち, $\theta=\pi$ のとき, $F=F_1-F_2$ となる。力はベクトルであるので, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$,

$\boldsymbol{F}$ のようなベクトル表記を用いれば, 単純にベクトル和:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2,$$

として合力を記述することができる。これらのベクトルをカルテシアン座標系において成分表示すると,

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}, \quad F_y = F_{1y} + F_{2y}, \quad F_z = F_{1z} + F_{2z},$$

のように, 各成分が単純和で表される。このような単純和になるのはカルテシアン座標だからであり, 他の座標系ではこのようになるとは限らない。

力の分解　物体の運動を考えるとき, 力を分解すると便利なことがある。力を分解する際, 合力が平行四辺形の対角線になることを利用すればよい。

例として, 図 1.6 に示すように, 斜度 θ の斜面に物体を載せたときを考えよう。物体には重力 mg が鉛直下方に作用する。とはいえ, 物体は鉛直下方に運動せず, 斜面に沿って下方に滑ることになる。その現象は次のように考えればよい。重力は斜面を押さえつける力と斜面を滑ろうとする力に分解できる。斜面を押さえつける力は $mg\cos\theta$ であり, 斜面を滑ろうとする力は $mg\sin\theta$ である。 斜面を押さえつける力に対抗して, 斜面は力 N で物体

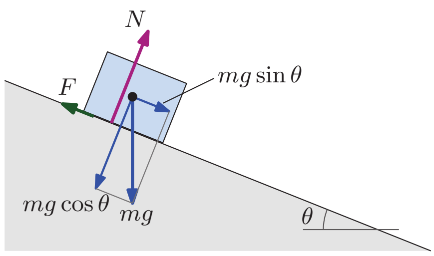


図 1.6: 斜面に載せた物体に作用する力

を押し返す。力 N は垂直抗力と呼ばれ, $N = mg\sin\theta$ を満たすため, 物体は斜面に潜り込むことはない。一方, 物体が斜面下方に向かって力 $mg\sin\theta$ の作用を受けると, 物体は斜面上方に向かって摩擦力 F の作用を受ける。斜面下方に向かう力が小さければ $F = mg\sin\theta$ を満たす。その場合, 物体は斜面の上で静止する。摩擦力 F は斜面と物体の材質に依存し, とり得る上限が存在する。斜面下方に向かう力 $mg\sin\theta$ が, その上限を超えると, 物体は斜面を滑って加速しながら下る。

1.2.2　ニュートンの運動の法則

ニュートンの理論における運動の法則は, 慣性の法則, 運動方程式, 作用反作用の原理の三つである。それらの法則は, 物体に作用する力が物体の運動にどのように影響するかの

指針を示している。その法則から物体の運動が決定されるわけだ。

慣性の法則 物体は力を受けなければ現状の速度を維持する。つまり, 静止している物体は静止状態を維持するし, 運動している物体は等速直線運動を維持する。電車や飛行機に乗っているときに慣性の法則を実感することができる。いや, 慣性の法則がゆえに実感がないかもしれない。巡航速度 900 km/h の航空機で飲み物の機内サービスを受けるとき, 地上で静止しているときと同様に飲み物がコップに注がれる。これが慣性の法則だ。

運動方程式 物体に生じる加速度 $\boldsymbol{a}$ は, 物体に作用する力 $\boldsymbol{F}$ に比例し, 物体の質量 m に反比例する。すなわち, それらの間には $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ が成立する。この数式が運動方程式である。運動方程式によると, 質量が大きな物体は加速しづらいということだ。

作用反作用の法則 二つの物体 1 と 2 の間に, 互いに力が作用するとき, 物体 1 から物体 2 に作用する力 $\boldsymbol{F}_{12}$ と $\boldsymbol{F}_{21}$ は, 大きさが等しく, 逆向きである。すなわち, $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ が成立する。作用反作用の法則は, 直接物体を押す場合に成立するだけでなく, 万有引力のような遠隔力に対しても成立する。

ニュートンより前, ガリレイが湾曲した斜面において次のような法則を見つけている。落下した物体は最下点を通過して最初と同じ高さまで上がる。最下点を通過した後, 水平面が持続すれば, その物体は停止することなく, 一定の速度で運動を続ける。この法則は, 慣性の法則に類似している。しいて言うなら, ガリレイの法則は, 一様な重力の中で斜面に沿って運動する物体の法則であり, ニュートンの法則は重力の有無にかかわらない一般的な運動の法則である。さらに, ガリレイより前, 物体は力の作用を受けなければ停止すると考えられていた。移動する物体が動力を加えなければ, いずれ停止するという日常の経験に基づく知識だったからだ。しかし, 動力を絶ってすぐに停止するのでなく, 徐々に速さが低下して停止に至るのだ。その間に, 摩擦力が物体を減速させる力として作用しているのだ。ニュートンはその事実を見抜き, 慣性の法則を提唱した。

運動方程式は重さと質量を区別した概念である。重さは地球の重力によって物体が地球に引きつけられる力である。その力が大きいとき, 我々は重いと表現する。一方, 質量は物体を加速する際の抵抗である。物体を加速度 $\boldsymbol{a}$ で加速するのに必要な力は $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ というわけだ。この法則は, 地上であっても, 無重力の宇宙空間であっても同じだ。質量が大きな物体は加速しづらいのだ。なお, 既に紹介したように, 加速度ベクトルは位置ベクトルの 2 階微分であるので, 運動方程式は,

