第5章　ワイエルシュトラスの楕円関数

本章では二重周期をもつ関数の基本形となる関数を定義し, その関数の性質を調べる。既に述べたように楕円関数は二重周期をもつことが特徴であるので, 本章で導入する関数は楕円関数の基本関数である。その基本的な楕円関数は, ワイエルシュトラスが導入したことからワイエルシュトラスの楕円関数と呼ばれる。

5.1　級数による定義

任意の複素数 ω_1 と ω_3 をとり[1], それらからつくられる格子点 $\omega = 2n\omega_1 + 2m\omega_3$ を考えよう。ただし, n と m は整数である。図 5.1 に示すこれらの格子点を極とする関数として,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \tag{5.1}$$

を定義しよう。この関数はワイエルシュトラス (Weierstrass) の楕円関数, または, ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数 (ペー関数) と呼ばれる。なお, 総和の条件 $\omega \in \Omega'$ は, 原点を除く ω の格子点すべてを意味する。また, 後に示すが, 総和の対象となる $-1/\omega^2$ の項はこの級数を収束させるために必要な項である。

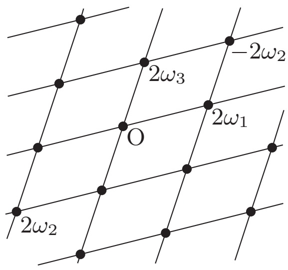

図 5.1: ワイエルシュトラスの楕円関数の格子点

関数を定義する級数 (5.1) が収束することは後に証明するとして, この関数は $2\omega_1$ と $2\omega_3$

[1] この添え字は誤植ではない。習慣上, なぜか ω_1 と ω_3 なのである。これに対して, 第 2 成分は $\omega_2 = -(\omega_1 + \omega_3)$ のように定義される。

を基本周期とする二重周期性をもつ関数である。それは, 次のように証明できる。

$$\begin{aligned}\wp(z+2\omega_1) &= \frac{1}{(z+2\omega_1)^2} + \sum_{n,m}{}' \left[\frac{1}{(z+2\omega_1-2n\omega_1-2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1+2m\omega_3)^2}\right] \\ &= \frac{1}{(z+2\omega_1)^2} + \sum_{n,m}{}' \left[\frac{1}{(z-2\,(n-1)\omega_1-2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1+2m\omega_3)^2}\right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n,m}{}' \left[\frac{1}{(z-2n\omega_1-2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1+2m\omega_3)^2}\right] = \wp(z).\end{aligned}$$

ここで, Σ' は $m=n=0$ を除外した総和を意味する。この式は, z を ω_1 方向に 1 単位の格子だけずらした状態を表す。格子点が無限に広がっているので, 格子点をずらしても形がまったく変わらないというのがこの証明の主張である。当然, z を ω_3 方向にずらしても同様である。したがって, $\wp(z)$ は $2\omega_1$ と $2\omega_3$ を基本周期とする二重周期性をもつことが証明された。

上の数式展開を応用すると, $\wp(z)$ が偶関数であることがわかる。格子点 $\omega = 2n\omega_1+2m\omega_3$ のパラメータ m, n に対して, $n \mapsto -n$, および, $m \mapsto -m$ の置き換えをして数式変形すると,

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n,m}{}' \left[\frac{1}{(z+2n\omega_1+2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(-2n\omega_1-2m\omega_3)^2}\right] \\ &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{n,m}{}' \left[\frac{1}{(-z-2n\omega_1-2m\omega_3)^2} - \frac{1}{(2n\omega_1+2m\omega_3)^2}\right] = \wp(-z),\end{aligned}$$

が導かれる。つまり, $\wp(-z) = \wp(z)$ であるので, $\wp(z)$ は偶関数である。

続いて, $\wp$ 関数を定義する級数が収束することの証明を目的として, 本章の後でも何度か利用する性質を紹介しておこう。その性質は, ある級数が正則な関数に絶対収束するとき, その級数を定積分した結果も絶対収束することである。この性質は次のようにして証明できる。

証明　対象とする級数を n 項で打ち切った値を $S_n(z)$ とする。この級数が関数 $f(z)$ に収束するとしよう。その場合, 十分に大きな N をとれば, 任意の正の実数 ε に対して,

$$|S_N(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

を満たすことができる。級数 $S_N(z)$ を積分路 C に沿って積分した場合,

$$\begin{aligned}\left|\int_C S_N(z)\,\mathrm{d}z - \int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_C (S_N(z) - f(z))\,\mathrm{d}z\right| \\ &< \int_C |S_N(z) - f(z)|\,\mathrm{d}z < \varepsilon L,\end{aligned}$$

なる不等式が成立する。なお, $S_N(z)$ の積分は, 級数を構成する項の項別積分を意味する。また, L は積分経路 C の長さである。関数 $f(z)$ が正則な関数であるので, 有限区間で $f(z)$ を積分した結果は有限値となる。この不等式より, 級数 S_N の定積分が特定の関数に絶対収束することが示された。¶

