第4章　テータ関数

本章は, ヤコビの楕円関数をいくつかの基本関数を組み合わせて表現することを考察する。有理関数が分子と分母を因数分解した形, あるいは, 部分分数展開した形で表現できるのと同様に, 楕円関数をいくつかの基本的な関数の組合せで記述しようと試みるのだ。楕円関数を記述するための基本関数として, テータ関数と呼ばれる関数を導入する。

4.1　整関数の構成

楕円関数の基本関数として, 二重周期をもち, 基本周期平行四辺形に零点を1つだけもつ整関数が望ましい。しかし, 前章で示したように二重周期をもつ整関数は定数でなければならないため, 望みの関数を選ぶことは不可能である。そのため, 二重周期の関数の代わりに, 単一周期の関数で類似の性質の関数を作ることを考えよう。

基本関数として, sn 関数のすべての極を零点とする整関数を作ろう。関数 $\mathrm{sn}\, z$ は2位の楕円関数であり, 基本平行四辺形に1位の極を2つもつ。その極は, $z = iK', 2K + iK'$ である。複素平面全体に関して, $\mathrm{sn}\, z$ の極は, 整数 m, n を用いて, $z = 2mK + (2n+1)iK'$ となる。これらの点を零点とする関数として, $(2n+1)iK'$ と $2K + (2n+1)iK'$ を零点とし, 周期 $4K$ の整関数を作ることにする。変数を z とし,

$$u \equiv e^{\pi i z/2K}, \qquad q \equiv e^{-\pi K'/K}, \tag{4.1}$$

を定義する。ここで定義した u は零点をもたないが, z について周期 $4K$ をもつ。そのため, u の関数は同様に周期 $4K$ をもつ。楕円関数 $\mathrm{sn}\, z$ の極 $z = 2mK + (2n+1)iK'$ に対応して $u = (-1)^m q^{n+1/2}$ となるので, $u = \pm q^{n+1/2}$ を零点とする u の整関数をつくればよい。例えば, $u^2 - q^{2n+1}$ がその条件を満たすので, すべての整数 n に関してそれらの関数の積を作ればよい。しかし, 単純に無限乗積を作ると発散するので注意が必要である。楕円関数の母数 k が $0 \le k \le 1$ であれば K と K' は正の実数であるので, $|q| < 1$ となる。無限乗積が収束するには, $n \to \infty$ の極限で因数が1に近づくことが条件である。そのため, $n \ge 0$ の場合, 各因数を $1/u^2$ 倍した乗積:

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 - q^{2n+1}u^{-2}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n-1}u^{-2}),$$

を考えればよい。一方, $n<0$ の場合, 各因数を $-1/q^{2n+1}$ 倍した乗積:

$$\prod_{n=-\infty}^{-1}(1-q^{-2n-1}u^2)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}u^2),$$

をとればよい。これらの積:

$$f(u)\equiv\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}u^2)(1-q^{2n-1}u^{-2}),\tag{4.2}$$

を定義しよう。原点を除く複素平面上の領域に u をとった場合, $0<r\le|u|\le R$ なる r と R を選ぶことができる。そのとき,

$$|q^{2n-1}u^2|\le|q|^{2n-1}R^2,\qquad |q^{2n-1}u^{-2}|\le|q|^{2n-1}r^{-2},$$

なる不等式を満足する。この不等式によると, $|q|<1$ であることから, 無限乗積 (4.2) の被乗数は n の増加とともに, 指数関数的に 1 に収束する。したがって, 無限乗積 (4.2) は $u\neq0$ に対して広義に収束する。さて, (4.2) に $f(u)$ として定義した関数は, u の定義 (4.1) を逆にたどり, z の関数と考えることもできる。そのように z の関数と考えたとき, $f(u)$ は次の特徴をもつ。

- 関数 $f(u)$ は z の複素平面全体で正則である。
- 関数 $f(u)$ は z の関数として周期 $4K$ の周期関数である。
- 関数 $f(u)$ は z の関数として 1 位の零点をもつ。