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{1.4}$$

のように記述できる。なお, この数式はライプニッツ記法だ。ニュートン記法では $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ と書く。いずれにしても, この方程式を解くことによって, あらゆる物体の運動が特定できる。

作用反射用の法則は見落としがちだが, 重要な法則である。斜面の例で述べたように, 重力の作用を受けている物体が斜面に潜り込まずに斜面を滑るのは斜面から反作用を受けているからだ。その反作用がなければ, 運動方程式にょって, 物体には鉛直下方に加速度が生じ, 斜面に潜り込んでしまう。反作用があるため, 力が釣り合い, 斜面に潜り込まず, しかも, 斜面から浮き上がることもない。

運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ は非常に単純な 2 階の微分方程式であるが, 物体に作用する力 $\boldsymbol{F}$ を設定すれば, 物体の運動を解析することができる。典型的な運動について運動方程式を記述し, 運動を解析してみよう。運動方程式から具体的な運動の様子がわかるはずだ。

一様な重力場　地表の近くでは質量 m の物体に, 鉛直下方に重力 mg が作用する。前にも定義したが, g は重力加速度である。このとき, 質量 m の物体における運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0, \qquad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -mg,$$

となる。ここで, 座標 z は鉛直上方となるように設定した。容易にわかるように, この運動方程式は $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 = 0$ と $\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2 = -g$ のように書き換えることができる。つまり, 質量に関わらず, 地球の重力によって必ず加速度 g が鉛直下方にはたらくのだ。この事実は, ガリレイが重い鉄球も軽い鉄球も同時に落下するという実験で実証[2] している。一方, 水平方向には加速度がない。この運動方程式を解くと,

$$x = v_{0x}t, \qquad z = x_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

が得られる。なお, 微分方程式を解くにあたり, 強制的に $y = 0$ とした。つまり, 運動を xz 平面に限定した。言うまでもなく, 得られた座標は放物線を描く。

バネの運動　バネに質量 m の物体を取り付けて振動させたときの運動を考えよう。バネは中立点からの距離に比例した復元力がはたらく。中立点からの距離を x としたとき, 復元力が $-kx$ であるとする。比例係数 k はバネ定数と呼ばれ, バネの復元力の強さを表す。固いばねでは k が大きくなる。そのとき, 運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx,$$

[2] ピサの斜塔から鉄球を落下させたという話があるが, それは真実ではない。実際, 斜面を転がして落下の同時性を示したようだ。

となる。この運動方程式を, $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -kx/m$ と書き換え, 第 1.1.2 項にて導出した単振動の数式と見比べると, 角速度 $\omega = \sqrt{k/m}$ の単振動に対応することがわかる。つまり, この運動方程式の解は,

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right),$$

である。ここで, A と ϕ は積分定数である。この解によると, バネ定数 k が大きいほど振動が速く, 質量 m が大きいほど振動が遅い。バネの振動は時間経過に対し, 正弦関数を描き, その周期は,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

となる。つまり, 振動の周期は振幅に依存せず一定である。

万有引力の法則　惑星が太陽を公転するのは, 質量をもつ物体が重力源になっているからである。ニュートンはその思想のもとで万有引力の法則として, 重力を定式化した。万有引力の法則によると, 二つの物体の間にはたらく重力は, 二つの物体の質量の積に比例し, 物体間の距離の自乗に反比例する。すなわち, 重力の大きさは,

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{1.5}$$

となる。ここで, 比例係数 G は万有引力定数と呼ばれ, $G = 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$ である。例えば, 地表で重力加速度が g であることから, r を地球の半径, M を地球の質量とすると,

$$g = \frac{GM}{r^2},$$

が成立するはずだ。実際に, $r = 6.371 \times 10^6\,\mathrm{m}$, $M = 5.972 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ を代入すると, 確かに, $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ が得られる[3]。

人工衛星の周回速度を計算してみよう。簡単のため, 人工衛星は高度 400 km で円軌道を描くとする。前に調べたように, 等速円運動するためには, 中心に向かって加速度が生じる。つまり, 中心に向かって物体を引っ張る力, すなわち, 向心力が必要だ。その向心力が地球による重力であるなら, 人工衛星は円軌道を描く。人工衛星の周回速度を v とすると, 円運動の加速度が v^2/r であることから, 向心力は mv^2/r であるはずだ。したがって,

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r},$$

が人工衛星の速度を決める方程式だ。速度 v について解くと,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

[3] 本当は, 地球の質量が重力加速度から計算されるのかもしれないが, ここでは気にしないでもらいたい。

が得られる。高度 400 km なので $r = 6.771 \times 10^6$ m とすると, $v = 7.67$ km/s が得られる。この速さで運動させれば, 人工衛星は円軌道を描いて地球を周回する。この速さは, わずか 92 分で地球を 1 周してしまう速さだ。

1.3　力学的エネルギー

本節ではエネルギーという物理量を導入する。後に定義するように, エネルギーは, 他の物体に力を与えて力をすることができる量を表す。エネルギーという物理量は, 直接的に測定することができないのだが, エネルギーの概念によって物理学の取り扱いが容易になるという, 解析手法としての側面がある。

