

楕円積分と楕円関数

はじめに

目次

第1章 楕円積分	1
1.1 積分の実行	1
1.2 楕円積分の例	2
1.2.1 単振り子の周期	2
1.2.2 楕円の周囲長	5
1.3 楕円積分の標準形	6
1.4 ランデン変換による積分計算	8
1.4.1 ランデン変換	8
1.4.2 第1種楕円積分への応用	9
1.4.3 第2種楕円積分への応用	10
1.5 楕円積分の応用例	11
1.5.1 単振り子の周期と楕円の周囲長	12
1.5.2 円環ポテンシャル	12
第2章 ヤコビの楕円関数	15
2.1 楕円積分の逆関数	15
2.2 微分公式	16
2.3 加法公式	18
2.4 実数全体への定義域拡張	21
2.5 楕円関数の微積分	22
2.5.1 微分公式	23

2.5.2	積分公式	24
2.6	楕円積分との関係	25
2.6.1	逆楕円関数による楕円積分の記述	26
2.6.2	完全楕円積分の微分方程式	28
2.7	楕円関数の応用例	29
2.7.1	単振り子の運動	29
2.7.2	ローラコースターの運動	30
2.7.3	回転する縄の形状	33
第3章	複素関数としての楕円関数	37
3.1	複素数への拡張	37
3.2	楕円関数の性質	40
3.3	リーマン面と関数の周期性	46
3.3.1	リーマン面	46
3.3.2	三角関数の周期	48
3.3.3	ヤコビの楕円関数の周期	52
3.3.4	補助関数の周期	56
第4章	テータ関数	59
4.1	整関数の構成	59
4.2	ヤコビの θ 関数系	63
4.3	テータ関数	67
4.4	テータ関数の間関係	72
4.5	ヤコビの楕円関数との関係	73
第5章	ワイエルシュトラスの楕円関数	75
5.1	級数による定義	75
5.2	ワイエルシュトラスの微分方程式	78

5.3	ヤコビの楕円関数との関係	81
5.4	ワイエルシュトラスのツェータ関数	82
5.5	シグマ関数	84
5.6	加法公式	86
5.7	コシグマ関数	88
第 6 章	テータ関数・シグマ関数の応用	91
6.1	テータ関数とワイエルシュトラスの楕円関数	91
6.1.1	シグマ関数とテータ関数	91
6.1.2	ツェータ関数とテータ関数	94
6.1.3	楕円関数とテータ関数	96
6.2	ヤコビの楕円関数	97
6.3	楕円積分との関係	99
6.4	完全楕円積分	101
第 7 章	数値計算への応用	105
7.1	ガウス・ルジャンドル法による円周率計算	105
7.1.1	ルジャンドルの関係式	105
7.1.2	ランデン変換	109
7.1.3	数値検証	111
7.2	対数計算	112
7.2.1	漸近展開	113
7.2.2	メリン変換	113
7.2.3	メリン変換による関数解析	114
7.2.4	漸近展開	119
7.2.5	対数計算への応用	123

第1章 楕円積分

楕円の周囲長や単振り子の周期を計算する積分のように、被積分関数が初等的であるにも関わらず、解析的に積分が実行できないことがある。積分を実行するにあたり、どのように変数を置き換えても積分が実行できず、計算が行き詰ることがある。そのような積分のいくつかは楕円積分と呼ばれる積分である。本章は楕円積分を導入して、解析的に積分できる関数の幅を拡張しよう。

1.1 積分の実行

積分を解析的に実行するとはどのようなことであろうか？ 結論を述べると、微分に関する事前知識と数学公式を組み合わせ、微分する前の関数、すなわち、原始関数を導き出すことが、積分を解析的に実行することである。

例えば、 x についての積分を考えよう。被積分関数が x ならば $x^2/2$ が得られる。また、被積分関数が \sqrt{x} ならば $2x^{3/2}/3$ が得られる。このように解析的に積分が実行できるのは、 x^p の導関数が px^{p-1} になるという事前知識があるからである。さらに、 $2x \cos x^2$ を積分すると $\sin x^2$ が得られることを導けるのも同様である。この場合は、 $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であり、 x^2 の導関数が $2x$ であるという事前知識を応用しただけに過ぎない。

次の例として、 $\sqrt{1-x^2}$ の積分を考えよう。この積分は x の多項式のように単純には積分できないので、事前知識に合致できる形に変形できるかを考えるのだ。例えば、 $t = \sin x$ なる変数を導入してみると、

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}, \end{aligned}$$

のように計算できる。しかし、この積分結果は勝手に設定した t で記述されているだけなので、これでは不十分である。変数を x に戻す必要があるのだ。三角関数の基本知識があれば、第2項は変数を戻すことができ、

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{t}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2},$$

が得られる。第1項の t は, $\sin x = t$ を満たす t である。言い換えると, $\sin x$ の逆関数である。その逆関数は逆正弦関数と呼ばれ, $\arcsin x$ なる記号で定義される。新たに定義された記号を用いると,

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}),$$

のように解析的に積分を実行することができるのだ。つまり, この例は正弦関数の逆関数である逆正弦関数 $\arcsin x$ を用いて積分を実行することができた。

上に示した例は, 積分自体は初等関数の知識で実行でき, 数式として記述する際に逆正弦関数を定義した。その例とは異なり, 初等的な数式であるにもかかわらず, 積分の実行を試みても, 初等関数の範囲内での形式に収まらない場合がある。次節では, 初等関数で実行できない積分のうち, 楕円積分と呼ばれる例を取り扱ってみよう。

1.2 楕円積分の例

前節で $\sqrt{1-x^2}$ の積分が, 逆正弦関数を用いて実行できることを示した。しかし, この被積分関数と類似した関数は初等関数の範疇で解析的に積分できない。その例として, 本節では単振り子の周期と楕円の周囲長を取り扱う。

1.2.1 単振り子の周期

ガリレイが16世紀に発見した単振り子の周期の一定性は, 振れ幅が小さいときの近似にすぎない。任意の振れ幅で運動する単振り子の周期は, その振れ幅に依存する。正確に言うと, 振れ幅が大きいほど単振り子の周期は大きくなる。短振り子の周期は楕円積分の例である。本節では, 単振り子の周期を計算する。

図1.1に示す長さ l の振り子を考えよう。振り子の端点の一方が支点でもう一方が錘である。錘の位置を鉛直下方から測った角度 θ で表すものとする。錘には, 図に示すように鉛直下方に重力 mg が作用している。ここで, m は錘の質量, g は重力加速度である。その重力が錘を半径 l の円弧に沿った往復運動をさせる。錘の位置を, 鉛直下方から測った角度 θ で表すと, 錘の運動を与えるニュートンの運動方程式は, 角度 θ に関する2階微分方程式:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta,$$

となる。この運動方程式は,

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta,$$

のように書き換えておくと便利である。ここで、 $\dot{\theta}$ は角度 θ の時間微分である。つまり、

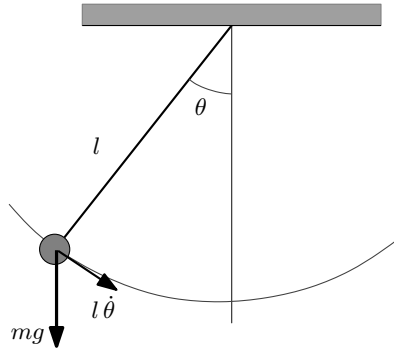


図 1.1: 単振り子

$l\dot{\theta}$ は振り子の速度である。まず、初等的な例として $\theta \ll 1$ としよう。その場合、運動方程式は近似的に、

$$\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g\theta}{l},$$

と書くことができる。この微分方程式を解くと、

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{g(\theta_0^2 - \theta^2)}{l}},$$

が得られる。ここで、 θ_0 は振り子の最高点を意味する積分定数である。つまり、 $\theta = \theta_0$ において $\dot{\theta} = 0$ となるように積分定数を選んである。

振り子の周期を計算するには、角度 θ の 1 階微分 $\dot{\theta}$ を利用するのが便利である。振り子の周期 T は、角度 0 から最高点 θ_0 まで振り子が移動する時間の 4 倍であるから、

$$T = 4 \int_{\theta=0}^{\theta_0} dt = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{4}{\theta_0} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2/\theta_0^2}},$$

のように計算できる。この式の右辺の積分は逆正弦関数 (arcsine) で与えることができ、

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \left[\arcsin \frac{\theta}{\theta_0} \right]_{\theta=0}^{\theta_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

が得られる。このように、振れ幅が小さい振り子は、初等的な積分で周期が計算でき、しかも、ガリレイが発見したように計算される周期は振れ幅 θ_0 に依存せず一定である。しかし、それは $\theta \ll 1$ に限られた特殊なケースである。

次に、任意の振れ幅の振り子について周期を計算しよう。振れ幅が小さいという条件をはずしただけなのに、問題は難しくなる。角度 θ について近似を適用せず $\dot{\theta}$ について微分方程式を解くと、

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{l}} = 2\sqrt{\frac{g}{l} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)},$$

が得られる。この式の右辺への変形には半角の公式を用いた。この結果を利用すると、振り子の周期 T を計算するための数式は、

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\theta} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2 \sin^2(\theta_0/2))}}, \end{aligned}$$

のように書くことができる。第2行目への数式変形には、 $x = \sin(\theta/2)/\sin(\theta_0/2)$ なる置き換えを適用した。さらに、 $k = \sin(\theta_0/2)$ とおくと、

$$T = 4\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 4\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

のように数式変形できる。この積分は初等関数によって与えることはできない。仕方ないので、被積分関数を級数展開して積分を実行してみよう。右辺の被積分関数を展開すると、その積分は、

$$T = 4\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 \sin^6 \varphi + \dots \right) d\varphi,$$

のように書き換えられる。その被積分関数にウォリスの積分公式:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \frac{\pi}{2},$$

を利用すると、一般振り子の周期 T は、

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}k^6 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2}k^8 + \dots \right),$$

のように計算される。ここで、 $k = \sin(\theta_0/2)$ であることを思い出すと、振り子の最高点 θ_0 が十分に小さいとき、周期は θ_0 に依存せず $2\pi\sqrt{l/g}$ になる。逆に、 θ_0 が大きくなるほど周期が長くなる。この級数は $\theta_0 = 30^\circ (= \pi/6)$ で、 k^8 の項まで計算すれば有効数字は5桁以上確保できる。この級数を用いて一般振り子の周期を計算すると図1.2のようになる。この計算では振り子の長さは0.2482 mとした。それは、振れ幅が小さいとき周期がちょうど1秒になる長さである。最高点 θ_0 が60度以内では周期は1.1秒に満たない。しかし、135度を超えると周期が急激に伸び、最高点が180度になると周期が無限大になる。最高点が180度いうことは、振り子が支点の真上の不安定な位置で釣り合っているため振り子が移動できないと考えると、周期が無限大であることが理解できるだろう。

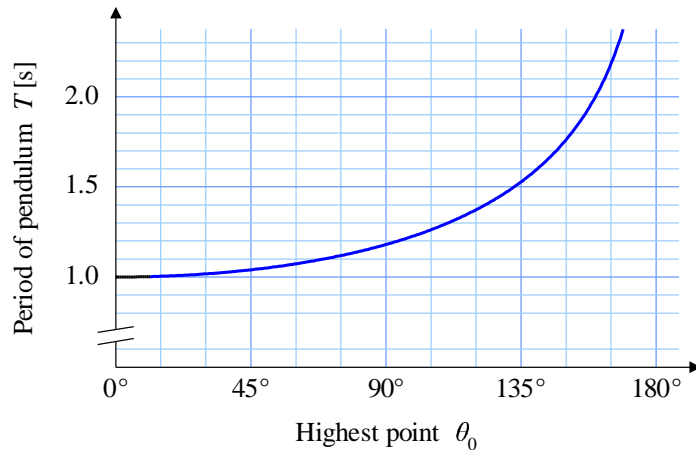


図 1.2: 一般振り子の周期 (長さ 0.2482 m)

1.2.2 楕円の周囲長

楕円の周囲長の計算も、初等関数を用いて実行できない積分の例である。その問題についても、前節と同様に級数展開を用いて実行してみよう。長半径が1で、短半径が k' の楕円:

$$x^2 + \frac{y^2}{k'^2} = 1,$$

の周囲長を計算してみよう。この楕円の式を y について解くと、

$$y = \pm k' \sqrt{1 - x^2},$$

となり、楕円の周囲に渡って $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ を積分すれば楕円の周囲長が計算できるはずなので、

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - (1 - k'^2)x^2}{1 - x^2}} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

のように計算できる。この計算は、第1象限での積分を4倍することで周囲長を算出しようとしている。第1行目の数式変形では $k'^2 = 1 - k^2$ なる置き換えを実行している。また、置き換えられた記号 k は離心率と呼ばれるパラメータである。第2行目への変形では $x = \sin \varphi$ なる置き換えを適用した。積分を実行するため、被積分関数をテイラー展開すると、

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi - \dots \right) d\varphi,$$

のようになる。この積分を実行するにはウォリスの公式を使えば、

$$L = 2\pi \left(1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} k^8 - \dots \right),$$

のように計算できる。この計算結果は図 1.3 のようになる。このグラフは横軸を離心率 k として長半径が 1 の楕円の周囲長をプロットしている。離心率がゼロならば円であるので周囲長は 2π である。離心率が 0.4 付近までは、周囲長の現象は緩やかであるが、それより

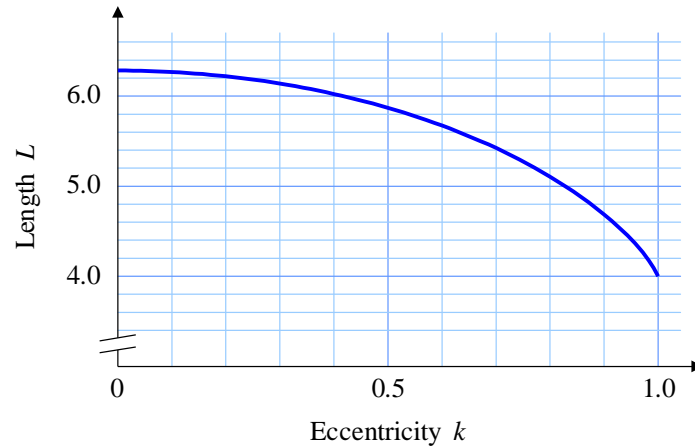


図 1.3: 長半径 1 の楕円の周囲長

離心率が大きくなると周囲長は急激に減少する。離心率が 1 になると、楕円は一直線上につぶれてしまうため、周囲長は 4 となる。

1.3 楕円積分の標準形

前に紹介した一般振り子の周期や、楕円の周囲長の計算に用いた積分は楕円積分と呼ばれる。楕円積分という名称は、被積分関数に楕円の周囲長の計算に用いられる $\sqrt{1-k^2x^2}$ が含まれることに由来する。

数学の分類として、 x の整式 $p(x)$ の平方根と x による有理式 $f(x)$ の積分:

$$\int f(x, \sqrt{p(x)}) dx$$

を考えたとき、 $p(x)$ が 1 次式、または、2 次式とき積分は初等関数で記述できる。しかし、 $p(x)$ が 3 次以上になると初等関数で記述できない。特に、 $p(x)$ が 3 次式か 4 次式の場合の積分は楕円積分と呼ばれる。ついでに、 $p(x)$ が 5 次式以上の積分は超楕円積分と呼ばれる。

楕円積分は、変数変換と数式変形によって次の 3 つのパターンに分類される。

$$F_J(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (1.1a)$$

$$E_J(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \quad (1.1b)$$

$$\Pi_J(k, n, x) = \int_0^x \frac{dx}{(1-nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (1.1c)$$

これらの積分は、ヤコビの標準形と呼ばれる形式であり、上から順に第1種、第2種、第3種の楕円積分の標準形である。第1種の楕円積分は一般振り子の周期で、第2種の楕円積分は楕円の周囲長の計算で既に紹介している。なお、楕円積分のパラメータ k は母数と呼ばれる。また、 $k' = \sqrt{1-k^2}$ は補母数と呼ばれる。楕円積分の標準形は、 $x = \sin \varphi$ のように置き換えて、

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (1.2a)$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (1.2b)$$

$$\Pi(k, n, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-n \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (1.2c)$$

なる形で書かれることが多い。この形式はルジャンドルの標準形と呼ばれる。容易にわかるように、ヤコビの標準形とルジャンドルの標準形は、

$$F_J(k, \sin \varphi) = F(k, \varphi), \quad E_J(k, \sin \varphi) = E(k, \varphi), \quad \Pi_J(k, n, \sin \varphi) = \Pi(k, n, \varphi),$$

のように対応づけられる。特に、第1種と第2種の標準形において、積分区間を $[0, \pi/2]$ とした定積分を完全楕円積分と呼ぶ。第1種と第2種の完全楕円積分は形式的に、

$$\begin{aligned} K(k) &= F(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= F_J(k, 1) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \end{aligned} \quad (1.3a)$$

$$\begin{aligned} E(k) &= E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= E_J(k, 1) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \end{aligned} \quad (1.3b)$$

と書かれる。完全楕円積分は、既に一般振り子の周期と、楕円の周囲長のために計算をした。その結果を再び書くと、完全楕円積分は、

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} k^8 + \dots \right), \quad (1.4a)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} k^8 - \dots \right), \quad (1.4b)$$

なる級数で計算できる。この級数は次数が小さいうちは収束性がよい¹。例えば、 $K(k)$ は最初の4項 (k^6 の項まで) で誤差は0.15%程度になる。第1種と第2種の楕円関数をさらに優れた収束速度で計算する手法として、ランデン変換を次節で紹介する。

¹つまり、次数を大きくしていくとあまり有効桁が伸びなくなるという意味でもある。

1.4 ランデン変換による積分計算

楕円積分は物理学で登場することも多く、興味深い。その積分値は既に示したように、級数展開によって計算することができる。一方、完全楕円積分はランデン変換というまったく異なる手法で計算することもできる。本節ではランデン (Landen) 変換による完全楕円積分の計算手法を導出する。

1.4.1 ランデン変換

ランデン変換は、楕円積分の母数を増減する作用がある数学変換である。楕円積分の母数 k と、積分変数 φ について、

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad (1.5a)$$

$$\tan(\varphi_1 - \varphi) = k' \tan \varphi, \quad (1.5b)$$

を用いて、新たな母数 k_1 と積分変数 φ_1 を定義する。ここで、 $k' \equiv \sqrt{1 - k^2}$ は楕円関数の補母数である。この変換はランデン変換と呼ばれる。後の計算でも使うため、(1.5a) を逆変換して、

$$k' = \frac{1 - k_1}{1 + k_1}, \quad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1},$$

となることを注意しておく。この変換式から楕円積分計算に必要な性質を抽出していこう。変換式 (1.5b) から即座に、

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \frac{k' \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \cos(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

が導かれるが、これに三角関数の加法定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi - \varphi_1) &= \frac{(1 + k') \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, & \sin \varphi_1 &= \frac{(1 - k') \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \cos(2\varphi - \varphi_1) &= \frac{\cos^2 \varphi - k' \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, & \cos \varphi_1 &= \frac{\cos^2 \varphi + k' \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

が得られる。これらの間の関係を調べると、

$$\sin(2\varphi - \varphi_1) = k_1 \sin \varphi, \quad (1.6a)$$

$$\cos(2\varphi - \varphi_1) + k_1 \cos \varphi = (1 + k_1) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \quad (1.6b)$$

を得ることができる。これを楕円積分に応用すると強力な効果を発揮するのである。その効果を以降の節で説明する。

1.4.2 第1種楕円積分への応用

楕円積分の母数を増減させるだけの変換に見えるランデン変換は、第1種楕円関数を計算するための有力な手法である。本節はランデン変換を第1種楕円積分に応用し、その強力な効果を示す。関係式 (1.6a) を微分して得られる数式:

$$\cos(2\varphi - \varphi_1) \cdot (2d\varphi - d\varphi_1) = k_1 \cos \varphi_1 d\varphi_1,$$

を整理して、(1.6b) に注目すると、

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1 + k_1}{2} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}}, \quad (1.7)$$

を導き出せる。この式の両辺を積分すると、

$$F(k, \varphi) = \frac{1 + k_1}{2} F(k_1, \varphi_1), \quad (1.8)$$

を得る。つまり、ランデン変換によって、楕円積分を母数が小さい楕円積分で表すことができる。ランデン変換を繰り返せば k をさらに小さくすることができる。

ランデン変換の反復 実際の数値計算では (1.8) を繰り返し適用すれば効率的に第1種楕円積分を計算できる。補母数について、 $a \geq b$ なる正の実数を用いて $k' = b/a$ とおき、 $a_1 = (a + b)/2$, $b_1 = \sqrt{ab}$ とすれば、 $k_1 = b_1/a_1$, $1 + k_1 = a/a_1$ が成立することは容易にわかる。

さらにランデン変換を繰り返し、母数 k_1 から k_2, k_3, k_4, \dots をつくることを考えよう。すなわち、

$$k_{n+1} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n}, \quad \tan(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = k'_n \tan \varphi_n,$$

を適用した場合を想定する。さらに、先ほどの a_1, b_1 から $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ を定義すると、 $k'_n = b_n/a_n$, $1 + k_n = a_{n-1}/a_n$ が成り立つことは帰納的に証明できる。

第1種楕円積分に関するランデン変換 (1.8) を繰り返し適用してみると、

$$F(k, \varphi) = \frac{a}{a_1} \frac{F(k_1, \varphi_1)}{2} = \frac{a}{a_2} \frac{F(k_2, \varphi_2)}{2^2} = \dots = \frac{a}{a_n} \frac{F(k_n, \varphi_n)}{2^n},$$

が得られる。ランデン変換を無限に繰り返し、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、 $k_n \rightarrow 0$ となるので、 $F(k_n, \varphi_n) \rightarrow \varphi_n$ となる。さらに、 $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ という事実から、系列 a_n と b_n は共通の極限值 $M(a, b)$ に収束することも明らかである。この極限值 $M(a, b)$ は、 a と b の算術幾何平均とよばれるが、これを用いると、

$$F(k, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \varphi_n}{2^n M(a, b)}, \quad (1.9)$$

と書くことができる。

特に $\varphi = \pi/2$ の場合, すなわち, 第1種完全楕円積分について考えてみる。積分変数 φ_n が $\pi/2$ の整数倍であれば, (1.6b) より $\varphi_{n+1} = 2\varphi$ となるので, $\varphi_n = 2^{n-1}\pi$ と書くことができる。よって, 第一種完全楕円積分は

$$K(k) = \frac{a\pi}{2M(a, b)}, \quad (1.10)$$

で計算することができる。この手法で計算すると, 繰り返し回数 n を1つ増加するごとに, 有効数字が2倍になる特徴がある。その収束性は2次収束と呼ばれる性質である。その収束速度については, 第7章で解説する。

1.4.3 第2種楕円積分への応用

第二種楕円積分についても, ランデン変換を適用して効率よく数値計算をすることができる。まず, (1.6b) を自乗すると,

$$2(1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1) - k_1'^2 + 2k_1 \cos \varphi_1 \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1} = (1 + k_1)^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi),$$

となる。この式に (1.7) を乗じて積分すれば, 第2種楕円積分のランデン変換

$$E(k, \varphi) = \frac{1}{1 + k_1} \left[E(k_1, \varphi_1) - \frac{k_1'^2}{2} F(k_1, \varphi_1) + k_1 \sin \varphi_1 \right], \quad (1.11)$$

を得ることができる。

それでは, $\varphi = \pi/2$ の場合, すなわち, 完全楕円積分についてランデン変換を繰り返してみよう。しかしながら, $\varphi = \pi/2$ の条件で (1.11) を書き直すと,

$$E(k) = \frac{1}{1 + k_1} \left[2E(k_1) - k_1'^2 K(k_1) \right],$$

となるので, これを繰り返すと, 右辺第一項が発散すると予想できる。発散項の発生を考えると, この変換は数値計算には不向きである。そこで, (1.11) に (1.8) の逆数を乗じると,

$$\frac{E(k)}{K(k)} = \frac{2}{(1 + k_1)^2} \left[\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{k_1'^2}{2} \right], \quad (1.12)$$

を得る。さらに, この式の両辺から $1 - k^2/2$ を引くと,

$$\frac{E(k)}{K(k)} - \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) = \frac{2}{(1 + k_1)^2} \left[\frac{E(k)}{K(k)} - \left(1 - \frac{k_1^2}{2}\right) - \frac{k_1^2}{2} \right], \quad (1.13)$$

となる。この式を見やすくするため、

$$G(k) \equiv \frac{E(k)}{K(k)} - \left(1 - \frac{k^2}{2}\right),$$

とおいてみると、(1.13)は、

$$G(k) = \frac{2}{(1+k_1)^2} \left[G(k_1) - \frac{k_1^2}{2} \right], \quad (1.14)$$

と書くことができる。この変換式は発散項を含まないので、前節の方法であらかじめ $K(k)$ を必要な精度で計算していれば、 $E(k)$ を必要な精度で計算できる。

ランデン変換の反復 それでは、(1.14)の変換を繰り返して、数値計算に適した方法を見つけてみよう。ここでも、 $a \geq b$ なる正の実数を用いて、 $k' \equiv b/a$ とし、算術幾何平均を用いて a_n と b_n を更新していく方法をとる。すると、

$$\begin{aligned} G(k) &= 2 \frac{a_1^2}{a^2} G(k_1) - \frac{a_1^2 - b_1^2}{a^2} = 4 \frac{a_2^2}{a^2} G(k_2) - 2 \frac{a_2^2 - b_2^2}{a^2} - \frac{a_1^2 - b_1^2}{a^2} \\ &= 2^n \frac{a_n^2}{a^2} G(k_n) - \sum_{j=1}^n 2^{j-1} \frac{a_j^2 - b_j^2}{a^2} = - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1} \frac{a_j^2 - b_j^2}{a^2}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

となることがわかる。この式の変形に関して、 $n \rightarrow \infty$ のとき $k_n \rightarrow 0$ となることを利用している。さらに、この式の両辺に $1 - k^2/2$ を加えると、

$$\frac{E(k)}{K(k)} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j-1} \frac{a_j^2 - b_j^2}{a^2}, \quad (1.16)$$

が得られる。ここで便宜上、 $a_0 \equiv a$ 、 $b_0 \equiv b$ とおいた。算術幾何平均を用いているため、 a_n と b_n は急激に同一の値へと収束する。具体的には、 $a_n - b_n$ がゼロに向かって2次収束するため、(1.16)は2次収束することになる。つまり、(1.16)において総和記号の実行に対して1項加算するたびに有効桁が2倍ずつ改善されるのである。その収束速度については、第7章で解説する。

1.5 楕円積分の応用例

初等関数では計算できなかった楕円積分を $F(k, \varphi)$ 、 $E(k, \varphi)$ のような関数として定義し、それらを計算する手法を説明した。以降、楕円積分が現れると、具体的な数値を示す代わりに $F(k, \varphi)$ や $E(k, \varphi)$ を用いて数式を記述すればよい。具体的な値を記号で肩代わりして記述することは、初等数学における $\sqrt{2}$ 、 $\log 2$ などの記述と同じことである。

1.5.1 単振り子の周期と楕円の周囲長

本章の前半で単振り子の周期と、楕円の周囲長を取り扱ったとき、楕円関数の計算を議論したが、記号を用いた表記をしなかったので改めて楕円積分としての記号で表記しよう。

単振り子の周期 単振り子の周期 T は第 1.2.1 節で積分を示した。第 1.2.1 節で与えたように、振り子の最大振れ幅を θ_0 とし、楕円積分の母数を $k \equiv \sin(\theta_0/2)$ のように定義する。そのとき、その積分を楕円積分の記号に置き換えると、

$$T = 4 \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 4 \sqrt{\frac{g}{l}} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 4 \sqrt{\frac{g}{l}} K(k),$$

と書くことができる。つまり、単振り子の周期は第 1 種の完全楕円積分である。振り子の振れ幅が小さい場合、すなわち、 $k \ll 1$ のとき、 $K(k) \simeq \pi/2$ である。よって、振れ幅の小さい振り子の周期は、 $T \simeq 2\pi\sqrt{g/l}$ となる。

振れ幅 θ_0 の単振り子について、錘が鉛直下方 $\theta = 0$ から任意の角度 α に到達するまでの時間も同様に計算することができる。第 1.2.1 節によると、 $1/\dot{\theta}$ の積分区間を $[0, \theta_0]$ の代わりに $[0, \alpha]$ とすればよいのだ。計算過程は省略するが、錘が鉛直下方から角度 α に到達するまでの時間 t は、

$$t = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{\sin(\alpha/2)/\sin(\theta_0/2)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F_J\left(k, \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\theta_0/2)}\right),$$

となる。この式はヤコビの標準形で記述したが、 $x = \sin \varphi$ で置き換えればルジャンドルの標準形で書いてもよい。どちらの表記法にしても、この数式によって時刻 t と錘の到達角度 α の関係が求まることがわかった。この関係式を α について解けば α を t の関数として書くことが可能であるが、それは次章で取り扱うことにする。

楕円の周囲長 楕円の周囲長は第 1.2.2 節で計算式を示した。第 1.2.2 節によると、長半径が 1 で離心率 k の楕円の周囲長 L は、

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 4E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 4E(k),$$

と書くことができる。特に、離心率が $k = 0$ の場合、 $E(k) = \pi/2$ であるので、周囲長は $L = 2\pi$ となる。その特殊な値は、離心率がゼロの楕円が円であることと矛盾がない。

1.5.2 円環ポテンシャル

楕円積分の例として、帯電した円環による静電ポテンシャルを挙げよう。図 1.4 示すように、座標の原点を中心として xy 平面状に半径 r の円環が存在する。その円環は、単位長

あたり ρ の電荷が帯電しているとする。一方、円環から高さ h , x 軸方向に a だけ隔てた点 P を観測点とする。この観測点における静電ポテンシャルを計算しよう。

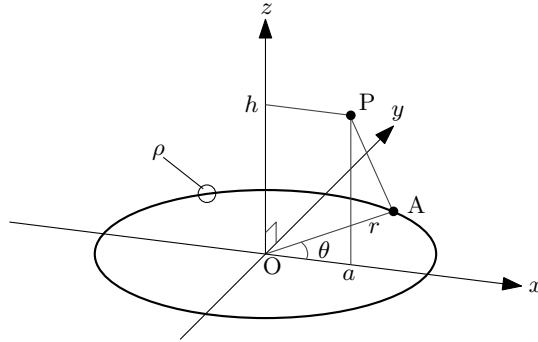


図 1.4: 円環に帯電した電荷

ポテンシャルの計算に対し、円環上の点 A を考えよう。点 A は、 x 軸から反時計回りに角度 θ の位置であるとする。このとき、点 A から観測点 P までの距離は、

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{(r \cos \theta - a)^2 + r^2 \sin^2 \theta + h^2} \\ &= \sqrt{(r + a)^2 + h^2 - 4ar \cos^2 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned}$$

のように計算される。点 A の近傍の微小角度 $d\theta$ の微小区間に含まれる電荷が $\rho r d\theta$ であるので、観測点 P におけるポテンシャルのうち、その微小区間の寄与は、電磁気学の公式から、

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho r d\theta}{\sqrt{(r + a)^2 + h^2 - 4ar \cos^2(\theta/2)}},$$

のように与えられる。ここで、 ϵ_0 は誘電率なる比例係数である。ポテンシャル U は、この寄与を円環一周にわたって積分すればよいので、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho r d\theta}{\sqrt{(r + a)^2 + h^2 - 4ar \cos^2(\theta/2)}} \\ &= \frac{\rho r}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{(r + a)^2 + h^2 - 4ar \cos^2(\theta/2)}}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

によって計算できる。ここで、

$$k^2 \equiv \frac{4ar}{(r + a)^2 + h^2}, \quad \varphi \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2},$$

とおけば、ポテンシャル U は、

$$U = \frac{\rho r}{\pi\epsilon_0 \sqrt{(r + a)^2 + h^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\rho k}{2\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{r}{a}} K(k), \quad (1.18)$$

のように計算できる。なお、導出の途中で導入した k は、 r と a の間の相加平均と相乗平均の大小関係から、 $k^2 \leq 1$ であることが示される。なお、等号が成立するのは、 $r = a$ かつ $h = 0$ のときである。一方、 $a = 0$ の場合、 $k = 0$ であるので初等関数のみで積分を実行できる。

円環ポテンシャルを計算すると図 1.5 のようなグラフを描くことができる。このグラフは、荷電粒子の水平位置 a を媒介変数として、鉛直位置 h についての依存性を描いている。鉛直位置 h が増加すると、水平位置 a への依存性が小さくなるが、 h が小さいとき、すな

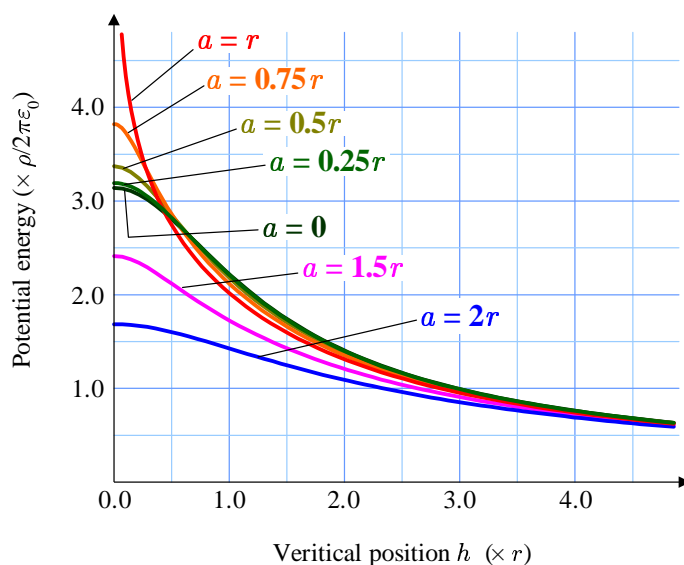


図 1.5: 円環ポテンシャルの計算結果

わち、円環に近い位置では a の依存性が見られている。特に、 $a < 1$ のとき、 a が小さくなるとポテンシャルが小さい。一方、 $a > 1$ では a が大きくなるほどポテンシャルが小さい。これは、荷電粒子の動きを円環と同一の平面上に制限した場合、円環の内部では荷電粒子は中心に向かって力を受け、円環の外部では無限遠に向かって力を受けることを示唆している。また、 $a \neq r$ のとき、 $h = 0$ でのポテンシャルの傾きがゼロになっているので、荷電粒子を正確に $h = 0$ に配置すれば、荷電粒子は垂直方向に力を受けないことを示唆している。しかし、位置が少しでも $h = 0$ からずれると、ポテンシャルの曲線を滑り落ちるように無限遠に向かって運動を始める。

第2章 ヤコビのの楕円関数

本章では、逆三角関数と三角関数の関係のように、楕円積分の逆関数となる関数を導入する。その逆関数はヤコビの楕円関数と呼ばれる関数である。本章の後半で例を示すとおり、ヤコビの楕円関数は物理現象を表現するために有用な関数である。

2.1 楕円積分の逆関数

ヤコビの楕円関数は、楕円積分の逆関数を正弦関数にならって定義される。正弦関数 $\sin u$ を例にとると、その逆関数¹ $\arcsin x$ は定積分:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

で定義される。ただし、実数関数の範囲では、 x は $[-1, 1]$ の範囲に限定され、逆正弦関数の主値は $[-\pi/2, \pi/2]$ の範囲に収まる。この三角関数にならって、第1種の楕円積分:

$$u = F_J(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

の逆関数は $x = \operatorname{sn} u$ と定義される。この関数は、母数 k にも依存するので、 $\operatorname{sn}(u, k)$ と書かれるが、誤解を生じない場合、簡単に $\operatorname{sn} u$ と書く。ところで、誰がこの記法を定着させたか知らないが、楕円積分は $F(x, k)$ と書くにも関わらず、楕円関数は $\operatorname{sn}(u, k)$ と書く。このように、楕円積分と楕円関数では、変数の記述順が違うのだから困ったものだ。話を戻し、実数関数の範囲では、第1種の楕円積分の変数 x は $[-1, 1]$ の範囲に限られる。その x の範囲全体において、被積分関数が正の数であるので、第1種楕円積分は x の増加に対して単調増加となる。そのため、 x が $[-1, 1]$ の範囲において、逆関数 $\operatorname{sn} u$ が一意的に定まるはずである。逆に、第1種楕円積分は sn 関数の逆関数なので、 $F_J(k, x) = \operatorname{arcsn} x$ と書くことができる。さらに、 $\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$ にならって、

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

¹逆正弦関数は $\sin^{-1} x$ や $\operatorname{Sin}^{-1} x$ と書くこともある。しかし、 $\sin^2 x$ が正弦関数の自乗を表すことを考えると、著者は $\sin^{-1} x$ を逆正弦関数と読み替えることに抵抗を感じるので、本書では逆正弦関数を $\arcsin x$ と記述する。

なる2つの補助関数を定義しておく。なお, sn 関数, cn 関数, dn 関数は, それぞれ, 単純にエスエヌ関数, シーエヌ関数, ディーエヌ関数と読む。

上のように定義された sn 関数は奇関数である。つまり, $\text{sn}(-u) = -\text{sn } u$ が成立する。その性質は, 第1種楕円積分の積分域を $[0, -x]$ として計算すればよい。

$$\int_0^{-x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = -u.$$

この計算は $t = -x$ の置き換えを用いた。この計算結果から, $-x = \text{sn}(-u)$ であると言えるので, $\text{sn}(-u) = -\text{sn } u$ が成立する。言い換えると, sn 関数は奇関数である。逆に, 補助関数 cn 関数と dn 関数は, それらの定義から明らかに偶関数である。

特別な値として, 積分域を $[0, 1]$ とすると, 楕円積分は完全楕円積分になるので,

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

である。右辺の K は $K(k)$ を簡略化した記号である。この積分結果から, $\text{sn } K = 1$, さらに, sn 関数が奇関数であるので $\text{sn}(-K) = -1$ が得られる。補助関数を含め, 楕円関数を定義域 $[-K, K]$ での増減を調べると次の表のようになる。なお, 表中の k' は補母数 ($= \sqrt{1-k'^2}$) である。

表 2.1: 定義域の中における楕円関数の増減

	$-K$	\dots	0	\dots	K
sn u	-1	\nearrow	0	\nearrow	1
cn u	0	\nearrow	1	\searrow	0
dn u	k'	\nearrow	1	\searrow	k'

現時点でヤコビの楕円関数に関してこの性質までが規定できる。つまり, 補助関数を含め楕円関数の定義域は $[-K, K]$ である。関数の値域は, sn 関数は $[-1, 1]$, cn 関数は $[0, 1]$, dn 関数は $[k', 1]$ である。まだ関数の定義域が狭いが, これから様々な規則性を見つけながら定義域を拡張していく。

2.2 微分公式

楕円関数の性質を探る手がかりは微分に関する性質である。ヤコビの楕円関数が第1種楕円積分 $F_J(k, x)$ の逆関数であることを利用すればよい。楕円積分 $u = F_J(k, x)$ を x につ

いて微分すると,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

が得られる。このとき, $x = \operatorname{sn} u$ であるはずなので, この導関数の逆関数をとると,

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

が得られる。補助関数が sn 関数の関数で記述できているので, 補助関数の導関数も容易に計算することができ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= \frac{\operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}} = \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= \frac{\operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}} = \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \end{aligned}$$

が得られる。念のため, 得られた微分公式を改めて書くと,

$$(\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{cn} u)' = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{dn} u)' = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \quad (2.1)$$

