

## 第7章 数値計算への応用

楕円関数は、長大桁の数値演算にいくつか応用される。そのうちの有名な例は、円周率の演算である。円周率の計算は、前章で紹介したルジャンドルの関係式を応用している。ルジャンドルの関係式は円周率と完全楕円積分との関係を記述した数式である。完全楕円積分は算術幾何平均を用いると2次収束を示すため、長大桁の計算に適している。そのように、完全楕円積分と関係づけることによって長大桁の演算を高速化することが可能になるのである。

### 7.1 ガウス・ルジャンドル法による円周率計算

ガウス・ルジャンドル法は、1976年にサラミンとブレントは独立に提案した円周率計算のアルゴリズムである。その方法が提案されるまで、円周率計算は逆正接関数のマクローリン級数展開を利用したアルゴリズムが主流であった。そのアルゴリズムは、簡単な演算で実装できる反面、計算桁数  $N$  に対して、 $N^2$  に比例する演算量が必要であるため、1980年代には円周率計算が行き詰まりを生じていた。ガウスルジャンドル法は、計算桁数  $N$  に対して、 $N \log N$  程度の演算量となるため、その後の計算桁数を大幅に拡大した手法である。

#### 7.1.1 ルジャンドルの関係式

ガウス・ルジャンドル法は楕円積分におけるルジャンドルの関係式を利用したアルゴリズムである。ルジャンドルの関係式は、前章で導出したとおり、

$$K(k')E(k) + K(k)E(k') - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2}, \quad (7.1)$$

なる関係式である。前章では、 $K(k)$  や  $K(k')$  の代わりに、略記法  $K$  や  $K'$  を用いていた。ここでは、楕円積分が母数  $k$  に依存することを強調する意味で、略記法を用いないことにする。

ルジャンドルの関係式は、前章でシグマ関数を用いて証明をしたが、ここでは、直接的な

アプローチで再度, ルジャンドルの関係式を証明しておこう。第2章で, 第1種楕円積分が,

$$\frac{d}{dk} \left( k k'^2 \frac{dK}{dk} \right) = kK, \quad (7.2)$$

を満足することを示した。この微分方程式は,  $k$  を  $k'$  に置き換えても成立する。すなわち,

$$\frac{d}{dk'} \left( k' k^2 \frac{dK}{dk'} \right) = k'K, \quad (7.3)$$

が成立するのだ。この事実を示すため, 数式を変形すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left( k k'^2 \frac{dK}{dk} \right) &= \frac{dk'}{dk} \frac{d}{dk'} \left( k k'^2 \frac{dk'}{dk} \frac{dK}{dk'} \right) \\ &= -\frac{k}{k'} \frac{d}{dk'} \left( -k k'^2 \frac{k}{k'} \frac{dK}{dk'} \right) = \frac{k}{k'} \frac{d}{dk'} \left( k' k^2 \frac{dK}{dk'} \right), \end{aligned}$$

が得られるのだが, この数式の右辺は  $kK$  に等しいはずだ。したがって,

$$\frac{d}{dk'} \left( k' k^2 \frac{dK}{dk'} \right) = k'K,$$

が成立するというわけだ。この数式の  $k$  と  $k'$  を入れ替えると,

$$\frac{d}{dk} \left( k k'^2 \frac{dK'}{dk} \right) = kK'(k), \quad (7.4)$$

が得られる。ここで,  $K'(k)$  は  $K'(k) \equiv K(k')$  なる楕円補積分と呼ばれる関数である。

続いて,  $G(k) \equiv \sqrt{k(1-k^2)} K(k)$  なる関数を定義しよう。また,  $G(k)$  の補助関数として,

$G(k) \equiv \sqrt{k(1-k^2)} K'(k)$  も定義しておく。関数  $G(k)$  の2階微分を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2G}{dk^2} &= \sqrt{k(1-k^2)} \frac{d^2K}{dk^2} + \frac{1-2k^2}{\sqrt{k(1-k^2)}} \frac{dK}{dk} + \frac{3k^4-6k^2-1}{4[k(1-k^2)]^{3/2}} K \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(1-k^2)}} \left[ k(1-k^2) \frac{d^2K}{dk^2} + (1-3k^2) \frac{dK}{dk} + \frac{3k^4-6k^2-1}{4k(1-k^2)} K \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(1-k^2)}} \left[ \frac{d}{dk} \left( k(1-k^2) \frac{dK}{dk} \right) + \frac{3k^4-6k^2-1}{4k(1-k^2)} K \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(1-k^2)}} \left[ kK + \frac{3k^4-6k^2-1}{4k(1-k^2)} K \right] = -\frac{1}{\sqrt{k(1-k^2)}} \frac{1+k^2}{4k(1-k^2)} K(k) \\ &= -\frac{1+k^2}{4k^2(1-k^2)^2} G(k), \end{aligned}$$

が得られる。導出過程において, 第4行目への変形は(7.2)を利用した。先ほど示した公式(7.4)に注意すると,  $K(k)$  を  $K'(k)$  に置き換えても, 同一の導出過程を経て, 同一の結果が得られる。したがって,

$$\frac{1}{G(k)} \frac{d^2G}{dk^2} = \frac{1}{G'(k)} \frac{d^2G'}{dk^2} = -\frac{1+k^2}{4k^2(1-k^2)^2}, \quad (7.5)$$

が成立するはずだ。この関係式は,

$$G'(k) \frac{d^2 G}{dk^2} - G(k) \frac{d^2 G'}{dk^2} = 0$$

と書き換えてもよい。関数  $G(k)$  と  $G'(k)$  を定義に基づいて展開すると,

$$\sqrt{k(1-k^2)} K'(k) \frac{dK}{dk} - \sqrt{k(1-k^2)} K(k) \frac{dK'}{dk} = 0,$$

のように書き換えられる。部分積分を利用して両辺を  $k$  について積分すると,

$$k(1-k^2) \left[ K(k) \frac{dK'}{dk} - K'(k) \frac{dK}{dk} \right] = C,$$

が得られえる。ここで,  $C$  は任意の積分定数である。この数式の左辺に,

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dk} &= \frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)}, \\ \frac{dK'}{dk} &= \frac{d}{dk} K(k') = -\frac{k}{k'} \frac{E(k') - k^2 K(k')}{k'k^2} = -\frac{E'(k) - k^2 K'(k)}{k(1-k^2)}, \end{aligned}$$

を代入すると,

$$K(k)E'(k) + K'(k)E(k) - K(k)K'(k) = -C,$$

が得られる。つまり, この数式の左辺は定数になるということだ。その定数の正体をつかむには,  $k$  に具体的な値を代入してみればよい。例えば,  $E(0) = K(0) = \pi/2$  を利用するために  $k = 0$  を代入すると,

$$\begin{aligned} &K(0)E'(0) + K'(0)E(0) - K(0)K'(0) \\ &= \frac{\pi}{2} (K'(0) - K'(0)) + K(0)E'(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