1.3.1　仕事と運動エネルギー

物体に力を作用して動かしたとき, その力と距離の積を**仕事**という物理量として定義する。例えば, 10 N の力で物体を 3 m だけ動かしたとき, 30 J の仕事をしたと表現する。新たな単位 J はジュールと読み, N · m の意味である。

与える力と運動方向が一致しない場合を考えよう。物体が固い平面上に載っていて, それを水平面から下方 θ の角度に, 力 F で押す場合がその例だ。水平方向に x, 鉛直上方に y をとると, 力の x 成分と y 成分は, それぞれ, $F_x = F\cos\theta$, $F_y = F\sin\theta$ となる。既に第 1.2.1 項で説明したように, 力は複数のベクトルの和として考えることができる。つまり, 物体に x 方向に $F\cos\theta$ が, y 方向に $-F\sin\theta$ の二つの力が作用していると考えることができる。そのうち, x 方向の力は物体を x だけ移動させることができるので $Fx\cos\theta$ の仕事をした。一方, y 方向の力は物体を移動させていないので, ゼロの仕事をした, と解釈するのだ。したがって, 物体に与えた外力がした仕事は,

$$W = Fx\cos\theta + 0 = Fx\cos\theta,$$

となるわけだ。この計算過程からわかるように, 外力を $\boldsymbol{F}$, 物体が移動した変位を $\boldsymbol{x}$ のようにベクトルで書くと, 外力がする仕事は,

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x},$$

のようにベクトルの内積で表現できる。この数式が, 外力が物体に対して実行する仕事である。一方, 物体も外力に対して仕事をしている。なぜなら, 作用反作用の法則によって, 物体は外力に $-\boldsymbol{F}$ を作用させるはずだからだ。つまり, 物体は外力に対して, $-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x} = -W$ の仕事をしているわけだ。つまり, 外力が物体に対して次項する仕事は, 物体が外力に対

して実行する仕事と符号を反転した関係にある。この関係は後にエネルギーを考える際に重要である。

外力が物体に作用した結果として物体が任意の経路を描く場合の力を考えてみよう。力を受けた物体は, 点Aから点Bに図1.7に示す経路をとるとする。その経路を無数の直線的な微小経路 $\varDelta \boldsymbol{r}$ に分割すると, その微小経路で外力が物体に与える仕事は $\varDelta W = \boldsymbol{F} \cdot \varDelta \boldsymbol{r}$ となる。その微小仕事を点Aから点Bに沿って加算すればよい。 その結果, 仕事 W は,

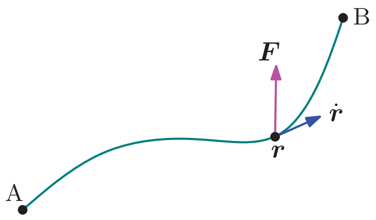


図 1.7: 物体に与えた力と運動経路

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{1.6}$$

のように積分で表現できる。このように表現すれば, 力 $\boldsymbol{F}$ は定数でなく, 位置 $\boldsymbol{r}$ の関数であってもよい。後に証明するように, このような積分で与えられる W は, 両端AとBでの運動状態に依存し, 途中の経路に依存しない。

これまでに説明した仕事には時間が含まれていない。言い換えると, 仕事を与えるのにどれくらいの時間を要したかということは問題になっていないのだ。とはいえ, 単位時間あたりに与える仕事を議論することは重要だ。なぜなら, 単位時間あたりに与える仕事とは, その外力の瞬発力を示す尺度になるからだ。そこで, 単位時間あたりに外部に与える仕事を,

$$P = \frac{\partial W}{\partial t}, \tag{1.7}$$

のように定義する。新たに定義された P は, **仕事率**と呼ばれる。仕事率を表現する際の単位は, 定義にしたがうとJ/sであるが, 慣習としてW (ワット) という単位で表現する。例えば, 10秒かけて3000 Jの仕事をしたとき, その系は平均的に300 Wの仕事率で仕事をしたというわけだ。

数式 (1.6) を基準に仕事率を考えよう。点Aから点Bに向かう経路の途中において, 微小区間 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を移動するのに要する時間を $\mathrm{d}t$ とする。物体の速度が $\boldsymbol{v}$ であれば, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ が成立するはずだ。そのように考えると, 仕事 W は,

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t, \tag{1.8}$$

のように書き換えられる。この数式と (1.7) を比較することによって,

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{1.9}$$

が得られる。この数式によると, 同じ力を与えても物体の速度が速ければ仕事率が大きくなる。例えば, 速度 50 m/s で走行する車両が, 空気抵抗に逆らい, その速度を保持するためエンジンから 2700 N の力を出力するとき, 仕事率は $2700\,\mathrm{N} \times 50\,\mathrm{m/s} = 135\,\mathrm{kW}$ となる。その出力は 180 馬力[4] に相当する。この時点で, 物理学における仕事の役割が見えていないだろうが, 本節の終了までには有用な物理量であることが理解できるはずだ。

運動エネルギー　静止状態から速度 $\boldsymbol{v}$ に達するまでの加速のために印加した力 $\boldsymbol{F}$ によって与えられる仕事の積算は運動エネルギーとして定義される。運動エネルギーは, 衝突などによって他の物体の運動状態を変化させる際の議論に便利なツールである。