となる。ただし, プライム (') は u についての微分を意味する。

テイラー展開 楕円関数の微分公式を得たので, 楕円関数をテイラー級数で展開することが可能である。楕円関数 $\operatorname{sn} u$ を順次, 微分を繰り返していくと,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sn} u)' &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ (\operatorname{sn} u)'' &= -\operatorname{sn} u \operatorname{sn}^2 u - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn}^2 u = -(1+k^2) \operatorname{sn} u + 2k^2 \operatorname{sn}^3 u, \\ (\operatorname{sn} u)''' &= -(1+k^2)(\operatorname{sn} u)' + 6k^2 \operatorname{sn}^2 u (\operatorname{sn} u)' = -(1+k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)', \\ (\operatorname{sn} u)^{(4)} &= -(1+k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)'' + 12k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'^2, \\ (\operatorname{sn} u)^{(5)} &= -(1+k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)''' + 36k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'(\operatorname{sn} u)'' + 12k^2 (\operatorname{sn} u)'^3, \\ (\operatorname{sn} u)^{(6)} &= 48k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'(\operatorname{sn} u)''' + 72k^2 (\operatorname{sn} u)'^2 (\operatorname{sn} u)'' \\ &\quad + 36k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)''^2 - (1+k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)^{(4)}, \\ (\operatorname{sn} u)^{(7)} &= 120k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)''(\operatorname{sn} u)''' + 120k^2 (\operatorname{sn} u)'^2 (\operatorname{sn} u)'' + 180k^2 (\operatorname{sn} u)'(\operatorname{sn} u)''^2 \\ &\quad + 60k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'(\operatorname{sn} u)^{(4)} - (1+k^2 + 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)^{(5)}, \end{aligned}$$

が得られる。これを利用して, $u = 0$ を中心にテイラー級数展開する。級数展開の中心 $u = 0$ では, $\operatorname{sn} u = 0$, $\operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = 1$ である。これを利用して, 導関数の値を調べると, 偶数階の導関数はすべてゼロであることがわかる。奇数階の導関数の値を計算してすると

sn 関数のテイラー級数展開が得られる。補助関数についても、同様に高階の導関数を評価すればテイラー級数展開できる。結果を書くと、

$$\operatorname{sn} u = u - \frac{1+k^2}{3!}u^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}u^5 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!}u^7 + \dots \quad (2.2a)$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1+4k^2}{4!}u^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!}u^6 + \dots \quad (2.2b)$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - \frac{k^2}{2!}u^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{4!}u^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{6!}u^6 + \dots \quad (2.2c)$$

のようになる。ここでは、cn 関数と dn 関数の展開係数を得るための手順を省略したが、sn 関数と同様の手順で計算すれば展開係数が得られる。この式から判定しづらいが、これらの級数は $|u| < K' (= K(k'))$ が収束半径²である。

2.3 加法公式

三角関数や双曲線関数と同じように、ヤコビの楕円関数も加法公式をつくることができる。しかし、三角関数や双曲線関数のように簡単な構造ではない。まず、sn 関数の加法公式を考察しよう。ヤコビの楕円関数 sn u は母数が $k = 0$ のとき $\sin u$ と同一であり、 $k = 1$ のとき $\tanh u$ と同一である。それら二つの関数に関する加法公式は、

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v,$$

$$\tanh(u+v) = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u \tanh v},$$

である。楕円関数の補助関数が、 $k = 0$ のとき $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \cos u$ であり、 $k = 1$ のとき $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = 1 - \tanh^2 u$ であることに注意すると、楕円関数の加法公式が、

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

となることが推測できる。楕円関数の母数が $k = 0, 1$ となる場合、この推測は上に示した正弦関数と双曲線正接関数の加法公式と一致する。この推測が正しいことを一般の母数 k でも成立することを証明しよう。

推測した加法公式を証明するには、次のような形を考えるとよい。

$$\operatorname{sn} c = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(c-u) \operatorname{dn}(c-u) + \operatorname{sn}(c-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(c-u)}.$$

²後の章で明らかにするが、ヤコビの楕円関数を複素数に拡張した場合、 $u = iK'$ が原点に最も近い極である。その事実により、原点を中心にするテイラー級数展開の収束半径が $|u| < K'$ となる。

この式は c を定数とする。この式の右辺が変数 u と無関係であることを証明すればよい。数式変形の便宜上、分母を $N(u)$ 、分子を $D(u)$ としよう。つまり、

$$\begin{aligned} N(u) &= \operatorname{sn} u \operatorname{cn}(c-u) \operatorname{dn}(c-u) + \operatorname{sn}(c-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ &= \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn} u)' - \operatorname{sn} u (\operatorname{sn}(c-u))', \\ D(u) &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(c-u), \end{aligned}$$

である。ここで、プライム ($'$) は u についての微分を意味する。この後の計算のため、 sn 関数の 2 階微分:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sn} u)'' &= -(1+k^2) \operatorname{sn} u + 2k^2 \operatorname{sn}^3 u, \\ (\operatorname{sn}(c-u))'' &= -(1+k^2) \operatorname{sn}(c-u) + 2k^2 \operatorname{sn}^3(c-u), \end{aligned}$$

を計算しておく。これを用いて分子と分母を微分すると、

$$\begin{aligned} N'(u) &= \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn} u)'' - \operatorname{sn} u (\operatorname{sn}(c-u))'' \\ &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(c-u)), \\ D'(u) &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(c-u) \operatorname{dn}(c-u) - \operatorname{sn}(c-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u), \end{aligned}$$

が得られる。これを利用すると、

$$\begin{aligned} N(u) D'(u) &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2(c-u) \operatorname{dn}^2(c-u) - \operatorname{sn}^2(c-u) \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u) \\ &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) [\operatorname{sn}^2 u (1 - \operatorname{sn}^2(c-u))(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(c-u)) \\ &\quad - \operatorname{sn}^2(c-u) (1 - \operatorname{sn}^2 u) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)] \\ &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(c-u)) (\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(c-u)) \\ &= N'(u) D(u), \end{aligned}$$

が導かれるのだが、この関係式から、

$$\left(\frac{N(u)}{D(u)} \right)' = \frac{N'(u) D(u) - N(u) D'(u)}{D(u)^2} = 0,$$

となり、証明する関係式の右辺が確かに u と無関係な定数であることが明らかになる。その定数とは、 u に適当な値、例えば $u = 0$ を代入して、

$$\frac{N(0)}{D(0)} = \operatorname{sn} c,$$

であることが導かれる。したがって、証明する関係式が成立することが示せた。◀

補助関数 $\text{cn } u$ と $\text{dn } u$ についても同様に加法公式を導出することができる。それらの加法公式をまとめて書くと、

$$\text{sn}(u+v) = \frac{\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (2.3a)$$

$$\text{cn}(u+v) = \frac{\text{cn } u \text{ cn } v - \text{sn } u \text{ sn } v \text{ dn } u \text{ dn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (2.3b)$$

$$\text{dn}(u+v) = \frac{\text{dn } u \text{ dn } v - k^2 \text{sn } u \text{ sn } v \text{ cn } u \text{ cn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (2.3c)$$

となる。これがヤコビの楕円関数に関する加法定理である。

倍角と半角の公式 三角関数と同様に、楕円関数も加法公式を利用して倍角の公式を導出することができる。この加法公式に $u = v$ を代入すると、

$$\text{sn } 2u = \frac{2 \text{sn } u \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^4 u}, \quad (2.4a)$$

$$\text{cn } 2u = \frac{1 - 2 \text{sn}^2 u + k^2 \text{sn}^4 u}{1 - k^2 \text{sn}^4 u}, \quad (2.4b)$$

$$\text{dn } 2u = \frac{1 - 2k^2 \text{sn}^2 u + k^2 \text{sn}^4 u}{1 - k^2 \text{sn}^4 u}, \quad (2.4c)$$

なる倍角公式が得られる。特に、 cn 関数の倍角の公式は、

$$k^2(1 + \text{cn } 2u) \text{sn}^4 u - 2 \text{sn}^2 u + 1 - \text{cn } 2u = 0,$$

なる方程式となる。この方程式を $\text{sn}^2 u$ について解くと、

$$\begin{aligned} \text{sn}^2 u &= \frac{1 - \sqrt{1 - k^2(1 - \text{cn}^2 u)}}{k^2(1 + \text{cn } 2u)} = \frac{1 - \text{dn } 2u}{k^2(1 + \text{cn } 2u)} \\ &= \frac{(1 - \text{dn } 2u)(1 - \text{cn } 2u)}{k^2(1 - \text{cn}^2 2u)} = \frac{1 - \text{cn } 2u}{1 + \text{dn } 2u}, \end{aligned}$$

が得られる。この結果を利用すれば、ただちに $\text{cn}^2 u$ と $\text{dn}^2 u$ を計算することができる。それらの結果を半角の公式として書くと、

$$\text{sn}^2 \frac{u}{2} = \frac{1 - \text{cn } u}{1 + \text{dn } u}, \quad (2.5a)$$

$$\text{cn}^2 \frac{u}{2} = \frac{\text{cn } u + \text{dn } u}{1 + \text{dn } u}, \quad (2.5b)$$

$$\text{dn}^2 \frac{u}{2} = \frac{k'^2 + \text{dn } u + k^2 \text{cn } u}{1 + \text{dn } u}, \quad (2.5c)$$

が得られる。この公式に $u = K$ を代入すると、

$$\text{sn} \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \text{cn} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \quad \text{dn} \frac{K}{2} = \sqrt{k'},$$

が得られる。

2.4 実数全体への定義域拡張

前節で導出した加法公式を利用するとヤコビの楕円関数の定義域を実数全体に拡張することができる。まず、加法公式について、 $v = K$ を代入しよう。その際、 $\operatorname{sn} K = 1$, $\operatorname{cn} K = 0$, $\operatorname{dn} K = \sqrt{1 - k'^2}$ ($= k'$)に注意すると、

$$\operatorname{sn}(u + K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cn}(u + K) = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u}, \quad \operatorname{dn}(u + K) = \frac{k'}{\operatorname{dn}^2 u},$$

が得られる。これまでの議論では、ヤコビの楕円関数の定義域は $[-K, K]$ だった。しかし、その定義域で定義された楕円関数に対して、この公式を適用して実数全体で楕円関数を定義できるようにしよう。倍角の公式を用いると、

$$\operatorname{sn} 2K = 0, \quad \operatorname{cn} 2K = -1, \quad \operatorname{dn} 2K = 1,$$

が得られる。この結果を利用してさらに加法公式を適用すると、

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u,$$

なる関係が導かれる。この関係式をもう1回適用すると、 $\operatorname{sn}(u + 4K) = \operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn}(u + 4K) = \operatorname{cn} u$ となるので、 sn 関数と cn 関数は $4K$ の周期をもつ。一方、 dn 関数は $2K$ の周期をもつ。前に説明したように、 K は楕円関数の母数 k に依存する値である。一例として $k = 0.8$ を挙げると、ヤコビの楕円関数は図2.1に示す曲線を描く。母数 k が小さい場合、 sn 関数と cn 関数は正弦波に近い形状であるが、 k が大きくなると図のように sn 関数は上下を潰したような形状になる。逆に、 cn 関数は上下に尖った形状になる。形状が正弦波からずれても、ヤコビの楕円関数は周期関数であり、実数全体にわたって単一のパターンを繰り返す関数である。なお、図に示す $k = 0.8$ の場合、楕円関数の周期は $4K = 7.9812$ であり、これは正弦波の周期の約1.27倍である。

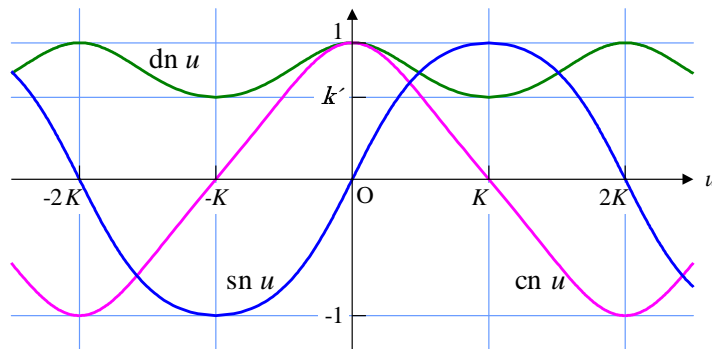


図 2.1: ヤコビの楕円関数 ($k = 0.8$)

第1種の楕円積分は、 $x = \sin \varphi$ のように置き換えると、

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

のように書き換えることができる。このとき、 u は φ の関数として、実数全体で単調増加で1価の連続関数となる。その逆関数を φ の振幅と呼び、 $\varphi = \text{am } u$ なる振幅関数で表す。この振幅関数を用いると、sn 関数は、

$$\text{sn } u = x = \sin \varphi = \sin(\text{am } u),$$

と書くことができる。同様に cn 関数は、

$$\text{cn } u = \cos(\text{am } u),$$

と書くことができる。この振幅関数は図 2.2 に示す曲線を描く。母数が $k = 0$ のとき、 $\text{sn } u$ は $\sin u$ と一致するので、 $\text{sn } u = \sin u = \sin(\text{am } u)$ であることから $\text{am } u = u$ となる。母数が大きくなるほど図 2.2 に描くように直線からずれてくる。なお、母数 k が異なると楕円関数の周期が異なるので、このグラフの横軸は K で正規化した尺度で描いている。図の $k = 0.9$ のグラフが、 $u/K = 0$ で傾きが大きく、 $u/K = \pm 1$ で傾きが小さいことは、図 2.1 に示した sn 関数の形状と合致する。

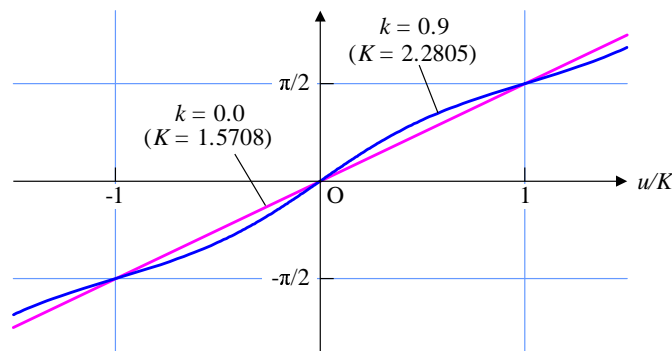


図 2.2: 振幅関数 $\text{am } u$

2.5 楕円関数の微積分

楕円関数の導関数が、 $(\text{sn } u)' = \text{cn } u \text{ dn } u$, $(\text{cn } u)' = -\text{sn } u \text{ dn } u$, $(\text{dn } u)' = -k^2 \text{sn } u \text{ cn } u$ であることを考えると、楕円関数の微積分の公式は三角関数のような単純な形にならないであろう。特に積分を解析的に実行するには、様々な微分公式の中から一致するものを選ぶ必要がある。本節では、楕円関数の微分公式をいくつか導出し、導出された公式に基づき、積分公式を探してみる。

2.5.1 微分公式

原始関数が楕円関数どうしの比である場合、その導関数は単純な形である。原始関数の分母の自乗が導関数の分母になり、原始関数の分子にも分母にも含まれない楕円関数が導関数の分母に含まれる。具体的には、

$$\frac{d}{du} \frac{\text{cn } u}{\text{sn } u} = -\frac{\text{dn } u}{\text{sn}^2 u}, \quad \frac{d}{du} \frac{\text{dn } u}{\text{sn } u} = -\frac{\text{cn } u}{\text{sn}^2 u}, \quad (2.6a)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\text{sn } u}{\text{cn } u} = \frac{\text{dn } u}{\text{cn}^2 u}, \quad \frac{d}{du} \frac{\text{dn } u}{\text{cn } u} = \frac{k'^2 \text{sn } u}{\text{cn}^2 u}, \quad (2.6b)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\text{sn } u}{\text{dn } u} = \frac{\text{cn } u}{\text{dn}^2 u}, \quad \frac{d}{du} \frac{\text{cn } u}{\text{dn } u} = -\frac{(1+k^2)\text{sn } u}{\text{dn}^2 u}, \quad (2.6c)$$

のようになる。これらの公式は、関数の積や商で表現される関数の微分公式にしたがって計算すると容易に導出できるので、特段、ここで導出過程を示す必要はないだろう。

楕円関数と補助関数の三つの関数のうち、二つを分子に残りの一つを分母に設定した原始関数を微分して得られる導関数は、

$$\frac{d}{du} \frac{\text{sn } u \text{ cn } u}{\text{dn } u} = \frac{1}{k^2} \left(\text{dn}^2 u - \frac{k'^2}{\text{dn}^2 u} \right), \quad (2.7a)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\text{cn } u \text{ dn } u}{\text{sn } u} = -\frac{1}{\text{sn}^2 u} + 1 - \text{dn}^2 u, \quad (2.7b)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\text{sn } u \text{ dn } u}{\text{cn } u} = \text{dn}^2 u + k'^2 \left(\frac{1}{\text{cn}^2 u} - 1 \right), \quad (2.7c)$$

となる。これらの微分公式も、関数の積や商で表現される関数の微分公式にしたがえば導出できるのだが、代表として(2.7a)の導出過程を示そう。関数の積と関数の商に対する微分公式を機械的に適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \frac{\text{sn } u \text{ cn } u}{\text{dn } u} &= \frac{\text{cn}^2 u \text{ dn}^2 u - \text{sn}^2 u \text{ dn}^2 u + k^2 \text{sn}^2 u \text{ cn}^2 u}{\text{dn}^2 u} \\ &= \text{cn}^2 u - \text{sn}^2 u + \frac{(1 - \text{dn}^2 u) \text{cn}^2 u}{\text{dn}^2 u} \\ &= 1 - 2\text{sn}^2 u + \frac{(1 - \text{dn}^2 u)(1 - \text{sn}^2 u)}{\text{dn}^2 u} \\ &= 1 - \frac{2(1 - \text{dn}^2 u)}{k^2} + \frac{1 - \text{dn}^2 u}{\text{dn}^2 u} \left[1 - \frac{1 - \text{dn}^2 u}{k^2} \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \frac{1}{\text{dn}^2 u} + \frac{\text{dn}^2 u}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left(\text{dn}^2 u - \frac{k'^2}{\text{dn}^2 u} \right), \end{aligned}$$

が得られ、(2.7a)が得られる。他の二つの公式も同様に導出できる。

2.5.2 積分公式

ヤコビの楕円関数を組み合わせた関数の導関数は, sn 関数, cn 関数, dn 関数の導関数を知っていれば, 一般関数の微分公式を用いれば導出できる。しかし, 積分は原始関数とその導関数の関係を利用するので, 簡単ではない。そのため, 前項でいくつかの微分公式を導出しておいたのだ。

三角関数の場合, $(\sin u)' = \cos u$, $(\cos u)' = -\sin u$ であるので, 正弦関数と余弦関数の積分は単純であった。しかし, ヤコビの楕円関数は三角関数のように単純ではない。ヤコビの楕円関数自体の積分公式は,

$$\int \operatorname{sn} u \, du = -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh} \frac{k \operatorname{cn} u}{k'}, \quad (2.8a)$$

$$\int \operatorname{cn} u \, du = \frac{1}{k} \operatorname{arcsin}(k \operatorname{sn} u) = \frac{1}{k} \operatorname{arccos}(\operatorname{dn} u), \quad (2.8b)$$

$$\int \operatorname{dn} u \, du = \operatorname{arcsin}(\operatorname{sn} u) = \operatorname{arccos}(\operatorname{cn} u), \quad (2.8c)$$

のような形になるのだ。以外にも, ヤコビの楕円関数を積分すると, 逆双曲線関数や逆三角関数が現れるのだ。なお, これら不定積分の積分定数の記述を省略している。この積分公式のうち, (2.8a) の導出過程を示そう。補助関数との関係 $\operatorname{dn}^2 = k'^2 - k^2 \operatorname{cn}^2 u$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn} u \, du &= \int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u} du = - \int \frac{(\operatorname{cn} u)'}{\sqrt{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u}} du \\ &= -\frac{1}{k} \log(k \operatorname{cn} u + \sqrt{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u}) \\ &= -\frac{1}{k} \log(k \operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u) = -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh} \frac{k \operatorname{cn} u}{k'}, \end{aligned}$$

が導かれる。残り二つの公式も同様に証明できる。

ヤコビの楕円関数の自乗を積分すると, 第2種楕円積分を含む関数になる。具体的に積分公式を示すと,

$$\int \operatorname{dn}^2 u \, du = E_J(k, \operatorname{sn} u) = E(k, \operatorname{am} u), \quad (2.9a)$$

$$\int \operatorname{sn}^2 u \, du = \frac{u - E(k, \operatorname{am} u)}{k^2}, \quad (2.9b)$$

$$\int \operatorname{cn}^2 u \, du = \frac{E(k, \operatorname{am} u) - k'^2 u}{k^2}, \quad (2.9c)$$

である。当然, これらの公式も積分定数を省略している。そのうち, 第1の公式は,

$$\int \operatorname{dn}^2 u \, du = \int \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx = E_J(k, x) = E_J(k, \operatorname{sn} u) = E(k, \operatorname{am} u),$$

によって導出される。ここで, E_J と E は,

$$E_J(k, z) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi,$$

によって定義される楕円積分の標準形と, ルジャンドルの標準形である。第2の公式は, $\operatorname{sn}^2 u = (1 - \operatorname{dn}^2 u)/k^2$ を利用すれば容易に導出できる。第3の公式は, $\operatorname{cn}^2 u = (\operatorname{dn}^2 u - k'^2)/k^2$ を利用すれば容易に導出できる。

前項で導出した微分公式を利用し, 不定積分の公式を記述しよう。微分公式 (2.6a) から (2.6b) を利用すると,

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad (2.10a)$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad (2.10b)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = \frac{1}{1+k^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad (2.10c)$$

が容易に得られる。これらの公式は, 導出に関して特に注意すべきことはない。

引き続き, 微分公式 (2.7a) から (2.7c) までを利用して積分公式をつくると,

$$\int \frac{du}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{1}{k'^2} \left[E(k, \operatorname{am} u) - \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right], \quad (2.11a)$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = u - E(k, \operatorname{am} u) - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad (2.11b)$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{1}{k'^2} \left[k'^2 u - \frac{1}{k'^2} E(k, \operatorname{am} u) + \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right], \quad (2.11c)$$

が得られる。この公式の導出には, $\operatorname{dn}^2 u$ の原始関数が第2種楕円積分 $E(k, \operatorname{am} u)$ であることを利用した。そのヒントさえ述べれば, 特に導出過程を示す必要はないだろう。

2.6 楕円積分との関係

ヤコビの楕円関数を定義したことによって, 楕円積分の結果を簡潔に表現することができる。その表現方法は, $(1-x^2)$ の不定積分を逆正弦関数 \arcsin を用いて記述するのと同様に, ヤコビの楕円積分の逆関数を用いて数式を記述するのだ。本節では, 楕円積分に関する公式を導出する。

2.6.1 逆楕円関数による楕円積分の記述

第1種楕円積分は、ヤコビの楕円積分の逆関数を用いて記述することができる。被積分関数 $(1-x^2)^{-1/2}(1-k^2x^2)^{-1/2}$ について、 $x \equiv \operatorname{sn} u$ なる置き換えを適用すると、積分公式:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \operatorname{arcsn}(x, k), \quad (2.12)$$

が得られる。今後の説明のため、この積分を sn 関数型の楕円積分と呼ぼう。なお、 $\operatorname{arcsn}(x, k)$ は $\operatorname{sn}(u, k)$ の逆関数である³とする。なお、この積分は $0 < k < 1$, $-1 \leq x \leq 1$ が条件づけられているとする。

続いて、 $x \equiv \operatorname{cn} u$ となる置き換えを適用すると、異なる形の積分の記述が可能になる。その置き換えによると、 $\operatorname{sn} u = \sqrt{1-x^2}$, $\operatorname{dn} u = \sqrt{k'^2 - k^2x^2}$ であることから、

$$\frac{dx}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u = -\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)},$$

なる関係が得られる。この関係式から、

$$u = \int_1^x \frac{dx}{-\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)}} = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)}},$$

が導かれるのだ。この積分で積分範囲を $[x, 1]$ としたのは $\operatorname{cn} 0 = 1$ だからである。したがって、

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)}} = \operatorname{arccn}(x, k), \quad (2.13)$$

なる積分公式が導かれる。この積分は先ほどの楕円関数の名称にならって、 cn 関数型の楕円積分と呼ばれる。さらに、 $x = \operatorname{dn} u$ とおくと、同様の計算によって、

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2 - k'^2)}} = \operatorname{arcdn}(x, k), \quad (2.14)$$

が導かれる。この積分は dn 関数型の楕円積分と呼ばれる。

三角関数における正接関数と同様に、 $\operatorname{tn} u \equiv \operatorname{sn} u / \operatorname{cn} u$ なる楕円関数を定義すると、その導関数は、

$$\frac{d}{du} \operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn} u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u},$$

となる。ここで、 $x \equiv \operatorname{tn} u$ とおき、 $1 + \operatorname{tn}^2 = 1/\operatorname{cn}^2 u$ が成立することに注意しながら数式変形すると、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}} = \operatorname{arctn}(x, k), \quad (2.15)$$

³この逆関数は $\operatorname{sn}^{-1}(x, k)$ と書く文献が多いかもしれないが、マイナス1乗との混同を避けるため、本書では $\operatorname{arcsn}(x, k)$ と書く。同様に、本書では $\operatorname{cn}(u, k)$ と $\operatorname{dn}(u, k)$ の逆関数を、それぞれ、 $\operatorname{arccn}(x, k)$, $\operatorname{arcdn}(x, k)$ と書く。

が導かれる。この積分を tn 関数型の楕円積分と呼ぼう。

上に示した基本形から次の楕円積分の公式が導かれる。被積分関数は同じような形をしているが、パラメータ a や b と変数 x との大小関係によるバリエーションをこれらの例は示している。なお、右辺に示した逆楕円関数の第2変数が楕円関数の母数である。

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsn}\left(\frac{x}{b}, \frac{b}{a}\right) \quad (0 \leq |x| \leq b < a), \quad (2.16a)$$

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsn}\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{a}\right) \quad (0 < b < a \leq x), \quad (2.16b)$$

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcdn}\left(\frac{x}{a}, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (0 < b \leq x \leq a), \quad (2.16c)$$

$$\int_x^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arccn}\left(\frac{x}{b}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \quad (0 \leq x \leq b), \quad (2.16d)$$

$$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arccn}\left(\frac{b}{x}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \quad (b \leq x), \quad (2.16e)$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctn}\left(\frac{x}{b}, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arccn}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (b \leq a). \end{aligned} \quad (2.16f)$$

第1の積分公式 (2.16a) は、 $t \equiv x/a$ とおけば、母数 $k = b/a$ の第1種楕円積分となることから導出される。第2の積分公式 (2.16b) は、 $t \equiv a/x$ とおけば、母数 $k = b/a$ の第1種楕円積分となることによる。

第3の公式 (2.16c) の左辺は、 $t \equiv x/a$ とおけば、補母数 $k' = b/a$ で dn 関数型の楕円積分になる。つまり、母数は $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ となり、(2.16c) が導かれる。

第4の公式 (2.16d) の左辺は、 $t \equiv x/b$ とおけば、母数 $k = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ の cn 関数型の楕円積分となる。それによって、(2.16d) が導かれる。さらに、第5の公式 (2.16e) の左辺は、 $t \equiv b/x$ の置き換えによって、母数 $k = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ の cn 関数型の楕円関数となる。それによって、(2.16e) が成立する。

第6の公式 (2.16f) の左辺は、 $t \equiv x/a$ とおけば、補母数 $k' = b/a$ の tn 関数型の楕円積分となる。そのとき、母数は $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ となるので第1行目の右辺が等号で結ばれる。第2行目は、 $1 + \operatorname{tn}^2 u = 1/\operatorname{cn}^2 u$ であることからただちに得られる。

2.6.2 完全楕円積分の微分方程式

第1種と第2種の完全楕円積分は、それぞれ、 $K(k)$ と $E(k)$ のように記述できることから、母数 k の関数と考えることができる。本項では完全楕円積分を母数 k で微分したときに成立する微分方程式を紹介する。

第1種と第2種の完全楕円積分 $E(k)$ と $K(k)$ は、母数 k について微分すると、

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}, \quad (2.17a)$$

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{kk'^2} - \frac{K}{k}, \quad (2.17b)$$

となる。この数式において、変数 k を省略して記述した。

上に示した公式のうち、第1式の導出は、

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= \frac{d}{dk} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx = - \int_0^1 \frac{kx^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx, \\ &= -k \int_0^K \text{sn}^2 u du = - \left[\frac{u - E(k, \text{am } u)}{k} \right]_0^K = \frac{E - K}{k}, \end{aligned}$$

のようになる。第1行目から第2行目への数式変形は、積分変数を $x \equiv \text{sn } u$ のように置き換えた。そのとき、 $\text{sn } 0 = 0$, $\text{sn } K = 1$ であることから、積分区間は $[0, K]$ となる。ここで、 K は第1種完全楕円積分 $K(k)$ を意味する。第2行目の積分を実行するには、積分公式 (2.9b) を適用した。また、位相関数 $\text{am } u$ は、 $u = K$ のとき $\text{am } u = 1$ となるので、 $E(k, \text{am } u) = E(k, 1) = E(k)$ となる。したがって、右辺が導出される。

第2の積分公式も同様に、 $x \equiv \text{sn } u$ なる置き換えを適用すれば導出できる。導出過程を示すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial k} &= \frac{d}{dk} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \int_0^1 \frac{kx^2}{(1 - x^2)^{1/2}(1 - k^2 x^2)^{3/2}} dx \\ &= k \int_0^K \frac{\text{sn}^2 u}{\text{dn}^2} du = \frac{1}{k} \int_0^K \left(\frac{1}{\text{dn}^2 u} - 1 \right) du = \frac{E}{kk'^2} - \frac{K}{k}, \end{aligned}$$

となる。この場合も前と同じ考察で積分区間が $[0, K]$ になっている。第2行目の積分を実行するために積分公式 (2.11a) を利用した。

完全楕円積分 E と K の母数 k についての導関数は、ともに、他方の完全楕円積分を含む数式で表現される。しかし、2階の微分方程式では、 E を含まない K だけの微分方程式:

$$\frac{d}{dk} \left(kk'^2 \frac{dK}{dk} \right) = kK, \quad (2.18)$$

を書くことができる。この微分方程式は、

$$k(1-k^2)\frac{d^2K}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dK}{dk} - kK = 0,$$

のように書き換えてもよいだろう。公式(2.18)は、公式(2.17b)に kk'^2 を乗じた数式を母数 k で微分すれば導出できる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk}\left(kk'^2\frac{dK}{dk}\right) &= \frac{d}{dk}(E - k'^2K) = \frac{dE}{dk} + 2kE - k'^2\frac{dK}{dk} \\ &= \frac{E-K}{k} + 2kK - \frac{E}{k} + \frac{1-k^2}{k}K = kK, \end{aligned}$$

のようにして公式(2.18)が導出できる。

2.7 楕円関数の応用例

前章で単振り子の周期が楕円積分であることを紹介した。ヤコビの楕円関数を用いれば単振り子の運動を時間の関数として記述することが可能となる。本節では、楕円関数応用例として、単振り子の運動と、その延長線としてローラコースターの運動を解析する。

2.7.1 単振り子の運動

本節では長さ l の単振り子の運動を時刻 t の関数で表そう。振り子の位置を鉛直下方から測った角度 θ で表すことにする。既以前節で示したが、振り子の位置は微分方程式:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}[\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)]}$$

で表される。ここで、 θ_0 は振り子が到達する最高点の位置である。前章ではこの方程式から単振り子周期を求めたのであるが、本節では θ を t の関数で表す。前章と同様に、 $x = \sin(\theta/2)/\sin(\theta_0/2)$ なる置き換えをして微分方程式を書き換える。その置き換えの結果、微分方程式は、

$$dx = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot (1-x)(1-k^2x^2)} dt$$

のように書き換えられる。ただし、 $k = \sin(\theta_0/2)$ である。この微分方程式の解を得るには、方程式を、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt$$

の形に書き直せばよい。この式の右辺が $\sqrt{g/l} \cdot t$ であるので、

$$x = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

が微分方程式の解である。ただし、時刻 $t = 0$ で $\theta = 0$ となるように積分定数を選んでい
る。変数の置き換えを元に戻すと、

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

が得られる。特に、振れ幅が小さい ($\theta_0 \ll 1$) とき、

$$\theta \simeq \theta_0 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

のように近似できる。求められた解を用いて振り子の運動を計算すると図 2.3 のよ
うになる。この図は、長さ 0.25 m の振り子を振れ幅 60 度と、120 度で往復運動させたとき
の運動を残留として描いている。振れ幅 (片側の角度 θ_0) が 60 度するとき、振り子は片道
を 0.5 秒

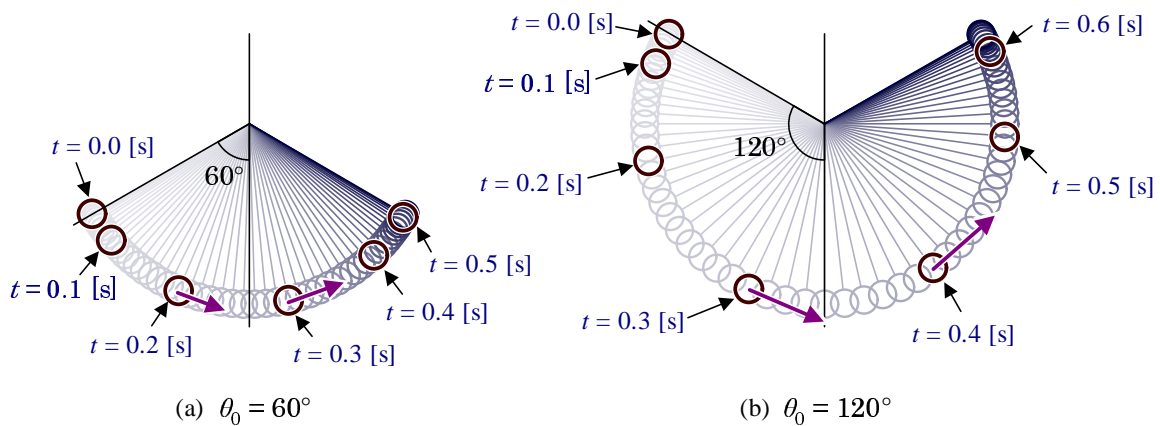


図 2.3: 振り子の運動 ($l = 0.25$ [m])

強の時間で移動する。一方、振れ幅が 120 度では、片道を移動するのに 0.6 秒を超える時
間を要する。これは、既に前章で示したように振り子の周期が振れ幅に依存する現象であ
る。任意の時刻における振り子の位置は、本節で導出したようにヤコビの楕円関数を用い
て記述できた。

2.7.2 ローラコースターの運動

前に解析した単振り子の問題は、重力によって往復運動する条件で物体の運動を計算し
た。この単振り子の問題に関して、 $\theta = \pi$ において速度をもつ条件をつけると、往復運動
でなく周回運動に対応する。その運動は、ローラコースターの運動が一例である。

周回運動の最下点、すなわち、 $\theta = 0$ での角速度を ω_0 としよう。そのとき、その物体の運
動は、

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos \theta - 1)} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{4g}{l} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.19)$$

なる方程式にしたがう。ただし、ローラコースターが周回運動するために、 $\omega_0 > 2\sqrt{g/l}$ を満足しなければならない。方程式(2.19)は運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定である法則、いわゆるエネルギー保存則に対応する。この方程式は、 $k^2 \equiv \omega_0^2 l / 4g$ によってパラメータ k を定義すると、

$$\frac{d\theta}{dt} = 2k \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (2.20)$$

のように書き換えられる。周回運動となるこの運動の周期は、

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2(\theta/2)}} \\ &= \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} K(1/k), \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで、 $K(1/k)$ は母数を $1/k$ とする第1種の完全楕円積分である。上に書いた k の定義によると、最下点での角速度が $\omega_0 \rightarrow \infty$ の極限で、楕円積分の母数はゼロに近づく。したがって、その極限で $K(1/k) \rightarrow \pi/2$ であるので、

$$T \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{as } \omega_0 \rightarrow \infty$$

であることが導かれる。この極限は次のように解釈すればよい。最下点での角速度が大きくなると、最高点での速度との差が小さくなるため、その周回運動は近似的に角速度 ω_0 の等速円運動とみなすことができる。そのため、その周期は近似的に $2\pi/\omega_0$ となる。

単振り子の問題と同様に、ローラコースターの位置は時間の関数で表すことができる。微分方程式(2.19)を解くと、

$$\sin \frac{\theta}{2} = \text{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} kt, \frac{1}{k} \right), \quad (2.21)$$

が得られる。この結果からローラコースターの運動軌跡を描くと図2.4のようになる。この図は、ループの直径を 30 m、最下点でのローラコースターを $\omega_0 l = 28.5 \text{ m/s}$ とする。ローラコースターは 28.5 m/s の速度でループに突入し、最高点を通過時に速度が 15.0 m/s となり、約 4.4 秒でループを一周する。ただし、この計算にローラコースターの長さの影響やレールとの摩擦を無視している。

母数についての考察 単振り子とローラコースターは、一様重力場の中の鉛直面における円弧上を運動することが共通する点であり、双方とも楕円関数によって解析することができた。定式化する際に用いたパラメータ k は、それらの問題で個別に定義したが、実は共通の意味がある。

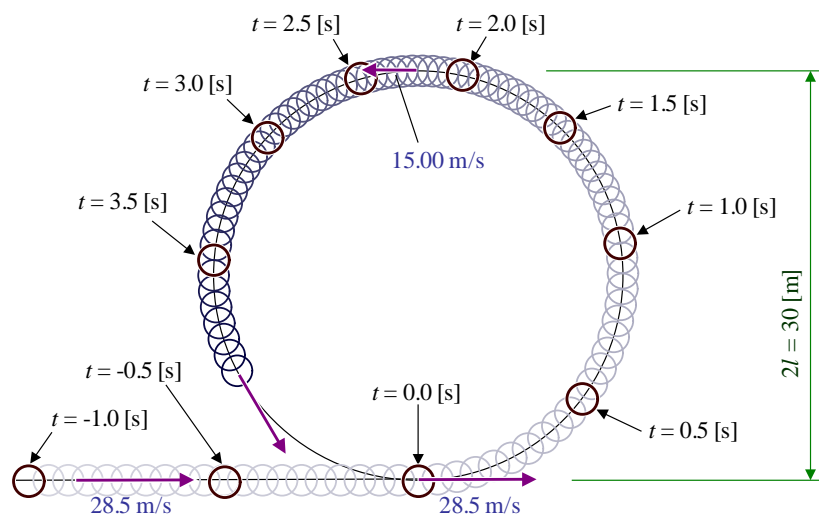


図 2.4: ローラコースターの運動

単振り子の問題では、振り子の最高点を θ_0 としたとき、母数に関連するパラメータとして、 $k \equiv \sin(\theta_0/2)$ と定義した。これを物理法則と照らし合わせて数式変形すると、

$$k = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_0}{2}} = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}},$$

が得られる。ここで、 v_0 は、振り子の最下点における速度である。分母の $2\sqrt{gl}$ は振り子の長さの2倍、すなわち、振り子が描く円の直径に相当する高さから振り子が落下したときの速度である。この落下速度を基準落下速度と呼んだとき、基準落下速度に対する振り子の最大速度の比が k に等しくなる。