となる。正しい結果が得られたように見えるが, この計算は誤りである。なぜなら, 左辺の第2項目と第3項目を上の数式では  $(\pi/2)(K'(0) - K'(0))$  のように変形しているが,  $K'(0)(E(0) - K(0))$  のようにも変形できるからだ。このように変形すると, この部分を短絡的にゼロすべきでない気がしないか? 確かに,  $E(0) - K(0)$  はゼロであるが,  $K'(0) = K(1)$  は無限大に発散するのだ。積  $K'(0)(E(0) - K(0))$  がどのような値になるかは,  $k \rightarrow 0$  の極限で考えるべきである。母数  $k$  が十分に小さいとき, 第1章で示した完全楕円積分のテイラー級数に注意すると,

$$E(k) - K(k) \simeq -\frac{\pi}{2} k^2 \quad (k \ll 1),$$

が成立する。仮に,  $K'(k)$  が  $k = 0$  の近傍で  $k^{-2}$  と同等, もしくは, それより早く発散するならば, 積  $K'(0)(E(0) - K(0))$  はゼロにならない。本章の後で導出する漸近展開を前借りすると,

$$K'(k) \simeq -\log \frac{k}{4} \quad (k \ll 1),$$

が成立する。対数は  $k^{-2}$  よりも遅く発散するので、

$$\lim_{k \rightarrow 0} K'(k) (E(k) - K(k)) = 0,$$

となる。対数の発散速度は、任意の指数  $a > 0$  に対して、 $k^{-a}$  より遅いので、 $k = 0$  の近傍で  $K'(k) (E(k) - K(k))$  は、ほぼ  $k^2$  に比例すると考えてよい。その事実を図 7.1 に示そう。このグラフから、 $k = 0$  の近傍で  $K'(k) (E(k) - K(k))$  でほぼ  $k^2$  に比例することが確認で

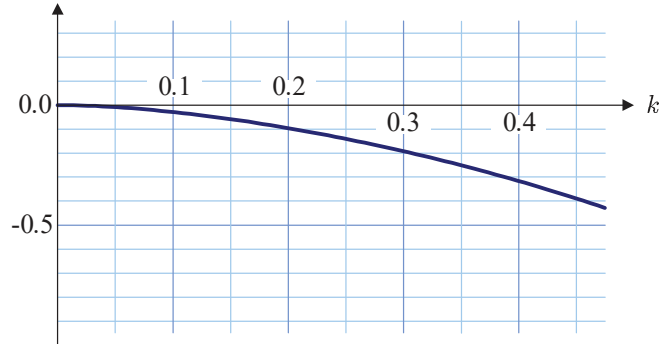


図 7.1: 関数  $K'(k) (E(k) - K(k))$  の振る舞い

きる。したがって、 $k \rightarrow 0$  の極限で  $K'(k) (E(k) - K(k)) \rightarrow 0$  であることが視覚的にも示せた。したがって、

$$K(k)E'(k) + K'(k)E(k) - K(k)K'(k) = \frac{\pi}{2},$$

が成立するのだ。その数式は、

$$K(k)E(k') + K(k')E(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2},$$

と書き直してもよい。したがって、ルジャンドルの関係式が証明できた。¶

**特殊な例** ルジャンドルの関係式において、 $k = \sqrt{1/2}$  を代入しよう。そのとき、補母数は  $k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1/2}$  であるので、ルジャンドルの関係式は、

$$K(\sqrt{1/2}) [2E(\sqrt{1/2}) - K(\sqrt{1/2})] = \frac{\pi}{2},$$

のように書くことができる。この関係式を、

$$K(\sqrt{1/2})^2 \left[ \frac{2E(\sqrt{1/2})}{K(\sqrt{1/2})} - 1 \right] = \frac{\pi}{2}, \quad (7.6)$$

のように変形しておく、この先の取り扱いに都合がよい。この形に変形すれば、左辺は第1章で取り扱ったランデン変換を利用して計算できるのである。

### 7.1.2 ランデン変換

第1章で説明したように、ランデン変換は楕円積分を計算するための便利な手法である。ランデン変換を利用すると、完全楕円積分は次のように計算できる。

補母数  $k'$  ( $=\sqrt{1-k^2}$ ) を,  $k' \equiv b_0/a_0$  となるような実数  $a_0$  と  $b_0$  を決める。さらに、漸化式:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

によって数列  $a_n$  と  $b_n$  を定義する。つまり,  $a_n$  は前項の算術平均,  $b_n$  は前項の幾何平均である。そのとき, 完全楕円関数は,

$$K(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi a_0}{2a_n}, \quad \frac{E(k)}{K(k)} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j-1} \frac{a_j^2 - b_j^2}{a_0^2},$$

によって計算できることは第1章に示したとおりである。これらの式をルジャンドルの関係式(7.6)に適用するにあたり,  $k' = \sqrt{1/2}$  の意味で,  $a_0 = 1, b_0 = \sqrt{1/2}$  とする。その結果, ルジャンドルの関係式は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{4a_n^2} \left[ 1 - \sum_{j=0}^n 2^j (a_j^2 - b_j^2) \right] = \frac{\pi}{2},$$

のように書くことができる。この数式を円周率  $\pi$  について解いて得られる公式:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n^2}{1 - \sum_{j=0}^n 2^j (a_j^2 - b_j^2)}, \quad (7.7)$$

がサラミンとブレントが導いたガウス・ルジャンドルの公式である。この公式の適用には、多倍長の四則演算と平方根計算のプログラム<sup>1</sup>が必要であるが、急速に円周率に収束するためガウス・ルジャンドルの公式が1980年代後半から使用され、円周率計算の桁数を飛躍的に更新してきた。

それでは、ガウスルジャンドル法によるアルゴリズムの収束速度を理論的に評価してみよう。収束速度の評価は、分子と分母を個別に評価する。

**分子の収束速度** ランデン変換による第1種楕円積分の計算精度は、算術幾何平均の収束速度に決定される。算術幾何平均の収束が速いのでランデン変換が楕円積分を計算する強力でツールであることがここでわかるはずである。まず,  $a_{n+1}$  と  $b_{n+1}$  の差を評価してみ

<sup>1</sup> コンピュータの演算桁は浮動小数点でも通常、16桁程度である。それを越える桁数の計算には、16桁程度の演算を組合せ、必要な桁数(1億桁など)を実現するための専用の演算プログラムが必要となる。

ると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_nb_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{4(a_{n+1} + b_{n+1})} \leq \frac{(a_n - b_n)^2}{8M(a, b)}, \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $M(a, b)$  は、初項  $a_0$  と  $b_0$  から始めた算術幾何平均を無限に繰り返した極限值を意味する。したがって、

$$\left| \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{M(a, b)} \right| \leq \frac{1}{8} \left| \frac{a_n - b_n}{M(a, b)} \right|^2, \quad (7.8)$$

が成り立つ。さらに、 $b_{n+1} \leq M(a, b)$  より  $a_{n+1} - b_{n+1} \geq a_{n+1} - M(a, b)$  が成り立ち、 $a_n + b_n \geq 2M(a, b)$  より  $a_n - b_n \leq 2(a_n - M(a, b))$  が導かれるので、

$$\left| \frac{a_{n+1} - M(a, b)}{M(a, b)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{a_n - M(a, b)}{M(a, b)} \right|^2, \quad (7.9)$$