準備が整ったので, ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数を定義する級数が絶対収束することを証明しよう。ワイエルシュトラスの $\wp$ の定義において, 右辺の第 1 項: $1/z^2$ を左辺に移項して, 両辺を微分した数式:

$$\wp'(z) + \frac{1}{2z^3} = -\sum_{\omega\in\Omega'} \frac{1}{2\,(z-\omega)^3},$$

を考えればよい。右辺からわかるように, この数式は $\omega \in \Omega'$ を除く任意の z で正則である。原点 $z=0$ においても正則である。右辺に記述した級数が, 格子点 $\omega \in \Omega'$ 以外で一様収束することを示せばよいのだ。証明のため, 図 5.2 に示すように, 格子点の集合 Ω を部分集合に分割するのだ。まず, 原点だけの集合を Ω_0 としよう。続いて, その外側を取り囲む格子点の集合, 正確に言うと, 格子点 $2n\omega_1 + 2m\omega_3$ において, $n, m = 0, \pm 1$ となる集合から Ω_0 を取り除いた集合を Ω_1 とする。さらに外側, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2$ となる格子点の集合から $\Omega_0 \cup \Omega_1$ を取り除いた集合を Ω_2 とする。同様に, 外側へ $\Omega_3, \Omega_4, \ldots$ のように部分集合を定義する。このとき, 部分集合 Ω_ν (ただし, $\nu = 1, 2, \ldots$) には格子点が 8ν 個含まれる。

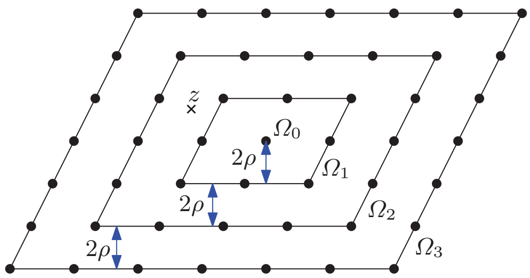

図 5.2: ワイエルシュトラスの格子点の部分集合

変数 z に対して, 部分集合 Ω_N に含まれるすべての格子点 ω が $|\omega| \geq |z|$ の関係を満たすように, 最小の自然数 N が選ばれたとする。つまり, z は Ω_N でつくられる平行四辺形の内部に位置する。ここで, 原点から Ω_1 がつくる平行四辺形までの距離を 2ρ としよう。すると, Ω_{N+1} に含まれれるすべての格子点について, $|z-\omega| \geq 2\rho$ が成立する。同様に, $\Omega_{N+\nu}$ に含まれるすべての格子点について, $|z-\omega| \geq 2\nu\rho$ が成立する。また, ここからの計算では, $|\omega| \geq 2\,(N+\nu)\rho > 2\nu\rho$ にも注意しておこう。そのとき, 級数のうち Ω_ν からの寄与は,

$$\left| -\sum_{\omega\in\Omega_\nu} \frac{1}{2\,(z-\omega)^3} \right| \leq 2 \sum_{\omega\in\Omega_\nu} \left| \frac{1}{(z-\omega)^3} \right|$$
$$< \frac{N+\nu}{16\rho^3\nu^3} = \frac{1}{16\rho^3}\left(\frac{N}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3}\right),$$

なる不等式で記述できる。この不等式を利用して導関数 $\wp(z)' + 1/2z^3$ の収束を調べてみると,

$$
\begin{aligned}
\left|\wp'(z) + \frac{1}{2z^3}\right| &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\omega\in\Omega_\nu} \left|\frac{1}{2\,(z-\omega)^3}\right| \\
&= \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\omega\in\Omega_\nu} \left|\frac{1}{2\,(z-\omega)^3}\right| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\omega\in\Omega_{N+\nu}} \left|\frac{1}{2\,(z-\omega)^3}\right| \\
&= \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\omega\in\Omega_\nu} \left|\frac{1}{2\,(z-\omega)^3}\right| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{16\rho^3} \left(\frac{N}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3}\right),
\end{aligned}
$$

のように数式変形できることがわかる。ここで, $1/\nu^2$ と $1/\nu^3$ の無限級数が, それぞれ, $\pi^2/6$, アペリー数 ($\simeq 1.20205$) に収束するので, 後半の級数は有限の値[2]に収束する。一方, 前半の総和は有限個の格子点についての和であるので, 当然, 有限の値である。したがって, $\wp(z)' + 2/z^3$ は有限の値に収束するのである。しかも, 各項の絶対値を加算しても収束していることが示されているので, $\wp'(z) + 2/z^3$ の収束は絶対収束である。ところで, 当初の議論の対象 $\wp(z) - 1/z^2$ は,

$$
\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega\in\Omega'} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) = -\sum_{\omega\in\Omega'} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{2\,(z-\omega)^3},
$$

なる定積分で計算できるはずである。被積分項は格子点 ω 以外の任意の z で正則であり, しかも, 一様収束する。正則で一様収束する級数は, 定積分の結果も収束することは上で示したとおりである。したがって, $\wp(z) - 1/z^2$ は, やはり, 格子点 ω 以外の任意の z で一様収束する。なお, その定積分の積分路は, 原点から z を結び, 格子点を通過しなければ任意の経路でよい。¶