ローラコースターの問題では、最下点におけるコースターの角速度を ω_0 としたとき、パラメータ k は、

$$k = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}},$$

のように計算できる。この数式でも、 v_0 を最下点におけるローラコースターの速度とした。つまり、 $v_0 = \omega_0 l$ である。したがって、ローラコースターの場合も基準落下速度に対するコースターの最高速度の比が k となるのである。

パラメータ k の解釈の意味で、単振り子の問題と、ローラコースターの問題は共通化できる問題なのである。基準落下速度に対する最高速度の比が $k < 1$ ならば単振り子の問題、 $k > 1$ ならばローラコースターの問題となる。その中間である $k = 1$ は、物体が円の頂上でつり合っ、動かない状態に対応する。物体の運動周期 T と、位置 θ を単振り子 ($k < 1$)

とローラコースター ($k > 1$) で対比して書くと,

$$T = \begin{cases} 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k), \\ \frac{2}{k}\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\frac{1}{k}\right), \end{cases} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \begin{cases} k \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, k\right), & (k < 1) \\ \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} kt, \frac{1}{k}\right), & (k > 1) \end{cases} \quad (2.22)$$

のように書くことができる。

2.7.3 回転する縄の形状

縄の両端を固定し、一様な重力場にまかせて縄をたるませると、縄は懸垂線 (双曲線余弦関数) を描くことが知られている。類似の問題として、縄跳びのように両端を固定した縄を回転させると、縄の中央が遠心力で膨らむ。その回転する縄はヤコビの楕円関数で表される形状となる。本節ではその事実を示そう。

縄の形状を求めるため、水平方向を x 軸、鉛直方向を y 軸とした座標系のもと、縄を x 方向に微小長さ Δx だけ切り出そう。切り出された微小長さの縄に作用する力の釣り合いから運動方程式を書いてみるのだ。微小長さの縄の左端と右端の x 座標を、それぞれ、 x 、 $x + \Delta x$ とする。それに対応する縄の両端の y 座標は、それぞれ x の関数とすると、 $y(x)$ 、 $y(x + \Delta x)$ となる。

微小長さの縄には、図 2.5 に示すように、その左側と右側につながった縄から張力を受ける。張力は縄の接線方向に作用し、しかも、張力の x 成分は縄の左側と右側で等しい。なぜなら、微小長さの縄に作用する垂直方向の力は張力の x 成分のみであり、縄は x 方向に釣り合っているからである。張力の水平成分を T とすると、左端に作用する張力の鉛直成分は $-Ty'(x)$ 、右端に作用する張力の鉛直成分は $Ty'(x + \Delta x)$ となる。したがって、微小長さの縄に作用する張力の合力は、鉛直方向に $Ty''(x)\Delta x$ である。微小長さの縄には、張力以外に遠心力が作用している。縄が $y = 0$ を軸に回転していると仮定すると、遠心力は

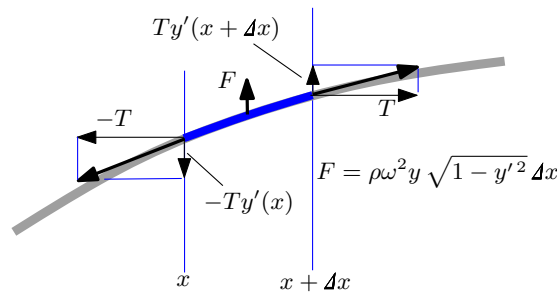


図 2.5: 回転する縄の微小長さに作用する力

$\rho\omega^2 y \sqrt{1 + y'^2} \Delta x$ である。ここで、縄の単位あたりの質量を ρ 、回転の角速度を ω とした。

力が釣り合っていることから、微小長さの縄に作用する力の和はゼロでなければならない。したがって、微小長さの縄に関する運動方程式は、

$$Ty'' \Delta x + \rho\omega^2 y \sqrt{1 - y'^2} \Delta x = 0,$$

となる。この式の両辺に Δx の逆数を乗じると、

$$Ty'' = -\rho\omega^2 y \sqrt{1 + y'^2}, \quad (2.23)$$

が得られる。この式が、縄の形状を決定する微分方程式である。ここで、 $2\alpha \equiv \rho\omega^2/T$ を定義すると、微分方程式は、

$$y'' = -2\alpha y \sqrt{1 + y'^2},$$

のように書き換えられる。この運動方程式の両辺に $y'/\sqrt{1 + y'^2}$ を乗じると、運動方程式は、

$$\frac{y'y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = -2\alpha yy',$$

のようになり、この式の両辺を積分すると、

$$\sqrt{1 + y'^2} = \beta - \alpha y^2,$$

が得られる⁴。この式の右辺に現れる β は積分定数である。この積分定数の値に依存して、 y は様々な関数となるのだが、ここでは回転する縄の形状に関係ありそうな場合に特定しよう。そのような理由で、 $\beta > 1$ の場合のみを考える。そのとき、微分方程式は、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{\beta + 1}{\alpha} - y^2\right) \left(\frac{\beta - 1}{\alpha} - y^2\right)} \alpha,$$

となる。この微分方程式を解くには、積分公式 (2.16a) を使えばよい。結果を書くと、

$$y = \sqrt{\frac{\beta - 1}{\alpha}} \operatorname{sn}\left(\sqrt{\alpha(\beta + 1)} x, \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}}\right),$$

となる。回転する縄の形状はヤコビの楕円関数 (sn 関数) となるのである。この式を見ると、積分定数 β だけで楕円関数の母数 k を決定することがわかるので、 β の代わりに k を使って数式を記述すると、

$$y = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{k}{k'} \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{2\alpha} x}{k'}, k\right), \quad (2.24)$$

が得られる。この記述の方がすっきりしているように見える。回転する縄がヤコビの楕円関数であることが明らかになったが、この数式には未知数が2つ含まれる。具体的は、 k と

⁴本書では力の釣り合いから微分方程式を導出したが、エネルギーが極値をとるという物理的要請から同一の微分方程式を得ることができる。その物理的要請から微分方程式を得るには、変分法という手法を用いる。興味のある読者は変分法のテキストを参照するとよい。

α が未知数⁵である。そのうち、 α はただちに特定できる。なぜなら、 $x = 0, l$ の 2 箇所で $y = 0$ となるのだから、 $\sqrt{2\alpha l/k'} = 2K$ となるはずである。したがって、

$$\alpha = \frac{2k'^2 K^2}{l^2}, \quad (2.25)$$

が導かれる。この α を用いて y を書き直すと、

$$y = \frac{kl}{k'^2 K} \operatorname{sn}\left(\frac{2Kx}{l}, k\right), \quad (2.26)$$

が得られる。これで未知数が k だけになった。

縄の長さは $L (> l)$ であるとする。このとき、縄の長さ L は、

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^l (\beta - \alpha y^2) dx \\ &= \int_0^l \left[\frac{1 + k^2}{k'^2} - \frac{2k^2}{k'^2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{2Kx}{l}, k\right) \right] dx, \end{aligned}$$

のように計算できる。右辺の被積分関数の第 2 項は、既に (??) によって積分の処方箋が与えられている。その処方箋にしたがうと、右辺の第 2 項の積分は、

$$\frac{2k^2}{k'^2} \int_0^l \operatorname{sn}^2\left(\frac{2Kx}{l}, k\right) dx = \frac{2l}{k'^2} \left(1 - \frac{E}{K}\right),$$

のように計算できる。右辺に見られる E は第 2 種の完全楕円積分である。つまり、 E も K と同様に母数 k に依存した値である。この積分値を代入すると、

$$\frac{L}{l} = \frac{2E}{k'^2 K} - 1, \quad (2.27)$$

なる関係が導かれる。この方程式を解けば楕円関数の母数 k が得られるのだ。つまり、母数 k は縄の長さ l と固定転換の距離の比 L/l にしか依存しない。しかし、この方程式を解くには解析的ではなく数値的な解法を用いる。縄の長さの比率 l/L を与えたときの楕円関数の母数 k は、図 2.6 に示すように計算できる。このグラフによると、ロープの長さに対し、固定点の距離を短くとれば楕円関数の母数 k は大きくなる。

例を 2 つ設定し、回転する縄の形状を計算した結果を図 2.7 に示そう。この図の左は、長さ 2.8 m の縄を 0.8 m 離れた 2 点を中心に回転させたときの形状である。これは、1 人で縄跳びするときの縄の形状と思えばよい。なお、この例では楕円関数の母数が $k = 0.86$ となり、縄の腹における配点半径は 1.24 m である。右側の例は、長さ 5 m の縄を 3.5 m 離れた 2 点を中心に回転させたときの形状である。この例は長縄跳びにおける縄の形状と思えばよいだろう。この例では、母数が $k = 0.5$ となり、腹における縄の回転半径は 1.5 m となる。

⁵さらに具体的に述べると、 $\alpha = \rho\omega^2/2T$ に含まれる張力 T が未知数である。

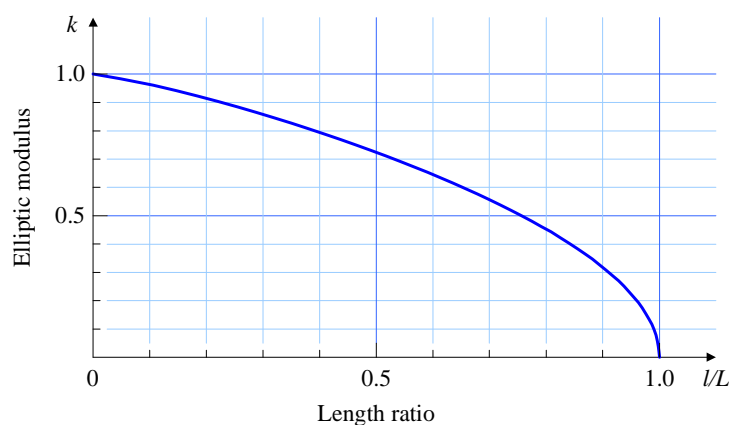


図 2.6: 回転する縄の長さの比率と楕円関数の母数

図 2.6 に示すように長さの比率 l/L を大きくとると母数 k が小さくなる。つまり、一人で縄跳びを飛ぶよりも、大勢で飛ぶ長縄跳びの方が k が小さい。つまり、長縄跳びの方が回転するときの形状が正弦関数に近い形をしている。一人で飛ぶ縄跳びは、正弦波からの変形が大きく楕円関数らしい形状になる。縄跳びの形状は、身近に楕円関数を見ることができる例である。

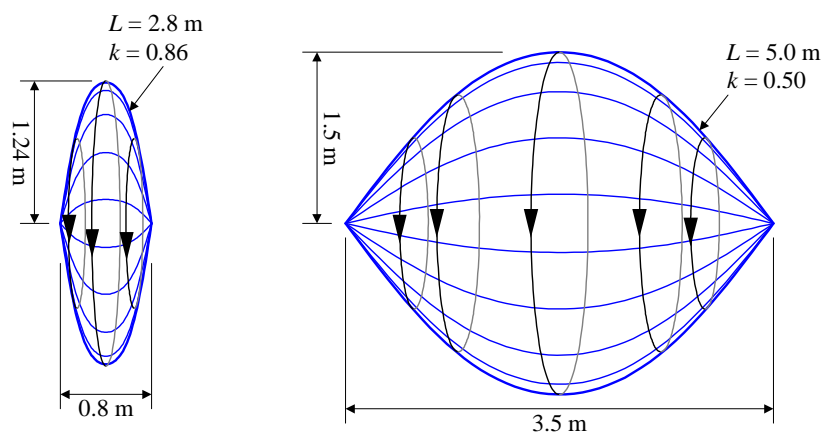


図 2.7: 回転する縄の形状

最後に、もう一つの未知数について考えよう。もう一つの未知数とは α である。その未知数は、(2.25) で計算できる。すでに母数 k が求まっているので、その関係式によって α が計算できるのである。正確に言うと、本当の未知数は α に含まれる張力 T である。関係式 $\alpha = \rho\omega^2/2T$ から、張力 T は、

$$T = \frac{\rho l^2 \omega^2}{4k'^2 K^2},$$

で計算できる。図 2.7 に示した縄跳びの例について、一人で飛ぶ縄跳びでは $T \simeq 0.21\rho l^2 \omega^2$ であり長縄跳びののでは $T \simeq 0.12\rho l^2 \omega^2$ となる。縄に作用する張力は回転の角速度の自乗に比例する。

第3章 複素関数としての楕円関数

前節で定義域を実数全体に拡張してきたのと同様に、楕円関数の定義域は複素数に拡張することができる。複素数全体に定義域を拡張すると、楕円関数の独特な特徴が見えてくるので、面白いのはここからである。

3.1 複素数への拡張

ヤコビの楕円関数を、変数として複素数をとる関数、すなわち、複素関数に拡張しよう。複素関数に拡張するにあたり、楕円積分:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

を考える。前章で述べたように、この積分で用いる x と u は $x = \operatorname{sn}(u, k)$ の関係がある。その積分に対して、 tn 関数型の楕円積分:

$$v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}},$$

を考えよう。この積分の場合、 $x = \operatorname{tn}(u, k')$ の関係がある。この tn 関数型の楕円積分の両辺に虚数単位 i を乗じると、

$$iv = \int_0^x \frac{i dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}} = \int_0^{ix} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

のように変形できる。この数式変形は、 $y = ix$ なる置き換えを用いた。この積分の結果から、 $ix = \operatorname{sn}(iv, k)$ の関係が成立すると言える。ところで、既に見たように $x = \operatorname{tn}(u, k')$ であるので、

$$\operatorname{sn}(iv, k) = i \operatorname{tn}(v, k'), \quad (3.1)$$

なる関係が導かれる。この結果を使って、補助関数である cn 関数と dn 関数の変数を純虚数に拡張すると、

$$\operatorname{cn}^2(iv, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(iv, k) = \frac{\operatorname{cn}^2(v, k') + \operatorname{sn}^2(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k')} = \frac{1}{\operatorname{cn}^2(v, k')},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^2(iv, k) &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(iv, k) = \frac{\operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k')} \\ &= \frac{1 - k'^2 \operatorname{sn}^2(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k')} = \frac{\operatorname{dn}^2(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k')}, \end{aligned}$$

が得られる。純虚数に拡張した結果を改めて書くと、

$$\operatorname{sn}(iv, k) = i \operatorname{tn}(v, k'), \quad \operatorname{cn}(iv, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(v, k')}, \quad \operatorname{dn}(iv, k) = \frac{\operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}, \quad (3.2)$$

である。これらの結果はヤコビの虚数変換と呼ばれる関係式である。これらの関係式によると、純虚数変数によるヤコビの楕円関数は、補母数 k' を母数とする実数変数の楕円関数で記述できる。

準備が整ったので、ヤコビの楕円関数の定義域を複素数全体に拡張するのは容易である。実変数の場合と純虚数変数の場合を加法公式を用いて結合すればよい。その結果、

$$\operatorname{sn}(u + iv) = \frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(v, k') + i \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{cn}(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k')}, \quad (3.3a)$$

$$\operatorname{cn}(u + iv) = \frac{\operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, k') - i \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k')}, \quad (3.3b)$$

$$\operatorname{dn}(u + iv) = \frac{\operatorname{dn}(u, k) \operatorname{cn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k') - ik^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k')}, \quad (3.3c)$$

なる公式を得る。なお、これらの公式の分母は $1 - \operatorname{dn}^2(u, k) \operatorname{sn}^2(v, k')$ と書いてもよい。これらの公式は、三角関数における

$$\sin(u + iv) = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v,$$

$$\cos(u + iv) = \cos u \cosh v - i \sin u \sinh v,$$

に対応する。実際、 $k = 0$ の場合に、公式 (3.3a) から (3.3c) が、 $\sin(u + iv)$ や $\cos(u + iv)$ の公式と一致することは容易に確認できる。

ここで、公式 (3.3a) から (3.3c) が正則な関数であり、実関数のときと同様の性質をもつことを示す必要がある。しかし、その証明は初等的であるが計算が煩雑であるため、ここでは省略する。その代わりに、証明するための道筋を述べておこう。正則な関数とは、微分可能な関数のことである。複素関数において微分可能とは、実数方向の変化率から算出する導関数と、虚数方向の変化率から算出する導関数が等しいことが条件である。この条件は、コーシー・リーマンの定理と呼ばれる。例えば、関数 $f(u + iv)$ を実部 $\varphi(u, v)$ と虚部 $\psi(u, v)$ に分離して、 $f(u + iv) \equiv \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$ と書いたとする。そのとき、コーシー・リーマンの定理は、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u},$$

と書かれる。つまり、公式 (3.3a) から (3.3c) がコーシー・リーマンの定理を満たすことを示せば、公式が正則であることが証明できたことになる。コーシー・リーマンの定理を満たすことが証明されたので、単純に実数方向の変化率から算出した導関数を楕円関数の微分と考えてよい。その微分が楕円関数の微分公式と一致することを証明すればよい。それが証明されれば、微分公式から導かれた加法公式も成立する。

公式 (3.3a) から (3.3c) に、 $v = K' (= K(k'))$ を適用してみよう。このとき、 $\operatorname{sn}(K', k') = 1$, $\operatorname{cn}(K', k') = 0$, $\operatorname{dn}(K', k') = k$ であることに注意すると、

$$\operatorname{sn}(u + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{cn}(u + iK') = -\frac{i \operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{dn}(u + iK') = -\frac{i \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad (3.4)$$

が得られる。また、 $\operatorname{sn}(2K', k') = 0$, $\operatorname{cn}(2K', k') = \operatorname{dn}(2K', k') = 1$ であることから、公式に $v = 2K'$ を適用すると、

$$\operatorname{sn}(u + 2iK') = \operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(u + 2iK') = -\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(u + 2iK') = -\operatorname{dn} u, \quad (3.5)$$

が導かれる。これらの結果から楕円関数の面白い性質がわかる。その性質のひとつは、楕円関数が極をもつことである。公式 (3.4) によると、変数が iK' の楕円関数はどれも分母が $\operatorname{sn} 0 = 0$ である。よって、楕円関数はどれも iK' を極とすることがわかる。もう一つの性質は、楕円関数の周期性である。すでに、実数関数としての楕円関数が周期関数であることを導いた。それに加えて、(3.5) より、 $\operatorname{sn} u$ が iK' の周期をもつことがわかる。さらに、(3.5) と、 $\operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u$ なる関係を利用すれば、

$$\operatorname{cn}(u + 2K + 2iK') = \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(u + 4iK') = \operatorname{dn} u, \quad (3.6)$$

なる関係が導かれる。つまり、 cn 関数は $2K + 2iK'$ を、 dn 関数は $4iK'$ を周期とすることがわかる。楕円関数の中で sn 関数に焦点を当てた場合、周期 $2iK'$ は、実数変数で見出した周期 $4K$ を整数倍しても作り出すことはできない。つまり、 sn 関数は $4K$ を基本周期とするのと同様に、 $2iK'$ も基本周期とする。このように基本周期を2つもつことを二重周期性という。

ヤコビの楕円関数の補助関数についても同様であるが、実は cn 関数の周期には注意が必要である。公式 (3.5) から、 $\operatorname{cn}(u + 4iK') = \operatorname{cn} u$ であるので $\operatorname{cn} u$ の周期が $4iK'$ と考えるかもしれない。ところが、 $\operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u$ であることに注意すると、 $\operatorname{cn}(u + 2K + 2iK') = \operatorname{cn} u$ を導くことができる。基本周期を導くことに関し、 $4K$ と $4iK'$ の整数倍の和から $2K + 2iK'$ を作ることはできない。しかし、 $4K$ と $2K + 2iK'$ の整数倍の和から $4iK'$ を作ることは可能である。よって、 $\operatorname{cn} u$ の基本周期は $4K$ と $2K + 2iK'$ である。それに対し、 dn 関数は、 cn 関数のような変則的ではなく、 $2K$ と $4iK'$ を基本周期とする。

楕円関数の二重周期性を示すため、図 3.1 に変数 $z (= u + iv)$ の複素平面状に楕円関数の実部を描く。濃い色が負の値、薄い色が正の値を表す。また、図中の白枠で描いた長方

形や平行四辺形が、楕円関数の基本周期である。これらの長方形や平行四辺形は、基本周期平行四辺形と呼ばれる。さらに、白と黒が互いに接している場所は、絶対値が大きな正から負の値に切り替わる場所、すなわち、楕円関数の極である。この極の位置は、上に述べたように、 $z = iK'$ を中心とし、楕円関数の周期に従って分布している。

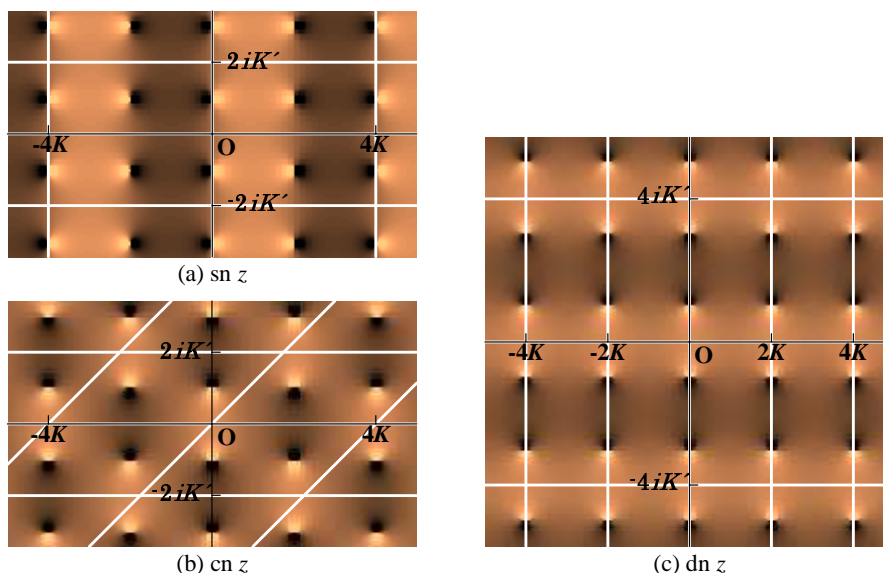


図 3.1: ヤコビの楕円関数の実数部

3.2 楕円関数の性質

前節でヤコビの楕円関数が二重周期関数であることを述べた。そのような二重周期関数を一般的に楕円関数と呼ぶことにし、それから導かれる楕円関数の性質を導出してみよう。

性質 1 第一に、同一周期をもつ楕円関数どうしから四則演算によって得られる関数は、同一周期をもつ楕円関数である。例えば、 $f(z)$ と $g(z)$ が、独立する 2 つの周期 ω_1 と ω_2 を共有するならば、

$$f(z) \pm g(z), \quad f(z)g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)},$$

も周期 ω_1 と ω_2 をもつ楕円関数である。さらに、導関数 $f'(z)$ も周期 ω_1 と ω_2 をもつ楕円関数である。

証明 ここで、 ω_1 と ω_2 が基本周期とは限らないことに注意しよう。例えば、 $f(z + \omega/2) = -f(z)$ が成立するならば、 $f(z + \omega) = f(z)$ となるので、 $f(z)$ は

ω を周期とする。この関数どうしを乗じた積 $f(z)^2$ は、 $f(z + \omega/2)^2 = f(z)^2$ であるため $\omega/2$ を周期とする。しかし、上に記載した周期 ω_1 と ω_2 が基本周期とは限らないので、性質 1 は正しい。その性質は、 $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$, $g(z) = g(z + \omega_1) = g(z + \omega_2)$ である事実から容易にわかる性質である。¶

楕円関数の性質を調べる上で、楕円関数の位数を用いることがある。楕円関数の位数は、基本周期平行四辺形の中に存在するすべての極の位数の和である。例えば、cn 関数は基本周期 $4K$ と $2K + 2K'$ が張る基本周期平行四辺形の中に、 $z = K + iK', 3K + iK'$ に 1 位の極をもつので、cn 関数の位数は 2 である。

楕円関数の性質として、リウヴィル (Liouville) が提示した 4 つの定理がある。それらの定理を紹介しよう。また、後の説明のため、境界を含む基本周期平行四辺形の内部領域を D とする。

リウヴィルの第 1 定理 二重周期をもつ整関数は定数である。言い換えると、0 位の楕円関数は定数である。

証明 第 1 定理を証明しよう。関数 $f(z)$ が二重周期をもつとしよう。この関数が整関数であるので、領域 D で連続関数であるので、十分に大きな正の実数 M を選べば、領域 D で $|f(z)| \leq M$ とすることができる。関数 $f(z)$ が周期関数であるので、この関係は複素平面全体で成立する。

複素平面の原点を中心とする半径 R の円 $Re^{i\theta}$ を描いたとしよう。半径 R を大きくとれば任意の z を内部に含むことができる。その円周を C と書くと、コーシーの積分定理によって、

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f(u)}{u-z} - \frac{f(u)}{u} \right) du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z f(u)}{u(u-z)} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z} d\theta, \end{aligned}$$

のように表すことができる。ここで、 $|f(Re^{i\theta})| \leq M$, $|Re^{i\theta} - z| \geq R - |z|$ を用いると、

$$\begin{aligned} |f(z) - f(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{z f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z} \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M|z|}{R - |z|} d\theta = \frac{M|z|}{R - |z|}, \end{aligned}$$

なる不等式が導かれる。ここで、 $R \rightarrow \infty$ の極限をとると右辺がゼロに近づくので、 $f(z) = f(0)$ となるべきことがわかる。したがって、 $f(z)$ は定数である。¶

リウヴィルの第2定理 周期平行四辺形 D の内部に存在するすべての極における留数の和はゼロに等しい。

証明 楕円関数が有理形の関数であるので、領域 D に存在する極は有限個である。そのため、境界線が極を通過しないように領域 D を選ぶことができる。そのように領域 D を選び、その境界線上で周回積分すると、

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in D} \operatorname{Res}_{z=p} f(z),$$

となることが留数定理から導かれる。基本周期が ω_1, ω_2 であるならば、 $z = \alpha$ を基点とした周回積分は、

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \left(\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} + \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} + \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha} \right) f(z) dz,$$

である。ここで、 $f(z)$ が ω_1 と ω_2 を周期とすることを考えると、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} f(z) dz &= - \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} f(z) dz, \\ \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} f(z) dz &= - \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha} f(z) dz, \end{aligned}$$

が成り立つはずである。この関係式を適用すると、領域 D の境界線に沿った周回積分がゼロであることが導かれる。その積分結果は、

$$\sum_{p \in D} \operatorname{Res}_{z=p} f(z) = 0,$$

すなわち、領域 D に存在するすべての極における留数の和がゼロであることを意味する。したがって、リウヴィルの第2定理が証明された。◻

第2定理の系として、1位の楕円関数が存在しないことがわかる。なぜなら、1位の楕円関数は、基本周期平行四辺形の内部に1位の極が1つだけ存在することを意味する。その場合、第2定理を満足することができないからである。

リウヴィルの第3定理 領域 D に存在する楕円関数 $f(z)$ の零点の個数は $f(z)$ の位数に等しい。ただし、2位の零点は2個分、3位の零点は3個分のように、零点ひとつにつき零点の位数だけ個数を加算するものとする。

証明 この定理の証明では、境界線が $f(z)$ の零点と $f'(z)$ の極を通過しないように領域 D を選ぶものとする。さらに、 $F(z) \equiv f'(z)/f(z)$ を定義しよう。こ

の新たな関数 $F(z)$ は本節で説明した**性質 1**により楕円関数であり、その周期は $f(z)$ と共通の周期をもつ。さらに、関数 $f(z)$ が領域 D で極 a_1, a_2, \dots, a_m をもち、その位数を p_1, p_2, \dots, p_m とする。また、零点を b_1, b_2, \dots, b_n 、その位数を q_1, q_2, \dots, q_n とする。まず、 j 番目の極 a_j に注目すると、関数 $f(z)$ は、

$$f(z) = \frac{\phi_j(z)}{(z - a_j)^{p_j}}, \quad \phi_j(z) \neq 0, \infty,$$

と書くことができる。この場合、関数 $F(z)$ は、

$$F(z) = -\frac{p_j}{z - a_j} + \frac{\phi_j'(z)}{\phi_j(z)},$$

となるので、 $z = a_j$ で1位の極をもち、その留数を p_j とすることがわかる。一方、 k 番目の零点 b_k に注目すると、関数 $f(z)$ は、

$$f(z) = (z - b_k)^{q_k} \psi_k(z), \quad \psi_k(z) \neq 0, \infty,$$

となるので、関数 $F(z)$ は、

$$F(z) = \frac{q_k}{z - b_k} + \frac{\psi_k'(z)}{\psi_k(z)},$$

のように書ける。よって、関数 $F(z)$ は $z = b_k$ で1位の極をもち、その留数を q_k とする。したがって、 $F(z)$ を領域 D の境界に沿って周回積分すると、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} F(z) dz = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{z=a_j} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=b_k} f(z) = -\sum_{j=1}^m p_j + \sum_{k=1}^n q_k = 0,$$

が得られる。右辺がゼロであるのはリウヴィルの第2定理に基づく。よって、領域 D に存在する $f(z)$ の零点の個数 N は、

$$N = \sum_{k=1}^n q_k = \sum_{j=1}^m p_j,$$

となる。この式の右辺は $f(z)$ の極の位数の総和、すなわち、楕円関数 $f(z)$ の位数である。したがって、第3定理が証明できた。◻

リウヴィルの第4定理 領域 D に存在する楕円関数 $f(z)$ の極にあたる複素数 a_j の和と、零点にあたる複素数 b_k の和の差は、楕円関数 $f(z)$ の周期に等しい。なお、複素数の和は、極や零点の位数だけ重複するものとする。

証明 この定理の証明には、第3定理の証明に用いた $F(z)$ に z を乗じた被積分関数 $zF(z)$ を考えればよい。この被積分関数の周回積分は、

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} zF(z) dz &= \left(\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} \right) zF(z) dz \\ &\quad + \left(\int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} + \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2} \right) zF(z) dz \\ &= -\omega_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} F(z) dz + \omega_1 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2} F(z) dz, \end{aligned}$$

なる関係を満たす。この関係を得るには、第1行目の前半の積分に対して周期性 $F(z + \omega_2) = F(z)$ を、後半の積分に対して周期性 $F(z + \omega_1) = F(z)$ を適用した。前半の積分のみを書いてみると、

$$\begin{aligned} \left(\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} \right) zF(z) dz &= \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} zF(z) dz + \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha} (z + \omega_2)F(z + \omega_2) dz \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} zF(z) dz + \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha} (z + \omega_2)F(z) dz = -\omega_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} F(z) dz, \end{aligned}$$

となるからである。後半の積分も同様である。次に、 $F(z) \equiv f'(z)/f(z)$ のように定義されていたことを思い出そう。すると、 $F(z)$ の積分は、

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} F(z) dz = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint \frac{d\zeta}{\zeta},$$

のように書くことができる。この式の右辺への変形には、 $\zeta \equiv f(z)$ の置き換えを適用した。関数 $f(z)$ は変数 z が α から $\alpha + \omega_1$ まで変化する間に一周期するので、右辺の積分を周回積分としての記号を用いて書いた。ただし、この周回が複素平面の原点を何回周回するかを特定できない。仮に $f(z)$ が原点を ν 回周回するならば、

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} F(z) dz = 2\pi i \nu,$$

のように書くことができる。この事実を利用すると、

$$\int_{\partial D} zF(z) dz = 2\pi i (\nu\omega_1 - \mu\omega_2),$$

となる。ここで、 ν と μ は整数であるとする。

次に、第3定理の証明のように、 $f(z)$ が $z = a_j$ で p_j 位 ($j = 1, 2, \dots, m$) の極をもち、 $z = b_k$ で q_k 位 ($k = 1, 2, \dots, n$) の零点をもつとする。その場合、被積分関数 $zF(z)$ は、

$$zFz = -\frac{a_j p_j}{z - a_j} - 1 + \frac{\phi'_j(z)}{\phi_j(z)} = \frac{b_k q_k}{z - b_k} + 1 + \frac{\psi'_k(z)}{\psi_k(z)},$$

のように書くことができる。ここで、 $\phi_j(z)$ と $\psi_k(z)$ は第3定理の証明で用いたゼロにも無限大にもならない関数である。この極と零点を用いた表記よって、領域 D の境界に沿った周回積分は、

$$\int_{\partial D} zF(z) dz = -2\pi i \left(\sum_{j=1}^m a_j p_j - \sum_{k=1}^n b_k q_k \right),$$

と書くことができる。上で計算した結果と等号で結ぶと、

$$\sum_{j=1}^m a_j p_j - \sum_{k=1}^n b_k q_k = -\nu\omega_1 + \mu\omega_2,$$

なる関係が得られる。この式の右辺において、 ν と μ を特定することができないが、ともに整数¹であるので、右辺は確かに楕円関数 $f(z)$ の周期である。つまり、位数の分だけ重複加算した楕円関数 $f(z)$ 極の位置の和と、零点の位置の和の差は楕円関数 $f(z)$ の周期となる。よって、第4定理が証明された。◻

すべての極と、その極を中心とするローラン展開における主要部が特定できれば、楕円関数は定数項を除き、一意的に定まる。また、極と零点の位置、および、位数が特定できれば楕円関数は定数倍の範囲で一意的に定まる。これらの性質を、**性質2**、**性質3**としよう。

性質2 独立な周期 ω_1 と ω_2 を共有する楕円関数 $f(z)$ と $g(z)$ について、すべての極と、その極を中心とするローラン展開における主要部が一致すれば、 $f(z) - g(z)$ は定数である。

証明 関数 $f(z)$ の極の一つを z_0 とするとき、上記条件を満足する関数形として、

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + f_1(z), \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + g_1(z),$$

を仮定しよう。これは極 z_0 を中心とするローラン展開であり、双方の主要部が一致する級数としている。このとき、 $f_1(z)$ と $g_1(z)$ は整関数である。両者の差をとると、

$$f(z) - g(z) = f_1(z) - g_1(z),$$

となり、整関数となる。まず、**性質1** より $f(z) - g(z)$ は楕円関数である。また、リウヴィルの第1定理により、整関数が楕円関数となるためには定数でなければならない。したがって、 $f(z) - g(z)$ は定数である。◻

¹どちらともゼロになる場合もある。

性質3 独立な周期 ω_1 と ω_2 を共有する楕円関数 $f(z)$ と $g(z)$ について、すべての極と零点が一致し、位数も等しければ、定数因子 c を用いて、 $f(z) = cg(z)$ の関係が成立する。

証明 二つの関数の比 $f(z)/g(z)$ を考えよう。この比は、 $f(z)$ の極、または、 $g(z)$ の零点を極とする。まず、 $z = z_0$ を $f(z)$ の p 位の極とする。そのとき、 z_0 は $g(z)$ の p 位の極となる。つまり、ゼロ以外の有限値をとる $f_1(z)$ と $g_1(z)$ を用いて、

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_0)^p}, \quad g(z) = \frac{g_1(z)}{(z - z_0)^p},$$

と書くことができる。このとき、両者の比は、

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$

であることから、正則な関数である。一方、 $g(z)$ の零点に関しても同様に考えればよい。具体的には、

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1/g(z)}{1/f(z)},$$

を考えればよい。つまり、 $g(z)$ の零点は $1/g(z)$ の極であるので、上の考察と全く同様である。したがって、 $f(z)/g(z)$ は正則であるので、リウヴィルの第1定理によって定数でなければならない。したがって、定数因子 c を用いて $f(z) = cg(z)$ と書くことができる。◀

3.3 リーマン面と関数の周期性

本章で議論したように楕円関数は二重周期をもつことがわかった。楕円関数の二重周期性は、逆関数である楕円積分から導くことも可能である。本節で、楕円積分から楕円関数の二重周期を考察しよう。

3.3.1 リーマン面

複素平面上の任意の点 z に対応する関数値が与えられているとしよう。複素平面に等高線、または、カラーマップの形で関数値が描かれている状態を想像すればよいだろう。その関数が1価であれば、等高線やカラーマップの表現は一意的に定まる。しかし、多価関数は一意的に定まらない。

多価関数の例として、複素数 z の平方根を与える関数 $z^{1/2}$ を考えよう。複素数 z の平方根は、 $z^{1/2} = \pm\sqrt{z}$ のように符合が異なる2つの関数値をとる2価関数である。そこで、複

素平面 S_+ の上では、平方根が $z^{1/2} = \sqrt{z}$ のように一方の値だけをとるように制限しよう。同様に、複素平面 S_- では平方根が $z^{1/2} = -\sqrt{z}$ のようにもう一方の値だけをとるものとする。つまり、複素平面 S_+ と S_- で平方根関数 $z^{1/2}$ は1価関数となっている。

上に定義した複素平面 S_+ と S_- ように、多価関数の関数値を一つずつ割り当てた複素平面をリーマン面と呼ぶ。平方根関数に関するリーマン面 S_+ と S_- が互いに無関係な平面でないことを図3.2を用いて説明しよう。任意の複素数が $z \equiv re^{i\theta}$ のように書けるとしよう。その表現において、平方根の一方が $\sqrt{z} \equiv \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ であるように平方根が定義されているとする。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。平方根関数の変数 z を、図3.2に示すようにリーマン面 S_+ 上の原点の周りを1回転した場合を考えよう。その回転によって、 z は $z = re^{i(\theta+2\pi)}$ となる。これを平方根関数に代入すると、

$$z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i(\theta+2\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{\pi i} = -\sqrt{z},$$

が成立する。変数 z が原点を周回してもとの位置に戻っているにも関わらず、その平方根は符号が逆になっているのだ。言い換えると、複素平面 S_+ 上の点 z は、原点を中心に1回転すると複素平面 S_- に遷移している。さらに1回転して $z = re^{i(\theta+4\pi)}$ とすれば、

$$z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i(\theta+4\pi)/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{2\pi i} = \sqrt{z},$$

となるので、再び複素平面 S_+ に戻る。つまり、平方根関数 $z^{1/2}$ を取り扱う場合、変数 z を

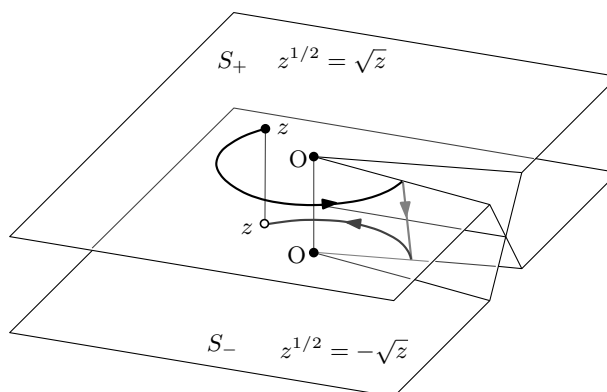


図 3.2: 平方根関数におけるリーマン面

原点の周りに2回転させなければ変数 z はもとのリーマン面上の同一点に戻れないのだ。メビウスの輪を連想させるリーマン面の振る舞いは、これから議論しようとする周期関数の解釈に有用である。なお、この例における原点のように、その周りを周回することによって異なるリーマン面に移る点を分岐点と呼ぶ。例えば、上の平方根関数を平行移動した関数 $(z-a)^{1/2}$ の場合、 $z=a$ が分岐点となる。

平方根関数におけるリーマン面に関して、原点の右側の切り込みを通過したときにリーマン面 S_+ と S_- の遷移が発生する。リーマン面の境界となる切り込みを分岐線と呼ぶ。

リーマン面の切り替わりは概念的であるので、分岐線を厳密に決めることに意味はない。しかし、分岐線を選択に関して偏角を考えることは有効である。偏角とは、複素平面において複素数が実軸となす角度のことである。例をあげると、 $z \equiv re^{i\theta}$ としたとき、 θ が偏角である。図3.2の例では、偏角 $2n\pi \leq \theta < 2(n+1)\pi$ において、整数 n が偶数のときリーマン面 S_+ 、 n が奇数のときリーマン面 S_- をとるように平方根関数 $z^{1/2}$ のリーマン面が設定されている。

