# 第6章　テータ関数・シグマ関数の応用

前章までに, ヤコビの楕円関数を記述するためにテータ関数を, ワイエルシュトラスの楕円関数を記述するためにシグマ関数を導入した。しかし, 導入したそれらの関数の間の関係を調べれば, ヤコビの楕円関数をシグマ関数で表記することができる。同様に, ワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述, または, 楕円積分などのパラメータをテータ関数で記述することも可能である。本節では, そのようなテータ関数やシグマ関数の応用について説明する。

## 6.1　テータ関数とワイエルシュトラスの楕円関数

本節ではワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述することに試みよう。そのために, シグマ関数やツェータ関数をテータ関数で記述することで準備をする。その準備を経てワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述する。

### 6.1.1　シグマ関数とテータ関数

ワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述するための準備として, シグマ関数をテータ関数で記述しよう。まず, $\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$ となる $\omega_1$ と $\omega_3$ を選び, それらに対応するシグマ関数 $\sigma(2\omega_1 z)$ をとり,

$$\tau \equiv \frac{\omega_3}{\omega_1},$$

のようにパラメータ $\tau$ を定義すると, シグマ関数の擬周期性から,

$$\sigma(2\omega_1(z+1)) = \sigma(2\omega_1 z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1\omega_1(2z+1)}\sigma(2\omega_1 z),$$

$$\sigma(2\omega_1(z+\tau)) = \sigma(2\omega_1 z + 2\omega_3) = -e^{2\eta_3\omega_1(2z+\tau)}\sigma(2\omega_1 z),$$

が導かれる。これらの関係から, $\sigma(2\omega_1 z)$ は変数 $z$ に関して, 周期 1 と $\tau$ の擬周期性を示す関数であることがわかる。二重の擬周期性をもつテータ関数 $\vartheta_1(z)$ との比を,

$$f(z) = \frac{\sigma(2\omega_1 z)}{\vartheta_1(z)}, \tag{6.1}$$

とおく。テータ関数の擬周期性:

$$\vartheta_1(z+1) = -\vartheta_1(z), \quad \vartheta_3(z+\tau) = -e^{-\pi i\,(2z+\tau)}\vartheta_1(z),$$

を用いると, シグマ関数とテータ関数の比率 $f(z)$ は,

$$f(z+1) = e^{2\eta_1\omega_1(2z+1)}f(z), \tag{6.2a}$$

$$f(z+\tau) = e^{(2\eta_3\omega_1+\pi i)(2v+\tau)}f(z) = e^{2\eta_1\omega_3(2z+\tau)}f(z), \tag{6.2b}$$

なる擬周期性を示すことがわかる。第 2 行目の式の右辺の導出にはルジャンドルの関係式: $\eta_1\omega_3 - \eta_1\omega_1 = \pi i/2$ を利用した。

シグマ関数 $\sigma(2\omega_1 z)$ は, $2\omega_1 z = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ ($m$ と $n$ は整数) を 1 位の零点にもつ整関数である。言い換えると, $z = m + n\tau$ のみを 1 位の零点にもつ整関数である。一方, テータ関数 $\vartheta_1(z)$ もそれと同じ零点をもつ整関数であるので, それらの比である $f(z)$ は零点をもたない整関数である。

ところで, (6.2a) の両辺に $e^{-2\eta_1\omega_1(z+1)^2}$ を乗じると, その数式は,

$$e^{-2\eta_1\omega_1(z+1)^2}f(z+1) = e^{-2\eta_1\omega_1 z^2}f(z), \tag{6.3a}$$

のように変形できる。一方, (6.2b) の両辺に $e^{-2\eta_1\omega_1(z+\tau)^2}$ を乗じると, その数式は,

$$e^{-2\eta_1\omega_1(z+\tau)^2}f(z+\tau) = e^{-2\eta_1\omega_1 z^2}f(z), \tag{6.3b}$$

のように変形できる。これらの結果は, $F(z) \equiv e^{-2\eta_1\omega_1 z^2}f(z)$ なる関数を用いれば,

$$F(z+1) = F(z), \qquad F(z+\tau) = F(z),$$

のような二重周期をもつことがわかる。この $F(z)$ は擬二重周期ではなく, 本当の二重周期である。つまり, $F(z)$ は楕円関数という意味である。しかし, $F(z)$ は整関数であるはずなので, 楕円関数の性質ゆえに $F(z)$ は定数であることになる。したがって, $f(z)$ は定数 $c$ を用いて,

$$f(z) = c\,e^{2\eta_1\omega_1 z^2},$$

のように書くことができる。比例係数 $c$ を決定するには, $z \to 0$ の極限で $f(z)$ を計算すればよい。計算してみると,

$$c = \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(2\omega_1 z)}{\vartheta_1(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{2\omega_1\sigma'(2\omega_1 z)}{\vartheta_1'(z)} = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)},$$