5.2　ワイエルシュトラスの微分方程式

ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の性質を調べるため, $\wp$ 関数が満足する微分方程式を導出する。その取り掛かりとして, 級数による定義式を数式変形すると,

$$
\begin{aligned}
\wp(z) - \frac{1}{z^2} &= \sum_{\omega\in\Omega'} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) = \sum_{\omega\in\Omega'} \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{(1-z/\omega)^2} - 1\right) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega'} \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{2z}{\omega} + \frac{3z^2}{\omega^2} + \frac{4z^3}{\omega^3} + \cdots\right) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega'} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \frac{z^k}{\omega^{k+2}},
\end{aligned}
$$

[2] これらの無限級数はリーマンのゼータ関数 $\zeta(2)$, $\zeta(3)$ なる記号で書くこともできるのだが, 後に導入するワイエルシュトラスのツェータと紛らわしいので, 本文中ではあえてゼータ関数の記号を用いなかった。

が得られる。前節で示したようにこの級数は絶対収束するので, 総和の順序を入れ替えることが許される。格子点 ω に関する総和を内側に入れると, $\wp$ 関数は,

$$
\begin{aligned}
\wp(z) - \frac{1}{z^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Omega'} (k+1) \frac{z^k}{\omega^{k+2}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) G_{k+2}\, z^k = \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2}\, z^{2k},
\end{aligned}
$$

のように計算される。第 2 行目への変形には, $\wp$ 関数が偶関数である事実を利用した。また, 展開係数 G_{2k+2} は,

$$
G_k \equiv \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{1}{\omega^k},
$$

と定義した係数である。この結果を用いて具体的に $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ を級数展開すると,

$$
\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4\, z^2 + 5G_6\, z^4 + 7G_8\, z^6 + \cdots, \tag{5.2a}
$$

$$
\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4\, z + 20G_6\, z^3 + 42G_8\, z^5 + \cdots, \tag{5.2b}
$$

のように書くことができる。ここで, $\wp$ 関数の級数表現が得られたように見えるが, G_4 や G_6 が格子点の逆数のべき乗の無限級数であるので, 展開係数が具体的に特定できない。そのため, $\wp$ 関数を特定するには, さらに調査を要する。

展開係数 G_4 や G_6 が特定できないが, $\wp$ 関数のべき乗を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\wp(z)^2 &= \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6\, z^2 + (14G_8 + 9G_4^2) z^4 + \cdots, \\
\wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + (21G_8 + 27G_4^2) z^2 + \cdots,
\end{aligned}
$$

が得られる。一方, 導関数 $\wp'(z)$ の自乗は,

$$
\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + (36G_4^2 - 168G_8) z^2 + \cdots,
$$

が得られる。まず, $\wp'(z)^2$ と $\wp(z)^3$ の 1 次結合をつくると,

$$
\wp(z)^2 - 4\wp(z)^3 = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 - (72G_4^2 + 252G_8) z^2 + \cdots,
$$

のように -6 次の項を消去できる。さらに, $\wp(z)$ との 1 次結合をすると,

$$
\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\, \wp(z) = -140G_6 - (252G_8 - 108G_4^2) z^2 + \cdots,
$$

のように -2 次の項も消去できた。ここでは, 手間を省き 2 次の項までしか計算していないのだが, 少なくとも, $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\, \wp(z)$ が整関数となることがわかった。実は,

この時点で 4 次以降の係数を計算する必要がないことがわかる。なぜなら, 前節で紹介した楕円関数の性質を思い起こせばよい。楕円関数の微分と, 四則演算から得られたこの数式は, 楕円関数である。楕円関数の性質によると, 整関数が楕円関数であるためには定数でなければならないのだ。つまり, 2 次以降の展開係数はすべてゼロでなければならないのである。したがって,

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\,\wp(z) - 140G_6,$$

なる等式が厳密に成立するのである。この数式は習慣的に,

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\,\wp(z) - g_3, \tag{5.3}$$

なる形で書かれる。ただし, 展開係数 g_2 と g_3 は,

$$g_2 = 60\sum_{\omega\in\Omega'}\frac{1}{\omega^4}, \qquad g_3 = 140\sum_{\omega\in\Omega'}\frac{1}{\omega^6},$$

のように定義される。微分方程式 (5.3) に含まれる係数 g_2 と g_3 は $\wp(z)$ の**不変量**と呼ばれる。

ワイエルシュトラスの楕円関数の半周期 ω_1 と ω_3 から, $\omega_2 \equiv -(\omega_1+\omega_3)$ を定義すると, 当然,