3.3.2 三角関数の周期

楕円関数の周期を取り扱う前に、リーマン面を利用して三角関数の周期を考察することは有益である。三角関数の周期を考察するには、

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1+z)}}, \quad (3.7)$$

を利用するとよい。右辺の積分を実行すると $u = \arcsin z$ となる。この等式の逆関数をとると、 $z = \sin u$ となる。被積分関数が正則関数であれば、積分結果は、積分変数が0から z まで移動する積分路の選び方に無関係である。いや、それは正確な説明ではない。被積分関数が極をもつ場合、積分路が極を周回するかどうかによって積分値が異なるのだ。事実、(3.7)の被積分関数は ± 1 を極にもつ。この積分を実行する積分路として、図3.3のような4つの経路を考えよう。そのうち、積分路 C_1 と C_2 に沿った積分は等しくなる。しかし、

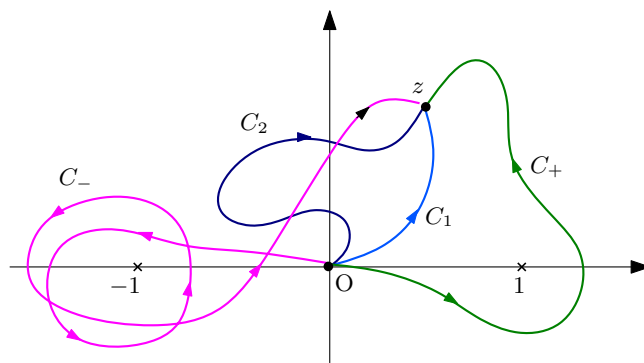


図 3.3: 逆正弦関数の積分値を得る積分の積分路

積分路 C_+ は極 $z = 1$ を反時計回りに1回だけ回るため、積分値が前の2つとは異なる。積分路 C_- は極 $z = -1$ を反時計回りに2回転するので、積分値が前の3つとは異なる。積分路 C_1 と C_2 に沿った積分が等しいのと同様に、極 $z = 1$ を反時計回りに1回転する経路であれば、その積分路の選び方とは無関係に、 C_+ に沿った積分と等しくなる。

上で述べたように、積分路が極を周回する回数とその回転方向が定めれば、積分路の経

路に選択に無関係である。つまり、積分 (3.7) を調べるには、図 3.4 に示す 3 種類の積分路を考えればよい。その積分路を説明すると、次のようになる。

積分路 1 図に示す L のように、分岐点を周回せず z に到達する経路。

積分路 2 原点から実軸上を正の方向にたどり、分岐点 1 を微小半径で周回した後、実軸をたどって原点に戻り、経路 L をたどって z に到達する経路。すなわち、 $P_{0,1} + C_1 + \bar{P}_{0,1} + L$ 。

積分路 3 原点から実軸上を負の方向にたどり、分岐点 -1 を微小半径で周回した後、実軸をたどって原点に戻り、経路 L をたどって z に到達する経路。すなわち、 $P_{0,-1} + C_{-1} + \bar{P}_{0,-1} + L$ 。

なお、積分路 C_1 と C_{-1} は、それぞれ、分岐点 1, -1 を反時計回りに周回する経路である。また、経路 $P_{0,1}$ と $P_{0,-1}$ は、それぞれ、実軸上を 0 から 1 へたどる経路と、0 から -1 にたどる経路である。さらに、経路 $\bar{P}_{0,1}$ と $\bar{P}_{0,-1}$ は前記の経路を逆にたどる経路である。

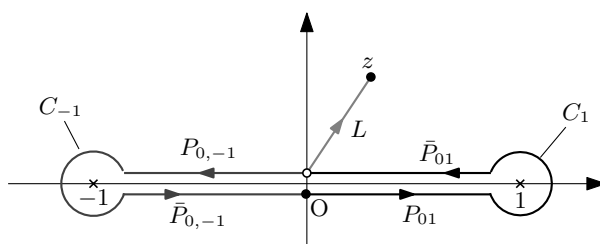


図 3.4: 逆正弦関数の積分値を得る積分の積分路

特に、経路 C_1 と C_{-1} に沿った積分は、経路の半径が十分に小さいため、その円弧に沿った積分はゼロとみなすことができる。それは次のようにして証明できる。

証明 被積分関数を $1/\sqrt{(z-\alpha)f(z)}$ であるとしよう。ただし、 $f(z)$ は α の近傍で正則であり、かつ、ゼロでないとする。この被積分関数に対して、 α の周囲を、半径 ε で、偏角にして θ_1 から θ_2 までの円弧 C を積分路として積分しよう。つまり、積分路の上では $z - \alpha = \varepsilon e^{i\theta}$ が成立する。そのとき、対象とする積分は、

$$I(\theta_1, \theta_2) = \int_C \frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)f(z)}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{i\sqrt{\varepsilon} e^{i\theta/2} dz}{\sqrt{f(z)}}$$

となるのだが、ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\theta_1, \theta_2) \right| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{f(\alpha)}} (\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

のように計算できるので、極を周回する微小円弧を積分路とする積分はゼロに近づく。◻

続いて、積分路2と積分路3に沿った積分を計算しよう。積分を評価するには、積分路に沿ってリーマン面をどのように推移するか調べておくといよい。そのためには被積分関数の分母である平方根関数に含まれる $(1-x)(1+x)$ の偏角を調べるのが有効である。ここで、 $1-x = r_1 e^{i\theta_1}$, $1+x = r_2 e^{i\theta_2}$ としよう。そのとき、 $(1-x)(1+x) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ である。したがって、 $(1-x)(1+x)$ の偏角は $1-x$ と $1+x$ の偏角の和である。そのようにして、積分路2, または、積分路3 たどったときの $(1-x)(1+x)$ の偏角の変化 (a) と、積分路2と積分路3を連続でたどったときの偏角の変化を図3.5に示す。この図は、積分路の長

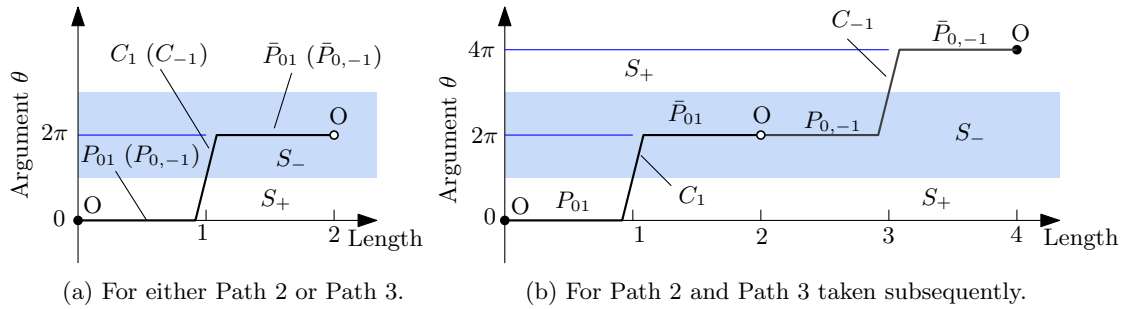


図 3.5: 積分に含まれる $(1-x)(1+x)$ の偏角の変化とリーマン面

さを横軸に、偏角を縦軸にとったグラフである。積分路2か積分路3のいずれかをとると偏角は、図3.5 (b)のように変化する。ここで、初期状態で原点 O がリーマン面 S_+ 上に存在すると仮定する。このグラフにおいて、積分路3における各区間を括弧の中に記している。積分路2をとったとき、偏角は1を周回する間に偏角が 2π だけ変化し、リーマン面が S_- に遷移する。積分路3をとったとき、偏角は -1 を周回する間に偏角が 2π だけ変化し、同様に、リーマン面が S_- に遷移する。積分路2と積分路3を立て続けにたどったときの偏角は図3.5 (b)のように変化する。その内容は、積分路2をたどると偏角が 2π だけ増加し、リーマン面が S_+ から S_- に遷移する。続いて、積分路3をたどると偏角がさらに 2π だけ増加し、リーマン面が S_+ に戻る。

それでは、具体的に積分を評価しよう。積分を評価するにあたり、上で示した事実により、分岐点を周回する経路 C_1 と C_{-1} に沿った積分はゼロとみなす。まず、積分路2に沿った積分は、

$$\int_{0_+}^{0_-} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_1^0 \left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi,$$

のように計算できる。左辺の積分記号は、リーマン面 S_+ の 0 から積分路2 (P_{II}) に沿ってリーマン面 S_- の 0 まで積分することを意味する。数式変形によって、積分変数を x に変更したのは、その積分変数が実数であることを意図する。さらに、右辺の第2項の被積分関数に負の符号が付加されているのは、積分路がリーマン面 S_- に遷移したからである。開始時点で積分路はリーマン面 S_+ に存在していた、分岐点1を周回した時点で積分路は

リーマン面 S_- に遷移する。リーマン面 S_- では平方根関数である被積分関数の符号が負に切り替わるのだ。積分路 C_+ の開始点をリーマン面 S_- 上の 0 とすると、その終端はリーマン面 S_+ 上の 0 となる。被積分関数は符号が逆転するため、積分結果は、

$$\int_{(P_{\text{II}})}^{0+} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\pi,$$

のように、符号反転した結果となる。この積分結果から、積分路 P_2 を 2 回たどって積分すると、

$$\int_{(P_{\text{II}}+P_{\text{II}})} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{(P_{\text{II}})}^{0-} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_{(P_{\text{II}})}^{0+} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 0,$$

のように打ち消しあってしまう。

引き続き、積分路 3 (P_{III}) に沿った積分を考えよう。被積分関数が偶関数であり、積分路 P_{III} が P_{II} と対称であるので、特に新たな計算をすることもなく、

$$\int_{(P_{\text{III}})}^{0-} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\pi, \quad \int_{(P_{\text{III}})}^{0+} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi,$$

が得られる。積分路 P_3 を 2 回まわる積分は P_2 の場合と同様にゼロになる。これに対して、リーマン面 S_+ 上の 0 を起点として C_+ , C_- の順にたどる積分路に沿った積分は、

$$\int_{(P_{\text{II}}+P_{\text{III}})} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{(P_{\text{II}})}^{0-} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_{(P_{\text{III}})}^{0+} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\pi,$$

のようになる。逆に、リーマン面 S_+ 上の 0 を起点として P_{III} , P_{II} の順にたどる積分路に沿った積分は、

$$\int_{(P_{\text{III}}+P_{\text{II}})} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{(P_{\text{III}})}^{0-} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + \int_{(P_{\text{II}})}^{0+} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2\pi,$$

のように書くことができる。

ここまでの考察を応用すると、リーマン面 S_+ 上の 0 から任意の積分路を通して同一のリーマン面上の 0 に戻るまでの積分は、

$$\int_0^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\pi n, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

となる。この数式に書いたように n は任意の整数である。前に示した図 3.4 に描くように、原点 0 からリーマン面 S_+ 上の任意の点までの積分路 L とする。ただし、その積分路は被積分関数の極を周回しない。その積分路 L に沿った積分を、

$$\int_{(L)}^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \equiv u,$$

と定義すると、積分路を特に規定しない積分では、

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = u + 2\pi n,$$

となるはずである。右辺に含まれる整数 n は、その積分経路の選び方によって決まる。本節の冒頭で説明したように、この数式の左辺は $\arcsin z$ である。それを利用して両辺の逆関数をとると、

$$\sin(u + 2\pi n) = \sin u,$$

が得られる。つまり、正弦関数は周期 2π の周期関数である。

3.3.3 ヤコビの楕円関数の周期

前節で三角関数の周期を調べた方法と同様にして楕円関数の周期を調べよう。ヤコビの楕円関数 (sn 関数) の逆関数は、

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

なる楕円積分である。この積分の逆関数をとると、 $z = \operatorname{sn} u$ となる。この積分の被積分関数は、 ± 1 と $\pm 1/k$ を極にもつ。つまり、前節で取り扱った被積分関数よりも極が多いのだ。前節と同じ考え方で、積分路の基本形を作ると、図 3.6 に示す積分路 L , C_{\pm} , D_{\pm} となる。積分路 L は極を周回しない経路であり、 C_{\pm} は極 ± 1 を周回する経路、さらに、 D_{\pm} は極 ± 1 と $\pm 1/k$ を周回する経路である。積分路 D_{\pm} について、積分路の基本形とするなら極 $\pm 1/k$ のみを周回する経路にしたほうがよいと思うかもしれない。その経路については、後に説明することにする。

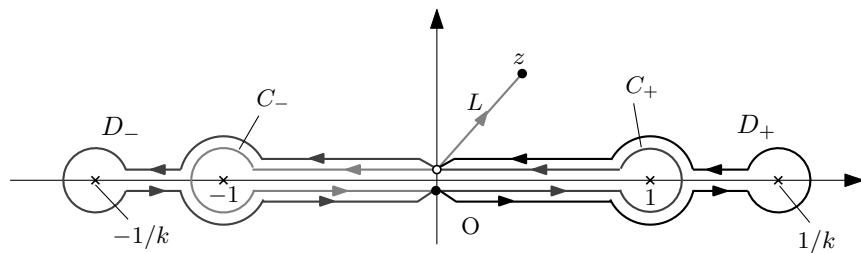


図 3.6: 楕円積分の積分路

楕円積分も平方根関数を積分関数に含むため、積分路をたどるとリーマン面が切り替わると予想できる。積分路をたどったときの $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ の偏角と、被積分関数のリーマン面は図 3.7 のようになる。まず、積分路 C_+ と C_- を連続でたどったときのリーマン面の遷移 (図 3.7 (a)) を説明しよう。開始点をリーマン面 S_+ の原点 O であるとする。積分

路 C_+ をたどると、極 1 を周回したところでリーマン面 S_- に遷移する。原点に戻った後に C_- をたどると、極 -1 を周回したところでリーマン面 S_+ に戻る。この経路をたどると、2 つの極を反時計回りに周回しているため偏角は 4π だけ増加する。

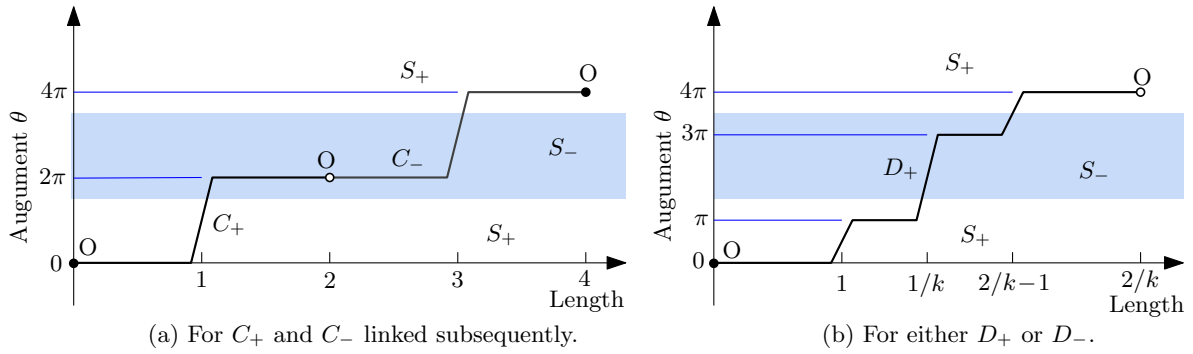


図 3.7: 楕円積分の積分路に沿ったリーマン面の遷移

積分路 D_+ をたどった場合のリーマン面の遷移 (図 3.7) を説明しよう。リーマン面 S_+ の原点 O を出発し、極 1 を半回転する。その時点ではリーマン面は遷移しない。そのまま積分路をたどると、極 $1/k$ を周回したときリーマン面は S_- に遷移する。積分路を引き返す途中、極 1 を半回転し、そのときにリーマン面は S_+ に戻る。この経路をたどった場合も、2 つの極を反時計回りに周回しているため偏角は 4π だけ増加する。積分路 D_- をたどった場合のリーマン面の遷移も同様である。

それでは、各積分路に沿った積分を評価しよう。そのための基本的な積分値として、リーマン面 S_+ 上で区間 $[0, 1)$ と $(1, 1/k)$ での積分を評価しよう。前者を $I(0, 1)$ 、後者を $I(1, 1/k)$ と書こう。すると、 $I(0, 1)$ は完全楕円積分であるので、

$$I(0, 1) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K,$$

となる。続いて、 $I(1, 1/k)$ は、

$$I(1, 1/k) = \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = i \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}},$$

と書くことができる。この数式の右辺のように変形するために、分子と分母に i を乗じた。さらに、 $k'^2y^2 = 1 - k^2z^2$ によって新たな変数 y を用いた数式に変換すると、

$$\begin{aligned} I(1, 1/k) &= \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ &= i \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = iK', \end{aligned}$$

のように積分計算できる。この数式から分かるように、変換後の数式は完全楕円積分になっている。なお、 K' は $K' \equiv K(k')$ で定義されるように、母数が $k' (= \sqrt{1-k^2})$ である完全楕円積分を意味する。

積分路 C_+ に沿った積分について、極 1 を周回する円弧の半径をゼロに近づけると、前節で説明したように、円弧に沿った積分はゼロに近づく。そのとき、 C_+ に沿った積分は、

$$\begin{aligned} & \int_{(C_+)}^{0-} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_1^0 \left(-\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \right) = 2K, \end{aligned}$$

のように計算できる。この数式変形において、第2項はリーマン面 S_- における積分を意味している。積分路 C_+ をたどった直後、積分変数がリーマン面 S_- の上に存在するため、リーマン面 S_+ の上に存在する積分路 L に接続できない。積分路 L に接続するためには、もう一度 C_+ か C_- をたどる必要がある。その場合の積分は、前節で計算した逆正弦関数と同様に、

$$\int_{(C_++C_+)}^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 0, \quad \int_{(C_++C_-)}^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 4K,$$

となる。この積分値のうち、第1の積分値は、積分路 C_+ をとどって原点に戻るとリーマン面が S_- となっているため、続いて同じ経路を積分しても、被積分関数が符号反転しているため積分結果が相殺されるのだ。逆に、 C_+ の後に C_- をたどると、積分結果は2倍になる。

続いて、積分路 D_+ に沿った積分を計算しよう。その積分経路をたどる間のリーマン面の遷移に注意しながら積分を実行すると、

$$\begin{aligned} & \int_{(D_+)}^{0+} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + i \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ & \quad + i \int_{1/k}^1 \left(-\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \right) + \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ &= I(0, 1) + I(1, 1/k) + I(1, 1/k) - I(0, 1) = 2iK', \end{aligned}$$

のように計算できる。計算途中の第3項がリーマン面 S_- での積分、それ以外の項がリーマン面 S_+ での積分である。この積分路をたどって原点 O に戻ってきたとき、積分変数はリーマン面 S_+ に存在する。つまり、そのまま積分路 L への接続が可能である。

リーマン面 S_+ の原点から z までの積分は、任意の積分路をとった場合、

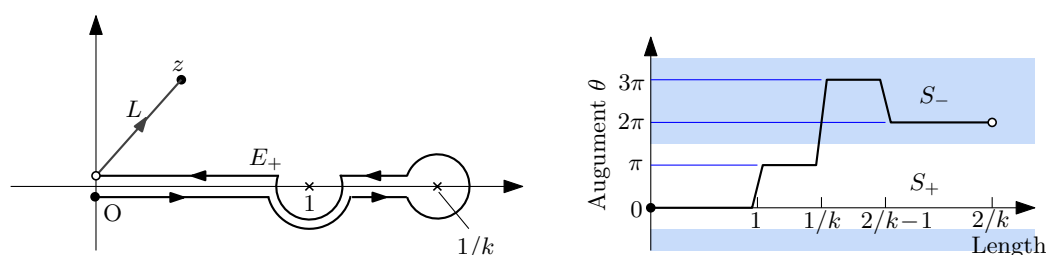
$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} - 4mK - 2inK',$$

となる。ここで、 m と n は任意の整数である。当然、負の値でもゼロでも構わない。左辺の積分の積分路が極を周回しなければ、 m と n はともにゼロとなる。左辺を u とおき、右辺の第1項が $\operatorname{arcsn} z$ であるので、逆関数をとると、

$$\operatorname{sn}(u + 2mK + 2inK') = \operatorname{sn} u,$$

が得られる。つまり、 sn 関数の二重周期性が証明できたことになる。同時に、 sn 関数には $4K$ と $2iK'$ を除く基本周期成分が存在しないことも示されている。

積分路の基本形について 周期性を考察するための積分路の基本形として分岐点 $1/k$ のみを周回する経路について考察してみよう。その経路 E_+ を図 3.8 (a) に、その経路をたどったときの $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ の偏角の変化を図 3.8 (b) に示す。その偏角の変化から、積分変数が位置するリーマン面を追跡すると、原点を出発するときリーマン面 S_+ だったが、分岐点 $1/k$ を周回した時点でリーマン面は S_- に遷移する。その後、リーマン面が遷移することなく原点に戻る。



(a) Path of integral encircling $1/k$ alone. (b) Argument of $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ along the path.

図 3.8: 分岐点 $1/k$ のみを周回する経路

積分路に沿ったリーマン面の遷移がわかったので積分が実行しやすい。リーマン面の遷移に注意しながら、積分路 E_+ に沿って積分を実行すると、

$$\begin{aligned} & \int_{(E_+)}^{0+} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + i \int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ & \quad + i \int_{1/k}^1 \left(-\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \right) + \int_1^0 \left(-\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \right) \\ &= I(0, 1) + I(1, 1/k) + I(1, 1/k) + I(0, 1) = 2K + 2iK', \end{aligned}$$

が得られる。つまり、 E_+ に沿った積分は、 C_+ に沿った積分と D_+ に沿った積分の和である。よって、積分結果を考える上で、 E_+ よりも D_+ を基本形と考えたほうが都合がよかったのである。

3.3.4 補助関数の周期

ヤコビの楕円関数の補助関数 cn 関数の周期について、リーマン面を用いて考察しよう。補助関数 cn 関数が $4K$ と $2iK'$ の二重周期をとることを再確認しよう。

$$u = - \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(k'^2 + k^2 z^2)(1 - z^2)}},$$

を考えるとよい。この積分は $\arccn z$ となるので、両辺の逆関数をとれば $z = \text{cn } u$ となる。被積分関数の分岐点が ± 1 と $\pm k'/k$ であるので積分路の基本形として、図 3.9 に示す経路を考えればよいだろう。具体的には、次のような積分路を基本形として設定する。

積分路 1 分岐点 1 の近傍から分岐点を周回することなく複素数 z に到達する L をとる経路。

積分路 2 分岐点 1 の近傍から実軸上を負の方向にたどり、原点を超え、分岐点 -1 を周回し、実軸上を正の方向にたどり、分岐点 1 を周回して開始点に戻る経路。

積分路 3 分岐点 1 の近傍から実軸上を負の方向にたどり、原点で虚軸上の正の方向に曲がり、分岐点 ik'/k を周回し、それまでの道を逆にたどった後、分岐点 1 を周回し開始点に戻る経路。

積分を実行するため、1 から 0 を実軸に沿った積分と、0 から ik'/k を虚軸に沿った積分を計算しておこう。なお、積分路はリーマン面 S_+ に存在すると仮定する。まず、前者に関して、 $y \equiv \sqrt{1 - z^2}$ なる y を用いると、

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = K,$$

のように変形でき、計算できる。つまり、この積分は完全楕円積分に変形できたということである。後者についても、 $y \equiv \sqrt{1 - z^2}$ なる y を用いると、

$$I_2 = \int_1^{1/k} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = iK',$$

のように計算できる。変数変換によって、この場合も実軸に沿った積分に変換できるのだ。しかも、この積分は前節で計算した積分と同一であるので、容易に積分値できたのだ。

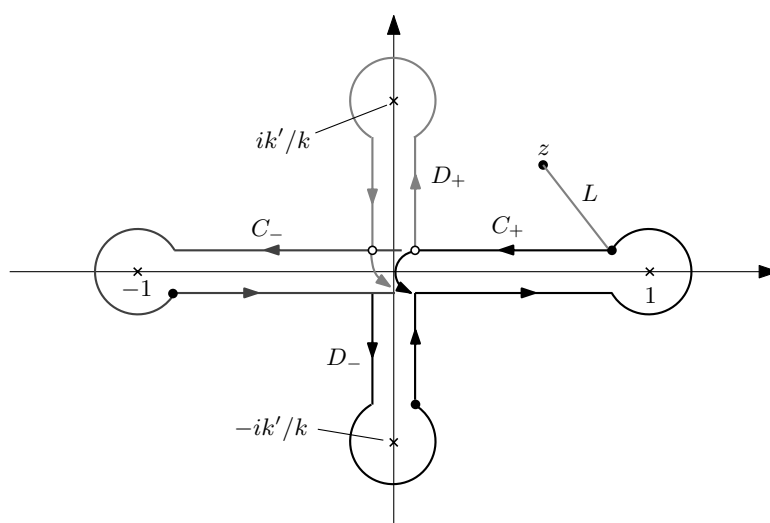


図 3.9: ヤコビの補助関数の周期のための積分路

まず、積分路1に沿った積分を考えよう。この積分は、特に計算することもなくゼロであることが分かる。なぜなら、原点は分岐点でないので、その場所で折り返しても $(k'^2 + k^2 z^2)(1 - z^2)$ の偏角が変化しないので、折り返した後の積分が前半の積分を打ち消すからである。

積分路2は、分岐点1の近傍を出発して実数の負の方向へ延びる積分路が原点で折り返さず、分岐点 -1 まで延びる。その後、分岐点 -1 を周回し実数軸上を逆に戻り、分岐点1を周回するまでの経路である。まず、1から -1 まで実軸をたどる経路で積分は $2K$ となる。分岐点 -1 を周回すると $(k'^2 + k^2 z^2)(1 - z^2)$ の偏角が 2π 増加するのでリーマン面が S_+ から S_- に遷移する。したがって、実軸を -1 から1までたどる経路で前半の積分値は打ち消されず、さらに加算されるその結果、積分路2をたどった積分は $4K$ となる。なお、分岐点1を周回した時点で積分路はリーマン面 S_+ に戻る。

積分路3は、分岐点1の近傍から実軸をたどって原点に達した後、虚軸をたどって分岐点 ik'/k まで延びる。その後、分岐点 ik'/k を周回し、虚軸を負の方向にたどり、原点で直角に曲がり、実軸上を正の方向にたどり分岐点1を周回する。その積分路において、分岐点 ik'/k に達するまでの前半に積分値は $2K + 2iK'$ となる。それは、既に計算した結果から容易に分かる事実である。分岐点 ik'/k を周回すると、積分路はリーマン面 S_+ から S_- に遷移するので、それまでの経路を逆にたどる積分で、積分値は打ち消されずに加算される。その結果、積分路3の終端で積分値は $2K + 2iK'$ となる。また、積分路の終端で分岐点1を周回しているため、積分路はリーマン面 S_+ に戻っている。

積分路2と積分路3は、その終端でリーマン面 S_+ に戻っているため、積分路 L に接続す

ることができる。よって、積分路を特定しなければ,

$$\int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(k'^2 + k^2 z^2)(1 - z^2)}} = u + 4mK + 2n(K + iK'),$$

となるのである。ここで、 m と n は積分路の選択によって決まる整数である。したがって、前節と同様に考えれば、 cn 関数の周期に関する性質:

$$\text{cn}(u + 4mK + 2n(K + iK')) = \text{cn } u,$$

が導かれる。つまり、 $\text{cn } z$ は周期 $4K$ と $2K + 2iK'$ の二重周期をもつ関数であることが逆関数の積分から導かれるのである。

他の積分路についての考察 分岐点 1 の近傍を始点と終端とし、しかもリーマン面 S_+ に戻る可能な積分路があと3つある。どの経路も双方とも分岐点 $-ik'/k$ を周回する。第1の経路は、正の実軸と負の虚軸を通る経路。第2の経路は、正の実軸、正の虚軸、負の実軸、負の虚軸を通る経路である。さらに、第3の経路は、正の実軸をたどって原点に到達した後、虚軸を往復して分岐点 ik'/k と $-ik'/k$ を周回して原点に戻った後、実軸上をたどって分岐点 1 の近傍に戻る。ただし、その終端で分岐点 1 を周回しない。第1の積分路での積分値は $2K - 2iK'$ 、第2の積分路での積分値は $4K + 4iK'$ 、第3の積分路での積分値は $4iK'$ となる。これらの積分値はすべて、 $4K$ と $2K + 2iK'$ の1次結合によって作ることができる。

第4章 テータ関数

本章は、ヤコビの楕円関数をいくつかの基本関数を組み合わせて表現することを考察する。有理関数が分子と分母を因数分解した形、あるいは、部分分数展開した形で表現できると同様に、楕円関数をいくつかの基本的な関数の組合せで記述しようと試みるのだ。楕円関数を記述するための基本関数として、テータ関数と呼ばれる関数を導入する。

4.1 整関数の構成

楕円関数の基本関数として、二重周期をもち、基本周期平行四辺形に零点を1つだけでもつ整関数が望ましい。しかし、前章で示したように二重周期をもつ整関数は定数でなければならぬため、望みの関数を選ぶことは不可能である。そのため、二重周期の関数の代わりに、単一周期の関数で類似の性質の関数を作ることを考えよう。

基本関数として、sn 関数のすべての極を零点とする整関数を作ろう。関数 $\operatorname{sn} z$ は2位の楕円関数であり、基本平行四辺形に1位の極を2つもつ。その極は、 $z = iK', 2K + iK'$ である。複素平面全体に関して、 $\operatorname{sn} z$ の極は、整数 m, n を用いて、 $z = 2mK + (2n + 1)iK'$ となる。これらの点を零点とする関数として、 $(2n + 1)iK'$ と $2K + (2n + 1)iK'$ を零点とし、周期 $4K$ の整関数を作ることにする。変数を z とし、

$$u \equiv e^{\pi i z / 2K}, \quad q \equiv e^{-\pi K' / K}, \quad (4.1)$$

を定義する。ここで定義した u は零点をもたないが、 z について周期 $4K$ をもつ。そのため、 u の関数は同様に周期 $4K$ をもつ。楕円関数 $\operatorname{sn} z$ の極 $z = 2mK + (2n + 1)iK'$ に対応して $u = (-1)^m q^{n+1/2}$ となるので、 $u = \pm q^{n+1/2}$ を零点とする u の整関数をつくればよい。例えば、 $u^2 - q^{2n+1}$ がその条件を満たすので、すべての整数 n に関してそれらの関数の積を作ればよい。しかし、単純に無限乗積を作ると発散するので注意が必要である。楕円関数の母数 k が $0 \leq k \leq 1$ であれば K と K' は正の実数であるので、 $|q| < 1$ となる。無限乗積が収束するには、 $n \rightarrow \infty$ の極限で因数が1に近づくことが条件である。そのため、 $n \geq 0$ の場合、各因数を $1/u^2$ 倍した乗積:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+1} u^{-2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} u^{-2}),$$

を考えればよい。一方, $n < 0$ の場合, 各因数を $-1/q^{2n+1}$ 倍した乗積:

$$\prod_{n=-\infty}^{-1} (1 - q^{-2n-1}u^2) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}u^2),$$

をとればよい。これらの積:

$$f(u) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}u^2)(1 - q^{2n-1}u^{-2}), \quad (4.2)$$

を定義しよう。原点を除く複素平面上の領域に u をとった場合, $0 < r \leq |u| \leq R$ なる r と R を選ぶことができる。そのとき,

$$|q^{2n-1}u^2| \leq |q|^{2n-1}R^2, \quad |q^{2n-1}u^{-2}| \leq |q|^{2n-1}r^{-2},$$

なる不等式を満足する。この不等式によると, $|q| < 1$ であることから, 無限乗積 (4.2) の被乗数は n の増加とともに, 指数関数的に 1 に収束する。したがって, 無限乗積 (4.2) は $u \neq 0$ に対して広義に収束する。さて, (4.2) に $f(u)$ として定義した関数は, u の定義 (4.1) を逆にたどり, z の関数と考えることもできる。そのように z の関数と考えたとき, $f(u)$ は次の特徴をもつ。

- 関数 $f(u)$ は z の複素平面全体で正則である。
- 関数 $f(u)$ は z の関数として周期 $4K$ の周期関数である。
- 関数 $f(u)$ は z の関数として 1 位の零点をもつ。

まず, 複素平面全体での正則性について説明しよう。無限乗積 $f(u)$ は $u = 0$ で発散するのだが, 定義式 (4.1) より $u = 0$ にする z は存在しないので, z の複素平面全体で正則な関数である。周期性については, $u = e^{\pi iz/2K}$ であることから, u が周期 $4K$ の周期関数であることがわかる。したがって, u の関数である $f(u)$ は, z に関して周期 $4K$ の周期関数である。最後に, 零点の位数について説明しよう。すでに述べたように, この無限乗積は $u = \pm q^{n+1/2}$ にを零点とする。無限乗積 (4.2) は,

$$f(u) = (u \mp q^{n+1/2}) f_1(u),$$

なる形で書くことができる。ただし, $f_1(u)$ はゼロでない正則関数とする。ここで, $u = e^{\pi iz/2K}$ に注意すると,

$$f(u) = (e^{\pi iz/2K} \mp q^{n+1/2}) f_1(u),$$

のように書き換えられる。ここで, $e^{\pi iz_0/2K} = \pm q^{n+1/2}$ とする。このとき, z_0 は $f(z)$ の零点である。この z_0 を用いて $f(z)$ を書き換えると,

$$f(u) = \pm q^{n+1/2} \left(e^{\pi i(z-z_0)/2K} - 1 \right) \simeq \pm q^{n+1/2} \frac{\pi i(z-z_0)}{2K},$$

となる。なお、右辺は z_0 の近傍における近似式である。つまり、 $f(z)$ は z_0 の近傍で 1 次関数で近似できるので $f(u)$ は $u = \pm q^{n+1/2}$ に対応する z において 1 位の零点をもつ。

次に、 $f(u)$ を無限級数で記述しよう。関数 $f(u)$ は $u = 0$ で発散するため、 $u = 0$ を中心とした展開式はローラン級数となる。また、無限乗積 (4.2) から、 u についての偶関数であることがわかるので、ローラン展開において奇数次の項が現れない。また、 $f(u) = f(u^{-1})$ であることも無限乗積 (4.2) から明らかであるので、 u^{2n} と u^{-2n} の係数は等しくなければならない。したがって、 $f(u)$ は、

$$f(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (u^{2n} + u^{-2n}), \quad (4.3)$$

なる形で展開できるはずである。さらに、(4.2) において $u \mapsto qu$ のように置き換えると、

$$\begin{aligned} f(qu) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n+1}u^2)(1 - q^{2n-3}z^{-2}) \\ &= \frac{1 - q^{-1}u^{-1}}{1 - qu^2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}u^2)(1 - q^{2n-1}z^{-2}) \\ &= \frac{1 - q^{-1}u^{-1}}{1 - qu^2} f(u) = -\frac{f(u)}{qu^2}, \end{aligned}$$

すなわち、

$$f(u) = -qu^2 f(qu),$$

が得られる。この関係式に級数 (4.3) を代入すると、

$$a_1 = -qa_0, \quad a_2 = -q^3 a_1, \quad \dots, \quad a_n = -q^{2n-1} a_{n-1},$$

の規則性で展開係数が計算できることがわかる。逐次的に展開係数を計算していくと、

$$a_n = (-1)^n q^3 \cdots q^{2n-1} a_0 = (-1)^n q^{n^2} a_0,$$

が得られる。したがって、関数 $f(u)$ は、

$$\begin{aligned} f(u) &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m-1}u^2)(1 - q^{2m-1}u^{-2}) \\ &= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (u^{2n} + u^{-2n}) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

なる級数が得られる。この時点で、展開係数のうち未知数は a_0 のみとなった。この展開係数は q に依存するので、 $a_0 \equiv a(q)$ と書こう。関係式 (4.4) に、 $u = 1$, $z = e^{\pi i/4}$ を代入すると、

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^2 = a(q) (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots), \quad (4.5a)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-2}) = a(q) (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \cdots), \quad (4.5b)$$

が得られる。このうち (4.5a) の q を q^4 に置き換えると,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{8n-4})^2 = a(q^4) (1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \dots),$$

が得られる。この結果と (4.5b) の比は,

$$\begin{aligned} \frac{a(q^4)}{a(q)} &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{8n-4})^2 \bigg/ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-2}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n^2})(1 - q^{8n-4}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-2})(1 - q^{8n-4})(1 - q^{8n}) \bigg/ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{8n}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \bigg/ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{8n}), \end{aligned}$$

のように計算できる。第3行目への数式変形がわかりにくいかもしれないので説明しておく。第2行目の分母の乗積に現れる $4n-2, 8n-4, 8n$ を順に書いてみると,

$$\begin{aligned} 4n-2: & 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, \dots \\ 8n-4: & 4, 12, 20, 28, \dots \\ 8n: & 8, 16, 24, 32, \dots \end{aligned}$$

となるので, 分母は $(1 - q^{2n})$ の無限乗積であることがわかる。よって, 第3行目のように乗積を簡略化できるのである。したがって,

$$a(q) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = a(q^4) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{8n}), \quad (4.6)$$

なる関係が成立する。この関係式の q の代わりに q^4 を代入すると,

$$a(q) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = a(q^4) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{8n}) = a(q^{16}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{32n}),$$

が導かれ, これを r 回繰り返した結果として,

$$a(q) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = a(q^{4^r}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4^r \cdot 2n}),$$

が得られるはずである。ここで, $|q| < 1$ であることから, $r \rightarrow \infty$ とすると $q^{4^r} \rightarrow 0$ となることがわかる。また, (4.5a) に $q = 0$ を代入すると, $a(0) = 1$ であることがわかるので,

$$a(q) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) = 1,$$

が導かれる。したがって, $a(q)$ も特定できた。これを (4.4) に代入すると,

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) f(u) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1}u^2)(1 - q^{2n-1}u^{-2}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (u^{2n} + u^{-2n}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

が得られる。本節の冒頭で u と q が (4.1) で定義されているため, $f(u)$ を z についての関数として,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi n K'/K}) f(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\pi n^2 K'/K} \cos \frac{\pi n z}{K},$$

のように書くこともできる。

4.2 ヤコビの θ 関数系

前節で示した (4.7) の左辺を z の関数として定義したいいくつかの関数は, 楕円関数の二重周期性に類似した性質を示す。定義したいいくつかの関数を組み合わせて, 二重周期性を得ることが可能である。本節で定義する複数の関数は, θ 関数系と呼ばれる。

θ 関数系の代表として, (4.7) の左辺を z の関数:

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} u^2)(1 - q^{2n-1} u^{-2}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (u^{2n} + u^{-2n}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

を定義しよう。ここで,

$$Q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}),$$

とする。記述の簡略のため u を残しているが, $u \equiv e^{\pi i z/2K}$, $q \equiv e^{-\pi K'/K}$ であることに注意しておこう。新たに定義した関数 $\Theta(z)$ の変化を調べるため, その変数に $z + K$, $z + iK'$, $z + K + iK'$ を代入してみよう。まず, $u = e^{\pi i z/2K}$ の変化を調べると,

$$\begin{aligned} e^{\pi i(z+K)/2K} &= e^{\pi i z/2K} \cdot e^{\pi i/2} = iu, \\ e^{\pi i(z+iK')/2K} &= e^{\pi i z/2K} \cdot e^{-\pi K'/K'} = q^{1/2}u, \\ e^{\pi i(z+K'+iK')/2K} &= e^{\pi i z/2K} \cdot e^{\pi i/2} \cdot e^{-\pi K'/K'} = iq^{1/2}u, \end{aligned}$$