を得る。すなわち、 $a_n$  は  $M(a, b)$  に向かって二次の収束をすることがわかる。二次の収束とは、反復を繰り返すたびに有効桁数が2倍に増加するような収束と考えればよい。

**分母の収束速度** ガウスルジャンドル法の分母の収束について調べるために、数列  $a_n^2 - b_n^2$  の収束速度について考察する。

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 &= \left( \frac{a_n - b_n}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} \right)^2 \leq \frac{1}{16} \left( \frac{a_n^2 - b_n^2}{M(a, b)} \right)^2. \end{aligned}$$

右辺の不等式は、 $a_{n+1} \geq M(a, b)$  であるので成立する。この関係式をもう少し整理すると、

$$\left| \frac{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}{M(a, b)^2} \right| \leq \frac{1}{16} \left| \frac{a_n^2 - b_n^2}{M(a, b)^2} \right|^2,$$

が得られる。この式の両辺に  $2^{n+1}$  を乗じると、

$$\left| \frac{2^{n+1}(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)}{M(a, b)^2} \right| \leq \frac{1}{8} \left| \frac{2^n(a_n^2 - b_n^2)}{M(a, b)^2} \right|^2, \quad (7.10)$$

となるので、分母を構成する級数の各項はゼロに向かって二次の収束をする。したがって、分母は二次の収束をする。

### 7.1.3 数値検証

紹介したガウス・ルジャンドル法の効果を示そう。ここまでに説明したガウス・ルジャンドル法の基本形をプログラミングして円周率を計算した結果を、小数点以下 100 桁<sup>2</sup>まで示す。なお、誤りがある桁から下位の桁を淡い文字で表している。初項 (第 0 項) では整数部さえ真値と一致しない。第 1 項で小数点第 1 位, 第 2 項で小数点第 3 位, 第 3 項で小数点第 9 位, 第 4 項で小数点第 20 位までのように, 真値と一致する桁数が項数を増加するたびに 2 倍以上になっている。第 7 項で有効数字は 100 桁を超えている。このように, ガウス・ルジャンドル法は優れた収束速度を示す。

```

0th approx: 4.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000
              00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000
1st approx:  3.18767 26427 12108 62720 19299 70525 36923 26510 53571 85936
              92264 87633 98627 51228 32528 12233 01147 28610 66016 17974
2nd approx:  3.14168 02932 97653 29391 80704 24560 00938 27957 19438 81540
              28326 44189 46319 56630 01010 25531 93888 89427 51526 46103
3rd approx:  3.14159 26538 95446 49600 29147 58818 04348 61088 79237 26131
              15896 51101 35768 46530 79503 08650 17740 97586 28986 31570
4th approx:  3.14159 26535 89793 23846 63606 02706 63132 17577 02411 34242
              93564 86846 01523 84109 48606 92775 82680 62200 73327 62130
5th approx:  3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69949 16472
              66058 34696 12594 87480 06095 32900 58518 51575 93171 01938
6th approx:  3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
              58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 46852 22865 41150
7th approx:  3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
              58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

```

ここで紹介したガウス・ルジャンドル法は基本形である。一般に使用される円周率計算アルゴリズムは, 初項の時点で数桁の有効数字を確保する改善が適用され, 繰り返し回数が減らせるように工夫されている。楕円関数を取り扱う本書の本質ではないが, (7.7) に簡単な工夫を施してみよう。基本形の公式に対して,  $a_0^2 - b_0^2 = 1/2$  であることに注意して数式変形すると, 公式 (7.7) は,

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_{n+1}^2}{1/2 - \sum_{j=0}^n 2^{j+1}(a_{j+1}^2 - b_{j+1}^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=0}^n 2^j(a_j - b_j)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{1 - \sum_{j=0}^n 2^j(a_j - b_j)^2}, \end{aligned}$$

のように変形される。なお, 第 1 行目の右辺の分母に関して,  $n \rightarrow \infty$  の極限で, 近似的に  $a_n = a_{n+1}$  であることを利用した。第 2 行目への変形に関して,  $a_{j+1} = (a_j + b_j)/2$  と

<sup>2</sup>これだけの桁数を計算するには, 多倍長演算の専用プログラムが必要となるが, 本書の本質ではないので, 説明を省略する。

$b_{j+1}^2 = a_j b_j$  であることを利用した。さらに、第2行目の右辺に関しては、 $n \rightarrow \infty$  の極限で、近似的に  $a_n = a_{n+1}$  と  $b_n = b_{n+1}$  であることを利用した。その新しい公式で計算すると、下に示す結果が得られる。この例では、初期状態で既に 3.14 まで正確である。その結果、5回反復しただけ精度は 100 桁を超えている。

```

0th approx: 3.14057 92505 22168 24831 13312 68975 82331 17734 40237 51294
             83356 43486 69334 55827 58034 90290 78272 87621 55276 69005
1st approx: 3.14159 26462 13542 28214 93444 31982 69577 43144 37223 34560
             27945 59539 48482 14347 67220 79526 46946 43448 91799 13058
2nd approx: 3.14159 26535 89793 23827 95127 74801 86397 43812 25504 83544
             69357 87330 70202 63821 37838 92739 90314 16942 04346 90584
3rd approx: 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 14678 28364
             89215 56617 10697 60267 64500 64306 17110 06577 72659 80684
4th approx: 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
             58209 74944 59230 78164 06286 20899 86256 28703 21167 20359
5th approx: 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
             58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

```

これに対して、逆正接関数のマクローリン級数を利用した公式は、計算する項数に比例して桁数が伸びる、いわゆる、一次の収束を示す程度である。マクローリン級数を利用した計算は、簡単な演算だけで記述できるのだが、計算桁が大きくなると計算時間が著しく伸びるのである。ガウス・ルジャンドルの公式は、多倍長変数の平方根などのプログラムが必要となり、小さい桁数の演算には非効率であるが、計算桁が大きくなるとマクローリン級数を利用した公式より計算時間が短くなる。

## 7.2 対数計算

楕円関数は対数計算にも利用できる。初等的な手法によると、対数はマクローリン級数を利用するのであるが、対数関数  $\log(1+x)$  のマクローリン級数は著しく収束が遅い。仮に、1億桁もの長大桁を計算するにはマクローリン級数は不向きである。これに対して、

$$K(k) \simeq -\log \frac{\sqrt{1-k^2}}{4},$$

なる漸近近似を利用するのである。本節では、この漸近近似を導出した後、漸近近似を利用した対数計算アルゴリズムについて考察する。



### 7.2.1 漸近展開

楕円積分の漸近展開を導出するのは、手順が多く、これまで取り扱ったルジャンドルの標準形では、取り扱いが不便である。ルジャンドルの標準形の代わりに、

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}}, \quad (7.11)$$

なる積分形式を取り扱うのがよい。この積分は、 $\xi^2 \equiv \lambda^2/(t+1)$  の置き換えによって、

$$\begin{aligned} R_F(1-\lambda^2, 1-k^2\lambda^2, 1) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+1-\lambda^2)(t+1-k^2\lambda^2)(t+1)}} \\ &= \frac{1}{2} \int_\lambda^0 \frac{-(2\lambda^2/\xi^3) d\xi}{\sqrt{(\lambda^2/\xi^2 - \lambda^2)(\lambda^2/\xi^2 - k^2\lambda^2)\lambda^2/\xi^2}} \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \end{aligned}$$