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3 = 0, \tag{5.4}$$

が成立する。そのとき, $2\omega_2$ も $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の周期である。ワイエルシュトラスの楕円関数の周期に関する ω_1, ω_2, ω_3 を総称して ω_r (ただし, $r=1,2,3$) と書くことにしよう。つまり,

$$\wp(z+2\omega_r) = \wp(z), \qquad \wp'(z+2\omega_r) = \wp'(z),$$

が成立する。この数式に対して $z=-\omega_r$ を代入し, $\wp'(z)$ が奇関数であることを利用すると,

$$\wp(\omega_r) = \wp'(-\omega_r) = -\wp(\omega_r),$$

が得られる。この関係式より,

$$\wp'(\omega_r) = 0, \quad (r=1,2,3) \tag{5.5}$$

が得られる。さらに,

$$e_r \equiv \wp(\omega_r), \quad (r=1,2,3) \tag{5.6}$$

を定義しよう。このとき, $z=\omega_r$ を中心に $\wp(z)$ をテイラー展開すると,

$$\wp(z) = e_r + \frac{\wp''(\omega_r)}{2!}(z-\omega_r)^2 + \cdots,$$

のように書くことができる。この展開式から $z=\omega_r$ は $\wp(z)-e_r$ の 2 位以上の零点となる。正確に言うと, 楕円関数 $\wp(z)$ が 2 位の楕円関数であるので, $z=\omega_r$ は 2 位の零点である。そのため, $\wp(z)-e_r$ は, 基本周期平行四辺形の上に他の零点が存在しない。したがって, e_1, e_2, e_3 はすべて異なる値である。

ところで, $\wp'(\omega_r)=0$, $\wp(\omega_r)=e_r$ なる性質と, ワイエルシュトラスの微分方程式 (5.3) を比較すると, 3 次方程式 $4z^3-g_2z-g_3=0$ の解が $z=e_1,e_2,e_3$ であることがわかる。剰余定理によると, 3 次方程式の右辺は,

$$4z^3-g_2z-g_3=4\,(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3),$$

のように因数分解される。右辺を分配則によって展開し, 各次の係数を比較すると,

$$e_1+e_2+e_3=0,\quad e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{g_2}{4},\quad e_1e_2e_3=\frac{g_3}{4}, \tag{5.7}$$

なる関係が得られる。このことは, ワイエルシュトラスの微分方程式が,

$$\wp'(z)^2=4\,(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3),$$

のように書けることを意味している。

5.3　ヤコビの楕円関数との関係

前節で導出した微分方程式によると, $u\equiv\wp(z)$ とすると, $u'^2=4u^3-g_2u-g_3$ が成立する。ここで, プライム $(')$ は z についての微分を表す。この微分方程式の左辺をゼロとした 3 次方程式が実数解 e_1, e_2, e_3 をもつとしよう。すると, 微分方程式は $u'^2=4\,(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)$ のように因数分解できる。また, 変数 z は,

$$z=\int_x^\infty\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4\,(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}},$$

の積分で表される。ここで, 実数 e_1, e_2, e_3 は,

$$e_1+e_2+e_3=0,\qquad e_1>e_2>e_3,$$

の関係を満たすとする。第 1 の関係式は, 3 次方程式の 2 次の係数がゼロであることから成り立つべき関係である。ここで,

$$u=e_3+\frac{e_1-e_3}{v^2},$$

なる置き換えを適用すると, 上の積分はヤコビの標準形:

$$z=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}},$$

に変形できる。ここで, 楕円関数の母数 k は,

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}},$$

で与えられる。上で設定した大小関係 $e_1 > e_2 > e_3$ のおかげで母数に関して $0 < k < 1$ が成立する。ヤコビの積分から, $v = \mathrm{sn}(\sqrt{e_1 - e_3}\, z)$ となるのであるが, もともと, $u = \wp(z)$ であったので,

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}\, z)}, \tag{5.8}$$

なる等式が導かれる。微分方程式の右辺が 3 つの異なる実数解をもつ場合に $\wp$ 関数と sn 関数を関係づけることができた。ヤコビの sn 関数は奇関数であるが, 自乗されているので $\wp$ 関数が偶関数であることと矛盾しない。

次に, sn 関数との関係を利用して $\wp$ 関数の周期を考察してみよう。ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数が $2\omega_1$ と $2\omega_3$ を基本周期とすることに対して, ヤコビの sn 関数の自乗 $\mathrm{sn}^2 z$ は $2K$ と $2iK'$ を基本周期とする。関係式 (5.8) によると, $\wp$ 関数の基本周期は, $2K/\sqrt{e_1 - e_3}$ と $2iK'/\sqrt{e_1 - e_3}$ と考えることができる。よって, $\wp$ 関数の周期に関して,

$$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega_3 = \frac{iK}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \tag{5.9}$$

と書くことができる。

5.4　ワイエルシュトラスのツェータ関数

ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の原始関数として,

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{z} - \int_0^z \sum_{\omega \in \Omega'} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right] \mathrm{d}z = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right),
\end{aligned}$$

を考えてみよう。この定義式は回りくどく見えるかもしれない。単純に $-\wp(z)$ の定積分で定義したいところだが, $1/z^2$ を原点から積分すると発散するので, 発散の原因である $1/z^2$ を除外して積分し, その結果に $1/z^2$ の不定積分 $1/z$ を加算した結果を $\zeta(z)$ として定義している。右辺の級数は, 格子点 $\omega \in \Omega'$ 以外の複素数 z について一様収束に絶対収束する。なぜなら, $\wp$ 関数が格子点 ω 以外の複素数 z について一様に絶対収束し, $\zeta(z)$ はその関数を定積分することによって与えられるからである。なお, 新たな関数 $\zeta(z)$ はワイエルシュトラスのツェータ関数[3]と呼ばれる。