が得られる。この計算において, $v \to 0$ の極限でシグマ関数もテータ関数もゼロに近づくため, ロピタルの定理を用いた。なお, $\sigma'(2\omega_1 z)$ は, $z$ についての微分ではなく, $\sigma(u)$ を $u$ について微分した結果に $u = 2\omega_1 z$ を代入した値である。得られた比例係数 $c$ を用いると,

$$\sigma(2\omega_1 z) = 2\omega_1\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1'(0)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2}, \tag{6.4}$$

なる関係が得られる。この数式が, シグマ関数をテータ関数によって記述した結果である。

**コシグマ関数とテータ関数** 続いて, コシグマ関数とテータ関数の関係を調べよう。コシグマ関数の定義式において, 変数を $2\omega_1 z$ とすると,

$$\sigma(2\omega_1 z+\omega_1)=2\omega_1\frac{\vartheta_1(z+1/2)}{\vartheta_1'(0)}e^{2\eta_1\omega_1(v+1/2)^2},$$

が得られる。この式に, $z=0$ を代入すると,

$$\sigma(\omega_1)=2\omega_1\frac{\vartheta_1(1/2)}{\vartheta_1'(0)}e^{2\eta_1\omega_1(1/2)^2},$$

となる。この関係をコシグマ関数の定義 (5.26) に代入すると,

$$\sigma_1(2\omega_1 z)=\frac{e^{-2\omega_1\eta_1 z}\sigma(2\omega_1 z+\omega_1)}{\sigma(\omega_1)}=\frac{\vartheta_1(z+1/2)}{\vartheta_1(1/2)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2}=\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2},$$

が得られる。数式変形に関して, テータ関数による数式への変形には, (6.4) を利用した。さらに, $\vartheta_1$ 関数で記述した式から $\vartheta_2$ 関数による記述への変形には, テータ関数の擬周期性の関係 (表 4.3) を用いた。他のコシグマ関数についても, 途中計算が $\sigma_1(2\omega_1 z)$ ほど簡単ではないが, 同様の公式が導出できる。

残りのコシグマ関数のうち, コシグマ関数 $\sigma_3(2\omega_1 z)$ の導出が少しばかり簡単であるので, 先に導出しよう。コシグマ関数の定義 (5.26) から,

$$\sigma_3(2\omega_1 z)=\frac{e^{-2\omega_1\eta_3 z}\sigma(2\omega_1 z+\omega_3)}{\sigma(\omega_3)}=\frac{e^{-2\omega_1\eta_3 z}\sigma(2\omega_1(z+\tau/2))}{\sigma(2\omega_1(\tau/2))},$$

と書くことができる。この右辺への数式変形には $\tau=\omega_3/\omega_1$ であることを利用した。公式 (6.4) を用いて, この数式をさらに変形すると,

$$\begin{aligned}\sigma_3(2\omega_1 z)&=e^{-2\omega_1\eta_3 z}\frac{\vartheta_1(z+\tau/2)}{\vartheta_1(\tau/2)}e^{2\eta_1\omega_1(z+\tau/2)^2}\cdot e^{-2\eta_1\omega_1(\tau/2)^2}\\&=\frac{\vartheta_1(z+\tau/2)}{\vartheta_1(\tau/2)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2+2(\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1)z}=\frac{\vartheta_1(z+\tau/2)}{\vartheta_1(\tau/2)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2+\pi i},\end{aligned}$$

が得られる。この数式の最後の変形には, ルジャンドルの関係式 $\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\pi i/2$ を用いた。ところで, テータ関数において (4.18) に注意して擬周期性の関係 (表 4.3) を参照すると,

$$\vartheta_1(z+\tau/2)=ie^{-(z+\tau/4)\pi i}\vartheta_4(z),$$

であることがわかるので,

$$\frac{\vartheta_1(z+\tau/2)}{\vartheta_1(\tau/2)}=\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1(0)}e^{-\pi i},$$

が得られる。これを上の計算途中の数式に代入すると,

$$\sigma_3(2\omega_1 z)=\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_1(0)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2},$$

が導出できる。確かに, 前に導出した $\sigma_1(2\omega_1 z)$ の公式に似た形をしている。

それでは, 残りのコシグマ関数 $\sigma_2(2\omega_1 z)$ に関する公式を導出しよう。やはり, ここでもコシグマ関数の定義 (5.26) から始める。コシグマ関数 $\sigma_2(2\omega_1 z)$ の定義式を変形すると,

$$\sigma_2(2\omega_1 z) = \frac{e^{-2\omega_1\eta_2 z}\sigma(2\omega_1 z + \omega_2)}{\sigma(\omega_2)} = \frac{e^{-2\omega_1\eta_2 z}\sigma\bigl(2\omega_1(z-(1+\tau)/2)\bigr)}{\sigma(-2\omega_1(1+\tau)/2)},$$