のように、ルジャンドルの標準形による不完全楕円積分に書き換えられるので好都合である。したがって、

$$F(k, \lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \lambda R_F(1-\lambda^2, 1-k^2\lambda^2, 1), \quad (7.12)$$

である。この関係式が成立するので、完全楕円積分の漸近展開を導出するために  $R_F(x, y, z)$  を取り扱うことにする。なお、改めて注釈しておく、不完全楕円積分の第1変数が母数である。これは、ヤコビの楕円関数の変数の順序と異なる。

これから導出する楕円関数の漸近近似は、母数  $k$  が1に近い完全楕円積分である。その結果を先に書いておくと、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2)}} \simeq \log \frac{4}{k'} \quad \text{where } k' = \sqrt{1-k^2}, \quad (7.13)$$

である。この関係式は即座に導出できるのでなく、いくつかのステップを要する。次項では準備段階としてメルン変換について説明する。漸近近似の導出には、メルン天海の知識があることが有利だからだ。

### 7.2.2 メルン変換

楕円積分の漸近展開を導出するにはメルン変換 (Mellin transform) を利用するのが便利である。メルン変換はラプラス変換の亜種ともいえる数学変換であり、関数  $f(t)$  が与えられたとき、

$$\{\mathcal{M}f\}(z) = \int_0^\infty t^{z-1} f(t) dt, \quad (7.14)$$

によって定義される。一般的に、変換変数  $z$  は複素数である。この数学変換がラプラス変換の亜種であることは、 $t \mapsto e^{-\xi}$  によって積分変数を置き換えると、

$$\{\mathcal{M}f\}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-\xi z} d\xi,$$

のように数式が書き換えられることからわかる。ここで、 $\hat{f}(\xi) \equiv f(e^{-\xi})$  である。書き換えられた数式は、両側ラプラス変換と呼ばれる数学変換である。さらに、 $z \equiv i\omega$  とおくと、メルン変換が明らかにフーリエ変換:

$$\{\mathcal{M}f\}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi,$$

と一致する。フーリエ逆変換によると関数  $\hat{f}(\xi)$  は、

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{M}f\}(z) e^{i\omega\xi} d\omega,$$

と書くことができるので、 $z = i\omega$  であることに注意すると、

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \{\mathcal{M}f\}(z) e^{\xi z} dz,$$

のように書き換えられる。さらに、 $t = e^{-\xi}$  であることに注意すると、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \{\mathcal{M}f\}(z) t^{-z} dz, \quad (7.15)$$

が得られる。この数式がメルン逆変換である。

メルン変換 (7.14) は、数式から明らかのように、あらゆる関数  $f(t)$  に対して積分が計算できるわけではない。関数  $f(x)$  が、

$$f(t) \sim \begin{cases} O(t^b) & \text{for } t \rightarrow +0, \\ O(t^{-a}) & \text{for } t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

のように漸近的に振る舞いと仮定しよう。この仮定のもとでは、 $a < \operatorname{Re} z < b$  のとき、メルン変換が特定の値に収束する。

### 7.2.3 メルン変換による関数解析

前項で紹介したメルン変換を活用し、関数の漸近的な性質を解析しよう。ここで対象とする関数は、

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} f(\lambda t) h(t) dt, \quad (7.16)$$

のように定義されているとする。ここで、関数  $f(t)$  と  $h(t)$  は、

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u} && \text{as } t \rightarrow +\infty, \\ h(t) &\sim \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1} && \text{as } t \rightarrow +0, \end{aligned}$$

のように漸近展開できるとする。この数式は無限級数でなく、 $n$  項までの展開にとどめている。なぜなら、無限項の漸近展開が収束するとは限らないからである。なお、これらの漸近形について、 $0 < u \leq 1$  と  $0 < v \leq 1$  であるとする。さらに、 $f(x)$  が  $t \rightarrow +0$  の極限で  $f(t) = O(t^b)$  のように振る舞い、 $h(t)$  が  $t \rightarrow +\infty$  の極限で  $h(t) = O(t^{-a})$  のように振る舞うとする。このとき、積分  $I(\lambda)$  が発散しないためには、 $u + b > 0$  と  $a + v > 1$  が条件となる。積分  $I(\lambda)$  を評価するには、関数  $f(t)$  と  $h(t)$  のメリン変換を利用するのが便利である。

関数  $f(t)$  のメリン変換は、積分範囲  $(0, \infty)$  を  $(0, 1]$  と  $(1, \infty)$  に分割すると、

$$\{\mathcal{M}f\}(z) = \int_0^1 t^{z-1} h(t) dt + \int_1^\infty t^{z-1} h(t) dt,$$

のように書くことができる。第1の積分は  $\operatorname{Re} z > -b$  で解析的であり、第2の積分は  $\operatorname{Re} z < v$  で解析的である。第2の積分を解析接続することによって、メリン変換  $\{\mathcal{M}f\}(z)$  は半複素平面  $\operatorname{Re} z > -b$  全体で解析的にできる。そのために、 $n$  項による漸近展開の誤差:

$$f_n(t) \equiv f(t) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u},$$

を定義しよう。この誤差を用いて、

$$\varphi_n(t) \equiv \begin{cases} f(t) & 0 < t < 1, \\ f_n(t) & 1 \leq t < \infty, \end{cases}$$

なる関数を定義する。新たに定義された関数を用いてメリン変換  $\{\mathcal{M}f\}(z)$  を計算すると、

$$\begin{aligned} \{\mathcal{M}f\}(z) &= \int_0^1 t^{z-1} h(t) dt + \int_1^\infty t^{z-1} h(t) dt \\ &= \int_0^1 t^{z-1} h(t) dt + \int_1^\infty t^{z-1} \left( f_n(t) + \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u} \right) dt \\ &= \{\mathcal{M}\varphi_n\}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{a_m}{z - m - u}, \end{aligned} \tag{7.17}$$

が得られる。

関数  $h(t)$  のメリン変換も同様に考察できる。関数  $h(t)$  が  $t \rightarrow \infty$  の極限で  $h(t) = O(t^{-a})$  のように振る舞うなら、区間  $(0, 1)$  の積分は  $\operatorname{Re} z < v$  で解析的であり、区間  $[1, \infty)$  の積分は

$\operatorname{Re} z > 1 - a$  で解析的である。解析接続によって、 $\{\mathcal{M}h\}(z)$  も半複素平面  $\operatorname{Re} z > 1 - a$  にわたって解析的にできる。関数  $h(t)$  についても同様に、 $n$  項の漸近展開の漸近展開の誤差:

$$h_n(t) = h(t) - \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1},$$

を定義する。続いて、

$$\eta_n(t) = \begin{cases} h_n(t) & 0 < t < 1, \\ h(t) & 1 \leq t < \infty, \end{cases}$$