[3]記号が同じであるが, リーマンのゼータ関数とは無関係である。

上で述べたように, ワイエルシュトラスのツェータ関数は $-\wp(z)$ の原始関数として定義されているので,

$$\wp(z) = -\zeta'(z), \tag{5.10}$$

なる関係を満たす。また, 上の定義式からただちに,

$$\lim_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = 0, \tag{5.11}$$

なる関係が導かれる。つまり, ツェータ関数は原点を 1 位の極にもつ関数である。

ワイエルシュトラスのツェータ関数は奇関数である。ツェータ関数の導関数は $\wp$ 関数であり, 偶関数である。つまり, $\zeta'(-z) = \zeta'(-z)$ である。これを積分すると, $\zeta(-z) = -\zeta(z) + C$ (ただし, C は積分定数) となる。積分定数 C は,

$$C = \lim_{z\to 0}\Big[\zeta(z) + \zeta(-z)\Big] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\right] = 0,$$

のように特定できる。したがって, $\zeta(z) = -\zeta(z)$ となるのでツェータ関数は奇関数である。

続いて, $\wp$ 関数の周期 ω_1, ω_2, ω_3 を一般化して ω_r $(r = 1, 2, 3)$ と書き, その周期性からツェータ関数の性質を導こう。まず, $\wp$ 関数の周期性から,

$$\zeta'(z + 2\omega_r) = \zeta'(z),$$

が成立する。この数式の両辺を積分すると,

$$\zeta(z + 2\omega_r) = \zeta(z) + 2\eta_r, \tag{5.12}$$

となる。ただし, η_r は積分定数である。ここで, $z = -\omega_r$ とすると, $\zeta(z)$ が周期間数であることを利用でき, $\eta_r = \zeta(\omega_r)$ であることが導かれる。さらに, (5.12) を繰り返し適用すると,

$$\zeta(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \zeta(z) + 2m\eta_1 + 2n\eta_3, \tag{5.13}$$

が成立する。この関係を応用し,

$$\zeta(z + 2\,(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)) = \zeta(z) + 2\,(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3),$$

を考えると, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ であることから, 左辺は $\zeta(z)$ に等しい。したがって,

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \tag{5.14}$$

なる関係が得られる。

本節で定義した $\zeta(z)$ は楕円関数ではない。なぜなら, この関数は $\wp(z)$ の定積分によって定義された関数であるので, 楕円関数であるなら, $2\omega_1$ と $2\omega_3$ によって張られる平行四

辺形が基本周期平行四辺形となる。定義式より, その基本平行四辺形に含まれる極は 1 つだけであり, しかも, その極は 1 位の極である。楕円関数の性質によると, 1 位以下の楕円関数は定関数である。しかし, $\zeta(z)$ は定関数ではない。したがって, $\zeta(z)$ は楕円関数ではないのだ。確かに, (5.12) によると, 少なくとも ω_r が周期でないのは確かである。しかし, 今後の説明の便宜上, ω_r を $\zeta(z)$ の周期と呼ぶことにしよう。

複素平面状の 4 点: $\omega_1-\omega_3$, $\omega_1+\omega_3$, $-\omega_1+\omega_3$, $-\omega_1-\omega_3$ を頂点とする平行四辺形の内部に存在する $\zeta(z)$ の極は, $z=0$ だけであり, その留数は 1 に等しい。そのため, $\zeta(z)$ をその平行四辺形に沿って周回積分した結果は $2\pi i$ に等しい。具体的に,

$$I_1=\int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_1+\omega_3}\zeta(z)\,\mathrm{d}z,\qquad I_2=\int_{\omega_1+\omega_3}^{-\omega_1+\omega_3}\zeta(z)\,\mathrm{d}z,$$
$$I_3=\int_{-\omega_1+\omega_3}^{-\omega_1-\omega_3}\zeta(z)\,\mathrm{d}z,\qquad I_4=\int_{-\omega_1-\omega_3}^{\omega_1-\omega_3}\zeta(z)\,\mathrm{d}z,$$

のように区分ごとに積分を定義すると, 周回積分の結果は,

$$I_1+I_2+I_3+I_4=2\pi i, \tag{5.15}$$

のように書くことができる。周回積分に関して, I_3 に対して $z\equiv u-2\omega_1$ を, I_4 に対して $z\equiv u-2\omega_3$ を適用すると, それらの積分は,

$$I_3=\int_{\omega_1+\omega_3}^{\omega_1-\omega_3}\zeta(u-2\omega_1)\,\mathrm{d}u=-\int_{\omega_1-\omega_3}^{\omega_1+\omega_3}(\zeta(u)-2\eta_1)\,\mathrm{d}u=-I_1+4\eta_1\omega_3,$$
$$I_4=\int_{-\omega_1+\omega_3}^{\omega_1+\omega_3}\zeta(u-2\omega_3)\,\mathrm{d}u=-\int_{\omega_1+\omega_3}^{-\omega_1+\omega_3}(\zeta(u)-2\eta_3)\,\mathrm{d}u=-I_2-4\eta_3\omega_1,$$