と書くことができる。この右辺への数式変形には, $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$ と $\tau=\omega_3/\omega_1$ なる関係を利用した。公式 (6.4) を用いて, この数式をさらに変形すると,

$$\begin{aligned}\sigma_2(2\omega_1 z) &= e^{-2\omega_1\eta_2 z}\frac{\vartheta_1(z-(1{+}\tau)/2)}{\vartheta_1(-(1{+}\tau)/2)}e^{2\eta_1\omega_1(z-(1+\tau)/2)^2}\cdot e^{-2\eta_1\omega_1((1+\tau)/2)^2}\\ &= \frac{\vartheta_1(z+(1{+}\tau)/2)}{\vartheta_1(-(1{+}\tau)/2)}\,e^{2\eta_1\omega_1 z^2+2(\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1)z} = \frac{\vartheta_1(z-(1{+}\tau)/2)}{\vartheta_1(-(1{+}\tau)/2)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2-\pi i},\end{aligned}$$

が得られる。この数式の最後の変形には, ルジャンドルの関係式 $\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2=\pi i/2$ を用いた。ところで, テータ関数において (4.18) に注意して擬周期性の関係 (表 4.3) を参照すると,

$$\vartheta_1\biggl(z-\frac{1+\tau}{2}\biggr) = -i\,e^{(z-(1+\tau)/2+\tau/4)\pi i}\,\vartheta_3(z),$$

であることがわかるので,

$$\frac{\vartheta_1(z-(1+\tau)/2)}{\vartheta_1(-(1+\tau)/2)} = \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)}\,e^{\pi i},$$

が得られる。これを上の計算途中の数式に代入すると,

$$\sigma_2(2\omega_1 z) = \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)}\,e^{2\eta_1\omega_1 z^2},$$

が導出できる。この場合も, 上で導出した $\sigma_1(2\omega_1 z)$ の公式に似た形をしている。

コシグマ関数 3 つとテータ関数の関係は, 既に確認できたように, 共通の形をしている。その共通点に基づき, コシグマ関数とテータ関数の関係を一般化すると,

$$\sigma_r(2\omega_1 z) = \frac{\vartheta_{r+1}(z)}{\vartheta_{r+1}(0)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2}, \quad (r=1,2,3) \tag{6.5}$$

のように書くことができる。

### 6.1.2　ツェータ関数とテータ関数

次の準備段階として, ツェータ関数をテータ関数で記述してみよう。ツェータ関数はシグマ関数の対数微分であり, 既にシグマ関数のテータ関数による記述ができているから,

ツェータ関数がテータ関数で記述できるはずである。上で導出した (6.4) を用いてツェータ関数を計算すると,

$$\begin{aligned}\zeta(2\omega_1 z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(2\omega_1 z)}\log\sigma(2\omega_1 z) = \frac{1}{2\omega_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\sigma(2\omega_1 z)\\ &= \frac{\sigma'(2\omega_1 z)}{2\omega_1\,\sigma(2\omega_1 z)} = \frac{\vartheta_1'(z)}{2\omega_1\vartheta_1(z)} + 2\eta_1 z,\end{aligned}\tag{6.6}$$

が得られる。この結果によって, ヤコビの楕円関数を記述するために導入したテータ関数とツェータの関係が与えられたことになる。この関係を足がかりにワイエルシュトラスの楕円関数をテータ関数で記述できそうである。

前章で確認できたように, ワイエルシュトラスの楕円関数は, 原点を 2 位の極とする関数であり, 原点の近傍でローラン展開すると,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \cdots,$$

のように記述できる。この級数展開に基づいてツェータ関数を記述すると,

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{z} - \frac{a_1}{3}z^3 - \frac{a_2}{5}z^5 - \cdots,$$

のような級数で表現できるので,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = 0,$$

が得られる。この関係式にツェータ関数のテータ関数表示 (6.6) を適用すると,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\omega_1 z}\left(\frac{\vartheta_1'(z)}{2\omega_1\vartheta_1(z)} + 2\eta_1 z - \frac{1}{2\omega_1 z}\right) = 0,$$

のように書くことができる。この方程式を $\eta_1$ について解くと,

$$\eta_1 = \frac{1}{4\omega_1}\lim_{z\to 0}\frac{\vartheta_1(z) - z\vartheta_1'(z)}{z^2\vartheta_1(z)} = -\frac{1}{12\omega_1}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)},\tag{6.7}$$