なる関数を定義する。メルン変換  $\{\mathcal{M}h\}(z)$  の計算に、新たに定義した  $\eta_n(t)$  を用いて記述すると、

$$\begin{aligned} \{\mathcal{M}h\}(1-z) &= \int_0^1 t^{-z} h(t) dt + \int_1^\infty t^{-z} h(t) dz \\ &= \int_0^1 t^{-z} \left( h_n(t) + \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1} \right) dt + \int_1^\infty t^{-z} h(t) dt \\ &= \{\mathcal{M}\eta_n\}(1-z) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{b_m}{m+v-z}, \end{aligned}$$

が得られる。二つのメルン変換  $\{\mathcal{M}f\}(z)$  と  $\{\mathcal{M}h\}(1-z)$  の関係を利用すると、次の段落に示すウォングの定理によって、積分  $I(\lambda)$  をメルン変換を含む記述で表現できる。

**ウォングの定理** 関数  $f(t)$  と  $h(t)$  は先ほど定義した関数である。そのとき、自然数  $n$  に対して、

$$I(\lambda) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{n-1} a_m \{\mathcal{M}h\}(1-m-u) \lambda^{-m-u} \\ \quad + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \{\mathcal{M}f\}(m+v) \lambda^{-m-v} + \delta_n(\lambda) & (u \neq v), \\ \sum_{m=0}^{n-1} c_m(u) \lambda^{-m-u} + \log \lambda \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_m \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda) & (u = v), \end{cases} \quad (7.18)$$

が成立する。条件  $u = v$  の公式において、対数  $\log$  の変数は  $\lambda$  のみであり、後続の総和は含まない。また、

$$c_m = b_m \{\mathcal{M}\varphi_n\}(m+u) + a_m \{\mathcal{M}\eta_n\}(1-m-u) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \frac{a_m b_j + a_j b_m}{m-j},$$

である。さらに、 $\delta_n(\lambda)$  は剰余項であり、

$$\delta_n(\lambda) = \int_0^1 f_n(\lambda t) h_n(t) dt,$$

によって与えられる。

**証明** 計算すべき積分を  $I(\lambda) \equiv I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$  のように分割する。ここで、 $I_1$  と  $I_2$  は、それぞれ、区間  $[0, 1)$  と  $[1, \infty)$  での積分であるとする。剰余項も同様に、 $\delta_n(\lambda) = \delta_{n1}(\lambda) + \delta_{n2}(\lambda)$  のように分割しておく。積分  $I(\lambda)$  を計算するための被積分関数は、

$$\begin{aligned} f(\lambda t) h(t) &= f(\lambda t) h(t) - f(\lambda t) h_n(t) + f(\lambda t) h_n(t) - f_n(\lambda t) h_n(t) + f_n(\lambda t) h_n(t) \\ &= f(\lambda t) \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1} + h_n(t) \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u} + f_n(\lambda t) h_n(t), \end{aligned} \quad (7.19a)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda t) h(t) &= f(\lambda t) h(t) - f_n(\lambda t) h(t) + f_n(\lambda t) h(t) - f_n(\lambda t) h_n(t) + f_n(\lambda t) h_n(t) \\ &= h(t) \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^{-m-u} + f_n(\lambda t) \sum_{m=0}^{n-1} b_m t^{m+v-1} + f_n(\lambda t) h_n(t), \end{aligned} \quad (7.19b)$$

のように変形できる。これら2種類の変形方法のうち、(7.19a)を  $I_1$  に、(7.19b)を  $I_2$  に代入すると、

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} b_m \int_0^1 t^{m+v-1} f(\lambda t) dt + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \lambda^{-m-u} \int_0^1 t^{-m-u} h_n(t) dt + \delta_{n1}(\lambda), \\ I_2(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} a_m \lambda^{-m-u} \int_1^\infty t^{-m-u} h(t) dt + \sum_{m=0}^{n-1} b_m \int_1^\infty t^{m+v-1} f_n(\lambda t) dt + \delta_{n2}(\lambda), \end{aligned}$$

が得られる。ここで、関数  $\eta_m(t)$  の定義に注意しながら  $I_1(\lambda)$  と  $I_2(\lambda)$  を加算すると、

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} b_m \left[ \int_0^1 t^{m+v-1} f(\lambda t) dt + \int_1^\infty t^{m+v-1} f_n(\lambda t) dt \right] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \{ \mathcal{M}\eta_m \} (1-m-u) \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda), \end{aligned} \quad (7.20)$$

が得られる。この数式変形において、 $f$  と  $f_n$  を含む積分が  $\varphi_n$  のメリン変換の形にまとめられないのは、因数  $\lambda$  が邪魔をしているからだ。とはいえ、 $\tau \equiv \lambda t$  とおいて積分を実行すると、ブラケット内部の数式は、

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{m+v-1} f(\lambda t) dt + \int_1^\infty t^{m+v-1} f_n(\lambda t) dt \\ &= \lambda^{-m-v} \left[ \int_0^\lambda \tau^{m+v-1} f(\tau) d\tau + \int_\lambda^1 \tau^{m+v-1} f_n(\tau) d\tau \right] \\ &= \lambda^{-m-v} \left[ \left( \int_0^1 + \int_1^\lambda \right) \tau^{m+v-1} f(\tau) d\tau + \left( \int_1^\infty - \int_1^\lambda \right) \tau^{m+v-1} f_n(\tau) d\tau \right] \\ &= \lambda^{-m-v} \{ \mathcal{M}\varphi_n \} (m+v) + \lambda^{-m-v} \int_1^\lambda \tau^{m+v-1} (f(\tau) - f_n(\tau)) d\tau \\ &= \lambda^{-m-v} \{ \mathcal{M}\varphi_n \} (m+v) + \lambda^{-m-v} \int_1^\lambda \tau^{m+v-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \tau^{-j-u} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{-m-v} \{\mathcal{M}\varphi_n\}(m+v) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j \lambda^{-j-u}}{m+v-j-u} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j \lambda^{-m-v}}{m+v-j-u} \\
&= \lambda^{-m-v} \{\mathcal{M}f\}(m+v) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j \lambda^{-j-u}}{m+v-j-u}, \tag{7.21}
\end{aligned}$$

のように変形できる。第3行目への数式変形は、 $\lambda > 1$ を想定しているように見えるかもしれないが、 $\lambda \leq 1$ でも成立する。最終行への数式変形には、(7.17)を利用した。この数式は、 $n \neq v$ のときしか有効でない。なぜなら、 $u = v$ ならば $m = j$ のとき第2項と第3項の分母がゼロになるからである。この結果を(7.20)に代入すると、

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} b_m \{\mathcal{M}f\}(m+v) \lambda^{-m-v} + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_m b_j}{j+v-m-u} \lambda^{-m-u} \\
&\quad + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \{\mathcal{M}\eta_n\}(1-m-u) \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda),
\end{aligned}$$