まず, 複素平面全体での正則性について説明しよう。無限乗積 $f(u)$ は $u=0$ で発散するのだが, 定義式 (4.1) より $u=0$ にする z は存在しないので, z の複素平面全体で正則な関数である。周期性については, $u=e^{\pi iz/2K}$ であることから, u が周期 $4K$ の周期関数であることがわかる。したがって, u の関数である $f(u)$ は, z に関して周期 $4K$ の周期関数である。最後に, 零点の位数について説明しよう。すでに述べたように, この無限乗積は $u=\pm q^{n+1/2}$ にを零点とする。無限乗積 (4.2) は,

$$f(u)=(u\mp q^{n+1/2})\,f_1(u),$$

なる形で書くことができる。ただし, $f_1(u)$ はゼロでない正則関数とする。ここで, $u=e^{\pi i\,z/2K}$ に注意すると,

$$f(u)=(e^{\pi iz/2K}\mp q^{n+1/2})\,f_1(u),$$

のように書き換えられる。ここで, $e^{\pi i\,z_0/2K}=\pm q^{n+1/2}$ とする。このとき, z_0 は $f(z)$ の零点である。この z_0 を用いて $f(z)$ を書き換えると,

$$f(u)=\pm q^{n+1/2}\left(e^{\pi i\,(z-z_0)/2K}-1\right)\simeq\pm q^{n+1/2}\frac{\pi i\,(z-z_0)}{2K},$$

となる。なお, 右辺は z_0 の近傍における近似式である。つまり, $f(z)$ は z_0 の近傍で 1 次関数で近似できるので $f(u)$ は $u=\pm q^{n+1/2}$ に対応する z において 1 位の零点をもつ。

次に, $f(u)$ を無限級数で記述しよう。関数 $f(u)$ は $u=0$ で発散するため, $u=0$ を中心とした展開式はローラン級数となる。また, 無限乗積 (4.2) から, u についての偶関数であることがわかるので, ローラン展開において奇数次の項が現れない。また, $f(u)=f(u^{-1})$ であることも無限乗積 (4.2) から明らかであるので, u^{2n} と u^{-2n} の係数は等しくなければならない。したがって, $f(u)$ は,

$$f(u)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(u^{2n}+u^{-2n}), \tag{4.3}$$

なる形で展開できるはずである。さらに, (4.2) において $u\mapsto qu$ のように置き換えると,

$$\begin{aligned}
f(qu)&=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n+1}u^2)(1-q^{2n-3})z^{-2})\\
&=\frac{1-q^{-1}u^{-1}}{1-qu^2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}u^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})\\
&=\frac{1-q^{-1}u^{-1}}{1-qu^2}f(u)=-\frac{f(u)}{qu^2},
\end{aligned}$$

すなわち,

$$f(u)=-qu^2f(qu),$$

が得られる。この関係式に級数 (4.3) を代入すると,

$$a_1=-qa_0,\quad a_2=-q^3a_1,\quad \ldots,\quad a_n=-q^{2n-1}a_{n-1},$$

の規則性で展開係数が計算できることがわかる。逐次的に展開係数を計算していくと,

$$a_n=(-1)^nq\,q^3\cdots q^{2n-1}a_0=(-1)^nq^{n^2}a_0,$$

が得られる。したがって, 関数 $f(u)$ は,

$$\begin{aligned}
f(u)&=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}u^2)(1-q^{2n-1}u^{-2})\\
&=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nq^{n^2}(u^{2n}+u^{-2n})\right],
\end{aligned} \tag{4.4}$$

なる級数が得られる。この時点で, 展開係数のうち未知数は a_0 のみとなった。この展開係数は q に依存するので, $a_0\equiv a(q)$ と書こう。関係式 (4.4) に, $u=1$, $z=e^{\pi i/4}$ を代入すると,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2=a(q)\,(1-2q+2q^4-2q^9+\cdots), \tag{4.5a}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2})=a(q)\,(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+\cdots), \tag{4.5b}$$

が得られる。このうち (4.5a) の q を q^4 に置き換えると,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n-4})^2 = a(q^4)\,(1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+\cdots),$$

が得られる。この結果と (4.5b) の比は,

$$\begin{aligned}\frac{a(q^4)}{a(q)} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n-4})^2 \Big/ \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2}) \ = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n^2})(1-q^{8n-4}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2})(1-q^{8n-4})(1-q^{8n}) \Big/ \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \Big/ \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n})\ ,\end{aligned}$$

のように計算できる。第3行目への数式変形がわかりにくいかもしれないので説明しておく。第2行目の分母の乗積に現れる $4n-2$, $8n-4$, $8n$ を順に書いてみると,

$$\begin{array}{rllllllll} 4n-2: & 2, & 6, & 10, & 14, & 18, & 22, & 26, & 30, \ \ldots \\ 8n-4: & 4, & 12, & 20, & 28, & \ldots & & & \\ 8n: & 8, & 16, & 24, & 32, & \ldots & & & \end{array}$$