が得られる。ここで, 右辺を導くためにロピタルの定理を 2 回適用した。

導出した関係式を解釈してみよう。まず, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ なる $\tau$ が与えられたとする。このとき, ゼロでない任意の複素数 $\omega_1$ をとり, $\omega_3 \equiv \omega_1\tau$ を定義すると, $\omega_1$ と $\omega_3$ を半周期とするシグマ関数は, パラメータ $\tau$ をともなうテータ関数を用いて (6.4) と (6.5) のように表現できる。また, テータ関数が実数の周期をもつことに対して, シグマ関数は厳密な意味での周期性はなく, その代わりに, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ の方向に同様の擬周期性をもっている。

### 6.1.3　楕円関数とテータ関数

ツェータ関数を微分するとワイエルシュトラスの楕円関数 ($\wp$ 関数) が得られるので, $\wp$ 関数をテータ関数で記述することは可能であるが, 他の手法でもテータ関数表示を得ることができる。前章で示した関係式 $\sqrt{\wp(z)-e_r}=\sigma_r(z)/\sigma(z)$ に (6.4) と (6.5) を代入すればよい。すると,

$$\sqrt{\wp(2\omega_1 z)-e_r}=\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_{r+1}(z)}{2\omega_2\vartheta_{r+1}(0)\,\vartheta_1(z)}, \quad (r=1,2,3) \tag{6.8}$$

が得られる。この式に $z=1/2$ を適用し, $\wp(\omega_1)=e_1$ であることに注意すると,

$$\sqrt{e_1-e_2}=\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_3(1/2)}{2\omega_1\vartheta_3(0)\vartheta_1(1/2)}=\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_4(0)}{2\omega_1\vartheta_3(0)\,\vartheta(1/2)}=\frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_4^2(0), \tag{6.9a}$$

が得られる。この数式変形には, テータ関数の微分に関する公式 $\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)$ と, 前章で示したテータ関数どうしの関係を利用した。そのテータ関数どうしの関係は, この後すぐに使うので, 他の公式も含めて書くと,

$$\vartheta_1(z+1/2)=\vartheta_2(z), \qquad \vartheta_2(z+1/2)=-\vartheta_1(z),$$
$$\vartheta_3(z+1/2)=\vartheta_4(z), \qquad \vartheta_4(z+1/2)=\vartheta_3(z),$$

のような公式である。これらの公式を同様に利用すると,

$$\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_4(1/2)}{2\omega_1\vartheta_4(0)\vartheta_1(1/2)}=\frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_3^2(0), \tag{6.9b}$$

$$\sqrt{e_2-e_3}=\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_3(1/2)}{2\omega_1\vartheta_4(0)\vartheta_1(1/2)}=-\frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_2^2(0), \tag{6.9c}$$

なる関係が得られる。得られた関係式 (6.9a) から (6.9c) を自乗して得られる式:

$$e_1-e_2=\frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_4^4(0), \quad e_1-e_3=\frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_3^4(0), \quad e_2-e_3=\frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_2^4(0),$$

を組み合わせれば,

$$e_1=\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}\left[\vartheta_3^4(0)+\vartheta_4^4(0)\right], \tag{6.10a}$$

$$e_2=\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}\left[\vartheta_2^4(0)-\vartheta_4^4(0)\right], \tag{6.10b}$$

$$e_3=-\frac{\pi^2}{12\omega_1^2}\left[\vartheta_2^4(0)+\vartheta_3^4(0)\right], \tag{6.10c}$$

が導かれる。また, (6.8) に立ち戻り,

$$\sqrt{\wp(2\omega_1 z)-e_3}=\frac{\pi\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(z)}{2\omega_1\vartheta_1(z)},$$

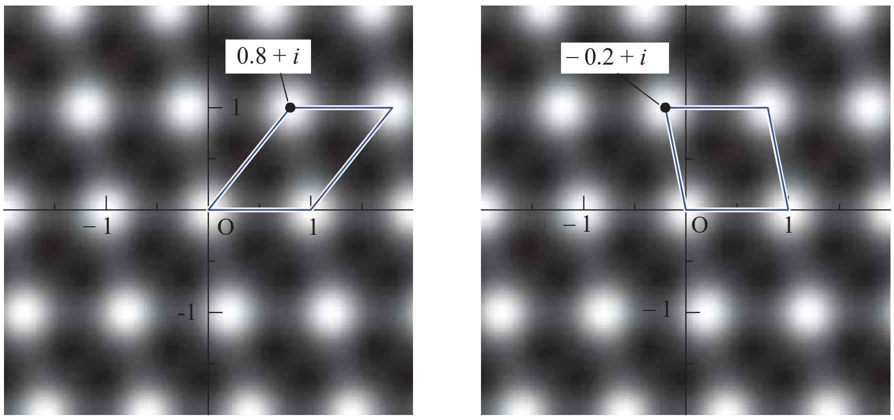
であることに注意し, (6.9b) を用いると,

$$\sqrt{\wp(2\omega_1 z) - e_3} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_4(z)}{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(z)}, \tag{6.11}$$