が得られる。この数式の右辺の第2項と第3項に(7.18)を適用すると、積分 $I(\lambda)$ は、

$$I(\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} b_m \{\mathcal{M}f\}(m+v) \lambda^{-m-v} + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \{\mathcal{M}h\}(1-m-u) \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda),$$

のように変形される。導出過程で述べたように、この関係式は $u \neq v$ でしか成立できない。その理由は、 $u = v$ のとき、(7.21)が計算できないからである。正確にいうと、(7.21)の計算過程の最後から2行目について、 $m = j$ の要素を取り出すと、 $(\lambda^{-u} - \lambda^{-v})/(v-u)$ が含まれている。この要素が $u = v$ のときに計算できないのである。直接計算する代わりに、 $v \rightarrow u$ の極限をとると、

$$\lim_{v \rightarrow u} \frac{\lambda^{-u} - \lambda^{-v}}{v-u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1 - \lambda^{-\Delta u}}{\Delta u} \lambda^{-u} = \lambda^{-u} \frac{\lambda^{\Delta u} - 1}{\Delta u} = \lambda^{-u} \log \lambda,$$

が得られる。この極限計算は、 $\lambda^{-u}$ の微分公式そのものである。得られた極限を代入すると、(7.21)は、

$$\begin{aligned}
\text{RHS of (7.21)} &= \lambda^{-m-u} \{\mathcal{M}\varphi_n\}(m+u) \\
&\quad + a_m \lambda^{-m-u} \log \lambda + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \frac{a_j (\lambda^{-j-u} - \lambda^{-m-u})}{m-j},
\end{aligned}$$

となる。この数式は(7.20)のブラケットの中だから、(7.20)に代入すると、

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \sum_{m=0}^{n-1} \left[ b_m \{\mathcal{M}\varphi_n\}(m+u) + a_m \{\mathcal{M}\eta_n\}(1-m-u) \right] \lambda^{-m-u} \\
&\quad + \log \lambda \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_m \lambda^{-m-u} + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \left( \frac{a_j b_m \lambda^{-j-u}}{m-j} - \frac{a_j b_m \lambda^{-m-u}}{m-j} \right) + \delta_n(\lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left[ b_m \{ \mathcal{M} \varphi_n \} (m+u) + a_m \{ \mathcal{M} \eta_n \} (1-m-u) \right] \lambda^{-m-u} \\
&\quad + \log \lambda \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_m \lambda^{-m-u} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{n-1} \frac{a_m b_j \lambda^{-m-u}}{j-m} - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \frac{a_j b_m \lambda^{-m-u}}{m-j} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} c_m(u) \lambda^{-m-u} + \log \lambda \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_m b_m \lambda^{-m-u} + \delta_n(\lambda),
\end{aligned}$$

が得られる。ただし,

$$c_m(u) = b_m \{ \mathcal{M} \varphi_n \} (m+u) + a_m \{ \mathcal{M} \eta_n \} (1-m-u) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{n-1} \frac{a_m b_j + a_j b_m}{m-j},$$

とおいた。したがって, (7.18) が成立することが示された。◻

## 7.2.4 漸近展開

前節で導出した公式を用いて楕円積分の漸近展開を導出できる。第1種楕円積分を (7.11) の形で表現した場合, 楕円積分  $R_F(x, y, z)$  は,

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \log \frac{4\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + r, \quad (7.22)$$

なる漸近形式で表現できる。ただし,  $r$  は誤差項であり,

$$0 < r < \frac{x+y}{8z^{3/2}} \left[ \log \left( 1 + \frac{4z}{x+y} \right) + 1 \right],$$

を満たす。本節では, この漸近形式を証明する。

**証明** 積分  $R_F(x, y, z)$  を評価するため,  $\tau \equiv 1/t$  の置き換えを適用する。その置き換えによって,  $R_F(x, y, z)$  は,

$$\begin{aligned}
R_F(x, y, z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1+x\tau)(1+y\tau)(1+z\tau)}},
\end{aligned}$$

のように書き換えられる。この積分形式は,

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+zt}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}} dt,$$

なる形式で書いてもよい。この形式は、前節で紹介したウォングの定理を適用できる形式である。具体的には、

$$f(zt) = \frac{1}{\sqrt{1+zt}}, \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}},$$

とにおいてウォングの定理を適用するのだ。なお、ウォングの定理で用いていたパラメータ  $\lambda$  は、この数式では  $z$  である。ウォングの定理を適用するにあたり、関数  $f(t)$  と  $h(t)$  を、

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{1}{2t}\right), & \text{as } t \rightarrow +\infty, \\ h(t) &\sim \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{x+y}{2}t\right), & \text{as } t \rightarrow +0, \end{aligned}$$

のように漸近展開する。前節で記述した  $f(t)$  と  $g(t)$  の定義によると、この例は  $u = v = 1/2$  であるので、ウォングの定理において  $u$  と  $v$  が等しい場合の公式を利用すればよい。改めて関数  $f(t)$  と  $h(t)$  の漸近展開の係数を書き出すと、

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= -\frac{x+y}{2}, \\ b_0 &= 1, & b_1 &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

である。関数  $f(t)$  が  $t \rightarrow +0$  の極限で  $O(1)$  として、 $h(t)$  が  $t \rightarrow +\infty$  の極限で  $O(t^{-3/2})$  として振る舞うことに注目すると、

$$u + b = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} > 0, \quad a + v = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 > 0,$$

となるので、積分  $R_F(x, y, z)$  が発散しないことがわかる。

粗い近似に思えるかもしれないが、1項のみの漸近展開で積分  $R_F(x, y, z)$  を評価すると、

$$\begin{aligned} R_F(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{c_0(1/2)}{\sqrt{z}} + \frac{\log z}{\sqrt{z}} + \delta_1(z) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{c_0(1/2)}{\sqrt{z}} + \frac{\log \sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2} \delta_1(z), \end{aligned} \quad (7.23)$$

となるはずである。具体的な積分結果を得るには、係数  $c_0(1/2)$  と  $\delta_1(z)$  を計算する必要がある。それらの値を計算するために、関数  $\varphi_1(t)$  と  $\eta_1(t)$  を定義しておく。その関数は表 7.1 のようになる。表に記載した関数を参照すると、係数  $c_0(1/2)$  は、

$$\begin{aligned} c_0(1/2) &= \{\mathcal{M}\eta_0\}(1/2) + \{\mathcal{M}\varphi_0\}(1/2) = \{\mathcal{M}(\eta_0 + \varphi_0)\}(1/2) \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{\sqrt{1+t}} + \frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{\sqrt{t(1+t)}} + \frac{1}{t\sqrt{1+(x+t)t+xyt^2}} - \frac{1}{t} \right) dt, \end{aligned}$$



表 7.1: 漸近展開の評価のための関数定義

条件	$\varphi_1(t)$	$\eta_1(t)$
$0 < t < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+t}}$	$\frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}} - \frac{1}{\sqrt{t}}$
$t \geq 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}}$