質量 m の物体を静止状態から速度 $\boldsymbol{v}$ まで加速するのに必要な仕事を計算しよう。ニュートンの運動方程式から, 力が $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\dot{\boldsymbol{v}}$ であることがわかっている。その関係に注意しながら, (1.8) を計算すると,

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = m \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = m \int_{0}^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

のように数式変形できる。ここで, 点 A での物体の速度がゼロ, 点 B での物体の速度が $\boldsymbol{v}$ とした。当然であるが, 移動する間, 物体の質量 m は変化しないものとした。この右辺をさらに計算すると,

$$W = \frac{1}{2}mv^2,$$

が得られる。ここで, $v \equiv |\boldsymbol{v}|$ である。この計算結果は, 静止状態から速さ v に加速するために物体に与える仕事は, その運動経路や, 力 $\boldsymbol{F}$ の時間依存性に関わらず一定であることを意味する。このように, 力や途中の運動経路に関係せず, 現在の速度 $\boldsymbol{v}$ で決まる物理量となるので, 運動を特徴づけるパラメータとして定義することが妥当である。この物理量を**運動エネルギー**と定義し, K なる記号で書くことにしよう。すなわち, 質量 m の物体が速さ v で運動するとき, 運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \tag{1.10}$$

となるわけだ。これだけでは運動エネルギーを導入したことによる意味が見いだせないかもしれない。次項でポテンシャルエネルギーを取り扱った後, エネルギーという物理量の価値が見えてくるだろう。

等加速度運動を取り扱った際に, $v^2 - v_0^2 = 2ax$ なる公式を示した。この公式は運動エネルギーに関する公式だ。この公式の両辺に $m/2$ を乗じると,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = max,$$

が得られる。左辺は加速の前後での運動エネルギーの増加分である。右辺は加速のために印加した力による仕事である。

[4] 自動車の仕事率は, 慣習的に 1 馬力 = 750 W を単位で表現される。

1.3.2　ポテンシャルエネルギー

重力場において, 高い場所に存在する物体は足場を失うと自由落下して速度をもつ。つまり, 自由落下の結果, 運動エネルギーを得るのだ。高い場所に存在する物体は, 自由落下によって運動エネルギーを得る可能性をもっているということだ。その可能性をポテンシャルエネルギーという物理量で表現する。

ポテンシャルエネルギーは場所による関数と考えられ, $U(\boldsymbol{r})$ なる記号で記述される。例えば, 鉛直下方 (z の負の方向) に g の重力加速度を生じる一様な重力場において, 質量 m の物体を高さ $z = h$ までゆっくりと持ち上げるのに必要な仕事は,

$$W = mgh,$$

である。物体には mg の重力が鉛直下方にはたらいているので, 持ち上げるには mg より大きな力が必要だ。とはいえ, 大きすぎる力を与えると, 上方に加速して高さ h で静止できないので, mg より無限小だけ大きな力を与え, 高さ h まで引き上げた, と考えるのだ。その重力場で, 水平方向に物体をゆっくり動かす場合, 運動方向と与える力の方向が直交するため, 必要な仕事はゼロである。したがって, 鉛直下方に向かう一様な重力場で, 物体を任意の場所にゆっくり移動するのに必要な仕事は, 鉛直座標 z にしか依存しない。その必要な仕事 W をポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r})$ として定義する。この場合, ポテンシャルエネルギーは,

$$U(\boldsymbol{r}) = mgz, \tag{1.11}$$

となる。ここで, 先ほど扱った高さ h を一般化して z で置き換えた。

バネ定数 k のバネを伸ばしたときのポテンシャルエネルギーを考えよう。中立点から x だけ伸ばしたとき, バネには kx の復元力が中立点に向かってはたらいている。復元力に打ち勝ち, バネを伸ばすためには, 少なくとも kx の力を x の正方向にかけなければならない。一様な重力場と異なり, この場合, 必要な力が位置 x の関数になっていることだ。その場合, ある場所 x で力 kx をかけて微小変位 $\varDelta x$ だけ動かす。さらにその場所から新たに力 kx をかけて微小変位 $\varDelta x$ だけ動かす, というように位置をずらしながら, 位置に応じて力を変化させながら所定の場所までゆっくりとバネを伸ばすと考えればよい。つまり, 中立点から l だけばねを伸ばすにのに必要な仕事は,

$$W = \int_0^l kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}kl^2,$$

のような積分で計算できる。つまり, バネ定数 k のバネにおけるポテンシャルエネルギーは,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{1.12}$$

である。なお, バネが x 軸方向にしか動かせないものと仮定し, ポテンシャルエネルギーは x のみの関数とした。

万有引力におけるポテンシャルエネルギーを考えてみよう。質量 M の物体が原点に存在し, 距離 r だけ隔てた位置に質量 m の物体が存在する。万有引力定数 G を用いて, 物体にはたらく重力を記述すると,

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

となる。この重力が原点に向かってはたらいている。先ほどと同様に, この力を r について積分すれば, ポテンシャルエネルギー:

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}, \tag{1.13}$$

が得られる。ただし, ここでは無限遠でポテンシャルエネルギーがゼロとなるように積分定数を決定した。この結果からわかるように, ある天体から物体を無限遠まで移動するのに必要な仕事が有限値になるということだ。それは力が r^2 に反比例しているからなのだ。