となる。ただし, $q = e^{-\pi K'/K}$ なる関係を利用した。この計算結果を用いると,

$$\Theta(z + K) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (u^{2n} + u^{-2n}), \quad (4.9a)$$

$$\begin{aligned} \Theta(z + iK) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (q^n u^{2n} + q^{-n} u^{-2n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2 - 1/4} u^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2 - 1/4} u^{-2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2-1/4} u^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2-1/4} u^{-2n-2} \\
&= q^{1/4} u^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \left(u^{2n+1} - u^{-(2n+1)} \right), \tag{4.9b}
\end{aligned}$$

$$\Theta(z + K + iK) = q^{1/4} u^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \left(u^{2n+1} + u^{-(2n+1)} \right), \tag{4.9c}$$

なる関係式が得られる。この結果に関して、新たな関数:

$$\Theta_1(z) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} q^{n^2} (u^{2n} + u^{-2n}), \tag{4.10a}$$

$$H(z) = -i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} (u^{2n+1} - u^{-(2n+1)}), \tag{4.10b}$$

$$H_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} (u^{2n+1} - u^{-(2n+1)}), \tag{4.10c}$$

を定義しておく。これらのうち、 $H(z)$ は虚数因子 $-i$ が乗じられた形で定義されているが、その理由は後に明らかになる。前に定義した $\Theta(z)$ を含め、これらの関数を総称して Θ 関数系¹と呼ぶことにしよう。また、補助関数として、

$$\lambda(z) = q^{-1/4} u^{-1} = \exp\left(\frac{\pi K'}{4K} - \frac{\pi i}{2K} u\right),$$

を定義しておこう。そのとき、 Θ 関数系の関数には、

$$\Theta(z + K) = \Theta_1(z), \tag{4.11a}$$

$$\Theta(z + iK') = i\lambda(z) H(z), \tag{4.11b}$$

$$\Theta(z + K + iK') = \lambda(z) H_1(z), \tag{4.11c}$$

なる関係が成立する。ここで、 $u = e^{\pi i z / 2K}$ に注意して Θ 系の関数を z の関数として明示的に書くと、

$$\Theta(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi}{K} u, \tag{4.12a}$$

$$\Theta_1(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos \frac{n\pi}{K} u, \tag{4.12b}$$

$$H(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2K} u, \tag{4.12c}$$

$$H_1(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2K} u, \tag{4.12d}$$

¹読み方を書くと、 Θ 関数はテータ関数、 H 関数はエータ関数 (エイチではない) である。本章で最終的に導入する ϑ 関数もテータ関数なので、 Θ 関数と H 関数をあえて、カタカナ表記することは避けることにする。

が得られる。これらの式は、フーリエ級数の形になっている。これらの数式から $\Theta(z)$ と $\Theta_1(z)$ が $2K$ を周期に、 $H(z)$ と $H_1(z)$ が $4K$ を周期とすることがわかる。また、 K と K' が実数であるならば、これらの関数も実数となる。これに関して、関数 $H(z)$ の定義が虚数因子 $-i$ を含んでいるため、完全楕円積分 K と K' が実数である場合に $H(z)$ が実数となるのである。

関数 $\Theta(z)$ が $2mK + (2n + 1)iK'$ を零点とすることは前節で述べたとおりである。ここで、(4.11a) から (4.11c) の関係に注意すると他の関数の零点も特定することができる。具体的には、

$$\begin{aligned}\Theta(z) \text{ の零点:} & \quad 2mK + (2n + 1)iK' \\ \Theta_1(z) \text{ の零点:} & \quad (2m + 1)K + (2n + 1)iK' \\ H(z) \text{ の零点:} & \quad 2mK + 2n iK' \\ H_1(z) \text{ の零点:} & \quad (2m + 1)K + 2n iK'\end{aligned}$$

が零点となる。そのうち、 $\Theta(z)$ の零点は、ヤコビの楕円関数と補助関数、すなわち、sn 関数、cn 関数、dn 関数の極と一致する。また、 $H(z)$ 、 $H_1(z)$ 、 $\Theta_1(z)$ の零点は、それぞれ、sn 関数、cn 関数、dn 関数の零点と一致する。

表 4.1: $\Theta(z)$ 関数系の値

変数 \ 関数	Θ 関数	Θ_1 関数	H 関数	H_1 関数
$z + K$	$\Theta_1(z)$	$\Theta(z)$	$H_1(z)$	$-H(z)$
$z + iK'$	$i\lambda(z)H(z)$	$\lambda(z)H_1(z)$	$i\lambda(z)\Theta(z)$	$\lambda(z)\Theta_1(z)$
$z + K + iK'$	$\lambda(z)H_1(z)$	$i\lambda(z)H(z)$	$i\lambda(z)\Theta_1(z)$	$-i\lambda(z)\Theta(z)$

続いて、周期性について考察しよう。まず、補助関数 $\lambda(z)$ は定義式によって、

$$\lambda(z + K) = -i\lambda(z), \quad \lambda(z + iK') = q^{-1/2}\lambda(z),$$

であることがわかる。この $\lambda(z)$ の関係と、表 4.1 を参照すると、

$$\begin{aligned}\Theta(z + 2K) &= \Theta_1(z + K) = \Theta(z), \\ \Theta(z + 2iK') &= i\lambda(z + iK')H(z + iK') = -\mu(z)\Theta(z),\end{aligned}$$

のような関係がえられる。ただし、

$$\mu(z) = q^{-1/4}\lambda(z)^2 = \exp\left(-\frac{\pi i}{K} + \frac{\pi K'}{K}\right),$$

とおいた。この結果をもう一度繰り返すと、

$$\Theta(z + 4K) = \Theta(z), \quad \Theta(z + 2K + 2iK') = -\mu(z)\Theta(z),$$

なる関係が得られる。同様の考察を適用すると、他の関数についても $z + 2K$, $z + 4K$, $z + 2iK'$, $z + 2K + 2iK'$ における値を調べることができる。計算過程を省略するが、その結果は表 4.2 のようになる。

表 4.2: Θ 関数系の周期性

変数 \ 関数	Θ 関数	Θ_1 関数	H 関数	H_1 関数
$z + 2K$	$\Theta(z)$	$\Theta_1(z)$	$-H(z)$	$-H_1(z)$
$z + 4K$	$\Theta(z)$	$\Theta_1(z)$	$H(z)$	$H_1(z)$
$z + 2iK'$	$-\mu(z)\Theta(z)$	$\mu(z)\Theta_1(z)$	$-\mu(z)H(z)$	$\mu(z)H_1(z)$
$z + 2K + 2iK'$	$-\mu(z)\Theta(z)$	$\mu(z)\Theta_1(z)$	$\mu(z)H(z)$	$-\mu(z)H_1(z)$

この結果は非常に興味深い。これら 4 つの関数は実数方向に周期性をもっている。一方, $z + 2iK'$, $z + 2K + 2iK'$ における値を参照すると, $\mu(z)$ を気にしなければ周期的に見える。その解釈によると, 例えば, $\Theta_1(z)$ は変数の変化 $2iK'$ に対して擬似的な周期性をもつ。他の Θ 関数系の関数も擬似的な周期性をもっている。そのため, Θ 関数系の関数は擬二重周期関数という。

これらの関数とヤコビの sn 関数の共通点に注意しよう。表 4.1 によると, $\Theta(z)$ は $\text{sn } z$ の極を零点にもち, $H(z)$ は $\text{sn } z$ と同一の零点をもつ。これらの関数の定義式より, 零点はすべて 1 位である。したがって, これらの関数の比によって定義される関数 $H(z)/\Theta(z)$ は, $\text{sn } z$ 関数の零点と極がすべて一致する関数となる。さらに, 表 4.2 より,

$$\frac{H(z + 4K)}{\Theta(z + 4K)} = \frac{H(z)}{\Theta(z)},$$

$$\frac{H(z + 2iK')}{\Theta(z + 2iK')} = \frac{-\mu(z)H(z)}{-\mu(z)\Theta(z)} = \frac{H(z)}{\Theta(z)},$$

であることが示されるので, $H(z)/\Theta(z)$ は $\text{sn } z$ と同一の二重周期をもつ。前節に示した楕円関数の性質によると, 関数 $f(z)$ と $g(z)$ が, 同一の二重周期をもち, すべての極と零点が一致していれば, 2 つの関数は定数因子 c を用いて $f(z) = c g(z)$ の関係を満たす。つまり, $H(z)/\Theta(z)$ は $\text{sn } z$ ということである。ここで, $\text{sn } K = 1$ なる条件から定数因子を定めると,

$$\text{sn } z = \frac{\Theta(K) H(z)}{H(K) \Theta(z)} = \frac{\Theta_1(0) H(z)}{H_1(0) \Theta(z)},$$

のように sn 関数が Θ 関数系で書くことができる。同様の考察を cn 関数と dn 関数についても適用することができる。結果を改めて書くと,

$$\text{sn } z = \frac{\Theta_1(0) H(z)}{H_1(0) \Theta(z)}, \quad \text{cn } z = \frac{\Theta(0) H_1(z)}{H_1(0) \Theta(z)}, \quad \text{dn } z = \frac{\Theta(0) \Theta_1(z)}{\Theta_1(0) \Theta(z)}, \quad (4.13)$$

となる。つまり, ヤコビの Θ 関数系を用いてヤコビの楕円関数を表現できたのだ。

4.3 テータ関数

前節で導入した θ 関数系の関数は, 変数 z と, パラメータ K と K' に依存する関数である。ところが, パラメータ K と K' は独立ではなく, 楕円関数の母数 k に依存するパラメータであるので, 一つにまとめるべきである。本節では, そのようにパラメータを見直して θ 関数系の代わりとなる新たな関数系を定義し, ヤコビの楕円関数を記述する。

パラメータ K と K' は, 母数 k に依存して一意的に決まる数値である。二つのパラメータ K と K' をまとめるには, やはり, 母数 k に依存して一意的に決まる数値でなければならない。その性質をもつパラメータとして,

$$\tau \equiv \frac{iK'}{K},$$

を導入する。母数 k の増加に対して, K' は単調減少, K は単調増加であるので, パラメータ τ の虚部は単調減少となる。つまり, k に依存して一意的に決まる数値である。しかも, τ の虚数部は $(0, \infty)$ の範囲を占めることがわかる。さらに, 変数 z に関して $z/2K \mapsto z$ のように置き換える。したがって, θ 関数系の関数の記述を簡略化するために用いた記号 u と q は,

$$u = e^{\pi i z}, \quad q = e^{\pi i \tau}, \quad (4.14)$$

のように与えられる。このとき, θ 関数系の関数は,

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z) &= -i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} (u^{2n+1} - u^{-(2n+1)}) \\ &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} u^{2n+1}, \end{aligned} \quad (4.15a)$$

$$\vartheta_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} (u^{2n+1} + u^{-(2n+1)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} u^{2n+1}, \quad (4.15b)$$

$$\vartheta_3(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} (u^{2n} + u^{-2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} u^{2n}, \quad (4.15c)$$

$$\vartheta_4(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (u^{2n} + u^{-2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} u^{2n}, \quad (4.15d)$$

のように書き換えることができる。これら新しく定義された関数を**テータ関数**と呼ぶ。テータ関数は (4.14) のような置き換えをしているため, 形式上, 前節で導入した θ 関数系とまったく同じように見える。しかし, 厳密には,

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z) &= H(2Kz), & \vartheta_2(z) &= H_1(2Kz), \\ \vartheta_3(z) &= \Theta_1(2Kz), & \vartheta_4(z) &= \Theta(2Kz), \end{aligned}$$

のような対応関係が成立する。これら新しい関数を用いると、ヤコビの楕円関数は、

$$\operatorname{sn} 2Kz = \frac{\vartheta_3(0)\vartheta_1(z)}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(z)}, \quad \operatorname{cn} 2Kz = \frac{\vartheta_4(0)\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(z)}, \quad \operatorname{dn} 2Kz = \frac{\vartheta_4(0)\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)\vartheta_4(z)}, \quad (4.16)$$

のように書くことができる。ヤコビの楕円関数に関して母数が $0 < k < 1$ であることから、完全楕円積分 K と K' はともに正の実数であった。それに対応するパラメータ τ は虚部が正の数である純虚数である。さらに一般化して、 τ が複素数であっても、その虚部が正の数であれば、 $|q| < 1$ となるので、級数 (4.15a) から (4.15d) が収束する。テータ関数は $\vartheta_1(z)$ のようにパラメータ τ を省略することが多いのだが、 τ の依存性を強調する場合には、 $\vartheta_1(z; \tau)$ のように書く。

新たに定義したテータ関数においても、 Θ 関数系と同様に、指数関数を三角関数に書き換えることができる。そのように関数を書き換えると、

$$\vartheta_1(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} \sin(2n+1)\pi z, \quad (4.17a)$$

$$\vartheta_2(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)\pi z, \quad (4.17b)$$

$$\vartheta_3(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi z, \quad (4.17c)$$

$$\vartheta_4(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi z, \quad (4.17d)$$

のようになる。この式から、テータ関数のうち $\vartheta_1(z)$ が奇関数で、一方、 $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$, $\vartheta_4(z)$ が偶関数であることがわかる。特に、 $q \rightarrow 0$ の極限で、 $\vartheta_1(z) = 2q^{1/4} \sin \pi z$, $\vartheta_2(z) = 2q^{1/4} \cos \pi z$, $\vartheta_3(z) = \vartheta_4(z) = 1$ となる。つまり、この極限では $\operatorname{sn} 2\pi z = \sin \pi z$, $\operatorname{cn} 2\pi z = \cos \pi z$, $\operatorname{dn} 2\pi z = 1$ が成立する。実は、 $q \rightarrow 0$ の極限は、楕円関数の母数がゼロに近いことを意味する。

フーリエ変換で表された級数 (4.17a) から (4.17d) は、収束が速い。なぜなら、 $0 < k < 1$ なる母数に対して、 $|q| < 1$ であり、フーリエ級数の n 次の展開係数が q^{n^2} 、または、 $q^{(n+1/2)^2}$ であるので、 n の増加に対して急速にゼロに収束するからである。例えば、楕円関数の母数 $k = 0.9$ に対応して、 $\tau = 0.72554$ となる。その条件では、 $q = e^{\pi i \tau} = 0.10235$ となるので5次の級数展開で10進数の20桁以上の有効桁が得られるのだ。その意味で、これらの公式はヤコビの楕円関数を計算する上で有用である。ヤコビの楕円関数を計算するには、級数 (4.17a) から (4.17d) を用いてテータ関数を計算し、その結果を公式 (4.16) に代入すればよい。一例として、実数変数を与えたときのテータ関数と、それを用いてヤコビの楕円関数を計算した結果を図 4.1 に示す。この例では、楕円関数の母数を $k = 0.9$ とした。ヤコビの楕円関数は、既に、第2章でテイラー級数による算出法を示した。しかし、級数展開

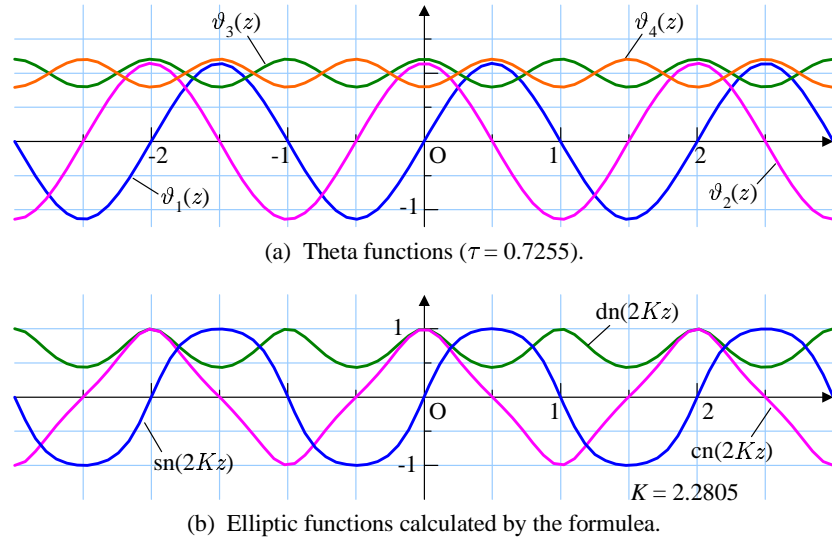


図 4.1: テータ関数とそれらから計算されるヤコビの楕円関数 ($k = 0.9$)

では任意の変数に対して十分な収束速度を約束できないので、収束速度を得るために倍角公式を繰り返す工夫を施した。一方、テータ関数による計算ではそのような工夫は不要である。

パラメータ τ が $\tau \equiv iK'/K$ のように定義され、テータ関数の変数 z が Θ 関数系の $2Kz$ に対応していることを利用すると、各関数の零点が、

$$\vartheta_1 \text{ 関数の零点: } m + n\tau$$

$$\vartheta_2 \text{ 関数の零点: } m + 1/2 + n\tau$$

$$\vartheta_3 \text{ 関数の零点: } m + 1/2 + (n + 1/2)\tau$$

$$\vartheta_4 \text{ 関数の零点: } m + (n + 1/2)\tau$$

となることが容易にわかる。さらに、主要点における各関数の値も容易に計算できる。導出過程を特に説明することもないだろうから、結果のみを表 4.3 に示す。なお、表 4.3 で補助的に用いた記号 $\lambda(z)$ と $\mu(z)$ は、

$$\lambda(z) = q^{-1/4}u^{-1} = e^{-(z+\tau/4)\pi i}, \quad \mu(z) = q^{-1}z^{-1} = e^{-(2z+\tau)\pi i}, \quad (4.18)$$

である。これらの表によると、テータ関数は擬二重周期性をもっている。まず、 $\vartheta_1(z)$ と $\vartheta_2(z)$ は 2 を周期とし、 $\vartheta_3(z)$ と $\vartheta_4(z)$ は 1 を周期とする。一方、補助的な振幅関数 $\lambda(z)$ と $\mu(z)$ を気にしなければ、 $\vartheta_1(z)$ は $1 + \tau$ を、 $\vartheta_2(z)$ と $\vartheta_3(z)$ は τ を周期とし、 $\vartheta_4(z)$ は 2τ を周期とする。

前節で $\Theta(z)$ が無限乗積で書けることを示した。関数 $\Theta(z)$ と対応関係にある $\vartheta_4(z)$ は無

表 4.3: 主要点におけるテータ関数の値

関数 \ 変数	ϑ_1 関数	ϑ_2 関数	ϑ_3 関数	ϑ_4 関数
$-z$	$-\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$
$z + 1/2$	$\vartheta_2(z)$	$-\vartheta_1(z)$	$\vartheta_4(z)$	$\vartheta_3(z)$
$z + 1$	$-\vartheta_1(z)$	$-\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$
$v + \tau/2$	$i\lambda(z)\vartheta_4(z)$	$\lambda(z)\vartheta_3(z)$	$\lambda(z)\vartheta_2(z)$	$i\lambda(z)\vartheta_1(z)$
$z + \tau$	$-\mu(z)\vartheta_1(z)$	$\mu(z)\vartheta_2(z)$	$\mu(z)\vartheta_3(z)$	$-\mu(z)\vartheta_4(z)$
$z + (1 + \tau)/2$	$\lambda(z)\vartheta_3(z)$	$-i\lambda(z)\vartheta_4(z)$	$i\lambda(z)\vartheta_1(z)$	$\lambda(z)\vartheta_2(z)$
$z + 1 + \tau$	$\mu(z)\vartheta_1(z)$	$-\mu(z)\vartheta_2(z)$	$\mu(z)\vartheta_3(z)$	$-\mu(z)\vartheta_4(z)$

限乗積によって表現できる。その無限乗積表現は,

$$\begin{aligned}\vartheta_4(z) &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}u^2)(1 - q^{2n-1}u^{-2}) \\ &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}),\end{aligned}$$

となる。ただし, Q_0 は前節で θ 関数系を記述したときと同様に,

$$Q_0 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}),$$

である。これを足がかりに, $\vartheta_3(z) = \vartheta_3(z + 1/2)$ の関係から $\vartheta_3(z)$ を無限乗積で書ける。さらに, $\vartheta_2(z) = \lambda^{-1}\vartheta_3(z + \tau/2)$, $\vartheta_1(z) = -\vartheta_2(z + 1/2)$ を利用すると, $\vartheta_2(z)$ と $\vartheta_1(z)$ が順次, 無限乗積で表現できる。数式変形では, z から $z + 1/2$ と $z + \tau/2$ の置き換えは, u において iu と $q^{1/2}u$ への置き換えに対応する。無限乗積に表現した結果を書くと,

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= -iq^{1/4}(u - u^{-1}) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}u^2)(1 - q^{2n}u^{-2}) \\ &= 2q^{1/4} \sin \pi z \cdot Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi z + q^{4n}),\end{aligned}\tag{4.19a}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(z) &= q^{1/4}(u + u^{-1}) Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}u^2)(1 + q^{2n}u^{-2}) \\ &= 2q^{1/4} \cos \pi z \cdot Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi z + q^{4n}),\end{aligned}\tag{4.19b}$$

$$\vartheta_3(z) = Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}u^2)(1 + q^{2n-1}u^{-2})$$

$$= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}), \quad (4.19c)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_4(z) &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} u^2)(1 - q^{2n-1} u^{-2}) \\ &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}), \end{aligned} \quad (4.19d)$$

のようになる。次に、 Q_0 と同様に、

$$Q_1 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}), \quad Q_2 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}), \quad Q_3 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}),$$

のように定義してみよう。ここで、 $z = 0$ (または、 $u = 1$) を無限乗積の公式に代入すると、

$$\vartheta_1(0) = 0, \quad (4.20a)$$

$$\vartheta_2(0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4} Q_0 Q_1^2, \quad (4.20b)$$

$$\vartheta_3(0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = Q_0 Q_2^2, \quad (4.20c)$$

$$\vartheta_4(0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = Q_0 Q_3^2, \quad (4.20d)$$

が導出される。ところで、定義式から

$$Q_0 Q_1 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n}), \quad Q_2 Q_3 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-2}),$$

であるので、 $Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = Q_0$ が成立することがわかる。さらに、 $Q_0 \neq 0$ であるので、

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 1, \quad (4.21)$$

が導かれる。

続いて、 $\vartheta_1(0) = 0$ であることから、微分の定義によって

$$\vartheta_1'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\vartheta_1(z)}{z},$$

である。この関係を利用すると、 $\vartheta_1'(0) = 2\pi q^{1/4} Q_0^3$ であるが、上で導出した積の公式によると、

$$\vartheta_1'(0) = \pi \vartheta_2(0) \vartheta_3(0) \vartheta_4(0), \quad (4.22)$$

なる関係式が得られる。

4.4 テータ関数の間の関係

前節の表 4.3 によると, テータ関数の自乗は, 周期性や擬周期性を示す。正弦波の自乗の記述 ($\sin^2 z$ など) にならい, テータ関数の自乗を $\vartheta^2(z)$ と書くことにすると,

$$\vartheta^2(z+1) = \vartheta^2(z), \quad \vartheta^2(z+\tau) = [\mu(z)]^2 \vartheta(z),$$

が成立する。なお, この数式はすべてのテータ関数について成立するので, 関数を識別する添え字を省略している。この数式によると, テータ関数の自乗は周期 1 と擬周期 τ をもつ関数である。この性質のため, テータ関数自乗の比:

$$f_1(z) \equiv \frac{\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_2^2(z)}, \quad f_2(z) \equiv \frac{\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_2^2(z)},$$

は, ともに 1 と τ を周期とする楕円関数となる。これらの楕円関数は $\vartheta_2(z)$ の零点を極とする。関数 $\vartheta_2(z)$ の零点は無限乗積表現 (4.19b) によって $z = 1/2$ であることがわかる。よって, 楕円関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は $z = 1/2$ を極とする。さらに, (4.19b) によると, $z = 1/2$ のとき乗積記号が作用する因子はどれもゼロでないので, その零点の位数は 1 である。したがって, $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は $z = 1/2$ に 2 位の極をもつのである。それら楕円関数の基本周期平行四辺形, すなわち, 原点から 1 および原点から τ が張る平行四辺形, の内部に $z = 1/2$ 以外の極が存在しないことも無限乗積 (4.19b) からわかる。つまり, $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は 2 位の楕円関数である。

関数 $f_1(z)$ は上の考察によると, -2 次の項が最低次数である。その最低次数の展開係数は,

$$\lim_{z \rightarrow 1/2} \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_2^2(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 \vartheta_2^2(z)}{\vartheta_1^2(z)} = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_1^2(0)^2},$$

のように計算できる。同様に, $f_2(z)$ の最低次数の展開係数は $\vartheta_3^2(0)/\vartheta_1^2(0)$ となる。一方,

$$\vartheta_3^2(0) f_1(z) - \vartheta_2^2(0) f_2(z), \quad (4.23)$$

なる関数を考えよう。この関数は, $f_1(z)$, $f_2(z)$ と同一の周期をもつ楕円関数である。ところが, この関数は互いに -2 次の項が打ち消しあうように定義されているので, 位数は 1 以下となるはずである。しかし, 前節で調べたように 1 位の楕円関数は存在しない。また, 0 位の楕円関数が定数となるので, (4.23) で定義された関数は定数関数である。その定数を求めるため, 関数に $z = 0$ を代入すると,

$$c = \vartheta_3^2(0) \frac{\vartheta_1^2(0)}{\vartheta_2^2(0)} - \vartheta_2^2(0) \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_2^2(0)} = -\vartheta_4^2(0),$$

である。ここで, $\vartheta_1(0) = 0$ であることを利用した。この事実を利用して (4.23) で定義される関数に $\vartheta_2^2(z)$ を乗じると,

$$\vartheta_2^2(0) \vartheta_4^2(z) - \vartheta_3^2(0) \vartheta_1^2(z) = \vartheta_4^2(0) \vartheta_2^2(z), \quad (4.24a)$$

なる関係が得られる。この式の変数 z の代わりに $z + 1/2$, $z + \tau/2$, $z + (1 + \tau)/2$ を順に代入すると,

$$\vartheta_2^2(0) \vartheta_3^2(z) - \vartheta_3^2(0) \vartheta_2^2(z) = \vartheta_4^2(0) \vartheta_1^2(z), \quad (4.24b)$$

$$\vartheta_3^2(0) \vartheta_4^2(z) - \vartheta_2^2(0) \vartheta_1^2(z) = \vartheta_4^2(0) \vartheta_3^2(z), \quad (4.24c)$$

$$\vartheta_3^2(0) \vartheta_3^2(z) - \vartheta_2^2(0) \vartheta_2^2(z) = \vartheta_4^2(0) \vartheta_4^2(z), \quad (4.24d)$$

が得られる。ここで, (4.24a) から (4.24d) に, それぞれ, $\vartheta_2^2(z)$, $-\vartheta_1^2(z)$, $-\vartheta_3^2(z)$, $\vartheta_4^2(z)$ を乗じ, 得られた積をすべて加算する。その結果が,

$$\vartheta_4(0) \left[\vartheta_2^4(z) - \vartheta_1^4(z) - \vartheta_3^4(z) + \vartheta_4^4(z) \right] = 0,$$

であるので,

$$\vartheta_2^4(z) + \vartheta_4^4(z) = \vartheta_1^4(z) + \vartheta_3^4(z), \quad (4.25)$$

なる関係が得られる。

4.5 ヤコビの楕円関数との関係

楕円関数におけるテータ関数の役割は大きい。テータ関数とヤコビのヤコビの楕円関数の関係を調べると, 母数 k と完全楕円積分 K までもがテータ関数を用いて表現できることがわかる。

母数 k が $(0, 1)$ の範囲に含まれる場合のヤコビの楕円関数は, 前節で書いたように,

$$\operatorname{sn} 2Kz = \frac{\vartheta_3(0) \vartheta_1(z)}{\vartheta_2(0) \vartheta_4(z)},$$

なるテータ関数を用いた形で表現できる。なお, テータ関数のパラメータ τ は, $\tau \equiv iK'/K$ で与えられる。この sn 関数のテータ関数表現から, 定数因子を除き, 微分すると,

$$\left(\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right)' = \frac{\vartheta_1'(z) \vartheta_4(z) - \vartheta_1(z) \vartheta_4'(z)}{\vartheta_4^2(z)},$$

となる。なお, プライム ($'$) は z についての微分である。もともと, $\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$ が周期 2 と τ の楕円関数であるので, それを微分して得られる関数も周期 2 と τ の楕円関数である。さらに, この導関数に $\vartheta_4^2(z)/\vartheta_2(z) \vartheta_3(z)$ を乗じた積:

$$f(z) \equiv \frac{\vartheta_1'(z) \vartheta_4(z) - \vartheta_1(z) \vartheta_4'(z)}{\vartheta_2(z) \vartheta_3(z)},$$

を考えよう。この $f(z)$ は同様に, 周期 2 と τ をもつ楕円関数である。正確には, $f(z)$ は 1 と $\tau/2$ を基本周期とする楕円関数である。この基本周期については, 後に証明する。原点

を基点とする基本周期平行四辺形の内部に, $\vartheta_2(z)$ は $z = 1/2$ に 1 位の零点をもち, $\vartheta_3(z)$ は零点をもたない。よって, $f(z)$ は基本平行四辺形の内部に 1 位の極 $z = 1/2$ だけをもつことがわかる。ところが, 楕円関数の性質によると, 1 位以下の次数の楕円関数は定数でなければならないので, $f(z)$ は定数関数である。その定数を得るには, $f(0)$ を計算してみるとよい。そのうち, $\vartheta_1'(0)$ が (4.22) によって与えられ, $\vartheta_4'(0) = 0$ が (4.17d) によってわかるので, 求める定数は,

$$f(0) = \pi \vartheta_4^2(0),$$

となる。これまでの計算結果を利用すると, $\operatorname{sn} 2Kz$ の導関数は,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{sn} 2Kz &= \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \left(\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)} \right)' = \frac{\pi \vartheta_3(0) \vartheta_4^2(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_2(z) \vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)} \\ &= \pi \vartheta_3^2(0) \frac{\vartheta_4(0) \vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0) \vartheta_4(z)} \frac{\vartheta_4(0) \vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0) \vartheta_4(z)}, \end{aligned}$$

のように書くことができる。ここで, テータ関数同士の関係 (4.24a) から (4.24d) を利用すると,

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_4^2(0) \vartheta_2^2(z)}{\vartheta_2^2(0) \vartheta_4^2(z)} &= \frac{\vartheta_2^2(0) \vartheta_4^2(z) - \vartheta_3^2(0) \vartheta_1^2(z)}{\vartheta_2^2(0) \vartheta_4^2(z)} = 1 - \operatorname{sn}^2 2Kz, \\ \frac{\vartheta_4^2(0) \vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0) \vartheta_4^2(z)} &= \frac{\vartheta_3^2(0) \vartheta_4^2(z) - \vartheta_2^2(0) \vartheta_1^2(z)}{\vartheta_3^2(0) \vartheta_4^2(z)} \\ &= 1 - \frac{\vartheta_2^4(0) \vartheta_3^2(0) \vartheta_1^2(z)}{\vartheta_3^4(0) \vartheta_3^2(0) \vartheta_1^2(z)} = 1 - \frac{\vartheta_2^4(z)}{\vartheta_3^4(z)} \operatorname{sn}^2 2Kz, \end{aligned}$$

のように計算できるので, $\operatorname{sn} 2Kz$ の導関数は,

$$(\operatorname{sn} 2Kz)' = \pi \vartheta_3^2(0) \operatorname{cn} 2Kz \cdot \left(1 - \frac{\vartheta_2^4(v)}{\vartheta_3^4(v)} \operatorname{sn}^2 2Kz \right)^{1/2},$$

のように書くことができる。ここで, $(\operatorname{sn} 2Kz)' = 2K \operatorname{cn} 2Kz \operatorname{dn} 2Kz$ であることに注意しよう。しかも, $\operatorname{dn} 2Kz = (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2Kz)^{1/2}$ である。その事実によって,

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0), \quad k = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}, \quad (4.26)$$

なる関係が導出される。また, 補母数に関しては,

$$K' = \frac{\pi}{2i} \tau \vartheta_3^2(0), \quad k' = \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}, \quad (4.27)$$

が成立する。この公式のうち, 完全楕円積分 K' に関する公式は, テータ関数のパラメータ $\tau = iK'/K$ から導かれる。一方, k' に関する公式は, 単純に $k'^2 = 1 - k^2$ から導出できる。ただし, その計算過程で公式 (4.24d) を使った。ヤコビの楕円関数 $\operatorname{sn} 2Kz$ は, 変数 z に関して 2 と τ を周期とする²。当然, その周期は, テータ関数表現 $\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$ の周期と一致する。

²これは, $\operatorname{sn} z$ が $4K$ と $2iK'$ を周期とすることに相当する。

第5章 ワイエルシュトラスの楕円関数

本章では二重周期をもつ関数の基本形となる関数を定義し、その関数の性質を調べる。既に述べたように楕円関数は二重周期をもつことが特徴であるので、本章で導入する関数は楕円関数の基本関数である。その基本的な楕円関数は、ワイエルシュトラスが導入したことからワイエルシュトラスの楕円関数と呼ばれる。

5.1 級数による定義

任意の複素数 ω_1 と ω_3 をとり¹、それらからつくられる格子点 $\omega = 2n\omega_1 + 2m\omega_3$ を考えよう。ただし、 n と m は整数である。図 5.1 に示すこれらの格子点を極とする関数として、

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad (5.1)$$

を定義しよう。この関数はワイエルシュトラス (Weierstrass) の楕円関数、または、ワイエルシュトラスの \wp 関数 (ペー関数) と呼ばれる。なお、総和の条件 $\omega \in \Omega'$ は、原点を除く ω の格子点すべてを意味する。また、後に示すが、総和の対象となる $-1/\omega^2$ の項はこの級数を収束させるために必要な項である。

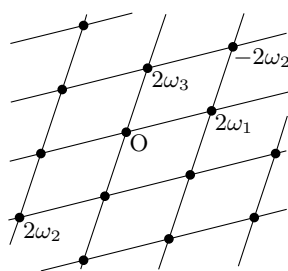


図 5.1: ワイエルシュトラスの楕円関数の格子点

関数を定義する級数 (5.1) が収束することは後に証明するとして、この関数は $2\omega_1$ と $2\omega_3$

¹この添え字は誤植ではない。習慣上、なぜか ω_1 と ω_3 なのである。これに対して、第 2 成分は $\omega_2 = -(\omega_1 + \omega_3)$ のように定義される。

を基本周期とする二重周期性をもつ関数である。それは、次のように証明できる。

$$\begin{aligned}\wp(z + 2\omega_1) &= \frac{1}{(z + 2\omega_1)^2} + \sum'_{n,m} \left[\frac{1}{(z + 2\omega_1 - 2n\omega_1 - 2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1 + 2m\omega_3)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(z + 2\omega_1)^2} + \sum'_{n,m} \left[\frac{1}{(z - 2(n-1)\omega_1 - 2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1 + 2m\omega_3)^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum'_{n,m} \left[\frac{1}{(z - 2n\omega_1 - 2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1 + 2m\omega_3)^2} \right] = \wp(z).\end{aligned}$$

ここで、 Σ' は $m = n = 0$ を除外した総和を意味する。この式は、 z を ω_1 方向に 1 単位の格子だけずらした状態を表す。格子点が無限に広がっているので、格子点をずらしても形がまったく変わらないというのがこの証明の主張である。当然、 z を ω_3 方向にずらしても同様である。したがって、 $\wp(z)$ は $2\omega_1$ と $2\omega_3$ を基本周期とする二重周期性をもつことが証明された。

上の数式展開を応用すると、 $\wp(z)$ が偶関数であることがわかる。格子点 $\omega = 2n\omega_1 + 2m\omega_3$ のパラメータ m, n に対して、 $n \mapsto -n$, および、 $m \mapsto -m$ の置き換えをして数式変形すると、

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum'_{n,m} \left[\frac{1}{(z + 2n\omega_1 + 2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(-2n\omega_1 - 2m\omega_3)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum'_{n,m} \left[\frac{1}{(-z - 2n\omega_1 - 2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1 + 2m\omega_3)^2} \right] = \wp(-z),\end{aligned}$$

が導かれる。つまり、 $\wp(-z) = \wp(z)$ であるので、 $\wp(z)$ は偶関数である。

続いて、 \wp 関数を定義する級数が収束することの証明を目的として、本章の後でも何度か利用する性質を紹介しておこう。その性質は、ある級数が正則な関数に絶対収束するとき、その級数を定積分した結果も絶対収束することである。この性質は次のようにして証明できる。

証明 対象とする級数を n 項で打ち切った値を $S_n(z)$ とする。この級数が関数 $f(z)$ に収束するとしよう。その場合、十分に大きな N をとれば、任意の正の実数 ε に対して、

$$|S_N(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

を満たすことができる。級数 $S_N(z)$ を積分路 C に沿って積分した場合、

$$\begin{aligned}\left| \int_C S_N(z) dz - \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_C (S_N(z) - f(z)) dz \right| \\ &< \int_C |S_N(z) - f(z)| dz < \varepsilon L,\end{aligned}$$

なる不等式が成立する。なお、 $S_N(z)$ の積分は、級数を構成する項の項別積分を意味する。また、 L は積分経路 C の長さである。関数 $f(z)$ が正則な関数であるので、有限区間で $f(z)$ を積分した結果は有限値となる。この不等式より、級数 S_N の定積分が特定の関数に絶対収束することが示された。◻

準備が整ったので、ワイエルシュトラスの \wp 関数を定義する級数が絶対収束することを証明しよう。ワイエルシュトラスの \wp の定義において、右辺の第 1 項: $1/z^2$ を左辺に移項して、両辺を微分した数式:

$$\wp'(z) + \frac{1}{2z^3} = - \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{2(z-\omega)^3},$$

を考えればよい。右辺からわかるように、この数式は $\omega \in \Omega'$ を除く任意の z で正則である。原点 $z=0$ においても正則である。右辺に記述した級数が、格子点 $\omega \in \Omega'$ 以外で一様収束することを示せばよいのだ。証明のため、図 5.2 に示すように、格子点の集合 Ω を部分集合に分割するのだ。まず、原点だけの集合を Ω_0 としよう。続いて、その外側を取り囲む格子点の集合、正確に言うと、格子点 $2n\omega_1 + 2m\omega_3$ において、 $n, m = 0, \pm 1$ となる集合から Ω_0 を取り除いた集合を Ω_1 とする。さらに外側、 $n, m = 0, \pm 1, \pm 2$ となる格子点の集合から $\Omega_0 \cup \Omega_1$ を取り除いた集合を Ω_2 とする。同様に、外側へ $\Omega_3, \Omega_4, \dots$ のように部分集合を定義する。このとき、部分集合 Ω_ν (ただし、 $\nu = 1, 2, \dots$) には格子点が 8ν 個含まれる。