なる数式で計算できる。この積分は初頭関数を用いて解析的に不定積分を実行できる。第1と第2の被積分関数の不定積分は、

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(t+1)}} = \log \left( \sqrt{t(t+1)} + t + \frac{1}{2} \right),$$

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} = -\log \left( \frac{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}}{t} + \frac{1}{t} + \frac{x+y}{2} \right),$$

となる。導出を試みる読者のために、導出のヒントを与えておこう。第1の積分は、 $t+1/2 \equiv \cosh u/2$  で置き換えれば導出できる。第2の積分は、 $t \equiv 1/u$  で置き換えれば第1の積分と同型のなる。積分計算にあたり、積分区間  $(0, \infty)$  を第1の積分、第2の積分、第3の積分のように個別に適用すると積分結果が発散してしまう。積分区間を  $(\epsilon, R)$  として、第1から第3の積分を一度に実行し、 $\epsilon \rightarrow 0$  と  $R \rightarrow \infty$  の極限をとれば、積分が有限値になる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} c_0(1/2) &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \log \left( \sqrt{t(t+1)} + t + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \log \left( \frac{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}}{t} + \frac{1}{t} + \frac{x+y}{2} \right) - \log t \right]_{\epsilon}^R \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \left( \log 2R - \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{2} - \log R \right) - \left( \log \frac{1}{2} - \log \frac{2}{\epsilon} - \log \epsilon \right) \right] \\ &= -\log \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{16} = 2 \log \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, \end{aligned}$$

が得られる。この結果を (7.23) 代入すると、

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \log \frac{4\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\delta_1(z)}{2}, \quad (7.24)$$

が得られる。この数式の解釈は、右辺の第1項が近似式、剰余項である第2項が誤差である。近似精度を見積もるために剰余項  $\delta_1(z)/2$  を評価しよう。剰余項は  $f(z)$  と  $h(t)$  の漸近展開の誤差を用いて計算する。漸近展開の誤差は、

$$f_1(zt) = \frac{1}{\sqrt{1+zt}} - \frac{1}{\sqrt{zt}}, \quad h_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1+xt)(1+yt)}} - \frac{1}{\sqrt{t}},$$

である。これらを用いると剰余項は,

$$\begin{aligned} r &= \frac{\delta_1(z)}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty f_1(z t) h(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} \right) dt, \end{aligned} \quad (7.25)$$

となるのだが, 残念ながら, この積分は解析的に計算できない。しかし, 剰余項は大きさの感覚をつかめればよいので, 厳密に計算する代わりに, 解析的に計算できる関数を用いて不等式で大きさがわかるように計算を進める。

剰余項 (7.25) の被積分関数のうち, 因子  $1 - (1 - 1/z t)^{-1/2}$  を取り出して計算すると,

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} = \frac{\sqrt{1+1/z t} - 1}{\sqrt{1+1/z t}} = \frac{w}{\sqrt{1+1/z t} (\sqrt{1+1/z t} + 1)}, \quad (7.26)$$

となる。右辺を得るため, 分子と分母に  $\sqrt{1+1/z t} + 1$  を乗じた。この数式の分母が,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{z t}} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{z t}} + 1 \right) > 1 + \frac{1}{z t} + 1 = 2 + \frac{1}{z t},$$

なる不等式を満たすことに注意しておこう。積分変数  $t$  に関する積分区間が  $(0, \infty)$  であるから  $z t$  が正であるはずなので, (7.26) は正である。したがって,

$$0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} < \frac{1}{1+2z t}, \quad (7.27)$$

なる不等式が成立する。とはいえ,  $t \gg 1$  の場合, 不等式の右辺を  $1/2z t$  と置き換えてもよい。すなわち,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} &< \frac{1}{2z t} && \text{for } t \gg 1, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/z t}} &< \frac{1}{1+2z t} && \text{otherwise,} \end{aligned}$$

と書いておこう。剰余項 (7.25) に含まれる因子  $1 - [1 + (x+y)t + xyt^2]^{-1/2}$  についても同様に,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} &< 1 && \text{for } t \gg 1, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} &< \frac{(x+y)t}{2} && \text{otherwise,} \end{aligned}$$

と書くことができる。これらのうち, 第1の不等式は明らかである。第2の不等式は, 算術平均と幾何平均の関係  $xy \leq (x+y)^2/4$  を用いて導出される。具体的に導出すると,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+xyt^2}} &\leq 1 - \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)t+(x+y)^2t^2/4}} \\ &= 1 - \frac{1}{1+(x+y)t/2} < 1 - \left( 1 - \frac{(x+y)t}{2} \right) = \frac{(x+y)t}{2}, \end{aligned}$$

となる。これで、剰余項を評価するための材料がそろった。

剰余項を評価するにあたり、 $t \gg 1$  とそれ以外の2種類に分け、計算するための要素を準備した。そこで、 $t \gg 1$  とそれ以外を分ける境界を  $t = \xi$  と設定し、剰余項を計算しよう。積分計算すると、

$$\begin{aligned} r &< \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^\xi \frac{x+y}{2} \frac{1}{1+2zt} dt + \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_\xi^\infty \frac{1}{2zt^2} dt \\ &= \frac{1}{4z^{-3/2}} \left( \frac{x+y}{2} \log(1+2z\xi) + \frac{1}{\xi} \right), \end{aligned} \quad (7.28)$$

のように、当然であるが、見積もられた剰余項の大きさは境界  $\xi$  に依存する。そこで、剰余項の最大値を採用することにしよう。つまり、計算された剰余項を  $\xi$  で微分した導関数がゼロになる条件を求めるのだ。その条件は、

$$x+y = \frac{1}{z\xi^2} + \frac{2}{\xi},$$

であることがわかる。楕円積分  $R_F(x, y, z)$  を評価するにあたり、十分に大きな  $z$  を取り扱うことが多いので、 $\xi^{-2}$  の項を無視することになると、 $\xi = 2/(x+y)$  で剰余項の評価値が最大になる。したがって、剰余項は、

$$0 < r < \frac{x+y}{8z^{-3/2}} \left[ \log \left( 1 + \frac{4z}{x+y} \right) + 1 \right],$$

のように見積もられる。これで、楕円積分  $R_F(x, y, z)$  の漸近展開と、誤差を導出することができた。¶

### 7.2.5 対数計算への応用

ここまでの公式の導出は、そもそも、第1種楕円積分の漸近展開を得ることが目的であった。第1種の不完全楕円積分:

$$F(k, \lambda) \equiv \int_0^\lambda \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

は、前に述べたように、

$$F(k, \lambda) = \lambda R_F(1-\lambda^2, 1-\lambda^2k^2, 1),$$

の関係を満たす。この関係式から、第1種の不完全楕円積分は、

$$F(k, \lambda) = \lambda \log \frac{4}{\sqrt{1-\lambda^2} + \sqrt{1-\lambda^2k^2}} + r,$$

であり, 誤差項  $r$  は,

$$0 < r < \frac{2 - (1 + k^2)\lambda^2}{4} \left[ \log \left( 1 + \frac{4}{2 - (1 + k^2)\lambda^2} \right) + 1 \right],$$