重力場のポテンシャルエネルギーを数式で表現したので, 第 2 宇宙速度を計算してみよう。第 2 宇宙速度とは, 地球の重力を振り切って無限遠に到達できる最小の速度である。第 2 宇宙速度を v とおき, 地球の半径を R とすると, 力学的エネルギー保存則は,

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0,$$

となる。左辺は地表でのエネルギーを表し, 具体的には, 第 1 項が運動エネルギー, 第 2 項がポテンシャルエネルギーだ。右辺が無限遠のエネルギーであり, 運動エネルギーもポテンシャルエネルギーもともにゼロとなる。この方程式を解くと,

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \simeq 11.2\,\mathrm{km/s},$$

が得られる。空気抵抗などの摩擦力を無視すると, 地表でこの速度, または, それを超える速度で発射された物体は, 地球の重力を振り切って無限遠まで飛んでいく。この速度より小さければ, いずれ, 地球の重力によって引き戻される。

重力場のように, 場所に依存した力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が発生する場において, ポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r})$ は,

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U, \tag{1.14}$$

なる関係を満たす。このような力は, エネルギー保存則を保持するための力であることから**保存力**と呼ばれる。ここで, ∇U は勾配ベクトルであり, カルテシアン座標系では,

$$\nabla U = \left[\ \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial z}\ \right],$$

のように定義される。逆に, この勾配ベクトルを利用して, ポテンシャルエネルギーを計算すると,

$$\int (-\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = \int \mathrm{d}U = U,$$

となるので, (1.14) の正当性が確認できる。ここで, 被積分関数が $-\boldsymbol{F}$ であるのは, 場の力 $\boldsymbol{F}$ に打ち勝つための最小の力を積分する必要があるからだ。上記の積分は, 厳密には積分定数が必要であるが, ポテンシャルエネルギーの基準位置の問題であるので省略した。

1.3.3　力学的エネルギー保存則

重力場のような場における物体の運動では, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定である。その法則は力学的エネルギー保存則と呼ばれる。エネルギーは, これまでに説明したエネルギーだけでなく, 熱エネルギーや電磁エネルギーなど多彩であり, それらのエネルギーの和が一定であるのだが, 現時点では力学的エネルギーのみを考えよう。

単純な例として, 1 次元の調和振動子を考える。既に説明したように, 調和振動子はバネに取り付けた物体の運動である。バネ定数 k のバネにおいて, 中立点からの変位を x, そのときの速度を v とすると,

$$x = A\cos\omega t, \qquad v = -A\omega\sin\omega t,$$

のように記述される。ただし, $\omega = \sqrt{k/m}$, さらに, A は単振動の振幅である。具体的に運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を計算すると,

$$K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{A^2 m\omega^2}{2}\sin^2\omega t + \frac{A^2 k}{2}\cos^2\omega t = \frac{A^2 k}{2},$$

のように, エネルギーの和が時刻 t に依存せず一定値になることが導かれる。これがエネルギー保存則だ。

一様重力場での運動について力学的エネルギー保存則を確認しよう。質量 m の物体が斜度 θ の斜面を滑る場合を考えよう。そのとき, 斜面に沿って下向きの加速度 $g\sin\theta$ が生じる。斜面に沿って座標軸 s をとったとすると, 静止状態から滑り始めたときの時刻を $t=0$ とすると,

$$s = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta,$$

によって時刻 t における物体の位置が特定できる。この数式を t について微分すると, 時刻 t における速度:

$$v = gt\sin\theta,$$

が得られる[5]。この v から運動エネルギーを計算すると,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgt^2\sin^2\theta = mgs\sin\theta,$$

[5] この問題の場合, 速度 v を先に特定し, それを積分して s を計算してもよい。

が得られる。ここで, 鉛直上方にとった座標が $z = h - s\sin\theta$ であると仮定しよう。つまり, 物体を解放する場所を $z = h$ としたわけだ。このとき, 運動エネルギーは,

$$K = mg\,(h - z),$$

と書けるわけだ。運動エネルギー $K(z)$ とポテンシャルエネルギー $U(z)$ をグラフとして描くと図 1.8 のようになる。 数式から明らかなように, 運動エネルギーとポテンシャルエ

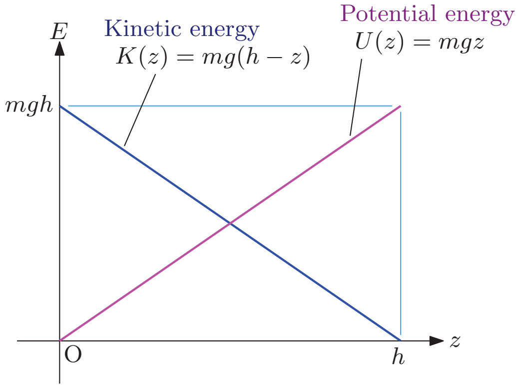


図 1.8: 高さ h で解放した物体のエネルギー

ネルギーの和は $K(z)+U(z) = mgh$, すなわち, 一定である。念のため強調しておくが, 速度 v は鉛直下方への速度成分ではない。斜面下方に沿った速さである。また, 自由空間を自由落下させる場合, $\theta = \pi/2$ と考えればよい。