なる関係が得られる。さらに両辺を自乗して $wp(2\omega_1 z)$ について解くと,

$$\wp(2\omega_1 z) = \frac{\pi^2}{12\omega_1^2}\left(3\vartheta_3^2(0)\vartheta_2^2(0)\frac{\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_1^2(z)} - \vartheta_2^4(0) - \vartheta_3^4(0)\right), \tag{6.12}$$

が得られる。すでにテータ関数の計算方法は第 4 章で与えているので, 公式 (6.12) によって $\wp(2\omega_1 z)$ を計算することができる。その計算結果は図 6.1 のようになる。 このグラフ




(a) $2\omega_1 = 1.0,\ 2\omega_3 = 0.8 + i$　(b) $2\omega_1 = 1.0,\ 2\omega_3 = -0.2 + i$

図 6.1: テータ関数から計算したワイエルシュトラスの楕円関数

は計算した関数の絶対値を表し, 黒い場所が零点, 白い場所が極に対応する。この図に示したグラフ (a) と (b) は, $\omega_3$ が異なるように設定しているが, 意識的に格子点が同一となるように選んでいる。計算過程ではテータ関数のパラメータ $\tau$ が異なるのであるが, 格子点が同一なので, 本来, 同一の関数を並べている。たしかに, 図を見ると同一関数として計算されているように見えるだろう。

## 6.2　ヤコビの楕円関数

ヤコビの楕円関数 (sn 関数, cn 関数, dn 関数) がテータ関数で記述できることは第 4 章で示した。本節では, $\wp$ 関数との関係を示し, sn 関数のシグマ関数表現を導く。

ヤコビの楕円関数のテータ関数による表現は, 第 4 章で示したように,

$$\mathrm{sn}\,2Kz = \frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(z)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_4(z)}, \tag{6.13}$$

となる。。ただし, $K$ は第 1 種完全楕円積分であり, ヤコビの楕円関数を定義する際の定数パラメータである。このテータ関数表現が, 2 と $\tau$ を基本周期とすることより, $\mathrm{sn}\, z$ の基本周期が,

$$4K = 2\pi\vartheta_3^2(0), \qquad 2iK' = \pi\tau\vartheta_3^2(0),$$

であることがただちにわかる。この基本周期は第 3 章で示した周期に対応している。つまり, $\mathrm{sn}\, 2Kz \equiv \mathrm{sn}(\pi\vartheta_3^2(0)\, z)$ である。本節が, テータ関数から sn 関数を生成する説明を目的としているので, 本来, この右辺の形式で sn を記述するべきなのだが, 記述の簡潔性からあえて, 左辺の形式 $\mathrm{sn}\, 2Kz$ を用いることにする。なお, 完全楕円積分 $K$ と $K'$ を与える母数 $k$ と補母数 $k'$ は,

$$k = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}, \qquad k' = \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)},$$

で与えられる。これも, 第 4 章で示した関係式である。

テータ関数による sn 関数の記述 (6.13) と, 前節で導出した $\wp$ 関数とテータ関数の関係 (6.8) を比較すると,

$$\mathrm{sn}\, 2Kz = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(2\omega_1 z) - e_3}}, \tag{6.14}$$

が得られる。

続いて, ワイエルシュトラスの楕円関数との関係を求めよう。前節で導出した (6.14) を $\wp(2\omega_1 z)$ について解くと,

$$\wp(2\omega_1 z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2\, 2Kz} = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2(\pi\vartheta_3^2(0) z)},$$

が得られる。この数式の右辺への数式変形には, $4K = 2\pi\vartheta_3^2(0)$ の関係を利用した。さらに, この数式に対して, $2\omega_1 z \mapsto z$ のように置き換えると,

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2(\pi\vartheta_3^2 z/2\omega_1)} = e_3 + \frac{1}{\mathrm{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}\; z)} \tag{6.15}$$

が導かれる。この関係式は, 第 5 章で導出したヤコビの楕円関数とワイエルシュトラスの楕円関数の関係と一致する。なお, この関係式の右辺への数式変形にあたり, (6.9b) から導かれる関係:

$$e_1 - e_3 = \frac{\pi^2}{4\omega_1^2}\vartheta_3^4(0) = \frac{K^2}{\omega_1^2},$$

を適用した。さらに, 数式変形すると, ワイエルシュトラスの楕円関数は,

$$\wp(z) = \frac{K^2}{\omega_1^2}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}\; z)} - \frac{1 + k^2}{3}\right), \tag{6.16}$$