のように書くことができる。特に,  $\lambda = 1$  とすれば完全楕円積分になるので, 完全楕円積分  $K(k)$  の漸近展開は,

$$K(k) = \log \frac{4}{k'} + r = -\log \frac{k'}{4} + r, \quad (7.29)$$

と書くことができる。そのとき, 誤差項は,

$$0 < r < \frac{k'^2}{4} \left[ \log \left( 1 + \frac{4}{k'^2} \right) + 1 \right], \quad (7.30)$$

のように評価できる。ただし,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  は補母数である。得られた漸近展開によって, 完全楕円積分が補母数  $k'$  の減少に伴い, 対数関数的に振る舞うことがわかる。誤差項 (7.30) のブラケットの中は,  $k'$  が十分に小さければ,  $K(k)$  に等しいので,

$$\left| \frac{K(k) + \log(k'/4)}{K(k)} \right| < \frac{k'^2}{4},$$

が成立する。その誤差をグラフに描くと図 7.2 のようになる。このグラフによると, 予想どおり, 誤差が  $k'^2/4$  より小さいことが示されている。

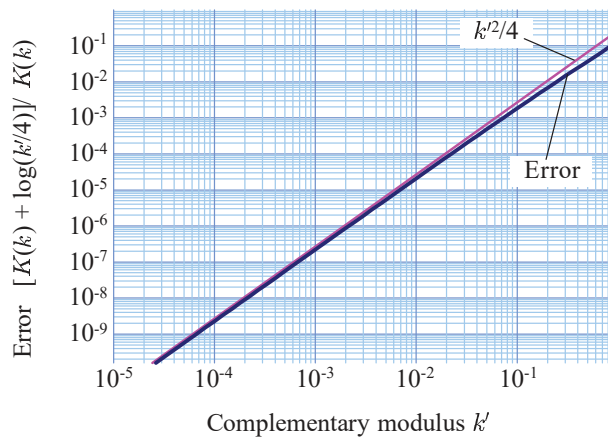


図 7.2: 完全楕円積分の漸近展開による誤差

完全楕円積分  $K(k)$  の漸近展開は, 対数計算に応用することができる。対数計算はマクローリン展開では非常に収束が遅い。それに比べ, 完全楕円積分は, ランデン変換を利用すると, 算術幾何平均を用いて 2 次収束するので, 桁数が多い計算には有利である。漸近展開 (7.29) を変形すると,

$$\log x \simeq -K(\sqrt{1 - 16x^2}) = \frac{\pi}{2M(1, 4x)},$$

のように書くことができる。ここで、 $M(1, 4x)$  は 1 と  $4x$  の算術平均と幾何平均を繰り返した極限值である。しかし、既を示したように、この近似式の精度が  $4x^2$  程度であるので、この手法で計算するには、十分に小さい  $x$  を選ばなければならない。そこで、任意の正の実数  $x$  が与えられたとき、 $2n$  ビットの演算精度で  $\log x$  計算するには次のアルゴリズムを用いる。

1. 変数  $x$  を  $y \leftarrow 2^{-m}x$  によって変換することで、 $y < 2^{-n-1}$  とできる最小の整数  $m$  を選ぶ。
2. 初期値として、 $a_0 \leftarrow (1 + 4y)/2$ ,  $b_0 \leftarrow 2\sqrt{y}$  を計算しておく。
3.  $a_{n+1} \leftarrow (a_n + b_n)/2$ ,  $b_{n+1} \leftarrow \sqrt{a_n b_n}$  によって、 $a$  と  $b$  の差が十分に小さくなるまで繰り返す。
4. 繰り返しを終えた時点で  $a_n$  と  $b_n$  は、算術幾何平均  $M(1, 4y)$  に十分近い値になっているはずである。出力値として、 $m \log 2 - \pi/(a_n + b_n)$  を計算する。この値が  $\log x$  の近似値である。なお、 $\pi$  と  $\log 2$  はあらかじめ十分な精度で準備されているものとする。

このアルゴリズムを検証するため、 $\log 10$  を小数点以下 100 桁まで計算しよう。演算の上での目標精度は 366 ビット (10 進数 110 桁) とする。この場合、 $x = 10$  とし、目標精度から  $m$  を定めると  $m = 184$  が算出された。算術幾何平均の繰り返しを実行しながら、各ステップで  $m \log 2 - \pi/2M(1, 4y)$  を出力すると、表 7.2 に示す結果が得られた。演算結果が間違っている桁以降は淡い文字で書いている。この結果によると、5 回の繰り返しまで、整数部さえも正しい値にならない。これは、 $y \ll 1$  であるため、算術幾何平均の途中経過が極限值から遠いからである。しかし、さすが算術幾何平均である。整数部が正しくなると、その後は精度が急速に伸びる。確かに、繰り返し 1 回ごとに有効桁が 2 倍以上に伸びているのが確認できる。結果として、11 回の繰り返しで 100 桁の計算精度が達成できた。なお、この計算は 110 桁の精度を狙っているので、さらに算術幾何平均を繰り返しても精度は改善しない。さらに多くの計算精度を得るためには、 $m$  を大きく設定しなければならない。

表 7.2: 算術幾何平均による  $\log 10$  の計算

1st approx:	114.97271 06086 72034 23140 98508 19871 45393 24077 85214 26300 62896 77326 20942 20637 86526 58216 71590 88923 54341 50124
2nd approx:	102.40635 59755 24728 67183 45154 34264 86543 87745 77523 18957 47656 98665 25748 67433 28600 97615 12108 98815 83878 01728
3rd approx:	77.35366 79985 13418 69565 99443 42188 55138 06491 44018 82305 46368 78168 65845 98508 03386 64830 26770 10981 75996 12676
4th approx:	34.58105 34369 61348 05834 01539 96846 64058 95895 56491 21766 39892 47316 34572 96101 65046 62770 81816 93449 60149 38388
5th approx:	5.47216 24783 05331 73359 86589 15915 16442 68351 22267 16010 84186 30785 64229 83996 77181 41194 38649 95413 63079 92587
6th approx:	2.32342 22728 69474 67800 00319 54796 70530 79493 24040 34163 81978 88404 27331 10197 58714 95480 18055 33062 65547 52650
7th approx:	2.30258 59599 46691 59061 21455 18873 87510 61446 02809 90675 20039 38791 05940 69415 86319 22965 12561 16644 50145 11879
8th approx:	2.30258 50929 94047 18439 31242 52553 20571 46814 63890 86847 06299 91861 61337 23243 16322 44784 92464 63936 50373 28028
9th approx:	2.30258 50929 94045 68401 79914 54684 36870 13501 45658 68434 89733 46556 40326 34076 17766 92141 32949 03230 86321 58875
10th approx:	2.30258 50929 94045 68401 79914 54684 36420 76011 01488 62877 29760 33327 90096 76129 20970 57768 27926 31419 81290 87632
11th approx:	2.30258 50929 94045 68401 79914 54684 36420 76011 01488 62877 29760 33327 90096 75726 09677 35248 02359 97205 08959 82983