一様な重力場における運動で $K = -mgz$ となることは直線的な斜面だけでなく, 一般の曲がった斜面において成立する。これまでと同様に, 水平座標を x, 鉛直上方に向かう座標を z とし, それらが斜面の長さ s の関数 $x(s)$, $z(t)$ で表現されるとしよう。ここで, 斜面の途中の微小区間 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}z$ を考える。微小区間であるので, この区間で斜面は平坦であると考えてよい。この斜面の沿って, 物体には,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{g\,\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}}$$

なる加速度が生じる。この時点で, 物体は斜面に沿って速度 v で運動しているとする。その物体は微小区間を走り抜けるのに $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}/v$ の時間を要する。つまり, 物体は微小区間を走り抜ける間に,

$$\mathrm{d}v = -\frac{g}{v}\,\mathrm{d}z,$$

だけ速度が変化する。この方程式の両辺に mv を乗じて両辺を積分すると,

$$-mgz + \frac{1}{2}mv^2 = C,$$

が得られる。ここで, C は積分定数だ。したがって, 一様な重力場において任意の曲がった斜面を滑る物体の運動において力学的エネルギー保存則が成立する。上で述べたよう

に, ここでは任意の形状の斜面を取り扱った。その斜面における摩擦力がないことが前提である。

1.4　運動量

エネルギーに類似した物理量として, 本節では運動量を定義する。エネルギーがスカラであることに対し, 運動量はベクトルである。エネルギーと同様に, 外力を受けない物体は運動量を一定に保つ。さらに, 物体の衝突において, 衝突の前後で運動量が一定に保たれることも物理学において重要な性質である。

1.4.1　力積と運動量

壁に投げつけられたボールは, 壁で跳ね返る。跳ね返るということは, 速度が逆転するということだ。ボールがそのような速度変化を引き起こすのは, 壁がボールに力を与えているからだ。そのように速度変化を引き起こすまでに与えた力の積分は力積と呼ばれる。

壁でボールが跳ね返る現象を簡単なモデルで考察しよう。簡単なモデルとして, 壁がバネ定数 k のバネであるとする。質量 m のボールが速度 v で飛んできて, バネと融合する。質量 m の物体はバネと融合して, 速度 v でバネを縮める。バネが縮めば, 物体の速度は遅くなり, ある限界で速度がゼロになり, その後, バネは物体を押し戻す。最初の長さにバネが戻ると, 物体は壁を離れて飛んでいくのだ。ボールがバネを縮める変位の限界を A とし, エネルギー保存則:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

を利用すれば決定できる。左辺が衝突直前のエネルギー状態だ。バネは中立点なのでエネルギーがゼロだが, ボールには運動エネルギーがある。右辺はバネが限界まで縮んだ状態だ。バネにはエネルギーが蓄えられ、停止した物体の運動エネルギーはゼロだ。この方程式を解くと,

$$A = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v,$$

が得られる。壁をバネ定数 k の理想的なバネと仮定したので, 衝突から跳ね返るまでの運動は単振動となり, その振幅が A ということだ。その単振動の変位を時刻 t の関数として書くと,

$$x = -\sqrt{\frac{m}{k}}\,v \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$

が得られる。ただし, ボールがバネに接した時刻を $t = 0$ とし, バネが縮む方向を x の負の

方向とした。ボールがバネから受ける力は時刻 t の関数として,

$$F(t) = m\ddot{x} = \sqrt{km}\,v\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

と書ける。この関数をグラフに描くと図 1.9 のようになる。ボールがバネに接している時間は $t=0$ から $t=\pi\sqrt{m/k}$ である。バネ定数 k が大きくなるほど, 接触時間は短くなる。その接触時間に受ける力の時間積分が力積である。図中の網掛け部分の面積が力積に相

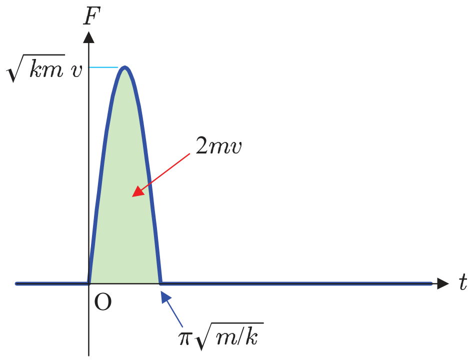


図 1.9: 壁に衝突したボールが受ける力

当する。ここで扱っているような簡易的なモデルでは, 力積は k とは無関係に一定値 $2mv$ となる。この力積を受けることにで, 速さ v で壁に衝突したボールが, 速さ v で逆方向に跳ね返るのだ。

上の例では, 力の特定の成分のみを取り扱ったが, 力は本来, ベクトル量だ。そのベクトルを時間にわたって積分しても, やはり, ベクトルになるはずだ。つまり, 力積は,

$$\boldsymbol{I} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t, \tag{1.15}$$

なるベクトルとして定義される。この数式において, 開始条件 A と終端条件 B を書いた。これは, 運動状態 A から運動状態 B に変化する間に与えられた力積を意味する。後に本項で証明するように, 力積は開始条件と終端条件によって決まるのであって, その途中の仮定には依存しない。

壁に衝突したボールの例では, 壁からボールが受ける力積が $2mv$ になった。この値は, 壁に仮定したバネ定数 k に依存しない。そう考えると, 質量と速度の積自体 $m\boldsymbol{v}$ が意味のある物理量だと推測できる。その物理量 $m\boldsymbol{v}$ は, **運動量** (momentum) と呼ばれる物理量である。容易に察しがつくように, 運動量は静止状態から $\boldsymbol{v}$ まで加速させるために物体に与えた力積と等しい。