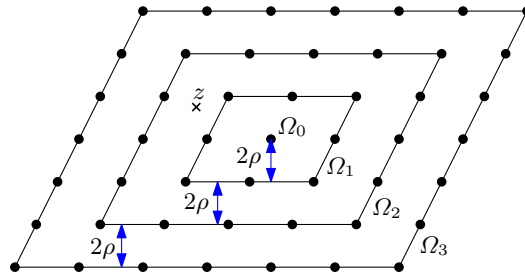


図 5.2: ワイエルシュトラスの格子点の部分集合

変数 z に対して、部分集合 Ω_N に含まれるすべての格子点 ω が $|\omega| \geq |z|$ の関係を満たすように、最小の自然数 N が選ばれたとする。つまり、 z は Ω_N でつくられる平行四辺形の内部に位置する。ここで、原点から Ω_1 がつくる平行四辺形までの距離を 2ρ としよう。すると、 Ω_{N+1} に含まれるすべての格子点について、 $|z-\omega| \geq 2\rho$ が成立する。同様に、 $\Omega_{N+\nu}$ に含まれるすべての格子点について、 $|z-\omega| \geq 2\nu\rho$ が成立する。また、ここからの計算では、 $|\omega| \geq 2(N+\nu)\rho > 2\nu\rho$ にも注意しておこう。そのとき、級数のうち Ω_ν からの寄与は、

$$\begin{aligned} \left| - \sum_{\omega \in \Omega_\nu} \frac{1}{2(z-\omega)^3} \right| &\leq 2 \sum_{\omega \in \Omega_\nu} \left| \frac{1}{(z-\omega)^3} \right| \\ &< \frac{N+\nu}{16\rho^3\nu^3} = \frac{1}{16\rho^3} \left(\frac{N}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} \right), \end{aligned}$$

なる不等式で記述できる。この不等式を利用して導関数 $\wp(z)' + 1/2z^3$ の収束を調べてみると、

$$\begin{aligned} \left| \wp'(z) + \frac{1}{2z^3} \right| &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Omega_{\nu}} \left| \frac{1}{2(z-\omega)^3} \right| \\ &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{\omega \in \Omega_{\nu}} \left| \frac{1}{2(z-\omega)^3} \right| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Omega_{N+\nu}} \left| \frac{1}{2(z-\omega)^3} \right| \\ &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{\omega \in \Omega_{\nu}} \left| \frac{1}{2(z-\omega)^3} \right| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{16\rho^3} \left(\frac{N}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} \right), \end{aligned}$$

のように数式変形できることがわかる。ここで、 $1/\nu^2$ と $1/\nu^3$ の無限級数が、それぞれ、 $\pi^2/6$ 、アペリー数 (≈ 1.20205) に収束するので、後半の級数は有限の値²に収束する。一方、前半の総和は有限個の格子点についての和であるので、当然、有限の値である。したがって、 $\wp(z)' + 2/z^3$ は有限の値に収束するのである。しかも、各項の絶対値を加算しても収束していることが示されているので、 $\wp'(z) + 2/z^3$ の収束は絶対収束である。ところで、当初の議論の対象 $\wp(z) - 1/z^2$ は、

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = - \sum_{\omega \in \Omega'} \int_0^z \frac{dz}{2(z-\omega)^3},$$

なる定積分で計算できるはずである。被積分項は格子点 ω 以外の任意の z で正則であり、しかも、一様収束する。正則で一様収束する級数は、定積分の結果も収束することは上で示したとおりである。したがって、 $\wp(z) - 1/z^2$ は、やはり、格子点 ω 以外の任意の z で一様収束する。なお、その定積分の積分路は、原点から z を結び、格子点を通り抜けなければ任意の経路でよい。◀

5.2 ワイエルシュトラスの微分方程式

ワイエルシュトラスの \wp 関数の性質を調べるため、 \wp 関数が満足する微分方程式を導出する。その取り掛かりとして、級数による定義式を数式変形すると、

$$\begin{aligned} \wp(z) - \frac{1}{z^2} &= \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{(1-z/\omega)^2} - 1 \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{2z}{\omega} + \frac{3z^2}{\omega^2} + \frac{4z^3}{\omega^3} + \cdots \right) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega'} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \frac{z^k}{\omega^{k+2}}, \end{aligned}$$

²これらの無限級数はリーマンのゼータ関数 $\zeta(2)$ 、 $\zeta(3)$ なる記号で書くこともできるのだが、後に導入するワイエルシュトラスのツェータと紛らわしいので、本文中ではあえてゼータ関数の記号を用いなかった。

が得られる。前節で示したようにこの級数は絶対収束するので、総和の順序を入れ替えることが許される。格子点 ω に関する総和を内側に入れると、 \wp 関数は、

$$\begin{aligned}\wp(z) - \frac{1}{z^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Omega'} (k+1) \frac{z^k}{\omega^{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) G_{k+2} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} z^{2k},\end{aligned}$$

のように計算される。第2行目への変形には、 \wp 関数が偶関数である事実を利用した。また、展開係数 G_{2k+2} は、

$$G_k \equiv \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^k},$$

と定義した係数である。この結果を用いて具体的に $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ を級数展開すると、

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + 7G_8 z^6 + \cdots, \quad (5.2a)$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + 42G_8 z^5 + \cdots, \quad (5.2b)$$

のように書くことができる。ここで、 \wp 関数の級数表現が得られたように見えるが、 G_4 や G_6 が格子点の逆数のべき乗の無限級数であるので、展開係数が具体的に特定できない。そのため、 \wp 関数を特定するには、さらに調査を要する。

展開係数 G_4 や G_6 が特定できないが、 \wp 関数のべき乗を計算すると、

$$\wp(z)^2 = \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6 z^2 + (14G_8 + 9G_4^2)z^4 + \cdots,$$

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + (21G_8 + 27G_4^2)z^2 + \cdots,$$

が得られる。一方、導関数 $\wp'(z)$ の自乗は、

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + (36G_4^2 - 168G_8)z^2 + \cdots,$$

が得られる。まず、 $\wp'(z)^2$ と $\wp(z)^3$ の1次結合をつくると、

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 - (72G_4^2 + 252G_8)z^2 + \cdots,$$

のように -6 次の項を消去できる。さらに、 $\wp(z)$ との1次結合をすると、

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4 \wp(z) = -140G_6 - (252G_8 - 108G_4^2)z^2 + \cdots,$$

のように -2 次の項も消去できた。ここでは、手間を省き2次の項までしか計算していないのだが、少なくとも、 $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4 \wp(z)$ が整関数となることがわかった。実は、

この時点で4次以降の係数を計算する必要がないことがわかる。なぜなら、前節で紹介した楕円関数の性質を思い起こせばよい。楕円関数の微分と、四則演算から得られたこの数式は、楕円関数である。楕円関数の性質によると、整関数が楕円関数であるためには定数でなければならないのだ。つまり、2次以降の展開係数はすべてゼロでなければならないのである。したがって、

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6,$$

なる等式が厳密に成立するのである。この数式は習慣的に、

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \quad (5.3)$$

なる形で書かれる。ただし、展開係数 g_2 と g_3 は、

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^6},$$

のように定義される。微分方程式 (5.3) に含まれる係数 g_2 と g_3 は $\wp(z)$ の**不変量**と呼ばれる。

ワイエルシュトラスの楕円関数の半周期 ω_1 と ω_3 から、 $\omega_2 \equiv -(\omega_1 + \omega_3)$ を定義すると、当然、

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad (5.4)$$

が成立する。そのとき、 $2\omega_2$ も $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の周期である。ワイエルシュトラスの楕円関数の周期に関する $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を総称して ω_r (ただし、 $r = 1, 2, 3$) と書くことにしよう。つまり、

$$\wp(z + 2\omega_r) = \wp(z), \quad \wp'(z + 2\omega_r) = \wp'(z),$$

が成立する。この数式に対して $z = -\omega_r$ を代入し、 $\wp'(z)$ が奇関数であることを利用すると、

$$\wp(\omega_r) = \wp'(-\omega_r) = -\wp(\omega_r),$$

が得られる。この関係式より、

$$\wp'(\omega_r) = 0, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (5.5)$$

が得られる。さらに、

$$e_r \equiv \wp(\omega_r), \quad (r = 1, 2, 3) \quad (5.6)$$

を定義しよう。このとき、 $z = \omega_r$ を中心に $\wp(z)$ をテイラー展開すると、

$$\wp(z) = e_r + \frac{\wp''(\omega_r)}{2!}(z - \omega_r)^2 + \cdots,$$

のように書くことができる。この展開式から $z = \omega_r$ は $\wp(z) - e_r$ の 2 位以上の零点となる。正確に言うと、楕円関数 $\wp(z)$ が 2 位の楕円関数であるので、 $z = \omega_r$ は 2 位の零点である。そのため、 $\wp(z) - e_r$ は、基本周期平行四辺形の上に他の零点が存在しない。したがって、 e_1, e_2, e_3 はすべて異なる値である。

ところで、 $\wp'(\omega_r) = 0$, $\wp(\omega_r) = e_r$ なる性質と、ワイエルシュトラスの微分方程式 (5.3) を比較すると、3 次方程式 $4z^3 - g_2z - g_3 = 0$ の解が $z = e_1, e_2, e_3$ であることがわかる。剰余定理によると、3 次方程式の右辺は、

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3),$$

のように因数分解される。右辺を分配則によって展開し、各次の係数を比較すると、

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}, \quad (5.7)$$

なる関係が得られる。このことは、ワイエルシュトラスの微分方程式が、

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

のように書けることを意味している。

5.3 ヤコビの楕円関数との関係

前節で導出した微分方程式によると、 $u \equiv \wp(z)$ とすると、 $u'^2 = 4u^3 - g_2u - g_3$ が成立する。ここで、プライム ($'$) は z についての微分を表す。この微分方程式の左辺をゼロとした 3 次方程式が実数解 e_1, e_2, e_3 をもつとしよう。すると、微分方程式は $u'^2 = 4(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)$ のように因数分解できる。また、変数 z は、

$$z = \int_x^\infty \frac{du}{\sqrt{4(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)}},$$

の積分で表される。ここで、実数 e_1, e_2, e_3 は、

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 > e_2 > e_3,$$

の関係を満たすとする。第 1 の関係式は、3 次方程式の 2 次の係数がゼロであることから成り立つべき関係である。ここで、

$$u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{v^2},$$

なる置き換えを適用すると、上の積分はヤコビの標準形:

$$z = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)}},$$

に変形できる。ここで、楕円関数の母数 k は、

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}},$$

で与えられる。上で設定した大小関係 $e_1 > e_2 > e_3$ のおかげで母数に関して $0 < k < 1$ が成立する。ヤコビの積分から、 $v = \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} z)$ となるのであるが、もともと、 $u = \wp(z)$ であったので、

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} z)}, \quad (5.8)$$

なる等式が導かれる。微分方程式の右辺が3つの異なる実数解をもつ場合に \wp 関数と sn 関数を関係づけることができた。ヤコビの sn 関数は奇関数であるが、自乗されているので \wp 関数が偶関数であることと矛盾しない。

次に、 sn 関数との関係を利用して \wp 関数の周期を考察してみよう。ワイエルシュトラスの \wp 関数が $2\omega_1$ と $2\omega_3$ を基本周期とすることに対して、ヤコビの sn 関数の自乗 $\operatorname{sn}^2 z$ は $2K$ と $2iK'$ を基本周期とする。関係式 (5.8) によると、 \wp 関数の基本周期は、 $2K/\sqrt{e_1 - e_3}$ と $2iK'/\sqrt{e_1 - e_3}$ と考えることができる。よって、 \wp 関数の周期に関して、

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega_3 = \frac{iK}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad (5.9)$$

と書くことができる。

5.4 ワイエルシュトラスのツェータ関数

ワイエルシュトラスの \wp 関数の原始関数として、

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) dz \\ &= \frac{1}{z} - \int_0^z \sum_{\omega \in \Omega'} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] dz = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right), \end{aligned}$$

を考えてみよう。この定義式は回りくどく見えるかもしれない。単純に $-\wp(z)$ の定積分で定義したいところだが、 $1/z^2$ を原点から積分すると発散するので、発散の原因である $1/z^2$ を除外して積分し、その結果に $1/z^2$ の不定積分 $1/z$ を加算した結果を $\zeta(z)$ として定義している。右辺の級数は、格子点 $\omega \in \Omega'$ 以外の複素数 z について一様収束に絶対収束する。なぜなら、 \wp 関数が格子点 ω 以外の複素数 z について一様に絶対収束し、 $\zeta(z)$ はその関数を定積分することによって与えられるからである。なお、新たな関数 $\zeta(z)$ はワイエルシュトラスのツェータ関数³と呼ばれる。

³記号が同じであるが、リーマンのゼータ関数とは無関係である。

上で述べたように、ワイエルシュトラスのツェータ関数は $-\wp(z)$ の原始関数として定義されているので、

$$\wp(z) = -\zeta'(z), \quad (5.10)$$

なる関係を満たす。また、上の定義式からただちに、

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) = 0, \quad (5.11)$$

なる関係が導かれる。つまり、ツェータ関数は原点を1位の極にもつ関数である。

ワイエルシュトラスのツェータ関数は奇関数である。ツェータ関数の導関数は \wp 関数であり、偶関数である。つまり、 $\zeta'(-z) = \zeta'(z)$ である。これを積分すると、 $\zeta(-z) = -\zeta(z) + C$ (ただし、 C は積分定数) となる。積分定数 C は、

$$C = \lim_{z \rightarrow 0} [\zeta(z) + \zeta(-z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \right] = 0,$$

のように特定できる。したがって、 $\zeta(z) = -\zeta(-z)$ となるのでツェータ関数は奇関数である。

続いて、 \wp 関数の周期 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を一般化して ω_r ($r = 1, 2, 3$) と書き、その周期性からツェータ関数の性質を導こう。まず、 \wp 関数の周期性から、

$$\zeta'(z + 2\omega_r) = \zeta'(z),$$

が成立する。この数式の両辺を積分すると、

$$\zeta(z + 2\omega_r) = \zeta(z) + 2\eta_r, \quad (5.12)$$

となる。ただし、 η_r は積分定数である。ここで、 $z = -\omega_r$ とすると、 $\zeta(z)$ が周期関数であることを利用でき、 $\eta_r = \zeta(\omega_r)$ であることが導かれる。さらに、(5.12) を繰り返し適用すると、

$$\zeta(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \zeta(z) + 2m\eta_1 + 2n\eta_3, \quad (5.13)$$

が成立する。この関係を応用し、

$$\zeta(z + 2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)) = \zeta(z) + 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3),$$

を考えると、 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ であることから、左辺は $\zeta(z)$ に等しい。したがって、

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \quad (5.14)$$

なる関係が得られる。

本節で定義した $\zeta(z)$ は楕円関数ではない。なぜなら、この関数は $\wp(z)$ の定積分によって定義された関数であるので、楕円関数であるなら、 $2\omega_1$ と $2\omega_3$ によって張られる平行四

辺形が基本周期平行四辺形となる。定義式より、その基本平行四辺形に含まれる極は1つだけであり、しかも、その極は1位の極である。楕円関数の性質によると、1位以下の楕円関数は定関数である。しかし、 $\zeta(z)$ は定関数ではない。したがって、 $\zeta(z)$ は楕円関数ではないのだ。確かに、(5.12)によると、少なくとも ω_r が周期でないのは確かである。しかし、今後の説明の便宜上、 ω_r を $\zeta(z)$ の周期と呼ぶことにしよう。

複素平面状の4点: $\omega_1 - \omega_3, \omega_1 + \omega_3, -\omega_1 + \omega_3, -\omega_1 - \omega_3$ を頂点とする平行四辺形の内部に存在する $\zeta(z)$ の極は、 $z = 0$ だけであり、その留数は1に等しい。そのため、 $\zeta(z)$ をその平行四辺形に沿って周回積分した結果は $2\pi i$ に等しい。具体的に、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\omega_1 - \omega_3}^{\omega_1 + \omega_3} \zeta(z) dz, & I_2 &= \int_{\omega_1 + \omega_3}^{-\omega_1 + \omega_3} \zeta(z) dz, \\ I_3 &= \int_{-\omega_1 + \omega_3}^{-\omega_1 - \omega_3} \zeta(z) dz, & I_4 &= \int_{-\omega_1 - \omega_3}^{\omega_1 - \omega_3} \zeta(z) dz, \end{aligned}$$

のように区分ごとに積分を定義すると、周回積分の結果は、

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2\pi i, \quad (5.15)$$

のように書くことができる。周回積分に関して、 I_3 に対して $z \equiv u - 2\omega_1$ を、 I_4 に対して $z \equiv u - 2\omega_3$ を適用すると、それらの積分は、

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\omega_1 + \omega_3}^{\omega_1 - \omega_3} \zeta(u - 2\omega_1) du = - \int_{\omega_1 - \omega_3}^{\omega_1 + \omega_3} (\zeta(u) - 2\eta_1) du = -I_1 + 4\eta_1\omega_3, \\ I_4 &= \int_{-\omega_1 + \omega_3}^{\omega_1 - \omega_3} \zeta(u - 2\omega_3) du = - \int_{\omega_1 + \omega_3}^{-\omega_1 + \omega_3} (\zeta(u) - 2\eta_3) du = -I_2 - 4\eta_3\omega_1, \end{aligned}$$

のように計算できる。この結果を(5.15)に代入すると、

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}, \quad (5.16)$$

なる関係が得られる。この関係式はルジャンドルの関係式と呼ばれる。

5.5 シグマ関数

前節と同様の方法で、 $\zeta(z)$ の原始関数を定義しよう。ツェータ関数を定義した際と同様に、ツェータ関数に含まれる項 $1/z$ が、原点を起点に積分すると発散する。そのため、発散の要因である $1/z$ を取り除いて原点を起点に積分し、その結果に $1/z$ の不定積分である $\log z$ を加算して原始関数を補正する。そのように定義した関数は、

$$\begin{aligned} \log z + \int_0^z \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) dz &= \log z + \int_0^z \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) dz \\ &= \log z + \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\log \frac{z - \omega}{-\omega} + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right), \end{aligned}$$

のように計算される。この関数に含まれる級数は、格子点 $\omega \in \Omega'$ 以外の複素数 z に対して一様に絶対収束する。なぜなら、その級数は、一様に絶対収束する級数の定積分で与えられる級数だからである。とはいえ、この関数には難点がある。その難点とは、この積分の第1項は積分路のとり方によって異なる値をとることである。具体的には、積分路が $z = \omega$ を反時計回りに周回する回数を n としたとき、

$$\int_0^z \frac{dz}{z - \omega} = \log \frac{z - \omega}{-\omega} + 2\pi i n,$$

となるのだ。これは、複素数において対数が多価であることを意味する。ところが、この関数の指数関数をとれば、

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Omega'} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right), \quad (5.17)$$

のように1価関数が得られるので、その難点は解決できる。この新たな関数をシグマ関数と呼ぶ。シグマ関数は、対数をとるとツェータ関数の原始関数であるので、

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

なる関係を満たす。定義式(5.17)から明らかなように、 $\sigma(z)$ は原点を含む格子点 $\omega \in \Omega$ すべてを1位の零点とし、それ以外の零点をもたない。また、

$$\sigma'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1, \quad (5.18)$$

なる関係が成立することも明らかである。シグマ関数は奇関数である。それは、次のようにして示すことができる。格子点 ω が $\omega \in \Omega'$ を満たすならば、 $-\omega \in \Omega'$ も成立するので、 ω か $-\omega$ の一方だけの集合を Ω^* としよう。すると、シグマ関数は、

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= u \prod_{\omega \in \Omega^*} \left[\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(-\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \right] \\ &= z \prod_{\omega \in \Omega^*} \left(1 - \frac{z^2}{\omega^2}\right) e^{z^2/\omega^2}, \end{aligned}$$

のように書くことができる。この数式から $\sigma(-z) = -\sigma(z)$ であることがわかるので、シグマ関数は奇関数である。

ツェータ関数の性質 $\zeta(z + 2\omega_r) = \zeta(z) + 2\eta_r$ を対数積分の関係(5.5)に代入すると、

$$\frac{\sigma'(z + 2\omega_r)}{\sigma(z + 2\omega_r)} = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} + 2\eta_r,$$

となる。この式の両辺を積分すると、

$$\sigma(z + 2\omega_r) = C \sigma(z) e^{2\eta_r z},$$

が得られる。ただし、 C は積分定数である。この積分定数を決定するには、 $z = -\omega_r$ を代入し、シグマ関数が奇関数であることを利用する。その結果、 $C = -e^{2\eta_r\omega_r}$ が得られるので、

$$\sigma(z + 2\omega_r) = -e^{2\eta_r(z+\omega_r)}\sigma(z), \quad (r = 1,2,3) \quad (5.19)$$

が成立する。シグマ関数は周期関数ではないが、この式が示す性質はテータ関数の擬周期性に類似している。便宜上、 \wp 関数と同様に、 $2\omega_r$ をシグマ関数の周期という。

シグマ関数は、明示的な変数だけでなく、 ω_1 と ω_3 にも依存するので、それを明示する場合、 $\sigma(z; \omega_1, \omega_3)$ と書く。このとき、

$$\sigma(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_3) = \lambda \sigma(z; \omega_1, \omega_3) \quad (5.20)$$

が成立することは、シグマ関数の定義 (5.17) からただちに得られる事実である。

5.6 加法公式

ワイエルシュトラスの楕円関数を用いて定義した関数:

$$f(z) \equiv \wp(z) - \wp(\alpha),$$

を考えよう。ただし、 v は周期点 $\omega \in \Omega$ でない定数であるとする。そのとき、 $f(z)$ は周期点 $\omega \in \Omega$ を 2 位の極にもつ楕円関数である。しかも、 $\wp(\pm\alpha + \omega) = \wp(\alpha)$ であるので、 $f(z)$ は $z = \pm\alpha + \omega$ を零点とする。

新たな関数:

$$\varphi(z) \equiv \frac{\sigma(z + \alpha)\sigma(z - \alpha)}{\sigma^2(z)},$$

を定義しよう。この関数は、 $f(z)$ と同一の極と零点をもつ。その事実は、シグマ関数の定義式 (5.17) からただちに得られる。まず、 $\varphi(z)$ の極は $\sigma(z)$ の零点であるので、 $z = \omega$ である。これは $f(z)$ の極と一致する。一方、 $\sigma(z + \alpha)\sigma(z - \alpha) = 0$ となる条件は、(5.17) によると $z = \omega \pm \alpha$ である。つまり、 $\varphi(z)$ の零点は $f(z)$ の零点と一致する。さらに、シグマ関数の擬周期性 (5.19) から、

$$\begin{aligned} \varphi(z + 2\omega_r) &= \frac{e^{2\eta_r(z+\alpha+\omega_r)}\sigma(z + \alpha)e^{2\eta_r(z-\alpha+\omega_r)}\sigma(z - \alpha)}{[e^{2\eta_r(z+\omega_r)}\sigma(z)]^2} \\ &= \frac{\sigma(z + \alpha)\sigma(z - \alpha)}{\sigma^2(z)} = \varphi(z), \end{aligned}$$

が得られる。つまり、 $\varphi(z)$ は $f(z)$ と同一の二重周期をもつ関数である。楕円関数の性質によると、周期を共有する 2 つの関数は、極と零点が一致するなら、定数因子を乗じれば互

いを等号で結ぶことができる。つまり、適当な定数 c を選べば、

$$\wp(z) - \wp(\alpha) = \frac{c \sigma(z + \alpha) \sigma(z - \alpha)}{\sigma^2(z)},$$

が成立する。その定数 c を特定するには、両辺に z^2 の乗じて、 $z \rightarrow 0$ の極限をとる。これを書くと、

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 (\wp(z) - \wp(\alpha)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{c \sigma(z + \alpha) \sigma(z - \alpha)}{\sigma^2(z)/z^2},$$

となる。まず、 $z \rightarrow 0$ の極限で $\wp(z) \simeq 1/z^2$ となることを考えれば、左辺は 1 となる。次に、 $z = 0$ におけるシグマ関数の導関数 (5.18) より、右辺の分母が 1 となる。その事実から、

$$1 = c \sigma(\alpha) \sigma(-\alpha) = -c \sigma^2(\alpha),$$

が導かれる。その結果、 $c = -1/\sigma^2(\alpha)$ となる。したがって、

$$\wp(z) - \wp(\alpha) = \frac{\sigma(z + \alpha) \sigma(z - \alpha)}{\sigma^2(z) \sigma^2(\alpha)}, \quad (5.21)$$

なる公式が得られる。この関係式の対数を z について微分すると、

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(\alpha)} = \zeta(z + \alpha) + \zeta(z - \alpha) - 2\zeta(z),$$

が得られる。この数式の左辺は対数微分の公式を適用し、右辺はシグマ関数の対数がツェータ関数の原始関数であることを利用した。この関係式は、 z と α を入れ替えても成立するはずなので、

$$\frac{\wp'(\alpha)}{\wp(\alpha) - \wp(z)} = \zeta(z + \alpha) - \zeta(z - \alpha) - 2\zeta(\alpha),$$

となる。これらの数式の和をとると、

$$\zeta(z + \alpha) - \zeta(z) - \zeta(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)}, \quad (5.22)$$

が得られる。この関係式を z について微分すると、

$$\wp(z + \alpha) = \wp(z) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)} \right], \quad (5.23)$$

が得られる。この関係式は、ワイエルシュトラスの楕円関数の加法公式の一形態である。

ワイエルシュトラスの楕円関数の加法公式は他の形態があるので、紹介しておこう。公式 (5.22) の自乗を z の関数とみなし、

$$F(z) = [\zeta(z + \alpha) - \zeta(z) - \zeta(\alpha)]^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)} \right]^2,$$

のように書くことにしよう。右辺によると, $F(z)$ は $\omega \in \Omega$ を周期点とする楕円関数である。一方, 左辺によると, $\zeta(z)$ が $\omega \in \Omega$ を1位の極とするので, $F(z)$ は ω と $-\omega + \alpha$ を2位の極とする。関数 $F(z)$ の極の一つである $z = 0$ におけるローラン展開の主要部を求めよう。ツェータ関数 $\zeta(z)$ をワイエルシュトラスの \wp 関数を積分した表現:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{a_1}{3}z^3 + \cdots,$$

および, $\zeta(z + \alpha)$ をテイラー級数展開した表現:

$$\zeta(z + \alpha) = \zeta(\alpha) - \wp(\alpha)z + \cdots,$$

に注意すると, 関数 $F(z)$ が,

$$F(z) = \left[-\frac{1}{z} - \wp(\alpha)z + \cdots \right]^2 = \frac{1}{z^2} + 2\wp(\alpha) + \cdots, \quad (5.24)$$

となるので, $F(z)$ を $z = 0$ を中心にローラン展開した主要部は $1/z^2$ である。同様に, $z = -\alpha$ を中心にローラン展開した主要部を計算すると $1/(z + \alpha)^2$ となる。これらの主要部は, それぞれ, $\wp(z)$, $\wp(z + \alpha)$ の主要部と一致する。つまり, 関数 $F(z)$ は, $\wp(z + \alpha) + \wp(z)$ と同一の周期をもち, ローラン展開の主要部が一致する楕円関数である。楕円関数の定義によると, $F(z)$ と $\wp(z + \alpha) + \wp(z)$ の差は定数となる。つまり, 適当な定数 c を用いて,

$$F(z) = \wp(z + \alpha) + \wp(z) + c,$$

が成立する。定数 c を特定するため, 右辺をローラン展開すると,

$$F(z) = \frac{1}{z^2} + \wp(\alpha) + c + \wp'(\alpha)z + \cdots,$$

となるので, $c = \wp(\alpha)$ が得られる。したがって, 加法公式:

$$\wp(z + \alpha) + \wp(z) + \wp(\alpha) = \frac{1}{4} \left[\frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)} \right]^2, \quad (5.25)$$

が得られる。この関係式には, 導関数 $\wp'(z)$ と $\wp'(\alpha)$ が残っているが, 導関数はワイエルシュトラスの微分方程式によって, $\wp(z)$ と $\wp(\alpha)$ だけで書き換えることができる。

5.7 コシグマ関数

ワイエルシュトラスの楕円関数の加法公式 (5.21) に $\alpha = \omega_r$ を代入すると,

$$\wp(z) - e_r = -\frac{\sigma(z + \omega_r)\sigma(z - \omega_r)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega_r)}, \quad (r = 1, 2, 3)$$

が得られる。また、シグマ関数の擬周期性 (5.19) から導かれる性質:

$$\sigma(z + \omega_r) = -e^{2\eta_r z} \sigma(z - \omega_r),$$

に注意すると,

$$\wp(z) - e_r = \left[\frac{e^{-\eta_r z} \sigma(z + \omega_r)}{\sigma(z) \sigma(\omega_r)} \right]^2,$$

が得られる。ここで,

$$\sigma_r(z) \equiv \frac{e^{-\eta_r z} \sigma(z + \omega_r)}{\sigma(\omega_r)}, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (5.26)$$

を定義すると, $\wp(z) - e_r$ は,

$$\wp(z) - e_r = \left[\frac{\sigma_r(z)}{\sigma(z)} \right]^2,$$

のように書くことができる。この式の両辺の平方根をとると,

$$\sqrt{\wp(z) - e_r} = \frac{\sigma_r(z)}{\sigma(z)}, \quad (5.27)$$

が得られる⁴。数式 (5.26) で定義された 3 つの関数 $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ をコシグマ関数という。シグマ関数が 1 価関数なので, (5.26) で定義されるコシグマ関数も 1 価関数である。コシグマ関数の特別な値として,

$$\sigma_r(0) = 1, \quad (r = 1, 2, 3)$$

が成立することは (5.26) から容易にわかる。

シグマ関数の擬周期性から得られる (5.7) に $e^{-\eta_r z}$ を乗じ, $\sigma(z)$ が奇関数であることに注意すると,

$$e^{-\eta_r z} \sigma(z + \omega_r) = -e^{\eta_r z} \sigma(z - \omega_r) e^{\eta_r z} \sigma(\omega_r - z),$$

が得られる。つまり, コシグマ関数 $\sigma_r(z)$ は,

$$\sigma_r(z) = \frac{e^{\eta_r z} \sigma(\omega_r - z)}{\sigma(\omega_r)}, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (5.28)$$

のように書くこともできる。この結果と (5.26) を比較すると, $\sigma_r(-z) = \sigma_r(z)$ であることがわかるので, コシグマ関数 $\sigma_r(z)$ は偶関数である。さらに, $\sigma(0) = 0$ であることを (5.28) に適用すると,

$$\sigma_r(\omega_r) = 0, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (5.29)$$

が得られる。シグマ関数 $\sigma(z)$ がワイエルシュトラスの楕円関数 $\wp(z)$ の周期点のみにを 1 位の零点をもつ関数であったことを考えると, それらの零点を ω_r だけ平行移動した位置に $\sigma_r(z)$ は零点をもっている。

⁴平方根は 2 価関数であるので, 根号が与えるのはそのどちらかである。ここでは, この式の値を与えるように根号が定義されているものとする。

第6章 テータ関数・シグマ関数の応用

前章までに、ヤコビの楕円関数を記述するためにテータ関数を、ワイエルシュトラスの楕円関数を記述するためにシグマ関数を導入した。しかし、導入したそれらの関数の間の関係を調べれば、ヤコビの楕円関数をシグマ関数で表記することができる。同様に、ワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述、または、楕円積分などのパラメータをテータ関数で記述することも可能である。本節では、そのようなテータ関数やシグマ関数の応用について説明する。

6.1 テータ関数とワイエルシュトラスの楕円関数

本節ではワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述することに試みよう。そのために、シグマ関数やツェータ関数をテータ関数で記述することで準備をする。その準備を経てワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述する。

6.1.1 シグマ関数とテータ関数

ワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述するための準備として、シグマ関数をテータ関数で記述しよう。まず、 $\text{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$ となる ω_1 と ω_3 を選び、それらに対応するシグマ関数 $\sigma(2\omega_1 z)$ をとり、

$$\tau \equiv \frac{\omega_3}{\omega_1},$$

のようにパラメータ τ を定義すると、シグマ関数の擬周期性から、

$$\sigma(2\omega_1(z+1)) = \sigma(2\omega_1 z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1 \omega_1(2z+1)} \sigma(2\omega_1 z),$$

$$\sigma(2\omega_1(z+\tau)) = \sigma(2\omega_1 z + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3 \omega_1(2z+\tau)} \sigma(2\omega_1 z),$$

が導かれる。これらの関係から、 $\sigma(2\omega_1 z)$ は変数 z に関して、周期1と τ の擬周期性を示す関数であることがわかる。二重の擬周期性をもつテータ関数 $\vartheta_1(z)$ との比を、

$$f(z) = \frac{\sigma(2\omega_1 z)}{\vartheta_1(z)}, \quad (6.1)$$

とおく。テータ関数の擬周期性:

$$\vartheta_1(z+1) = -\vartheta_1(z), \quad \vartheta_3(z+\tau) = -e^{-\pi i(2z+\tau)}\vartheta_1(z),$$

を用いると、シグマ関数とテータ関数の比率 $f(z)$ は,

$$f(z+1) = e^{2\eta_1\omega_1(2z+1)}f(z), \quad (6.2a)$$

$$f(z+\tau) = e^{(2\eta_3\omega_1+\pi i)(2v+\tau)}f(z) = e^{2\eta_1\omega_3(2z+\tau)}f(z), \quad (6.2b)$$

なる擬周期性を示すことがわかる。第2行目の式の右辺の導出にはルジャンドルの関係式: $\eta_1\omega_3 - \eta_1\omega_1 = \pi i/2$ を利用した。

シグマ関数 $\sigma(2\omega_1 z)$ は, $2\omega_1 z = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ (m と n は整数) を1位の零点にもつ整関数である。言い換えると, $z = m + n\tau$ のみを1位の零点にもつ整関数である。一方, テータ関数 $\vartheta_1(z)$ もそれと同じ零点をもつ整関数であるので, それらの比である $f(z)$ は零点をもたない整関数である。

ところで, (6.2a) の両辺に $e^{-2\eta_1\omega_1(z+1)^2}$ を乗じると, その数式は,

$$e^{-2\eta_1\omega_1(z+1)^2}f(z+1) = e^{-2\eta_1\omega_1 z^2}f(z), \quad (6.3a)$$

のように変形できる。一方, (6.2b) の両辺に $e^{-2\eta_1\omega_1(z+\tau)^2}$ を乗じると, その数式は,

$$e^{-2\eta_1\omega_1(z+\tau)^2}f(z+\tau) = e^{-2\eta_1\omega_1 z^2}f(z), \quad (6.3b)$$

のように変形できる。これらの結果は, $F(z) \equiv e^{-2\eta_1\omega_1 z^2}f(z)$ なる関数を用いれば,

$$F(z+1) = F(z), \quad F(z+\tau) = F(z),$$

のような二重周期をもつことがわかる。この $F(z)$ は擬二重周期ではなく, 本当の二重周期である。つまり, $F(z)$ は楕円関数という意味である。しかし, $F(z)$ は整関数であるはずなので, 楕円関数の性質ゆえに $F(z)$ は定数であることになる。したがって, $f(z)$ は定数 c を用いて,

$$f(z) = c e^{2\eta_1\omega_1 z^2},$$

のように書くことができる。比例係数 c を決定するには, $z \rightarrow 0$ の極限で $f(z)$ を計算すればよい。計算してみると,

$$c = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(2\omega_1 z)}{\vartheta_1(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\omega_1 \sigma'(2\omega_1 z)}{\vartheta_1'(z)} = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)},$$

が得られる。この計算において, $z \rightarrow 0$ の極限でシグマ関数もテータ関数もゼロに近づくため, ロピタルの定理を用いた。なお, $\sigma'(2\omega_1 z)$ は, z についての微分ではなく, $\sigma(u)$ を u について微分した結果に $u = 2\omega_1 z$ を代入した値である。得られた比例係数 c を用いると,

$$\sigma(2\omega_1 z) = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1'(0)} e^{2\eta_1\omega_1 z^2}, \quad (6.4)$$

なる関係が得られる。この数式が, シグマ関数をテータ関数によって記述した結果である。

コシグマ関数とテータ関数 続いて、コシグマ関数とテータ関数の関係を調べよう。コシグマ関数の定義式において、変数を $2\omega_1 z$ とすると、

$$\sigma(2\omega_1 z + \omega_1) = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(z + 1/2)}{\vartheta_1'(0)} e^{2\eta_1 \omega_1 (z+1/2)^2},$$

が得られる。この式に、 $z = 0$ を代入すると、

$$\sigma(\omega_1) = 2\omega_1 \frac{\vartheta_1(1/2)}{\vartheta_1'(0)} e^{2\eta_1 \omega_1 (1/2)^2},$$

となる。この関係をコシグマ関数の定義 (5.26) に代入すると、

$$\sigma_1(2\omega_1 z) = \frac{e^{-2\omega_1 \eta_1 z} \sigma(2\omega_1 z + \omega_1)}{\sigma(\omega_1)} = \frac{\vartheta_1(z + 1/2)}{\vartheta_1(1/2)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2} = \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2},$$

が得られる。数式変形に関して、テータ関数による数式への変形には、(6.4) を利用した。さらに、 ϑ_1 関数で記述した式から ϑ_2 関数による記述への変形には、テータ関数の擬周期性の関係 (表 4.3) を用いた。他のコシグマ関数についても、途中計算が $\sigma_1(2\omega_1 z)$ ほど簡単ではないが、同様の公式が導出できる。

残りのコシグマ関数のうち、コシグマ関数 $\sigma_3(2\omega_1 z)$ の導出が少しばかり簡単であるので、先に導出しよう。コシグマ関数の定義 (5.26) から、

$$\sigma_3(2\omega_1 z) = \frac{e^{-2\omega_1 \eta_3 z} \sigma(2\omega_1 z + \omega_3)}{\sigma(\omega_3)} = \frac{e^{-2\omega_1 \eta_3 z} \sigma(2\omega_1(z + \tau/2))}{\sigma(2\omega_1(\tau/2))},$$

と書くことができる。この右辺への数式変形には $\tau = \omega_3/\omega_1$ であることを利用した。公式 (6.4) を用いて、この数式をさらに変形すると、

$$\begin{aligned} \sigma_3(2\omega_1 z) &= e^{-2\omega_1 \eta_3 z} \frac{\vartheta_1(z + \tau/2)}{\vartheta_1(\tau/2)} e^{2\eta_1 \omega_1 (z+\tau/2)^2} \cdot e^{-2\eta_1 \omega_1 (\tau/2)^2} \\ &= \frac{\vartheta_1(z + \tau/2)}{\vartheta_1(\tau/2)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2 + 2(\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1)z} = \frac{\vartheta_1(z + \tau/2)}{\vartheta_1(\tau/2)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2 + \pi i}, \end{aligned}$$

が得られる。この数式の最後の変形には、ルジャンドルの関係式 $\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \pi i/2$ を用いた。ところで、テータ関数において (4.18) に注意して擬周期性の関係 (表 4.3) を参照すると、

$$\vartheta_1(z + \tau/2) = ie^{-(z+\tau/4)\pi i} \vartheta_4(z),$$

であることがわかるので、

$$\frac{\vartheta_1(z + \tau/2)}{\vartheta_1(\tau/2)} = \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1(0)} e^{-\pi i},$$

が得られる。これを上の計算途中の数式に代入すると、

$$\sigma_3(2\omega_1 z) = \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1(0)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2},$$

が導出できる。確かに、前に導出した $\sigma_1(2\omega_1 z)$ の公式に似た形をしている。

それでは、残りのコシグマ関数 $\sigma_2(2\omega_1 z)$ に関する公式を導出しよう。やはり、ここでもコシグマ関数の定義 (5.26) から始める。コシグマ関数 $\sigma_2(2\omega_1 z)$ の定義式を変形すると、

$$\sigma_2(2\omega_1 z) = \frac{e^{-2\omega_1 \eta_2 z} \sigma(2\omega_1 z + \omega_2)}{\sigma(\omega_2)} = \frac{e^{-2\omega_1 \eta_2 z} \sigma(2\omega_1(z - (1+\tau)/2))}{\sigma(-2\omega_1(1+\tau)/2)},$$