のように計算できる。この結果を (5.15) に代入すると,

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{\pi i}{2}, \tag{5.16}$$

なる関係が得られる。この関係式はルジャンドルの関係式と呼ばれる。

5.5　シグマ関数

前節と同様の方法で, $\zeta(z)$ の原始関数を定義しよう。ツェータ関数を定義した際と同様に, ツェータ関数に含まれる項 $1/z$ が, 原点を起点に積分すると発散する。そのため, 発散の要因である $1/z$ を取り除いて原点を起点に積分し, その結果に $1/z$ の不定積分である $\log z$ を加算して原始関数を補正する。そのように定義した関数は,

$$\begin{aligned}\log z+\int_0^z\left(\zeta(z)-\frac{1}{z}\right)\,\mathrm{d}z&=\log z+\int_0^z\sum_{\omega\in\Omega'}\left(\frac{1}{z-\omega}-\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right)\mathrm{d}z\\&=\log z+\sum_{\omega\in\Omega'}\left(\log\frac{z-\omega}{-\omega}+\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right),\end{aligned}$$

のように計算される。この関数に含まれる級数は, 格子点 $\omega \in \Omega'$ 以外の複素数 z に対して一様に絶対収束する。なぜなら, その級数は, 一様に絶対収束する級数の定積分で与えられる級数だからである。とはいえ, この関数には難点がある。その難点とは, この積分の第1項は積分路のとり方によって異なる値をとることである。具体的には, 積分路が $z=\omega$ を反時計回りに周回する回数を n としたとき,

$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{z-\omega} = \log\frac{z-\omega}{-\omega} + 2\pi i\, n,$$

となるのだ。これは, 複素数において対数が多価であることを意味する。ところが, この関数の指数関数をとれば,

$$\sigma(z) = z\prod_{\omega\in\Omega'}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right), \tag{5.17}$$

のように1価関数が得られるので, その難点は解決できる。この新たな関数をシグマ関数と呼ぶ。シグマ関数は, 対数をとるとツェータ関数の原始関数であるので,

$$\zeta(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\sigma(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

なる関係を満たす。定義式 (5.17) から明らかなように, $\sigma(z)$ は原点を含む格子点 $\omega \in \Omega$ すべてを1位の零点とし, それ以外の零点をもたない。また,

$$\sigma'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} = 1, \tag{5.18}$$

なる関係が成立することも明らかである。シグマ関数は奇関数である。それは, 次のようにして示すことができる。格子点 ω が $\omega\in\Omega'$ を満たすならば, $-\omega\in\Omega'$ も成立するので, ω か $-\omega$ の一方だけの集合を Ω^* としよう。すると, シグマ関数は,

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= u\prod_{\omega\in\Omega^*}\left[\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{\omega}\right)\exp\left(-\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}\right)\right]\\ &= z\prod_{\omega\in\Omega^*}\left(1-\frac{z^2}{\omega^2}\right)e^{z^2/\omega^2},\end{aligned}$$

のように書くことができる。この数式から $\sigma(-z) = -\sigma(z)$ であることがわかるので, シグマ関数は奇関数である。

ツェータ関数の性質 $\zeta(z+2\omega_r) = \zeta(z) + 2\eta_r$ を対数積分の関係 (5.5) に代入すると,

$$\frac{\sigma'(z+2\omega_r)}{\sigma(z+2\omega_r)} = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} + 2\eta_r,$$

となる。この式の両辺を積分すると,

$$\sigma(z+2\omega_r) = C\sigma(z)\,e^{2\eta_r z},$$

が得られる。ただし, C は積分定数である。この積分定数を決定するには, $z=-\omega_r$ を代入し, シグマ関数が奇関数であることを利用する。その結果, $C=-e^{2\eta_r\omega_r}$ が得られるので,

$$\sigma(z+2\omega_r)=-e^{2\eta_r\,(z+\omega_r)}\sigma(z), \quad (r=1.2.3) \tag{5.19}$$

が成立する。シグマ関数は周期関数ではないが, この式が示す性質はテータ関数の擬周期性に類似している。便宜上, $\wp$ 関数と同様に, $2\omega_r$ をシグマ関数の周期という。

シグマ関数は, 明示的な変数だけでなく, ω_1 と ω_3 にも依存するので, それを明示する場合, $\sigma(z;\omega_1,\omega_3)$ と書く。このとき,

$$\sigma(\lambda z;\lambda\omega_1,\lambda\omega_3)=\lambda\,\sigma(z;\omega_1,\omega_3) \tag{5.20}$$

が成立することは, シグマ関数の定義 (5.17) からただちに得られる事実である。

5.6　加法公式

ワイエルシュトラスの楕円関数を用いて定義した関数:

$$f(z)\equiv\wp(z)-\wp(\alpha),$$

を考えよう。ただし, v は周期点 $\omega\in\Omega$ でない定数であるとする。そのとき, $f(z)$ は周期点 $\omega\in\Omega$ を 2 位の極にもつ楕円関数である。しかも, $\wp(\pm\alpha+\omega)=\wp(\alpha)$ であるので, $f(z)$ は $z=\pm\alpha+\omega$ を零点とする。