質量 m の物体に力を作用させて静止状態から速度 $\boldsymbol{v}$ に加速する過程での力積を考えてみよう。作用させる力は, 任意の力である。初期状態で静止, 終了状態として $\boldsymbol{v}$ になって

さえいれば, どのような速度変化を途中で与えていても構わない。定義に基づいて力積を計算すると,

$$\boldsymbol{I} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = m\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = m\int_{0}^{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v},$$

が得られる。上で述べたように, 初期状態 A を物体が停止している状態, 終端状態 B を物体が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する状態とした。計算された力積は, まさに, 上で定義した運動量だ。改めて運動量を公式として記述すると,

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \tag{1.16}$$

となるわけだ。逆に, 任意の状態 A から B へ運動を変化させるための力積 $\boldsymbol{I}$ は,

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}(\mathrm{A}) - \boldsymbol{p}(\mathrm{B}) = m\left(\boldsymbol{v}(\mathrm{A}) - \boldsymbol{v}(\mathrm{B})\right),$$

のように書ける。つまり, 物体に与えた力積は初期状態と終端条件が決まれば特定できる。その途中の仮定には依存しないのだ。この関係式によると, 物体に力積を与えると, それだけ運動量が変化するということだ。

1.4.2　運動量保存則

物体が衝突して速度が変化する際, 物体の運動量の和は一定に保たれる。その補足は**運動量保存則**と呼ばれる。運動量保存則は, 衝突による物体の速度変化だけでなく, ロケット推進の原理を説明できる。

衝突において運動量保存則が成立することは明らかである。二つの物体 A と B が衝突する場合を考えよう。衝突する短い間に, A から B に力 $\boldsymbol{F}$ が与えられるとする。このとき, 作用反作用の法則によって, B から A には力 $-\boldsymbol{F}$ が作用する。この力が微小時間 Δt だけ作用するならば, 物体 B の運動量が $\boldsymbol{F}\Delta t$ だけ増加し, 物体 A の運動量は $-\boldsymbol{F}\Delta t$ だけ増加する。すなわち, 物体 A と物体 B の運動量の和は一定に保たれるのだ。

運動量保存則を用いて, 二つの物体の衝突を解析しよう。質量 m_{A} の物体 A が速度 v で運動して, 質量 m_{B} の物体 B に衝突した。物体 B は衝突前は静止していて, 衝突後も物体 A と物体 B の速度ベクトルは同一直線上であるとする。つまり, 1 次元の衝突問題を解くのだ。なお, 衝突後の物体 A と物体 B の速度は,

$$v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}} = ev,$$

を満たすものとする。ここで, e は反発係数と呼ばれる数値であり, 物体の材質に依存し $0 \leq e \leq 1$ の値をとる。そのうち, $e = 1$ による衝突は弾性衝突, $e \neq 1$ は非弾性衝突と呼ばれる。非男性衝突の中でも, 特に, $e = 0$ は完全非弾性衝突である。完全非弾性衝突は,

衝突した二つの物体が一体化して運動する状況に相当する。上で述べたように, 反発係数に関わらず, 唐突の前後で運動量保存則が成立し,

$$m_{\mathrm{A}} v = m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}},$$

なる関係式を満足する。反発係数の定義に注意しながら運動量保存則を解くと,

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{(m_{\mathrm{A}} - e m_{\mathrm{B}})\, v}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}, \qquad v_{\mathrm{B}} = \frac{(1+e)\, m_{\mathrm{A}} v}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}},$$

が得られる。これが衝突後の速度というわけだ。この結果を利用して, 衝突後の運動エネルギーの和を計算すると,

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{m_{\mathrm{A}} (m_{\mathrm{A}} + e^2 m_{\mathrm{B}})}{2\,(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})} v^2,$$

が得られる。この結果によると, 衝突の前後で運動量は不変だったにも関わらず, 運動エネルギーは変化してしまう。その変化量は,

$$\varDelta K = -\frac{(1 - e^2)\, m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}}{2\,(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})} v^2,$$

となるわけだ。この数式からわかるように, 反発係数が $e = 1$, すなわち, 弾性衝突の場合には運動エネルギーは不変だ。しかし, それ以外の場合, 衝突後に運動エネルギーは減少している。反発係数 e が小さくなると, 衝突によって多くの運動エネルギーが失われる。失われたエネルギーは, 以下のように変化する。

- 物体の形状変化として使われる。具体的には, 物体の形状が歪むと歪みによるポテンシャルエネルギーとして内部に蓄えられる。
- 熱エネルギーとして内部に蓄えられる。つまり, 衝突によって物体の温度が上昇するわけだ。
- 音, 場合によっては光のように, 衝突のエネルギーが姿を変え, 外部に放出される。