と書くことができる。この右辺への数式変形には、 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ と $\tau = \omega_3/\omega_1$ なる関係を利用した。公式 (6.4) を用いて、この数式をさらに変形すると、

$$\begin{aligned} \sigma_2(2\omega_1 z) &= e^{-2\omega_1 \eta_2 z} \frac{\vartheta_1(z - (1+\tau)/2)}{\vartheta_1(-(1+\tau)/2)} e^{2\eta_1 \omega_1(z - (1+\tau)/2)^2} \cdot e^{-2\eta_1 \omega_1((1+\tau)/2)^2} \\ &= \frac{\vartheta_1(z + (1+\tau)/2)}{\vartheta_1(-(1+\tau)/2)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2 + 2(\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1)z} = \frac{\vartheta_1(z - (1+\tau)/2)}{\vartheta_1(-(1+\tau)/2)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2 - \pi i}, \end{aligned}$$

が得られる。この数式の最後の変形には、ルジャンドルの関係式 $\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 = \pi i/2$ を用いた。ところで、テータ関数において (4.18) に注意して擬周期性の関係 (表 4.3) を参照すると、

$$\vartheta_1\left(z - \frac{1+\tau}{2}\right) = -i e^{(z - (1+\tau)/2 + \tau/4)\pi i} \vartheta_3(z),$$

であることがわかるので、

$$\frac{\vartheta_1(z - (1+\tau)/2)}{\vartheta_1(-(1+\tau)/2)} = \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)} e^{\pi i},$$

が得られる。これを上の計算途中の数式に代入すると、

$$\sigma_2(2\omega_1 z) = \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2},$$

が導出できる。この場合も、上で導出した $\sigma_1(2\omega_1 z)$ の公式に似た形をしている。

コシグマ関数3つとテータ関数の関係は、既に確認できたように、共通の形をしている。その共通点に基づき、コシグマ関数とテータ関数の関係を一般化すると、

$$\sigma_r(2\omega_1 z) = \frac{\vartheta_{r+1}(z)}{\vartheta_{r+1}(0)} e^{2\eta_1 \omega_1 z^2}, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (6.5)$$

のように書くことができる。

6.1.2 ツェータ関数とテータ関数

次の準備段階として、ツェータ関数をテータ関数で記述してみよう。ツェータ関数はシグマ関数の対数微分であり、既にシグマ関数のテータ関数による記述ができているから、

ツェータ関数がテータ関数で記述できるはずである。上で導出した (6.4) を用いてツェータ関数を計算すると、

$$\begin{aligned}\zeta(2\omega_1 z) &= \frac{d}{d(2\omega_1 z)} \log \sigma(2\omega_1 z) = \frac{1}{2\omega_1} \frac{d}{dz} \log \sigma(2\omega_1 z) \\ &= \frac{\sigma'(2\omega_1 z)}{2\omega_1 \sigma(2\omega_1 z)} = \frac{\vartheta_1'(z)}{2\omega_1 \vartheta_1(z)} + 2\eta_1 z,\end{aligned}\tag{6.6}$$

が得られる。この結果によって、ヤコビの楕円関数を記述するために導入したテータ関数とツェータの関係が与えられたことになる。この関係を足がかりにワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述できそうである。

前章で確認できたように、ワイエルシュトラスの楕円関数は、原点を2位の極とする関数であり、原点の近傍でローラン展開すると、

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots,$$

のように記述できる。この級数展開に基づいてツェータ関数を記述すると、

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) dz = \frac{1}{z} - \frac{a_1}{3} z^3 - \frac{a_2}{5} z^5 - \dots,$$

のような級数で表現できるので、

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z} \right) = 0,$$

が得られる。この関係式にツェータ関数のテータ関数表示 (6.6) を適用すると、

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega_1 z} \left(\frac{\vartheta_1'(z)}{2\omega_1 \vartheta_1(z)} + 2\eta_1 z - \frac{1}{2\omega_1 z} \right) = 0,$$

のように書くことができる。この方程式を η_1 について解くと、

$$\eta_1 = \frac{1}{4\omega_1} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\vartheta_1(z) - z\vartheta_1'(z)}{z^2 \vartheta_1(z)} = -\frac{1}{12\omega_1} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)},\tag{6.7}$$

が得られる。ここで、右辺を導くためにロピタルの定理を2回適用した。

導出した関係式を解釈してみよう。まず、 $\text{Im } \tau > 0$ なる τ が与えられたとする。このとき、ゼロでない任意の複素数 ω_1 をとり、 $\omega_3 \equiv \omega_1 \tau$ を定義すると、 ω_1 と ω_3 を半周期とするシグマ関数は、パラメータ τ をともなうテータ関数を用いて (6.4) と (6.5) のように表現できる。また、テータ関数が実数の周期をもつことに対して、シグマ関数は厳密な意味での周期性はなく、その代わりに、 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の方向に同様の擬周期性をもっている。

6.1.3 楕円関数とテータ関数

ツェータ関数を微分するとワイエルシュトラスの楕円関数 (\wp 関数) が得られるので, \wp 関数をテータ関数で記述することは可能であるが, 他の手法でもテータ関数表示を得ることができる。前章で示した関係式 $\sqrt{\wp(z) - e_r} = \sigma_r(z)/\sigma(z)$ に (6.4) と (6.5) を代入すればよい。すると,

$$\sqrt{\wp(2\omega_1 z) - e_r} = \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_{r+1}(z)}{2\omega_1 \vartheta_{r+1}(0) \vartheta_1(z)}, \quad (r = 1, 2, 3) \quad (6.8)$$

が得られる。この式に $z = 1/2$ を適用し, $\wp(\omega_1) = e_1$ であることに注意すると,

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_3(1/2)}{2\omega_1 \vartheta_3(0) \vartheta_1(1/2)} = \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_4(0)}{2\omega_1 \vartheta_3(0) \vartheta(1/2)} = \frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta_4^2(0), \quad (6.9a)$$

が得られる。この数式変形には, テータ関数の微分に関する公式 $\vartheta_1'(0) = \pi \vartheta_2(0) \vartheta_3(0) \vartheta_4(0)$ と, 前章で示したテータ関数どうしの関係を利用した。そのテータ関数どうしの関係は, この後すぐに使うので, 他の公式も含めて書くと,

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z + 1/2) &= \vartheta_2(z), & \vartheta_2(z + 1/2) &= -\vartheta_1(z), \\ \vartheta_3(z + 1/2) &= \vartheta_4(z), & \vartheta_4(z + 1/2) &= \vartheta_3(z), \end{aligned}$$

のような公式である。これらの公式を同様に利用すると,

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_4(1/2)}{2\omega_1 \vartheta_4(0) \vartheta_1(1/2)} = \frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta_3^2(0), \quad (6.9b)$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\vartheta_1'(0) \vartheta_3(1/2)}{2\omega_1 \vartheta_4(0) \vartheta_1(1/2)} = -\frac{\pi}{2\omega_1} \vartheta_2^2(0), \quad (6.9c)$$

なる関係が得られる。得られた関係式 (6.9a) から (6.9c) を自乗して得られる式:

$$e_1 - e_2 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \vartheta_4^4(0), \quad e_1 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \vartheta_3^4(0), \quad e_2 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \vartheta_2^4(0),$$

を組み合わせれば,

$$e_1 = \frac{\pi^2}{12\omega_1^2} [\vartheta_3^4(0) + \vartheta_4^4(0)], \quad (6.10a)$$

$$e_2 = \frac{\pi^2}{12\omega_1^2} [\vartheta_2^4(0) - \vartheta_4^4(0)], \quad (6.10b)$$

$$e_3 = -\frac{\pi^2}{12\omega_1^2} [\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)], \quad (6.10c)$$

が導かれる。また, (6.8) に立ち戻り,

$$\sqrt{\wp(2\omega_1 z) - e_3} = \frac{\pi \vartheta_2(0) \vartheta_3(0) \vartheta_4(z)}{2\omega_1 \vartheta_1(z)},$$

であることに注意し, (6.9b) を用いると,

$$\sqrt{\wp(2\omega_1 z) - e_3} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\vartheta_2(0) \vartheta_4(z)}{\vartheta_3(0) \vartheta_1(z)}, \quad (6.11)$$

なる関係が得られる。さらに両辺を自乗して $\wp(2\omega_1 z)$ について解くと,

$$\wp(2\omega_1 z) = \frac{\pi^2}{12\omega_1^2} \left(3\vartheta_3^2(0)\vartheta_2^2(0) \frac{\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_1^2(z)} - \vartheta_2^4(0) - \vartheta_3^4(0) \right), \quad (6.12)$$

が得られる。すでにテータ関数の計算方法は第4章で与えているので, 公式(6.12)によって $\wp(2\omega_1 z)$ を計算することができる。その計算結果は図6.1のようになる。このグラフ

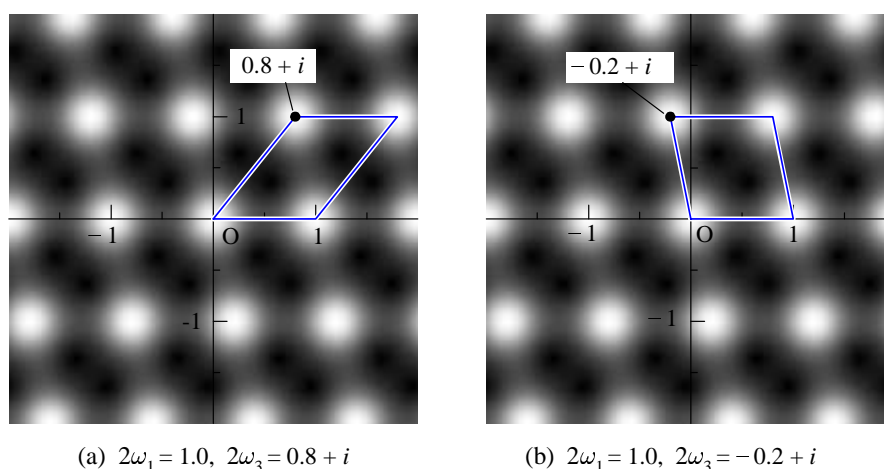


図 6.1: テータ関数から計算したワイエルシュトラスの楕円関数

は計算した関数の絶対値を表し, 黒い場所が零点, 白い場所が極に対応する。この図に示したグラフ (a) と (b) は, ω_3 が異なるように設定しているが, 意識的に格子点在同一となるように選んでいる。計算過程ではテータ関数のパラメータ τ が異なるのであるが, 格子点在同一なので, 本来, 同一の関数を並べている。たしかに, 図を見ると同一関数として計算されているように見えるだろう。

6.2 ヤコビの楕円関数

ヤコビの楕円関数 (sn 関数, cn 関数, dn 関数) がテータ関数で記述できることは第4章で示した。本節では, \wp 関数との関係を示し, sn 関数のシグマ関数表現を導く。

ヤコビの楕円関数のテータ関数による表現は, 第4章で示したように,

$$\operatorname{sn} 2Kz = \frac{\vartheta_3(0) \vartheta_1(z)}{\vartheta_2(0) \vartheta_4(z)}, \quad (6.13)$$

となる。ただし、 K は第1種完全楕円積分であり、ヤコビの楕円関数を定義する際の定数パラメータである。このテータ関数表現が、 2 と τ を基本周期とすることより、 $\operatorname{sn} z$ の基本周期が、

$$4K = 2\pi\vartheta_3^2(0), \quad 2iK' = \pi\tau\vartheta_3^2(0),$$

であることがただちにわかる。この基本周期は第3章で示した周期に対応している。つまり、 $\operatorname{sn} 2Kz \equiv \operatorname{sn}(\pi\vartheta_3^2(0)z)$ である。本節が、テータ関数から sn 関数を生成する説明を目的としているので、本来、この右辺の形式で sn を記述すべきなのだが、記述の簡潔性からあえて、左辺の形式 $\operatorname{sn} 2Kz$ を用いることにする。なお、完全楕円積分 K と K' を与える母数 k と補母数 k' は、

$$k = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}, \quad k' = \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)},$$

で与えられる。これも、第4章で示した関係式である。

テータ関数による sn 関数の記述 (6.13) と、前節で導出した \wp 関数とテータ関数の関係 (6.8) を比較すると、

$$\operatorname{sn} 2Kz = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(2\omega_1 z) - e_3}}, \quad (6.14)$$

が得られる。

続いて、ワイエルシュトラスの楕円関数との関係を求めよう。前節で導出した (6.14) を $\wp(2\omega_1 z)$ について解くと、

$$\wp(2\omega_1 z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 2Kz} = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\pi\vartheta_3^2(0)z)},$$

が得られる。この数式の右辺への数式変形には、 $4K = 2\pi\vartheta_3^2(0)$ の関係を利用した。さらに、この数式に対して、 $2\omega_1 z \mapsto z$ のように置き換えると、

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\pi\vartheta_3^2 z / 2\omega_1)} = e_3 + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} z)} \quad (6.15)$$

が導かれる。この関係式は、第5章で導出したヤコビの楕円関数とワイエルシュトラスの楕円関数の関係と一致する。なお、この関係式の右辺への数式変形にあたり、(6.9b) から導かれる関係:

$$e_1 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2} \vartheta_3^4(0) = \frac{K^2}{\omega_1^2},$$

を適用した。さらに、数式変形すると、ワイエルシュトラスの楕円関数は、

$$\wp(z) = \frac{K^2}{\omega_1^2} \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} z)} - \frac{1 + k^2}{3} \right), \quad (6.16)$$

のように書くこともできる。この数式の右辺への変形にあたり、(6.10a) を用いて導かれる関係:

$$\frac{e_3}{e_1 - e_3} = -\frac{\vartheta_2^4(0) - \vartheta_3^4(0)}{\vartheta_3^4(0)} = -\frac{1 + k^2}{3},$$

を利用した。

ワイエルシュトラスの楕円関数とシグマ関数の関係を利用すれば、ヤコビの楕円関数をシグマ関数で記述することができる。まず、第5章で導出した \wp 関数とコシグマ関数の関係 (5.27) と、(6.14) を組み合わせると、

$$\operatorname{sn} 2Kz = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(2\omega_1 z)}{\sigma_3(2\omega_1 z)}, \quad (6.17)$$

なる関係式が得られる。補助関数 (cn 関数と dn 関数) については、(4.16) と (6.5) を組み合わせると、

$$\operatorname{cn} 2Kz = \frac{\sigma_1(2\omega_1 z)}{\sigma_3(2\omega_1 z)}, \quad \operatorname{dn} 2Kz = \frac{\sigma_2(2\omega_1 z)}{\sigma_3(2\omega_1 z)}, \quad (6.18)$$

が導出される。

6.3 楕円積分との関係

前節で第1種楕円積分の標準形の逆関数である sn 関数を詳しく調べたので、第2種と第3種の楕円積分の変数を sn 関数で変換して調べてみよう。まず、第2種楕円積分の積分変数を $x \equiv \operatorname{sn} u$ とおくと、 $dx = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u du$ であるから、第2種楕円積分は、

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u du,$$

のように書くことができる。この積分は、積分経路によらず一定の値になる。なぜなら、被積分関数 $\operatorname{dn}^2 u$ は $u = 2mK + i(2n+1)K'$ (ただし、 m と n は整数) に2位の極をもつが、その極における留数がゼロであるからだ。そこで、第2種の楕円関数を単純に u の関数として、

$$E(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u du,$$

を定義して、これをテータ関数で表現してみるのだ。

既に第4章の (4.16) に示した関係式から、被積分関数は、

$$\operatorname{dn}^2 u = \frac{\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)}, \quad (6.19)$$

のように書くことができる。ただし、 $u \equiv 2Kz$ である。この被積分関数は変数 z に関して基本周期 1 と τ によって張られる基本周期平行四辺形をもつ。被積分関数は、その基本周期平行四辺形の中に、 $z = \tau/2$ に2位の極をもつ。それは、 $\vartheta_4(z)$ の零点と一致する。その事実は、被積分関数が2位の楕円関数であることを意味する。被積分関数を極 $z = \tau/2$ でローラン展開したときの最低次 (-2 次) の係数は、

$$\lim_{z \rightarrow \tau/2} (z - \tau/2)^2 \frac{\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)} = -\frac{1}{\pi^2 \vartheta_3^4(0)},$$

のように計算される。この計算のため、 $\vartheta_3(\tau/2) = q^{-1/4}\vartheta_2(0)$ (ただし、 $q = e^{\pi i\tau}$)、および、

$$\lim_{z \rightarrow \tau/2} \frac{\vartheta_4(z)}{z - \tau/2} = \vartheta_4'(\tau/2) = iq^{-1/4}\vartheta_1'(0) = i\pi q^{-1/4}\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0),$$

なる関係を利用した。特に、利用した第2の関係式は次のような操作によって左辺から右辺へ変形されている。まず、 $\vartheta_4(\tau/2) = 0$ であることから、左辺は微分 $\vartheta_4'(\tau/2)$ に置き換えられる。さらに、 $\vartheta_4(\tau/2) = iq^{-1/4}\vartheta_1(0)$ であることを利用する。その導関数も同じ関係が成り立つ。最後に、 $\vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)$ なる関係を利用したというわけである。

次に、

$$f(z) = (\log \vartheta_4(z))'' = \left(\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} \right)' = \frac{\vartheta_4''(z)\vartheta_4(z) - (\vartheta_4'(z))^2}{\vartheta_4^2(z)},$$

を定義しよう。ここで、 $\vartheta_4(z+1) = \vartheta_4(z)$ と $\vartheta_4(z+\tau) = e^{-\pi i(2z+\tau)}\vartheta_4(z)$ に注意すると、

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+\tau) = f(z),$$

が導かれる。これにより、 $f(z)$ が 1 と τ を周期とする楕円関数であることがわかる。関数 $f(z)$ も $\vartheta_4^2(z)$ を分母とするため、 $z = \tau/2$ を 2 位の極としてもつ。この関数を $z = \tau/2$ でローラン展開したときの最低次数 (-2 次) の係数は、

$$\lim_{z \rightarrow \tau/2} (z - \tau/2)^2 f(z) = \frac{\vartheta_4(\tau/2)\vartheta_4''(\tau/2) - (\vartheta_4'(\tau/2))^2}{(\vartheta_4'(\tau/2))^2} = -1,$$

のように計算できる。ここで、

$$g(z) \equiv \frac{\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)} - \frac{f(z)}{\pi^2\vartheta_3^4(0)},$$

を定義しよう。この関数 $g(z)$ は、-2 次の項が打ち消しあい、最低次数は、せいぜい、-1 次である。つまり、 $g(z)$ は 1 位以下の楕円関数となるのだが、そのような楕円関数は定数関数でなければならない。その定数値を求めるため、 $g(z)$ に $z = 0$ を代入すると、

$$g(z) = g(0) = 1 - \frac{\vartheta_4''(0)}{\pi^2\vartheta_3^4(0)\vartheta_4(0)},$$

となる。この計算では $\vartheta_4'(0) = 0$ を利用した。この結果から、 $\text{dn}^2 u$ は、

$$\text{dn}^2 u = \frac{\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(z)} = \frac{1}{\pi^2\vartheta_3^4(0)} \left(\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} \right)' + 1 - \frac{\vartheta_4''(0)}{\pi^2\vartheta_3^4(0)\vartheta_4(0)},$$

のように書くことができる。ここで、 $u = 2Kz = \pi\vartheta_3^2(0)z$ であることに注意して積分を実行すると、第2種楕円積分が、

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_0^u \text{dn}^2 u \, du \\ &= \frac{\vartheta_4'(z)}{\pi\vartheta_3^2(0)\vartheta_4(z)} + \left[\pi\vartheta_3^2(0) - \frac{\vartheta_4''(0)}{\pi\vartheta_3^2(0)\vartheta_4(0)} \right] z, \end{aligned} \quad (6.20)$$

の形で表現できることが導かれる。

6.4 完全楕円積分

完全楕円積分に関して, 既に示したように,

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0) = \sqrt{e_1 - e_3} \omega_1, \quad (6.21a)$$

$$iK' = \frac{\pi\tau}{2} \vartheta_3^2(0) = \sqrt{e_1 - e_3} \omega_3, \quad (6.21b)$$

の関係が成立する。また, $\tau\omega_1 = \omega_3$, $\tau K = iK'$ が成立する。なお, 複素関数における平方根は 2 価関数であるが, 根号は上の関係式を成立するように選ばれんとする。第 2 種楕円積分 (6.20) に対して, $u = K$ のとき完全楕円積分となる。それに対応する z は $z = 1/2$ である。ここで, $\vartheta_4'(1/2) = \vartheta_3'(0) = 0$ であることに注意すると,

$$E = K - \frac{1}{4K} \frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}, \quad (6.22)$$

が得られる。

ところで, コシグマ関数とテータ関数の関係式 (6.5) について $r = 3$ とすると,

$$\frac{\vartheta_4(z)}{\vartheta_4(0)} e^{2\eta_1\omega_1 z^2} = \frac{e^{-2\eta_3\omega_1 z} \sigma(2\omega_1 z + \omega_3)}{\sigma(\omega_3)},$$

となる。この数式の右辺は $\sigma_3(2\omega_1 z)$ をコシグマ関数の定義式で書き直した形をしている。この数式の両辺の対数を微分すると,

$$\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(0)} + 4\eta_1\omega_1 z = -\eta_3 + 2\omega_1 \zeta(2\omega_1 z + \omega_3),$$

となる。さらにこの数式の両辺を微分すると,

$$\frac{\vartheta_4''(z)}{\vartheta_4(0)} - \left(\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} \right)^2 + 4\eta_1\omega_1 = -2\omega_1^2 \wp(2\omega_1 z + \omega_3),$$

が導かれる。この数式の導出に関して, ツェータ関数が \wp 関数の導関数の -1 倍であることを利用した。ここで, $z = 0$ を適用し, $\vartheta_4'(0) = 0$, $\wp(\omega_3) = e_3$ に注意すると,

$$\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)} = -4(e_3\omega_1^2 + \eta_1\omega_1),$$

が得られる。この数式を (6.22) に代入し, (6.21a) を利用すると,

$$E = K + \frac{e_3\omega_1^2 + \eta_1\omega_1}{K} = \frac{e_1\omega_1 + \eta_1}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

が得られる。つまり, 第 2 種の完全楕円積分 E がワイエルシュトラスの楕円関数に関する定数で表現できるのである。この数式に (6.21b) を乗じると,

$$iK'E = \omega_3(e_1\omega_1 + \eta_1), \quad (6.23)$$

のように変形される。

次に、ワイエルシュトラスの楕円関数の半周期を ω_1 と ω_3 から ω_3 と $-\omega_1$ で置き換えた場合を考えよう。まえに展開したワイエルシュトラスの楕円関数の理論は、 $\text{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$ なる条件が必要であった。この場合、 $\text{Im}(-\omega_1/\omega_3) > 0$ が成立するので、半周期を ω_3 と $-\omega_1$ としても (順序も関係ある)、ワイエルシュトラスの楕円関数の理論が適用可能である。つまり、交換前の状態で ω_1 と ω_3 を半周期の第1成分と第3成分と呼ぶことにしよう。交換後、半周期の第1成分と第3成分は ω_3 と $-\omega_1$ に変化している。そのような半周期の成分の置き換えによって、ワイエルシュトラスの楕円関数に関連する数値は、表 6.1 のように変化する。

半周期の第1成分、第2成分、第3成分を代入したときの \wp 関数の値 e_1, e_2, e_3 は、半周期の成分の置き換えによって、 e_3, e_2, e_1 に変化する。特に、第3成分に対する関数値は、ワイエルシュトラスの楕円関数が偶関数であること: $\wp(-\omega_1) = \wp(\omega_1) = e_1$ を利用した。

表 6.1: 半周期成分の置き換えによる楕円関数に関連する値の変化

項目	置き換え前	置き換え後
半周期の成分	ω_1, ω_3	$\omega_3, -\omega_1$
楕円関数の値	e_1, e_2, e_3	e_3, e_2, e_1
ツェータ関数の変化分	η_1, η_3	$\eta_3, -\eta_1$
テータ関数のパラメータ	τ	$-1/\tau$
楕円関数の母数	k	k'
完全楕円積分	K, K', E	K', K, E'

ワイエルシュトラスの楕円関数の周期分だけ平行移動したときのツェータ関数の変化分 η_1 と η_3 は、半周期の成分の置き換えによって、 η_3 と $-\eta_1$ に変化する。これは、 $\zeta(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \zeta(z) + m\eta_1 + n\eta_3$ によって得られる性質である。

ツェータ関数のパラメータ τ は $\tau \equiv e_3/e_1$ のように定義されている。このパラメータは、半周期成分の置き換えによって、 $-e_1/e_3 = -1/\tau$ のように変化する。パラメータ τ は $\tau = iK'/K$ を満足するので、半周期成分の置き換えによって、 $-1/\tau = -(K/iK') = iK/K'$ となるので、半周期成分の置き換えは、完全楕円積分 K と K' を交換するのだ。ということは、半周期成分の置き換えによって、第2種の完全楕円積分 E は E' に変化するだろうし、楕円関数の母数 k は k' に変化する。

半周期の成分を置き換えたときの楕円関数に関連する数値の対応関係 (表 6.1) を適用すると、(6.23) は、

$$iKE' = -\omega_1 (e_3\omega_3 + \eta_3), \quad (6.24)$$

のように書き換えられる。これに関連し, (6.21a) と (6.21b) の積を計算すると,

$$iKK' = (e_1 - e_3)\omega_1\omega_3,$$

となる。前に示した数式 (6.23) と (6.24) の和から iKK' を減じると, e_1 と e_3 を消去でき,

$$iK'E + iKE' - iKK' = \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1,$$

が導かれる。左辺は前章で示したとおり, $\pi i/2$ に等しいはずなので,

$$K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}, \tag{6.25}$$

なる関係が得られる。この関係は**ルジャンドルの関係式**と呼ばれる。ルジャンドルの関係式は, 1976年にサラミンとブレントが円周率計算のアルゴリズムとして応用した。そのアルゴリズムは, ガウスルジャンドル法と呼ばれている。次の章でガウスルジャンドル法を紹介する。

第7章 数値計算への応用

楕円関数は、長大桁の数値演算にいくつか応用される。そのうちの有名な例は、円周率の演算である。円周率の計算は、前章で紹介したルジャンドルの関係式を応用している。ルジャンドルの関係式は円周率と完全楕円積分との関係を記述した数式である。完全楕円積分は算術幾何平均を用いると2次収束を示すため、長大桁の計算に適している。そのように、完全楕円積分と関係づけることによって長大桁の演算を高速化することが可能になるのである。

7.1 ガウス・ルジャンドル法による円周率計算

ガウス・ルジャンドル法は、1976年にサラミンとブレントは独立に提案した円周率計算のアルゴリズムである。その方法が提案されるまで、円周率計算は逆正接関数のマクローリン級数展開を利用したアルゴリズムが主流であった。そのアルゴリズムは、簡単な演算で実装できる反面、計算桁数 N に対して、 N^2 に比例する演算量が必要であるため、1980年代には円周率計算が行き詰まりを生じていた。ガウスルジャンドル法は、計算桁数 N に対して、 $N \log N$ 程度の演算量となるため、その後の計算桁数を大幅に拡大した手法である。

7.1.1 ルジャンドルの関係式

ガウス・ルジャンドル法は楕円積分におけるルジャンドルの関係式を利用したアルゴリズムである。ルジャンドルの関係式は、前章で導出したとおり、

$$K(k')E(k) + K(k)E(k') - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2}, \quad (7.1)$$

なる関係式である。前章では、 $K(k)$ や $K(k')$ の代わりに、略記法 K や K' を用いていた。ここでは、楕円積分が母数 k に依存することを強調する意味で、略記法を用いないことにする。

ルジャンドルの関係式は、前章でシグマ関数を用いて証明をしたが、ここでは、直接的な

アプローチで再度, ルジャンドルの関係式を証明しておこう。第2章で, 第1種楕円積分が,

$$\frac{d}{dk} \left(k k'^2 \frac{dK}{dk} \right) = kK, \quad (7.2)$$

を満足することを示した。この微分方程式は, k を k' に置き換えても成立する。すなわち,

$$\frac{d}{dk'} \left(k' k^2 \frac{dK}{dk'} \right) = k'K, \quad (7.3)$$

が成立するのだ。この事実を示すため, 数式を変形すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left(k k'^2 \frac{dK}{dk} \right) &= \frac{dk'}{dk} \frac{d}{dk'} \left(k k'^2 \frac{dk'}{dk} \frac{dK}{dk'} \right) \\ &= -\frac{k}{k'} \frac{d}{dk'} \left(-k k'^2 \frac{k}{k'} \frac{dK}{dk'} \right) = \frac{k}{k'} \frac{d}{dk'} \left(k' k^2 \frac{dK}{dk'} \right), \end{aligned}$$

が得られるのだが, この数式の右辺は kK に等しいはずだ。したがって,

$$\frac{d}{dk'} \left(k' k^2 \frac{dK}{dk'} \right) = k'K,$$

が成立するというわけだ。この数式の k と k' を入れ替えると,

$$\frac{d}{dk} \left(k k'^2 \frac{dK'}{dk} \right) = kK'(k), \quad (7.4)$$

が得られる。ここで, $K'(k)$ は $K'(k) \equiv K(k')$ なる楕円補積分と呼ばれる関数である。

続いて, $G(k) \equiv \sqrt{k(1-k^2)} K(k)$ なる関数を定義しよう。また, $G(k)$ の補助関数として,

$G(k) \equiv \sqrt{k(1-k^2)} K'(k)$ も定義しておく。関数 $G(k)$ の2階微分を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2G}{dk^2} &= \sqrt{k(1-k^2)} \frac{d^2K}{dk^2} + \frac{1-2k^2}{\sqrt{k(1-k^2)}} \frac{dK}{dk} + \frac{3k^4-6k^2-1}{4[k(1-k^2)]^{3/2}} K \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(1-k^2)}} \left[k(1-k^2) \frac{d^2K}{dk^2} + (1-3k^2) \frac{dK}{dk} + \frac{3k^4-6k^2-1}{4k(1-k^2)} K \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(1-k^2)}} \left[\frac{d}{dk} \left(k(1-k^2) \frac{dK}{dk} \right) + \frac{3k^4-6k^2-1}{4k(1-k^2)} K \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(1-k^2)}} \left[kK + \frac{3k^4-6k^2-1}{4k(1-k^2)} K \right] = -\frac{1}{\sqrt{k(1-k^2)}} \frac{1+k^2}{4k(1-k^2)} K(k) \\ &= -\frac{1+k^2}{4k^2(1-k^2)^2} G(k), \end{aligned}$$

が得られる。導出過程において, 第4行目への変形は(7.2)を利用した。先ほど示した公式(7.4)に注意すると, $K(k)$ を $K'(k)$ に置き換えても, 同一の導出過程を経て, 同一の結果が得られる。したがって,

$$\frac{1}{G(k)} \frac{d^2G}{dk^2} = \frac{1}{G'(k)} \frac{d^2G'}{dk^2} = -\frac{1+k^2}{4k^2(1-k^2)^2}, \quad (7.5)$$

が成立するはずだ。この関係式は,

$$G'(k) \frac{d^2 G}{dk^2} - G(k) \frac{d^2 G'}{dk^2} = 0$$

と書き換えてもよい。関数 $G(k)$ と $G'(k)$ を定義に基づいて展開すると,

$$\sqrt{k(1-k^2)} K'(k) \frac{dK}{dk} - \sqrt{k(1-k^2)} K(k) \frac{dK'}{dk} = 0,$$

のように書き換えられる。部分積分を利用して両辺を k について積分すると,

$$k(1-k^2) \left[K(k) \frac{dK'}{dk} - K'(k) \frac{dK}{dk} \right] = C,$$

が得られる。ここで, C は任意の積分定数である。この数式の左辺に,

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dk} &= \frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)}, \\ \frac{dK'}{dk} &= \frac{d}{dk} K(k') = -\frac{k}{k'} \frac{E(k') - k^2 K(k')}{k'k^2} = -\frac{E'(k) - k^2 K'(k)}{k(1-k^2)}, \end{aligned}$$

を代入すると,

$$K(k)E'(k) + K'(k)E(k) - K(k)K'(k) = -C,$$

が得られる。つまり, この数式の左辺は定数になるということだ。その定数の正体をつかむには, k に具体的な値を代入してみればよい。例えば, $E(0) = K(0) = \pi/2$ を利用するために $k = 0$ を代入すると,

$$\begin{aligned} &K(0)E'(0) + K'(0)E(0) - K(0)K'(0) \\ &= \frac{\pi}{2} (K'(0) - K'(0)) + K(0)E'(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

となる。正しい結果が得られたように見えるが, この計算は誤りである。なぜなら, 左辺の第2項目と第3項目を上の数式では $(\pi/2)(K'(0) - K'(0))$ のように変形しているが, $K'(0)(E(0) - K(0))$ のようにも変形できるからだ。このように変形すると, この部分を短絡的にゼロすべきでない気がしないか? 確かに, $E(0) - K(0)$ はゼロであるが, $K'(0) = K(1)$ は無限大に発散するのだ。積 $K'(0)(E(0) - K(0))$ がどのような値になるかは, $k \rightarrow 0$ の極限で考えるべきである。母数 k が十分に小さいとき, 第1章で示した完全楕円積分のテイラー級数に注意すると,

$$E(k) - K(k) \simeq -\frac{\pi}{2} k^2 \quad (k \ll 1),$$

が成立する。仮に, $K'(k)$ が $k = 0$ の近傍で k^{-2} と同等, もしくは, それより早く発散するならば, 積 $K'(0)(E(0) - K(0))$ はゼロにならない。本章の後で導出する漸近展開を前借りすると,

$$K'(k) \simeq -\log \frac{k}{4} \quad (k \ll 1),$$

が成立する。対数は k^{-2} よりも遅く発散するので、

$$\lim_{k \rightarrow 0} K'(k) (E(k) - K(k)) = 0,$$

となる。対数の発散速度は、任意の指数 $a > 0$ に対して、 k^{-a} より遅いので、 $k = 0$ の近傍で $K'(k) (E(k) - K(k))$ は、ほぼ k^2 に比例すると考えてよい。その事実を図 7.1 に示そう。このグラフから、 $k = 0$ の近傍で $K'(k) (E(k) - K(k))$ でほぼ k^2 に比例することが確認で

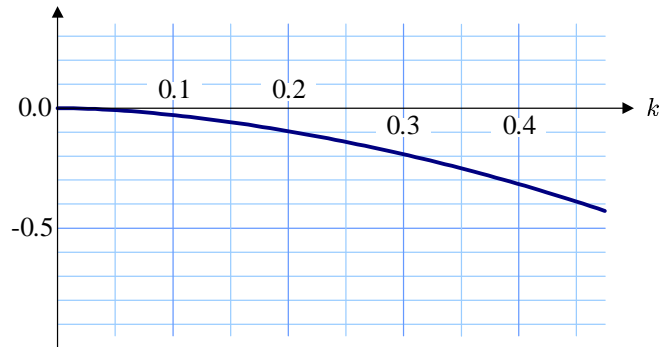


図 7.1: 関数 $K'(k) (E(k) - K(k))$ の振る舞い

きる。したがって、 $k \rightarrow 0$ の極限で $K'(k) (E(k) - K(k)) \rightarrow 0$ であることが視覚的にも示せた。したがって、

$$K(k)E'(k) + K'(k)E(k) - K(k)K'(k) = \frac{\pi}{2},$$

が成立するのだ。その数式は、

$$K(k)E(k') + K(k')E(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2},$$

と書き直してもよい。したがって、ルジャンドルの関係式が証明できた。◀

特殊な例 ルジャンドルの関係式において、 $k = \sqrt{1/2}$ を代入しよう。そのとき、補母数は $k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1/2}$ であるので、ルジャンドルの関係式は、

$$K(\sqrt{1/2}) [2E(\sqrt{1/2}) - K(\sqrt{1/2})] = \frac{\pi}{2},$$

のように書くことができる。この関係式を、

$$K(\sqrt{1/2})^2 \left[\frac{2E(\sqrt{1/2})}{K(\sqrt{1/2})} - 1 \right] = \frac{\pi}{2}, \quad (7.6)$$

のように変形しておく、この先の取り扱いに都合がよい。この形に変形すれば、左辺は第1章で取り扱ったランデン変換を利用して計算できるのである。

7.1.2 ランデン変換

第1章で説明したように、ランデン変換は楕円積分を計算するための便利な手法である。ランデン変換を利用すると、完全楕円積分は次のように計算できる。

補母数 k' ($=\sqrt{1-k^2}$) を, $k' \equiv b_0/a_0$ となるような実数 a_0 と b_0 を決める。さらに、漸化式:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

によって数列 a_n と b_n を定義する。つまり, a_n は前項の算術平均, b_n は前項の幾何平均である。そのとき、完全楕円関数は,

$$K(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi a_0}{2a_n}, \quad \frac{E(k)}{K(k)} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j-1} \frac{a_j^2 - b_j^2}{a_0^2},$$

によって計算できることは第1章に示したとおりである。これらの式をルジャンドルの関係式(7.6)に適用するにあたり, $k' = \sqrt{1/2}$ の意味で, $a_0 = 1, b_0 = \sqrt{1/2}$ とする。その結果、ルジャンドルの関係式は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{4a_n^2} \left[1 - \sum_{j=0}^n 2^j (a_j^2 - b_j^2) \right] = \frac{\pi}{2},$$

のように書くことができる。この数式を円周率 π について解いて得られる公式:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n^2}{1 - \sum_{j=0}^n 2^j (a_j^2 - b_j^2)}, \quad (7.7)$$

がサラミンとブレントが導いたガウス・ルジャンドルの公式である。この公式の適用には、多倍長の四則演算と平方根計算のプログラム¹が必要であるが、急速に円周率に収束するためガウス・ルジャンドルの公式が1980年代後半から使用され、円周率計算の桁数を飛躍的に更新してきた。

それでは、ガウスルジャンドル法によるアルゴリズムの収束速度を理論的に評価してみよう。収束速度の評価は、分子と分母を個別に評価する。

分子の収束速度 ランデン変換による第1種楕円積分の計算精度は、算術幾何平均の収束速度に決定される。算術幾何平均の収束が速いのでランデン変換が楕円積分を計算する強力でツールであることがここでわかるはずである。まず, a_{n+1} と b_{n+1} の差を評価してみ

¹ コンピュータの演算桁は浮動小数点でも通常、16桁程度である。それを越える桁数の計算には、16桁程度の演算を組合せ、必要な桁数(1億桁など)を実現するための専用の演算プログラムが必要となる。

ると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_nb_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{4(a_{n+1} + b_{n+1})} \leq \frac{(a_n - b_n)^2}{8M(a, b)}, \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $M(a, b)$ は、初項 a_0 と b_0 から始めた算術幾何平均を無限に繰り返した極限值を意味する。したがって、

$$\left| \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{M(a, b)} \right| \leq \frac{1}{8} \left| \frac{a_n - b_n}{M(a, b)} \right|^2, \quad (7.8)$$

が成り立つ。さらに、 $b_{n+1} \leq M(a, b)$ より $a_{n+1} - b_{n+1} \geq a_{n+1} - M(a, b)$ が成り立ち、 $a_n + b_n \geq 2M(a, b)$ より $a_n - b_n \leq 2(a_n - M(a, b))$ が導かれるので、

$$\left| \frac{a_{n+1} - M(a, b)}{M(a, b)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{a_n - M(a, b)}{M(a, b)} \right|^2, \quad (7.9)$$

を得る。すなわち、 a_n は $M(a, b)$ に向かって二次の収束をすることがわかる。二次の収束とは、反復を繰り返すたびに有効桁数が2倍に増加するような収束と考えればよい。