のように書くこともできる。この数式の右辺への変形にあたり, (6.10a) を用いて導かれる関係:

$$\frac{e_3}{e_1 - e_3} = -\frac{\vartheta_2\, 4(0) - \vartheta_3^4(0)}{\vartheta_3^4(0)} = -\frac{1 + k^2}{3},$$

を利用した。

ワイエルシュトラスの楕円関数とシグマ関数の関係を利用すれば, ヤコビの楕円関数をシグマ関数で記述することができる。まず, 第 5 章で導出した $\wp$ 関数とコシグマ関数の関係 (5.27) と, (6.14) を組み合わせると,

$$\mathrm{sn}\,2Kz = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(2\omega_1 z)}{\sigma_3(2\omega_1 z)}, \tag{6.17}$$

なる関係式が得られる。補助関数 (cn 関数と dn 関数) については, (4.16) と (6.5) を組み合わせると,

$$\mathrm{cn}\,2Kz = \frac{\sigma_1(2\omega_1 z)}{\sigma_3(2\omega_1 z)}, \qquad \mathrm{dn}\,2Kz = \frac{\sigma_2(2\omega_1 z)}{\sigma_3(2\omega_1 z)}, \tag{6.18}$$

が導出される。

## 6.3　楕円積分との関係

前節で第 1 種楕円積分の標準形の逆関数である sn 関数を詳しく調べたので, 第 2 種と第 3 種の楕円積分の変数を sn 関数で変換して調べてみよう。まず, 第 2 種楕円積分の積分変数を $x \equiv \mathrm{sn}\,u$ とおくと, $\mathrm{d}x = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{d}u$ であるから, 第 2 種楕円積分は,

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^u \mathrm{dn}^2\,u\,\mathrm{d}u,$$

のように書くことができる。この積分は, 積分経路によらず一定の値になる。なぜなら, 被積分関数 $\mathrm{dn}^2\,u$ は $u = 2mK + i\,(2n+1)K'$ (ただし, $m$ と $n$ は整数) に 2 位の極をもつが, その極における留数がゼロであるからだ。そこで, 第 2 種の楕円関数を単純に $u$ の関数として,

$$E(u) = \int_0^u \mathrm{dn}^2\,u\,\mathrm{d}u,$$

を定義して, これをテータ関数で表現してみるのだ。

既に第 4 章の (4.16) に示した関係式から, 被積分関数は,

$$\mathrm{dn}^2\,u = \frac{\vartheta_4^2(0)\,\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(z)}, \tag{6.19}$$

のように書くことができる。ただし, $u \equiv 2Kz$ である。この被積分関数は変数 $z$ に関して基本周期 1 と $\tau$ によって張られる基本周期平行四辺形をもつ。被積分関数は, その基本周期平行四辺形の中に, $z = \tau/2$ に 2 位の極をもつ。それは, $\vartheta_4(z)$ の零点と一致する。その事実は, 被積分関数が 2 位の楕円関数であることを意味する。被積分関数を極 $z = \tau/2$ でローラン展開したときの最低次 ($-2$ 次) の係数は,

$$\lim_{z\to\tau/2}(z-\tau/2)^2\,\frac{\vartheta_4^2(0)\,\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(z)} = -\frac{1}{\pi^2\vartheta_3^4(0)},$$

のように計算される。この計算のため, $\vartheta_3(\tau/2) = q^{-1/4}\vartheta_2(0)$ (ただし, $q = e^{\pi i\tau}$), および,

$$\lim_{z\to\tau/2} \frac{\vartheta_4(z)}{z-\tau/2} = \vartheta_4'(\tau/2) = iq^{-1/4}\vartheta_1'(0) = i\pi q^{-1/4}\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0),$$

なる関係を利用した。特に, 利用した第 2 の関係式は次のような操作によって左辺から右辺へ変形されている。まず, $\vartheta_4(\tau/2) = 0$ であることから, 左辺は微分 $\vartheta_4'(\tau/2)$ に置き換えられる。さらに, $\vartheta_4(\tau/2) = iq^{-1/4}\vartheta_1(0)$ であることを利用する。その導関数も同じ関係が成り立つ。最後に, $\vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)$ なる関係を利用したというわけである。

次に,

$$f(z) = (\log\vartheta_4(z))'' = \left(\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)}\right)' = \frac{\vartheta_4''(z)\,\vartheta_4(z) - (\vartheta_4'(z))^2}{\vartheta_4^2(z)},$$