新たな関数:

$$\varphi(z)\equiv\frac{\sigma(z+\alpha)\,\sigma(z-\alpha)}{\sigma^2(z)},$$

を定義しよう。この関数は, $f(z)$ と同一の極と零点をもつ。その事実は, シグマ関数の定義式 (5.17) からただちに得られる。まず, $\varphi(z)$ の極は $\sigma(z)$ の零点であるので, $z=\omega$ である。これは $f(z)$ の極と一致する。一方, $\sigma(z+\alpha)\,\sigma(z-\alpha)=0$ となる条件は, (5.17) によると $z=\omega\pm\alpha$ である。つまり, $\varphi(z)$ の零点は $f(z)$ の零点と一致する。さらに, シグマ関数の擬周期性 (5.19) から,

$$\begin{aligned}\varphi(z+2\omega_r)&=\frac{e^{2\eta_r\,(z+\alpha+\omega_r)}\sigma(z+\alpha)\,e^{2\eta_r\,(z-\alpha+\omega_r)}\sigma(z-\alpha)}{[e^{2\eta_r\,(z+\omega_r)}\sigma(z)]^2}\\&=\frac{\sigma(z+\alpha)\,\sigma(z-\alpha)}{\sigma^2(z)}=\varphi(z),\end{aligned}$$

が得られる。つまり, $\varphi(z)$ は $f(z)$ と同一の二重周期をもつ関数である。楕円関数の性質によると, 周期を共有する 2 つの関数は, 極と零点が一致するなら, 定数因子を乗じれば互

いを等号で結ぶことができる。つまり, 適当な定数 c を選べば,

$$\wp(z) - \wp(\alpha) = \frac{c\,\sigma(z+\alpha)\,\sigma(z-\alpha)}{\sigma^2(z)},$$

が成立する。その定数 c を特定するには, 両辺に z^2 の乗じて, $z \to 0$ の極限をとる。これを書くと,

$$\lim_{z\to 0} z^2(\wp(z) - \wp(\alpha)) = \lim_{z\to 0} \frac{c\,\sigma(z+\alpha)\,\sigma(z-\alpha)}{\sigma^2(z)/z^2},$$

となる。まず, $z \to 0$ の極限で $\wp(z) \simeq 1/z^2$ となることを考えれば, 左辺は 1 となる。次に, $z = 0$ におけるシグマ関数の導関数 (5.18) より, 右辺の分母が 1 となる。その事実から,

$$1 = c\,\sigma(\alpha)\,\sigma(-\alpha) = -c\,\sigma^2(\alpha),$$

が導かれる。その結果, $c = -1/\sigma^2(\alpha)$ となる。したがって,

$$\wp(z) - \wp(\alpha) = \frac{\sigma(z+\alpha)\,\sigma(z-\alpha)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(\alpha)}, \tag{5.21}$$

なる公式が得られる。この関係式の対数を z について微分すると,

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(\alpha)} = \zeta(z+\alpha) + \zeta(z-\alpha) - 2\zeta(z),$$

が得られる。この数式の左辺は対数微分の公式を適用し, 右辺はシグマ関数の対数がツェータ関数の原始関数であることを利用した。この関係式は, z と α を入れ替えても成立するはずなので,

$$\frac{\wp'(\alpha)}{\wp(\alpha) - \wp(z)} = \zeta(z+\alpha) - \zeta(z-\alpha) - 2\zeta(\alpha),$$

となる。これらの数式の和をとると,

$$\zeta(z+\alpha) - \zeta(z) - \zeta(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)}, \tag{5.22}$$

が得られる。この関係式を z について微分すると,

$$\wp(z+\alpha) = \wp(z) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)}\right], \tag{5.23}$$

が得られる。この関係式は, ワイエルシュトラスの楕円関数の加法公式の一形態である。

ワイエルシュトラスの楕円関数の加法公式は他の形態があるので, 紹介しておこう。公式 (5.22) の自乗を z の関数とみなし,

$$F(z) = [\zeta(z+\alpha) - \zeta(z) - \zeta(\alpha)]^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)}\right]^2,$$

のように書くことにしよう。右辺によると, $F(z)$ は $\omega \in \Omega$ を周期点とする楕円関数である。一方, 左辺によると, $\zeta(z)$ が $\omega \in \Omega$ を 1 位の極とするので, $F(z)$ は ω と $-\omega + \alpha$ を 2 位の極とする。関数 $F(z)$ の極の一つである $z = 0$ におけるローラン展開の主要部を求めよう。ツェータ関数 $\zeta(z)$ をワイエルシュトラスの $\wp$ 関数を積分した表現:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{a_1}{3} z^3 + \cdots,$$