特殊なケースとして, 弾性衝突 $(e = 1)$ で, $m_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{B}}$ の場合, 面白い現象が起きる。衝突後に, $v_{\mathrm{A}} = 0$, $v_{\mathrm{B}} = v$ となるのだ。すなわち, 衝突した物体 A が静止し, その代り, 物体 B が速度 v を得て運動を引き継ぐ。その法則はニュートンのゆりかごという玩具で応用されている。ニュートンのゆりかごで確認できる衝突現象の例を図 1.10 に挙げてみた。図 (a) は 1 個の球が, 静止している 4 個の球に衝突する現象だ。この場合, 衝突後, 反対側の球が 1 個だけ飛び出す。この現象の原理は, 左側から衝突した球は停止し, 2 番目の球が運動する。その直後, 3 番目の球に衝突し, 同様に繰り返していくので, 最終的に球が 1 個だけ飛び出すわけだ。 図 (b) は 2 個の球が衝突する現象であり, 衝突後, 反対側から球が 2 個だ

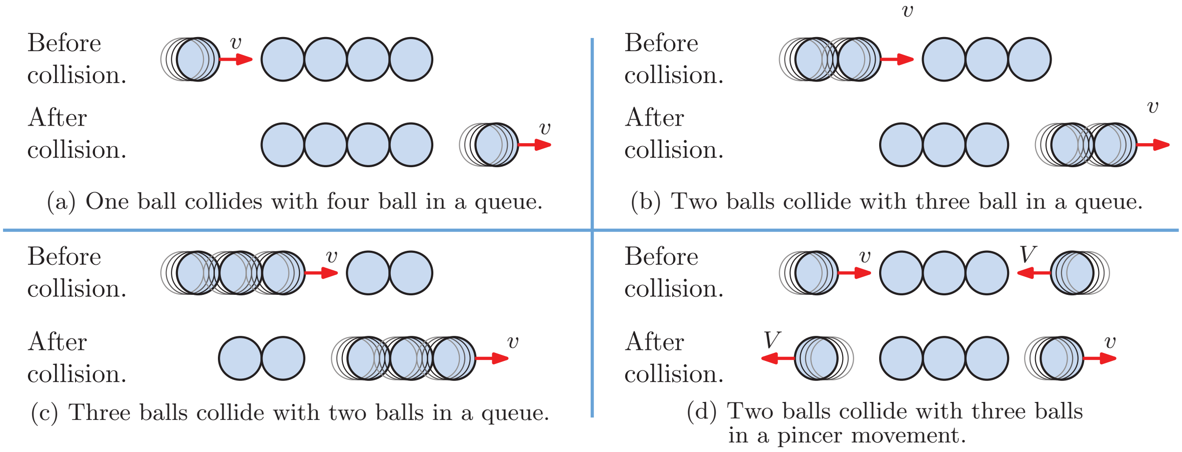


図 1.10: ニュートンのゆりかごで実験できる衝突現象

け飛び出す。この場合も原理は図 (a) と同様だ。最初の球が衝突し, 衝突が伝搬していく。その直後, 2 番目の球が左から衝突し, 同様に衝突が伝搬する。その結果, 球が 2 個だけ飛び出すのだ。図 (c) は説明不要だろう。衝突後, 球が 3 個だけ飛び出すのだ。図 (d) は, 両側から挟み撃つように球が衝突している。その衝突後, 両側から到来した球は跳ね返されたように, 逆方向に飛び出す。挟み撃ちになっているが, 左から到来する球による衝突の伝搬と, 右から到来した球の衝突の伝搬を, 1 ステップずつ想像してみればわかる。中央の球に左右から同時に衝突することを考えるとわかりにくいので, 左か右のどちらかが最初に衝突したと考える方がよい。その結果, 図のように左右から球が 1 個ずつ飛び出すはずだ。さらに, 左から到来する球の速さを v, 右から到来する球は V のように, 異なる速度を仮定してもよい。その場合, 右から速さ v で, 左から速さ V で球が飛び出すことになる。

近似的だが, 同じ大きさ, 同じ質量の球による弾性衝突はビリヤードボールの衝突で観測できる。回転や摩擦を無視すると, 衝突したビリヤードボールは図 1.11 に示すように, 相手のボールと直交する方向に運動する。 ビリヤードボールの衝突を理解するには, 図

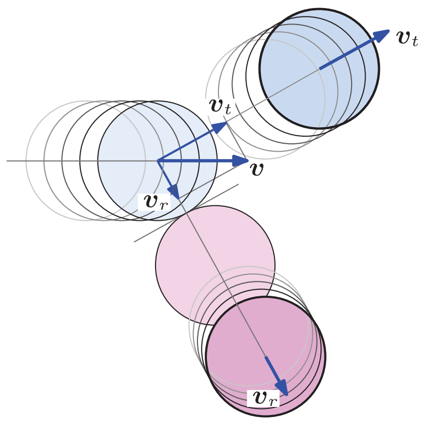


図 1.11: 同一サイズの球の弾性衝突

1.11 のように速度 (運動量) を成分分解すればよい。衝突の瞬間において, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を, 二つの球の中心を結ぶ動径成分 $\boldsymbol{v}_r$ と接線成分 $\boldsymbol{v}_t$ に分解した。動径成分 $\boldsymbol{v}_r$ が弾性衝突をする。弾性衝突の結果は, ニュートンのゆりかごと同様, 衝突したボールの速度がゼロになり, 衝突を受けたボールの速度が $\boldsymbol{v}_r$ を引き継ぐ。一方, 二つのボールで摩擦がないとすると, 接線成分の運動量 $m\boldsymbol{v}_t$ は相手の球に影響せず, 衝突したボールが保持することになる。その結果, 二つのボールは互いに直交する速度をもつわけだ。