を定義しよう。ここで, $\vartheta_4(z+1) = \vartheta_4(z)$ と $\vartheta_4(z+\tau) = e^{-\pi i\,(2z+\tau)}\vartheta_4(z)$ に注意すると,

$$f(z+1) = f(z), \qquad f(z+\tau) = f(z),$$

が導かれる。これにより, $f(z)$ が 1 と $\tau$ を周期とする楕円関数であることがわかる。関数 $f(z)$ も $\vartheta_4^2(z)$ を分母とするため, $z = \tau/2$ を 2 位の極としてもつ。この関数を $z = \tau/2$ でローラン展開したときの最低次数 ($-2$ 次) の係数は,

$$\lim_{z\to\tau/2}(z-\tau/2)^2 f(z) = \frac{\vartheta_4(\tau/2)\,\vartheta_4''(\tau/2) - (\vartheta_4'(\tau/2))^2}{(\vartheta_4'(\tau/2))^2} = -1,$$

のように計算できる。ここで,

$$g(z) \equiv \frac{\vartheta_4^2(0)\,\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(z)} - \frac{f(z)}{\pi^2\vartheta_3^4(0)},$$

を定義しよう。この関数 $g(z)$ は, $-2$ 次の項が打ち消しあい, 最低次数は, せいぜい, $-1$ 次である。つまり, $g(z)$ は 1 位以下の楕円関数となるのだが, そのような楕円関数は定数関数でなければならない。その定数値を求めるため, $g(z)$ に $z = 0$ を代入すると,

$$g(z) = g(0) = 1 - \frac{\vartheta_4''(0)}{\pi^2\vartheta_3^4(0)\,\vartheta_4(0)},$$

となる。この計算では $\vartheta_4'(0) = 0$ を利用した。この結果から, $\mathrm{dn}^2\,u$ は,

$$\mathrm{dn}^2\,u = \frac{\vartheta_4^2(0)\,\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(z)} = \frac{1}{\pi^2\vartheta_3^4(0)}\left(\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)}\right)' + 1 - \frac{\vartheta_4''(0)}{\pi^2\vartheta_3^4(0)\,\vartheta_4(0)},$$

のように書くことができる。ここで, $u = 2Kz = \pi\vartheta_3^2(0)\,z$ であることに注意して積分を実行すると, 第 2 種楕円積分が,

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_0^u \mathrm{dn}^2\,u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\vartheta_4'(z)}{\pi\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4(z)} + \left[\pi\vartheta_3^2(0) - \frac{\vartheta_4''(0)}{\pi\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4(0)}\right] z, \end{aligned} \tag{6.20}$$

の形で表現できることが導かれる。

## 6.4　完全楕円積分

完全楕円積分に関して, 既に示したように,

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0) = \sqrt{e_1 - e_3}\,\omega_1, \tag{6.21a}$$

$$iK' = \frac{\pi\tau}{2}\vartheta_3^2(0) = \sqrt{e_1 - e_3}\,\omega_3, \tag{6.21b}$$

の関係が成立する。また, $\tau\omega_1 = \omega_3$, $\tau K = iK'$ が成立する。なお, 複素関数における平方根は 2 価関数であるが, 根号は上の関係式を成立するように選ばれるとする。第 2 種楕円積分 (6.20) に対して, $u = K$ のとき完全楕円積分となる。それに対応する $z$ は $z = 1/2$ である。ここで, $\vartheta_4'(1/2) = \vartheta_3'(0) = 0$ であることに注意すると,

$$E = K - \frac{1}{4K}\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}, \tag{6.22}$$

が得られる。

ところで, コシグマ関数とテータ関数の関係式 (6.5) について $r = 3$ とすると,

$$\frac{\vartheta_4(z)}{\vartheta_4(0)}e^{2\eta_1\omega_1 z^2} = \frac{e^{-2\eta_3\omega_1 z}\sigma(2\omega_1 z + \omega_3)}{\sigma(\omega_3)},$$

となる。この数式の右辺は $\sigma_3(2\omega_1 z)$ をコシグマ関数の定義式で書き直した形をしている。この数式の両辺の対数を微分すると,

$$\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(0)} + 4\eta_1\omega_1 z = -\eta_3 + 2\omega_1\,\zeta(2\omega_2 z + \omega_3),$$

となる。さらにこの数式の両辺を微分すると,

$$\frac{\vartheta_4''(z)}{\vartheta_4^2(0)} - \left(\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)}\right)^2 + 4\eta_1\omega_1 = -2\omega_1^2\,\wp(2\omega_2 z + \omega_3),$$

が導かれる。この数式の導出に関して, ツェータ関数が $\wp$ 関数の導関数の $-1$ 倍であることを利用した。ここで, $z = 0$ を適用し, $\vartheta_4'(0) = 0$, $\wp(\omega_3) = e_3$ に注意すると,

$$\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)} = -4\,(e_3\omega_1^2 + \eta_1\omega_1),$$

が得られる。この数式を (6.22) に代入し, (6.21a) を利用すると,

$$E = K + \frac{e_3\omega_1^2 + \eta_1\omega_1}{K} = \frac{e_1\omega_1 + \eta_1}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