分母の収束速度 ガウスルジャンドル法の分母の収束について調べるために、数列 $a_n^2 - b_n^2$ の収束速度について考察する。

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 &= \left(\frac{a_n - b_n}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} \right)^2 \leq \frac{1}{16} \left(\frac{a_n^2 - b_n^2}{M(a, b)} \right)^2. \end{aligned}$$

右辺の不等式は、 $a_{n+1} \geq M(a, b)$ であるので成立する。この関係式をもう少し整理すると、

$$\left| \frac{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}{M(a, b)^2} \right| \leq \frac{1}{16} \left| \frac{a_n^2 - b_n^2}{M(a, b)^2} \right|^2,$$

が得られる。この式の両辺に 2^{n+1} を乗じると、

$$\left| \frac{2^{n+1}(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)}{M(a, b)^2} \right| \leq \frac{1}{8} \left| \frac{2^n(a_n^2 - b_n^2)}{M(a, b)^2} \right|^2, \quad (7.10)$$

となるので、分母を構成する級数の各項はゼロに向かって二次の収束をする。したがって、分母は二次の収束をする。

7.1.3 数値検証

紹介したガウス・ルジャンドル法の効果を示そう。ここまでに説明したガウス・ルジャンドル法の基本形をプログラミングして円周率を計算した結果を、小数点以下 100 桁²まで示す。なお、誤りがある桁から下位の桁を淡い文字で表している。初項 (第 0 項) では整数部さえ真値と一致しない。第 1 項で小数点第 1 位, 第 2 項で小数点第 3 位, 第 3 項で小数点第 9 位, 第 4 項で小数点第 20 位までのように, 真値と一致する桁数が項数を増加するたびに 2 倍以上になっている。第 7 項で有効数字は 100 桁を超えている。このように, ガウス・ルジャンドル法は優れた収束速度を示す。

```

0th approx: 4.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000
              00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000
1st approx:  3.18767 26427 12108 62720 19299 70525 36923 26510 53571 85936
              92264 87633 98627 51228 32528 12233 01147 28610 66016 17974
2nd approx:  3.14168 02932 97653 29391 80704 24560 00938 27957 19438 81540
              28326 44189 46319 56630 01010 25531 93888 89427 51526 46103
3rd approx:  3.14159 26538 95446 49600 29147 58818 04348 61088 79237 26131
              15896 51101 35768 46530 79503 08650 17740 97586 28986 31570
4th approx:  3.14159 26535 89793 23846 63606 02706 63132 17577 02411 34242
              93564 86846 01523 84109 48606 92775 82680 62200 73327 62130
5th approx:  3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69949 16472
              66058 34696 12594 87480 06095 32900 58518 51575 93171 01938
6th approx:  3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
              58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 46852 22865 41150
7th approx:  3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
              58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

```

ここで紹介したガウス・ルジャンドル法は基本形である。一般に使用される円周率計算アルゴリズムは, 初項の時点で数桁の有効数字を確保する改善が適用され, 繰り返し回数が減らせるように工夫されている。楕円関数を取り扱う本書の本質ではないが, (7.7) に簡単な工夫を施してみよう。基本形の公式に対して, $a_0^2 - b_0^2 = 1/2$ であることに注意して数式変形すると, 公式 (7.7) は,

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_{n+1}^2}{1/2 - \sum_{j=0}^n 2^{j+1}(a_{j+1}^2 - b_{j+1}^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=0}^n 2^j(a_j - b_j)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{1 - \sum_{j=0}^n 2^j(a_j - b_j)^2}, \end{aligned}$$

のように変形される。なお, 第 1 行目の右辺の分母に関して, $n \rightarrow \infty$ の極限で, 近似的に $a_n = a_{n+1}$ であることを利用した。第 2 行目への変形に関して, $a_{j+1} = (a_j + b_j)/2$ と

²これだけの桁数を計算するには, 多倍長演算の専用プログラムが必要となるが, 本書の本質ではないので, 説明を省略する。

$b_{j+1}^2 = a_j b_j$ であることを利用した。さらに、第2行目の右辺に関しては、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、近似的に $a_n = a_{n+1}$ と $b_n = b_{n+1}$ であることを利用した。その新しい公式で計算すると、下に示す結果が得られる。この例では、初期状態で既に 3.14 まで正確である。その結果、5回反復しただけ精度は 100 桁を超えている。

```

0th approx: 3.14057 92505 22168 24831 13312 68975 82331 17734 40237 51294
             83356 43486 69334 55827 58034 90290 78272 87621 55276 69005
1st approx: 3.14159 26462 13542 28214 93444 31982 69577 43144 37223 34560
             27945 59539 48482 14347 67220 79526 46946 43448 91799 13058
2nd approx: 3.14159 26535 89793 23827 95127 74801 86397 43812 25504 83544
             69357 87330 70202 63821 37838 92739 90314 16942 04346 90584
3rd approx: 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 14678 28364
             89215 56617 10697 60267 64500 64306 17110 06577 72659 80684
4th approx: 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
             58209 74944 59230 78164 06286 20899 86256 28703 21167 20359
5th approx: 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
             58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

```

これに対して、逆正接関数のマクローリン級数を利用した公式は、計算する項数に比例して桁数が伸びる、いわゆる、一次の収束を示す程度である。マクローリン級数を利用した計算は、簡単な演算だけで記述できるのだが、計算桁が大きくなると計算時間が著しく伸びるのである。ガウス・ルジャンドルの公式は、多倍長変数の平方根などのプログラムが必要となり、小さい桁数の演算には非効率であるが、計算桁が大きくなるとマクローリン級数を利用した公式より計算時間が短くなる。

7.2 対数計算

楕円関数は対数計算にも利用できる。初等的な手法によると、対数はマクローリン級数を利用するのであるが、対数関数 $\log(1+x)$ のマクローリン級数は著しく収束が遅い。仮に、1億桁もの長大桁を計算するにはマクローリン級数は不向きである。これに対して、

$$K(k) \simeq -\log \frac{\sqrt{1-k^2}}{4},$$

なる漸近近似を利用するのである。本節では、この漸近近似を導出した後、漸近近似を利用した対数計算アルゴリズムについて考察する。

7.2.1 漸近展開

楕円積分の漸近展開を導出するのは、手順が多く、これまで取り扱ったルジャンドルの標準形では、取り扱いが不便である。ルジャンドルの標準形の代わりに、

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}}, \quad (7.11)$$

なる積分形式を取り扱うのがよい。この積分は、 $\xi^2 \equiv \lambda^2/(t+1)$ の置き換えによって、

$$\begin{aligned} R_F(1-\lambda^2, 1-k^2\lambda^2, 1) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+1-\lambda^2)(t+1-k^2\lambda^2)(t+1)}} \\ &= \frac{1}{2} \int_\lambda^0 \frac{-(2\lambda^2/\xi^3) d\xi}{\sqrt{(\lambda^2/\xi^2 - \lambda^2)(\lambda^2/\xi^2 - k^2\lambda^2)\lambda^2/\xi^2}} \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \end{aligned}$$

のように、ルジャンドルの標準形による不完全楕円積分に書き換えられるので好都合である。したがって、

$$F(k, \lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \lambda R_F(1-\lambda^2, 1-k^2\lambda^2, 1), \quad (7.12)$$

である。この関係式が成立するので、完全楕円積分の漸近展開を導出するために $R_F(x, y, z)$ を取り扱うことにする。なお、改めて注釈しておく、不完全楕円積分の第1変数が母数である。これは、ヤコビの楕円関数の変数の順序と異なる。

これから導出する楕円関数の漸近近似は、母数 k が1に近い完全楕円積分である。その結果を先に書いておくと、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2)}} \simeq \log \frac{4}{k'} \quad \text{where } k' = \sqrt{1-k^2}, \quad (7.13)$$

である。この関係式は即座に導出できるのでなく、いくつかのステップを要する。次項では準備段階としてメルン変換について説明する。漸近近似の導出には、メルン天海の知識があることが有利だからだ。

7.2.2 メルン変換

楕円積分の漸近展開を導出するにはメルン変換 (Mellin transform) を利用するのが便利である。メルン変換はラプラス変換の亜種ともいえる数学変換であり、関数 $f(t)$ が与えられたとき、

$$\{\mathcal{M}f\}(z) = \int_0^\infty t^{z-1} f(t) dt, \quad (7.14)$$

によって定義される。一般的に、変換変数 z は複素数である。この数学変換がラプラス変換の亜種であることは、 $t \mapsto e^{-\xi}$ によって積分変数を置き換えると、

$$\{\mathcal{M}f\}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\xi z} d\xi,$$

のように数式が書き換えられることからわかる。ここで、 $\hat{f}(\xi) \equiv f(e^{-\xi})$ である。書き換えられた数式は、両側ラプラス変換と呼ばれる数学変換である。さらに、 $z \equiv i\omega$ とおくと、メルン変換が明らかにフーリエ変換:

$$\{\mathcal{M}f\}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi,$$

と一致する。フーリエ逆変換によると関数 $\hat{f}(\xi)$ は、

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{M}f\}(z) e^{i\omega\xi} d\omega,$$

と書くことができるので、 $z = i\omega$ であることに注意すると、

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \{\mathcal{M}f\}(z) e^{\xi z} dz,$$

のように書き換えられる。さらに、 $t = e^{-\xi}$ であることに注意すると、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \{\mathcal{M}f\}(z) t^{-z} dz, \quad (7.15)$$

が得られる。この数式がメルン逆変換である。

メルン変換 (7.14) は、数式から明らかのように、あらゆる関数 $f(t)$ に対して積分が計算できるわけではない。関数 $f(x)$ が、

$$f(t) \sim \begin{cases} O(t^b) & \text{for } t \rightarrow +0, \\ O(t^{-a}) & \text{for } t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

のように漸近的に振る舞いと仮定しよう。この仮定のもとでは、 $a < \operatorname{Re} z < b$ のとき、メルン変換が特定の値に収束する。

7.2.3 メルン変換による関数解析

前項で紹介したメルン変換を活用し、関数の漸近的な性質を解析しよう。ここで対象とする関数は、

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} f(\lambda t) h(t) dt, \quad (7.16)$$

のように定義されているとする。ここで、関数 $f(t)$ と $h(t)$ は、

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u} && \text{as } t \rightarrow +\infty, \\ h(t) &\sim \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1} && \text{as } t \rightarrow +0, \end{aligned}$$

のように漸近展開できるとする。この数式は無限級数でなく、 n 項までの展開にとどめている。なぜなら、無限項の漸近展開が収束するとは限らないからである。なお、これらの漸近形について、 $0 < u \leq 1$ と $0 < v \leq 1$ であるとする。さらに、 $f(x)$ が $t \rightarrow +0$ の極限で $f(t) = O(t^b)$ のように振る舞い、 $h(t)$ が $t \rightarrow +\infty$ の極限で $h(t) = O(t^{-a})$ のように振る舞うとする。このとき、積分 $I(\lambda)$ が発散しないためには、 $u + b > 0$ と $a + v > 1$ が条件となる。積分 $I(\lambda)$ を評価するには、関数 $f(t)$ と $h(t)$ のメリン変換を利用するのが便利である。

関数 $f(t)$ のメリン変換は、積分範囲 $(0, \infty)$ を $(0, 1]$ と $(1, \infty)$ に分割すると、

$$\{\mathcal{M}f\}(z) = \int_0^1 t^{z-1} h(t) dt + \int_1^\infty t^{z-1} h(t) dt,$$

のように書くことができる。第1の積分は $\operatorname{Re} z > -b$ で解析的であり、第2の積分は $\operatorname{Re} z < v$ で解析的である。第2の積分を解析接続することによって、メリン変換 $\{\mathcal{M}f\}(z)$ は半複素平面 $\operatorname{Re} z > -b$ 全体で解析的にできる。そのために、 n 項による漸近展開の誤差:

$$f_n(t) \equiv f(t) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u},$$

を定義しよう。この誤差を用いて、

$$\varphi_n(t) \equiv \begin{cases} f(t) & 0 < t < 1, \\ f_n(t) & 1 \leq t < \infty, \end{cases}$$

なる関数を定義する。新たに定義された関数を用いてメリン変換 $\{\mathcal{M}f\}(z)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \{\mathcal{M}f\}(z) &= \int_0^1 t^{z-1} h(t) dt + \int_1^\infty t^{z-1} h(t) dt \\ &= \int_0^1 t^{z-1} h(t) dt + \int_1^\infty t^{z-1} \left(f_n(t) + \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u} \right) dt \\ &= \{\mathcal{M}\varphi_n\}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{a_m}{z - m - u}, \end{aligned} \tag{7.17}$$

が得られる。

関数 $h(t)$ のメリン変換も同様に考察できる。関数 $h(t)$ が $t \rightarrow \infty$ の極限で $h(t) = O(t^{-a})$ のように振る舞うなら、区間 $(0, 1)$ の積分は $\operatorname{Re} z < v$ で解析的であり、区間 $[1, \infty)$ の積分は

$\operatorname{Re} z > 1 - a$ で解析的である。解析接続によって、 $\{\mathcal{M}h\}(z)$ も半複素平面 $\operatorname{Re} z > 1 - a$ にわたって解析的にできる。関数 $h(t)$ についても同様に、 n 項の漸近展開の漸近展開の誤差:

$$h_n(t) = h(t) - \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1},$$

を定義する。続いて,

$$\eta_n(t) = \begin{cases} h_n(t) & 0 < t < 1, \\ h(t) & 1 \leq t < \infty, \end{cases}$$

なる関数を定義する。メルン変換 $\{\mathcal{M}h\}(z)$ の計算に、新たに定義した $\eta_n(t)$ を用いて記述すると,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{M}h\}(1-z) &= \int_0^1 t^{-z} h(t) dt + \int_1^\infty t^{-z} h(t) dz \\ &= \int_0^1 t^{-z} \left(h_n(t) + \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1} \right) dt + \int_1^\infty t^{-z} h(t) dt \\ &= \{\mathcal{M}\eta_n\}(1-z) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{b_m}{m+v-z}, \end{aligned}$$

が得られる。二つのメルン変換 $\{\mathcal{M}f\}(z)$ と $\{\mathcal{M}h\}(1-z)$ の関係を利用すると、次の段落に示すウォングの定理によって、積分 $I(\lambda)$ をメルン変換を含む記述で表現できる。

ウォングの定理 関数 $f(t)$ と $h(t)$ は先ほど定義した関数である。そのとき、自然数 n に対して,

$$I(\lambda) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{n-1} a_m \{\mathcal{M}h\}(1-m-u) \lambda^{-m-u} \\ \quad + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \{\mathcal{M}f\}(m+v) \lambda^{-m-v} + \delta_n(\lambda) & (u \neq v), \\ \sum_{m=0}^{n-1} c_m(u) \lambda^{-m-u} + \log \lambda \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_m \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda) & (u = v), \end{cases} \quad (7.18)$$

が成立する。条件 $u = v$ の公式において、対数 \log の変数は λ のみであり、後続の総和は含まない。また,

$$c_m = b_m \{\mathcal{M}\varphi_n\}(m+u) + a_m \{\mathcal{M}\eta_n\}(1-m-u) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \frac{a_m b_j + a_j b_m}{m-j},$$

である。さらに、 $\delta_n(\lambda)$ は剰余項であり,

$$\delta_n(\lambda) = \int_0^1 f_n(\lambda t) h_n(t) dt,$$

によって与えられる。

証明 計算すべき積分を $I(\lambda) \equiv I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$ のように分割する。ここで、 I_1 と I_2 は、それぞれ、区間 $[0, 1)$ と $[1, \infty)$ での積分であるとする。剰余項も同様に、 $\delta_n(\lambda) = \delta_{n1}(\lambda) + \delta_{n2}(\lambda)$ のように分割しておく。積分 $I(\lambda)$ を計算するための被積分関数は、

$$\begin{aligned} f(\lambda t) h(t) &= f(\lambda t) h(t) - f(\lambda t) h_n(t) + f(\lambda t) h_n(t) - f_n(\lambda t) h_n(t) + f_n(\lambda t) h_n(t) \\ &= f(\lambda t) \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1} + h_n(t) \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u} + f_n(\lambda t) h_n(t), \end{aligned} \quad (7.19a)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda t) h(t) &= f(\lambda t) h(t) - f_n(\lambda t) h(t) + f_n(\lambda t) h(t) - f_n(\lambda t) h_n(t) + f_n(\lambda t) h_n(t) \\ &= h(t) \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u} + f_n(\lambda t) \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1} + f_n(\lambda t) h_n(t), \end{aligned} \quad (7.19b)$$

のように変形できる。これら2種類の変形方法のうち、(7.19a)を I_1 に、(7.19b)を I_2 に代入すると、

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} b_m \int_0^1 t^{m+v-1} f(\lambda t) dt + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \lambda^{-m-u} \int_0^1 t^{-m-u} h_n(t) dt + \delta_{n1}(\lambda), \\ I_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} a_m \lambda^{-m-u} \int_1^\infty t^{-m-u} h(t) dt + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \int_1^\infty t^{m+v-1} f_n(\lambda t) dt + \delta_{n2}(\lambda), \end{aligned}$$

が得られる。ここで、関数 $\eta_m(t)$ の定義に注意しながら $I_1(\lambda)$ と $I_2(\lambda)$ を加算すると、

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} b_m \left[\int_0^1 t^{m+v-1} f(\lambda t) dt + \int_1^\infty t^{m+v-1} f_n(\lambda t) dt \right] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \{ \mathcal{M}\eta_m \} (1-m-u) \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda), \end{aligned} \quad (7.20)$$

が得られる。この数式変形において、 f と f_n を含む積分が φ_n のメリン変換の形にまとめられないのは、因数 λ が邪魔をしているからだ。とはいえ、 $\tau \equiv \lambda t$ とおいて積分を実行すると、ブラケット内部の数式は、

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{m+v-1} f(\lambda t) dt + \int_1^\infty t^{m+v-1} f_n(\lambda t) dt \\ &= \lambda^{-m-v} \left[\int_0^\lambda \tau^{m+v-1} f(\tau) d\tau + \int_\lambda^1 \tau^{m+v-1} f_n(\tau) d\tau \right] \\ &= \lambda^{-m-v} \left[\left(\int_0^1 + \int_1^\lambda \right) \tau^{m+v-1} f(\tau) d\tau + \left(\int_1^\infty - \int_1^\lambda \right) \tau^{m+v-1} f_n(\tau) d\tau \right] \\ &= \lambda^{-m-v} \{ \mathcal{M}\varphi_n \} (m+v) + \lambda^{-m-v} \int_1^\lambda \tau^{m+v-1} (f(\tau) - f_n(\tau)) d\tau \\ &= \lambda^{-m-v} \{ \mathcal{M}\varphi_n \} (m+v) + \lambda^{-m-v} \int_1^\lambda \tau^{m+v-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \tau^{-j-u} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{-m-v} \{\mathcal{M}\varphi_n\}(m+v) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j \lambda^{-j-u}}{m+v-j-u} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j \lambda^{-m-v}}{m+v-j-u} \\
&= \lambda^{-m-v} \{\mathcal{M}f\}(m+v) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j \lambda^{-j-u}}{m+v-j-u}, \tag{7.21}
\end{aligned}$$

のように変形できる。第3行目への数式変形は、 $\lambda > 1$ を想定しているように見えるかもしれないが、 $\lambda \leq 1$ でも成立する。最終行への数式変形には、(7.17)を利用した。この数式は、 $n \neq v$ のときしか有効でない。なぜなら、 $u = v$ ならば $m = j$ のとき第2項と第3項の分母がゼロになるからである。この結果を(7.20)に代入すると、

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} b_m \{\mathcal{M}f\}(m+v) \lambda^{-m-v} + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_m b_j}{j+v-m-u} \lambda^{-m-u} \\
&\quad + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \{\mathcal{M}\eta_n\}(1-m-u) \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda),
\end{aligned}$$

が得られる。この数式の右辺の第2項と第3項に(7.18)を適用すると、積分 $I(\lambda)$ は、

$$I(\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} b_m \{\mathcal{M}f\}(m+v) \lambda^{-m-v} + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \{\mathcal{M}h\}(1-m-u) \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda),$$

のように変形される。導出過程で述べたように、この関係式は $u \neq v$ でしか成立できない。その理由は、 $u = v$ のとき、(7.21)が計算できないからである。正確にいうと、(7.21)の計算過程の最後から2行目について、 $m = j$ の要素を取り出すと、 $(\lambda^{-u} - \lambda^{-v})/(v-u)$ が含まれている。この要素が $u = v$ のときに計算できないのである。直接計算する代わりに、 $v \rightarrow u$ の極限をとると、

$$\lim_{v \rightarrow u} \frac{\lambda^{-u} - \lambda^{-v}}{v-u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1 - \lambda^{-\Delta u}}{\Delta u} \lambda^{-u} = \lambda^{-u} \frac{\lambda^{\Delta u} - 1}{\Delta u} = \lambda^{-u} \log \lambda,$$

が得られる。この極限計算は、 λ^{-u} の微分公式そのものである。得られた極限を代入すると、(7.21)は、

$$\begin{aligned}
\text{RHS of (7.21)} &= \lambda^{-m-u} \{\mathcal{M}\varphi_n\}(m+u) \\
&\quad + a_m \lambda^{-m-u} \log \lambda + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \frac{a_j (\lambda^{-j-u} - \lambda^{-m-u})}{m-j},
\end{aligned}$$

となる。この数式は(7.20)のブラケットの中だから、(7.20)に代入すると、

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} \left[b_m \{\mathcal{M}\varphi_n\}(m+u) + a_m \{\mathcal{M}\eta_n\}(1-m-u) \right] \lambda^{-m-u} \\
&\quad + \log \lambda \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_m \lambda^{-m-u} + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \left(\frac{a_j b_m \lambda^{-j-u}}{m-j} - \frac{a_j b_m \lambda^{-m-u}}{m-j} \right) + \delta_n(\lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left[b_m \{ \mathcal{M} \varphi_n \} (m+u) + a_m \{ \mathcal{M} \eta_n \} (1-m-u) \right] \lambda^{-m-u} \\
&\quad + \log \lambda \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_m \lambda^{-m-u} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{n-1} \frac{a_m b_j \lambda^{-m-u}}{j-m} - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \frac{a_j b_m \lambda^{-m-u}}{m-j} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} c_m(u) \lambda^{-m-u} + \log \lambda \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_m \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda),
\end{aligned}$$

が得られる。ただし,

$$c_m(u) = b_m \{ \mathcal{M} \varphi_n \} (m+u) + a_m \{ \mathcal{M} \eta_n \} (1-m-u) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \frac{a_m b_j + a_j b_m}{m-j},$$

とおいた。したがって, (7.18) が成立することが示された。◻

7.2.4 漸近展開

前節で導出した公式を用いて楕円積分の漸近展開を導出できる。第1種楕円積分を (7.11) の形で表現した場合, 楕円積分 $R_F(x, y, z)$ は,

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \log \frac{4\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + r, \quad (7.22)$$

なる漸近形式で表現できる。ただし, r は誤差項であり,

$$0 < r < \frac{x+y}{8z^{3/2}} \left[\log \left(1 + \frac{4z}{x+y} \right) + 1 \right],$$

を満たす。本節では, この漸近形式を証明する。

証明 積分 $R_F(x, y, z)$ を評価するため, $\tau \equiv 1/t$ の置き換えを適用する。その置き換えによって, $R_F(x, y, z)$ は,

$$\begin{aligned}
R_F(x, y, z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1+x\tau)(1+y\tau)(1+z\tau)}},
\end{aligned}$$

のように書き換えられる。この積分形式は,

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+zt}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}} dt,$$

なる形式で書いてもよい。この形式は、前節で紹介したウォングの定理を適用できる形式である。具体的には、

$$f(zt) = \frac{1}{\sqrt{1+zt}}, \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}},$$

とにおいてウォングの定理を適用するのだ。なお、ウォングの定理で用いていたパラメータ λ は、この数式では z である。ウォングの定理を適用するにあたり、関数 $f(t)$ と $h(t)$ を、

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{1}{2t}\right), & \text{as } t \rightarrow +\infty, \\ h(t) &\sim \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{x+y}{2}t\right), & \text{as } t \rightarrow +0, \end{aligned}$$

のように漸近展開する。前節で記述した $f(t)$ と $g(t)$ の定義によると、この例は $u = v = 1/2$ であるので、ウォングの定理において u と v が等しい場合の公式を利用すればよい。改めて関数 $f(t)$ と $h(t)$ の漸近展開の係数を書き出すと、

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= -\frac{x+y}{2}, \\ b_0 &= 1, & b_1 &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

である。関数 $f(t)$ が $t \rightarrow +0$ の極限で $O(1)$ として、 $h(t)$ が $t \rightarrow +\infty$ の極限で $O(t^{-3/2})$ として振る舞うことに注目すると、

$$u + b = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} > 0, \quad a + v = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 > 0,$$

となるので、積分 $R_F(x, y, z)$ が発散しないことがわかる。

粗い近似に思えるかもしれないが、1項のみの漸近展開で積分 $R_F(x, y, z)$ を評価すると、

$$\begin{aligned} R_F(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_0(1/2)}{\sqrt{z}} + \frac{\log z}{\sqrt{z}} + \delta_1(z) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{c_0(1/2)}{\sqrt{z}} + \frac{\log \sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2} \delta_1(z), \end{aligned} \quad (7.23)$$

となるはずである。具体的な積分結果を得るには、係数 $c_0(1/2)$ と $\delta_1(z)$ を計算する必要がある。それらの値を計算するために、関数 $\varphi_1(t)$ と $\eta_1(t)$ を定義しておく。その関数は表 7.1 のようになる。表に記載した関数を参照すると、係数 $c_0(1/2)$ は、

$$\begin{aligned} c_0(1/2) &= \{\mathcal{M}\eta_0\}(1/2) + \{\mathcal{M}\varphi_0\}(1/2) = \{\mathcal{M}(\eta_0 + \varphi_0)\}(1/2) \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+t}} + \frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{t(1+t)}} + \frac{1}{t\sqrt{1+(x+t)t+xyt^2}} - \frac{1}{t} \right) dt, \end{aligned}$$

表 7.1: 漸近展開の評価のための関数定義

条件	$\varphi_1(t)$	$\eta_1(t)$
$0 < t < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+t}}$	$\frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}} - \frac{1}{\sqrt{t}}$
$t \geq 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}}$

なる数式で計算できる。この積分は初頭関数を用いて解析的に不定積分を実行できる。第1と第2の被積分関数の不定積分は、

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(t+1)}} = \log \left(\sqrt{t(t+1)} + t + \frac{1}{2} \right),$$

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} = -\log \left(\frac{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}}{t} + \frac{1}{t} + \frac{x+y}{2} \right),$$

となる。導出を試みる読者のために、導出のヒントを与えておこう。第1の積分は、 $t+1/2 \equiv \cosh u/2$ で置き換えれば導出できる。第2の積分は、 $t \equiv 1/u$ で置き換えれば第1の積分と同型のなる。積分計算にあたり、積分区間 $(0, \infty)$ を第1の積分、第2の積分、第3の積分のように個別に適用すると積分結果が発散してしまう。積分区間を (ϵ, R) として、第1から第3の積分を一度に実行し、 $\epsilon \rightarrow 0$ と $R \rightarrow \infty$ の極限をとれば、積分が有限値になる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} c_0(1/2) &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\log \left(\sqrt{t(t+1)} + t + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \log \left(\frac{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}}{t} + \frac{1}{t} + \frac{x+y}{2} \right) - \log t \right]_{\epsilon}^R \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\left(\log 2R - \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{2} - \log R \right) - \left(\log \frac{1}{2} - \log \frac{2}{\epsilon} - \log \epsilon \right) \right] \\ &= -\log \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{16} = 2 \log \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, \end{aligned}$$

が得られる。この結果を (7.23) 代入すると、

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \log \frac{4\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\delta_1(z)}{2}, \quad (7.24)$$

が得られる。この数式の解釈は、右辺の第1項が近似式、剰余項である第2項が誤差である。近似精度を見積もるために剰余項 $\delta_1(z)/2$ を評価しよう。剰余項は $f(z)$ と $h(t)$ の漸近展開の誤差を用いて計算する。漸近展開の誤差は、

$$f_1(zt) = \frac{1}{\sqrt{1+zt}} - \frac{1}{\sqrt{zt}}, \quad h_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}} - \frac{1}{\sqrt{t}},$$

である。これらを用いると剰余項は,

$$\begin{aligned} r &= \frac{\delta_1(z)}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty f_1(z t) h(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} \right) dt, \end{aligned} \quad (7.25)$$

となるのだが, 残念ながら, この積分は解析的に計算できない。しかし, 剰余項は大きさの感覚をつかめればよいので, 厳密に計算する代わりに, 解析的に計算できる関数を用いて不等式で大きさがわかるように計算を進める。

剰余項 (7.25) の被積分関数のうち, 因子 $1 - (1 + 1/z t)^{-1/2}$ を取り出して計算すると,

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} = \frac{\sqrt{1+1/z t} - 1}{\sqrt{1+1/z t}} = \frac{w}{\sqrt{1+1/z t} (\sqrt{1+1/z t} + 1)}, \quad (7.26)$$

となる。右辺を得るため, 分子と分母に $\sqrt{1+1/z t} + 1$ を乗じた。この数式の分母が,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{z t}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{z t}} + 1 \right) > 1 + \frac{1}{z t} + 1 = 2 + \frac{1}{z t},$$

なる不等式を満たすことに注意しておこう。積分変数 t に関する積分区間が $(0, \infty)$ であるから $z t$ が正であるはずなので, (7.26) は正である。したがって,

$$0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} < \frac{1}{1+2z t}, \quad (7.27)$$

なる不等式が成立する。とはいえ, $t \gg 1$ の場合, 不等式の右辺を $1/2z t$ と置き換えてもよい。すなわち,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} &< \frac{1}{2z t} && \text{for } t \gg 1, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} &< \frac{1}{1+2z t} && \text{otherwise,} \end{aligned}$$

と書いておこう。剰余項 (7.25) に含まれる因子 $1 - [1 + (x+y)t + xyt^2]^{-1/2}$ についても同様に,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} &< 1 && \text{for } t \gg 1, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} &< \frac{(x+y)t}{2} && \text{otherwise,} \end{aligned}$$

と書くことができる。これらのうち, 第1の不等式は明らかである。第2の不等式は, 算術平均と幾何平均の関係 $xy \leq (x+y)^2/4$ を用いて導出される。具体的に導出すると,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} &\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+(x+y)^2t^2/4}} \\ &= 1 - \frac{1}{1+(x+y)t/2} < 1 - \left(1 - \frac{(x+y)t}{2} \right) = \frac{(x+y)t}{2}, \end{aligned}$$

となる。これで、剰余項を評価するための材料がそろった。

剰余項を評価するにあたり、 $t \gg 1$ とそれ以外の2種類に分け、計算するための要素を準備した。そこで、 $t \gg 1$ とそれ以外を分ける境界を $t = \xi$ と設定し、剰余項を計算しよう。積分計算すると、

$$\begin{aligned} r &< \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^\xi \frac{x+y}{2} \frac{1}{1+2zt} dt + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_\xi^\infty \frac{1}{2zt^2} dt \\ &= \frac{1}{4z^{-3/2}} \left(\frac{x+y}{2} \log(1+2z\xi) + \frac{1}{\xi} \right), \end{aligned} \quad (7.28)$$

のように、当然であるが、見積もられた剰余項の大きさは境界 ξ に依存する。そこで、剰余項の最大値を採用することにしよう。つまり、計算された剰余項を ξ で微分した導関数がゼロになる条件を求めるのだ。その条件は、

$$x+y = \frac{1}{z\xi^2} + \frac{2}{\xi},$$

であることがわかる。楕円積分 $R_F(x, y, z)$ を評価するにあたり、十分に大きな z を取り扱うことが多いので、 ξ^{-2} の項を無視することになると、 $\xi = 2/(x+y)$ で剰余項の評価値が最大になる。したがって、剰余項は、

$$0 < r < \frac{x+y}{8z^{-3/2}} \left[\log \left(1 + \frac{4z}{x+y} \right) + 1 \right],$$

のように見積もられる。これで、楕円積分 $R_F(x, y, z)$ の漸近展開と、誤差を導出することができた。¶

7.2.5 対数計算への応用

ここまでの公式の導出は、そもそも、第1種楕円積分の漸近展開を得ることが目的であった。第1種の不完全楕円積分:

$$F(k, \lambda) \equiv \int_0^\lambda \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

は、前に述べたように、

$$F(k, \lambda) = \lambda R_F(1-\lambda^2, 1-\lambda^2k^2, 1),$$

の関係を満たす。この関係式から、第1種の不完全楕円積分は、

$$F(k, \lambda) = \lambda \log \frac{4}{\sqrt{1-\lambda^2} + \sqrt{1-\lambda^2k^2}} + r,$$

であり, 誤差項 r は,

$$0 < r < \frac{2 - (1 + k^2)\lambda^2}{4} \left[\log \left(1 + \frac{4}{2 - (1 + k^2)\lambda^2} \right) + 1 \right],$$

のように書くことができる。特に, $\lambda = 1$ とすれば完全楕円積分になるので, 完全楕円積分 $K(k)$ の漸近展開は,

$$K(k) = \log \frac{4}{k'} + r = -\log \frac{k'}{4} + r, \quad (7.29)$$

と書くことができる。そのとき, 誤差項は,

$$0 < r < \frac{k'^2}{4} \left[\log \left(1 + \frac{4}{k'^2} \right) + 1 \right], \quad (7.30)$$

のように評価できる。ただし, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ は補母数である。得られた漸近展開によって, 完全楕円積分が補母数 k' の減少に伴い, 対数関数的に振る舞うことがわかる。誤差項 (7.30) のブラケットの中は, k' が十分に小さければ, $K(k)$ に等しいので,

$$\left| \frac{K(k) + \log(k'/4)}{K(k)} \right| < \frac{k'^2}{4},$$

が成立する。その誤差をグラフに描くと図 7.2 のようになる。このグラフによると, 予想どおり, 誤差が $k'^2/4$ より小さいことが示されている。

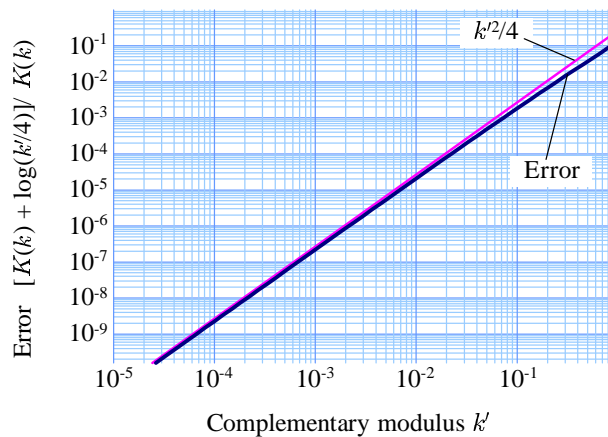


図 7.2: 完全楕円積分の漸近展開による誤差

完全楕円積分 $K(k)$ の漸近展開は, 対数計算に応用することができる。対数計算はマクローリン展開では非常に収束が遅い。それに比べ, 完全楕円積分は, ランデン変換を利用すると, 算術幾何平均を用いて 2 次収束するので, 桁数が多い計算には有利である。漸近展開 (7.29) を変形すると,

$$\log x \simeq -K(\sqrt{1 - 16x^2}) = \frac{\pi}{2M(1, 4x)},$$

のように書くことができる。ここで、 $M(1, 4x)$ は 1 と $4x$ の算術平均と幾何平均を繰り返した極限值である。しかし、既に示したように、この近似式の精度が $4x^2$ 程度であるので、この手法で計算するには、十分に小さい x を選ばなければならない。そこで、任意の正の実数 x が与えられたとき、 $2n$ ビットの演算精度で $\log x$ 計算するには次のアルゴリズムを用いる。

1. 変数 x を $y \leftarrow 2^{-m}x$ によって変換することで、 $y < 2^{-n-1}$ とできる最小の整数 m を選ぶ。
2. 初期値として、 $a_0 \leftarrow (1 + 4y)/2$, $b_0 \leftarrow 2\sqrt{y}$ を計算しておく。
3. $a_{n+1} \leftarrow (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} \leftarrow \sqrt{a_n b_n}$ によって、 a と b の差が十分に小さくなるまで繰り返す。
4. 繰り返しを終えた時点で a_n と b_n は、算術幾何平均 $M(1, 4y)$ に十分近い値になっているはずである。出力値として、 $m \log 2 - \pi/(a_n + b_n)$ を計算する。この値が $\log x$ の近似値である。なお、 π と $\log 2$ はあらかじめ十分な精度で準備されているものとする。

このアルゴリズムを検証するため、 $\log 10$ を小数点以下 100 桁まで計算しよう。演算の上での目標精度は 366 ビット (10 進数 110 桁) とする。この場合、 $x = 10$ とし、目標精度から m を定めると $m = 184$ が算出された。算術幾何平均の繰り返しを実行しながら、各ステップで $m \log 2 - \pi/2M(1, 4y)$ を出力すると、表 7.2 に示す結果が得られた。演算結果が間違っている桁以降は淡い文字で書いている。この結果によると、5 回の繰り返しまで、整数部さえも正しい値にならない。これは、 $y \ll 1$ であるため、算術幾何平均の途中経過が極限值から遠いからである。しかし、さすが算術幾何平均である。整数部が正しくなると、その後は精度が急速に伸びる。確かに、繰り返し 1 回ごとに有効桁が 2 倍以上に伸びているのが確認できる。結果として、11 回の繰り返しで 100 桁の計算精度が達成できた。なお、この計算は 110 桁の精度を狙っているので、さらに算術幾何平均を繰り返しても精度は改善しない。さらに多くの計算精度を得るためには、 m を大きく設定しなければならない。

表 7.2: 算術幾何平均による $\log 10$ の計算

1st approx:	114.97271 06086 72034 23140 98508 19871 45393 24077 85214 26300 62896 77326 20942 20637 86526 58216 71590 88923 54341 50124
2nd approx:	102.40635 59755 24728 67183 45154 34264 86543 87745 77523 18957 47656 98665 25748 67433 28600 97615 12108 98815 83878 01728
3rd approx:	77.35366 79985 13418 69565 99443 42188 55138 06491 44018 82305 46368 78168 65845 98508 03386 64830 26770 10981 75996 12676
4th approx:	34.58105 34369 61348 05834 01539 96846 64058 95895 56491 21766 39892 47316 34572 96101 65046 62770 81816 93449 60149 38388
5th approx:	5.47216 24783 05331 73359 86589 15915 16442 68351 22267 16010 84186 30785 64229 83996 77181 41194 38649 95413 63079 92587
6th approx:	2.32342 22728 69474 67800 00319 54796 70530 79493 24040 34163 81978 88404 27331 10197 58714 95480 18055 33062 65547 52650
7th approx:	2.30258 59599 46691 59061 21455 18873 87510 61446 02809 90675 20039 38791 05940 69415 86319 22965 12561 16644 50145 11879
8th approx:	2.30258 50929 94047 18439 31242 52553 20571 46814 63890 86847 06299 91861 61337 23243 16322 44784 92464 63936 50373 28028
9th approx:	2.30258 50929 94045 68401 79914 54684 36870 13501 45658 68434 89733 46556 40326 34076 17766 92141 32949 03230 86321 58875
10th approx:	2.30258 50929 94045 68401 79914 54684 36420 76011 01488 62877 29760 33327 90096 76129 20970 57768 27926 31419 81290 87632
11th approx:	2.30258 50929 94045 68401 79914 54684 36420 76011 01488 62877 29760 33327 90096 75726 09677 35248 02359 97205 08959 82983