および, $\zeta(z + \alpha)$ をテイラー級数展開した表現:

$$\zeta(z + \alpha) = \zeta(\alpha) - \wp(\alpha)\, z + \cdots,$$

に注意すると, 関数 $F(z)$ が,

$$F(z) = \left[-\frac{1}{z} - \wp(\alpha)\, z + \cdots \right]^2 = \frac{1}{z^2} + 2\wp(\alpha) + \cdots, \tag{5.24}$$

となるので, $F(z)$ を $z = 0$ を中心にローラン展開した主要部は $1/z^2$ である。同様に, $z = -\alpha$ を中心にローラン展開した主要部を計算すると $1/(z + \alpha)^2$ となる。これらの主要部は, それぞれ, $\wp(z)$, $\wp(z + \alpha)$ の主要部と一致する。つまり, 関数 $F(z)$ は, $\wp(z + \alpha) + \wp(z)$ と同一の周期をもち, ローラン展開の主要部が一致する楕円関数である。楕円関数の定義によると, $F(z)$ と $\wp(z + \alpha) + \wp(z)$ の差は定数となる。つまり, 適当な定数 c を用いて,

$$F(z) = \wp(z + \alpha) + \wp(z) + c,$$

が成立する。定数 c を特定するため, 右辺をローラン展開すると,

$$F(z) = \frac{1}{z^2} + \wp(\alpha) + c + \wp'(\alpha)\, z + \cdots,$$

となるので, $c = \wp(\alpha)$ が得られる。したがって, 加法公式:

$$\wp(z + \alpha) + \wp(z) + \wp(\alpha) = \frac{1}{4} \left[\frac{\wp'(z) - \wp'(\alpha)}{\wp(z) - \wp(\alpha)} \right]^2, \tag{5.25}$$

が得られる。この関係式には, 導関数 $\wp'(z)$ と $\wp'(\alpha)$ が残っているが, 導関数はワイエルシュトラスの微分方程式によって, $\wp(z)$ と $\wp(\alpha)$ だけで書き換えることができる。

5.7　コシグマ関数

ワイエルシュトラスの楕円関数の加法公式 (5.21) に $\alpha = \omega_r$ を代入すると,

$$\wp(z) - e_r = -\frac{\sigma(z + \omega_r)\, \sigma(z - \omega_r)}{\sigma^2(z)\, \sigma^2(\omega_r)}, \quad (r = 1, 2, 3)$$

が得られる。また, シグマ関数の擬周期性 (5.19) から導かれる性質:

$$\sigma(z+\omega_r) = -e^{2\eta_r z}\sigma(z-\omega_r),$$

に注意すると,

$$\wp(z) - e_r = \left[\frac{e^{-\eta_r z}\sigma(z+\omega_r)}{\sigma(z)\,\sigma(\omega_r)}\right]^2,$$

が得られる。ここで,

$$\sigma_r(z) \equiv \frac{e^{-\eta_r z}\sigma(z+\omega_r)}{\sigma(\omega_r)}, \quad (r=1,2,3) \tag{5.26}$$

を定義すると, $\wp(z) - e_r$ は,

$$\wp(z) - e_r = \left[\frac{\sigma_r(z)}{\sigma(z)}\right]^2,$$

のように書くことができる。この式の両辺の平方根をとると,

$$\sqrt{\wp(z) - e_r} = \frac{\sigma_r(z)}{\sigma(z)}, \tag{5.27}$$

が得られる[4]。数式 (5.26) で定義された 3 つの関数 $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ をコシグマ関数という。シグマ関数が 1 価関数なので, (5.26) で定義されるコシグマ関数も 1 価関数である。コシグマ関数の特別な値として,

$$\sigma_r(0) = 1, \quad (r=1,2,3)$$

が成立することは (5.26) から容易にわかる。

シグマ関数の擬周期性から得られる (5.7) に $e^{-\eta_r z}$ を乗じ, $\sigma(z)$ が奇関数であることに注意すると,

$$e^{-\eta_r z}\sigma(z+\omega_r) = -e^{\eta_r z}\sigma(z-\omega_r)e^{\eta_r z}\sigma(\omega_r - z),$$

が得られる。つまり, コシグマ関数 $\sigma_r(z)$ は,

$$\sigma_r(z) = \frac{e^{\eta_r z}\sigma(\omega_r - z)}{\sigma(\omega_r)}, \quad (r=1,2,3) \tag{5.28}$$

のように書くこともできる。この結果と (5.26) を比較すると, $\sigma_r(-z) = \sigma_r(z)$ であることがわかるので, コシグマ関数 $\sigma_r(z)$ は偶関数である。さらに, $\sigma(0) = 0$ であることを (5.28) に適用すると,

$$\sigma_r(\omega_r) = 0, \quad (r=1,2,3) \tag{5.29}$$

が得られる。シグマ関数 $\sigma(z)$ がワイエルシュトラスの楕円関数 $\wp(z)$ の周期点のみにを 1 位の零点をもつ関数であったことを考えると, それらの零点を ω_r だけ平行移動した位置に $\sigma_r(z)$ は零点をもっている。

[4]平方根は 2 価関数であるので, 根号が与えるのはそのどちらかである。ここでは, この式の値を与えるように根号が定義されているものとする。