が得られる。つまり, 第 2 種の完全楕円積分 $E$ がワイエルシュトラスの楕円関数に関する定数で表現できるのである。この数式に (6.21b) を乗じると,

$$iK'E = \omega_3\,(e_1\omega_1 + \eta_1), \tag{6.23}$$

のように変形される。

次に, ワイエルシュトラスの楕円関数の半周期を $\omega_1$ と $\omega_3$ から $\omega_3$ と $-\omega_1$ で置き換えた場合を考えよう。まえに展開したワイエルシュトラスの楕円関数の理論は, $\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$ なる条件が必要であった。この場合, $\mathrm{Im}(-\omega_1/\omega_3) > 0$ が成立するので, 半周期を $\omega_3$ と $-\omega_1$ としても (順序も関係ある), ワイエルシュトラスの楕円関数の理論が適用可能である。つまり, 交換前の状態で $\omega_1$ と $\omega_3$ を半周期の第 1 成分と第 3 成分と呼ぶことにしよう。交換後, 半周期の第 1 成分と第 3 成分は $\omega_3$ と $-\omega_1$ に変化している。そのような半周期の成分の置き換えによって, ワイエルシュトラスの楕円関数に関連する数値は, 表 6.1 のように変化する。

半周期の第 1 成分, 第 2 成分, 第 3 成分を代入したときの $\wp$ 関数の値 $e_1$, $e_2$, $e_3$ は, 半周期の成分の置き換えによって, $e_3$, $e_2$, $e_1$ に変化する。特に, 第 3 成分に対する関数値は, ワイエルシュトラスの楕円関数が偶関数であること: $\wp(-\omega_1) = \wp(\omega_1) = e_1$ を利用した。

表 6.1: 半周期成分の置き換えによる楕円関数に関連する値の変化

| 項目 | 置き換え前 | 置き換え後 |
|---|---|---|
| 半周期の成分 | $\omega_1$, $\omega_3$ | $\omega_3$, $-\omega_1$ |
| 楕円関数の値 | $e_1$, $e_2$, $e_3$ | $e_3$, $e_2$, $e_1$ |
| ツェータ関数の変化分 | $\eta_1$, $\eta_3$ | $\eta_3$, $-\eta_1$ |
| テータ関数のパラメータ | $\tau$ | $-1/\tau$ |
| 楕円関数の母数 | $k$ | $k'$ |
| 完全楕円積分 | $K$, $K'$, $E$ | $K'$, $K$, $E'$ |

ワイエルシュトラスの楕円関数の周期分だけ平行移動したときのツェータ関数の変化分 $\eta_1$ と $\eta_3$ は, 半周期の成分の置き換えによって, $\eta_3$ と $-\eta_1$ に変化する。これは, $\zeta(z+2m\omega_1+2n\omega_3) = \zeta(z) + m\eta_1 + n\eta_3$ によって得られる性質である。

ツエータ関数のパラメータ $\tau$ は $\tau \equiv e_3/e_1$ のように定義されている。このパラメータは, 半周期成分の置き換えによって, $-e_1/e_3 = -1/\tau$ のように変化する。パラメータ $\tau$ は $\tau = iK'/K$ を満足するので, 半周期成分の置き換えによって, $-1/\tau = -(K/iK') = iK/K'$ となるので, 半周期成分の置き換えは, 完全楕円積分 $K$ と $K'$ を交換するのだ。ということは, 半周期成分の置き換えによって, 第 2 種の完全楕円積分 $E$ は $E'$ に変化するだろうし, 楕円関数の母数 $k$ は $k'$ に変化する。

半周期の成分を置き換えたときの楕円関数に関連する数値の対応関係 (表 6.1) を適用すると, (6.23) は,

$$iKE' = -\omega_1\,(e_3\omega_3 + \eta_3), \tag{6.24}$$

のように書き換えられる。これに関連し, (6.21a) と (6.21b) の積を計算すると,

$$iKK' = (e_1 - e_3)\omega_1\omega_3,$$

となる。前に示した数式 (6.23) と (6.24) の和から $iKK'$ を減じると, $e_1$ と $e_3$ を消去でき,

$$iK'E + iKE' - iKK' = \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1,$$

が導かれる。左辺は前章で示したとおり, $\pi i/2$ に等しいはずなので,

$$K'E + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}, \tag{6.25}$$

なる関係が得られる。この関係は**ルジャンドルの関係式**と呼ばれる。ルジャンドルの関係式は, 1976 年にサラミンとブレントが円周率計算のアルゴリズムとして応用した。そのアルゴリズムは, ガウスルジャンドル法と呼ばれている。次の章でガウスルジャンドル法を紹介する。