となるので, 分母は $(1-q^{2n})$ の無限乗積であることがわかる。よって, 第3行目のように乗積を簡略化できるのである。したがって,

$$a(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = a(q^4)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n}), \tag{4.6}$$

なる関係が成立する。この関係式の q の代わりに q^4 を代入すると,

$$a(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = a(q^4)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n}) = a(q^{16})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{32n}),$$

が導かれ, これを r 回繰り返した結果として,

$$a(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = a(q^{4^r})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4^r\cdot 2n}),$$

が得られるはずである。ここで, $|q|<1$ であることから, $r\to\infty$ とすると $q^{4^r}\to 0$ となることがわかる。また, (4.5a) に $q=0$ を代入すると, $a(0)=1$ であることがわかるので,

$$a(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = 1,$$

が導かれる。したがって, $a(q)$ も特定できた。これを (4.4) に代入すると,

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\,f(u) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}u^2)(1-q^{2n-1}u^{-2}) \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(u^{2n}+u^{-2n}),\end{aligned} \tag{4.7}$$

が得られる。本節の冒頭で u と q が (4.1) で定義されているため, $f(u)$ を z についての関数として,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi nK'/K})\,f(z)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\pi n^2K'/K}\cos\frac{\pi\, nz}{K},$$

のように書くこともできる。

4.2　ヤコビの Θ 関数系

前節で示した (4.7) の左辺を z の関数として定義したいくつかの関数は, 楕円関数の二重周期性に類似した性質を示す。定義したいくつかの関数を組み合わせて, 二重周期性を得ることが可能である。本節で定義する複数の関数は, Θ 関数系と呼ばれる。

Θ 関数系の代表として, (4.7) の左辺を z の関数:

$$\begin{aligned}\Theta(z)&=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}u^2)(1-q^{2n-1}u^{-2})\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(u^{2n}+u^{-2n}),\end{aligned}\tag{4.8}$$

を定義しよう。ここで,

$$Q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}),$$

とする。記述の簡略のため u を残しているが, $u\equiv e^{\pi iz/2K}$, $q\equiv e^{-\pi K'/K}$ であることに注意しておこう。新たに定義した関数 $\Theta(z)$ の変化を調べるため, その変数に $z+K$. $z+iK'$. $z+K+iK'$ を代入してみよう。まず, $u=e^{\pi i\, z/2K}$ の変化を調べると,

$$\begin{aligned}&e^{\pi i\,(z+K)/2K}=e^{\pi i\, z/2K}\cdot e^{\pi i/2}=iu,\\&e^{\pi i\,(z+iK')/2K}=e^{\pi i\, z/2K}\cdot e^{-\pi K'/K'}=q^{1/2}u,\\&e^{\pi i\,(z+K'+iK')/2K}=e^{\pi i\, z/2K}\cdot e^{\pi i/2}\cdot e^{-\pi K'/K'}=iq^{1/2}u,\end{aligned}$$

となる。ただし, $q=e^{-\pi K'/K}$ なる関係を利用した。この計算結果を用いると,

$$\Theta(z+K)=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}(u^{2n}+u^{-2n}),\tag{4.9a}$$

$$\begin{aligned}\Theta(z+iK)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(q^n u^{2n}+q^{-n}u^{-2n})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2-1/4}u^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2-1/4}u^{-2n}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2-1/4}u^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2-1/4}u^{-2n-2}$$

$$= q^{1/4}u^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\left(u^{2n+1} - u^{-(2n+1)}\right), \tag{4.9b}$$

$$\Theta(z+K+iK) = q^{1/4}u^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\left(u^{2n+1} + u^{-(2n+1)}\right), \tag{4.9c}$$

なる関係式が得られる。この結果に関して, 新たな関数:

$$\Theta_1(z) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} q^{n^2}(u^{2n} + u^{-2n}), \tag{4.10a}$$

$$H(z) = -i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}(u^{2n+1} - u^{-(2n+1)}), \tag{4.10b}$$

$$H_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}(u^{2n+1} - u^{-(2n+1)}), \tag{4.10c}$$

を定義しておく。これらのうち, $H(z)$ は虚数因子 $-i$ が乗じられた形で定義されているが, その理由は後に明らかになる。前に定義した $\Theta(z)$ を含め, これらの関数を総称して Θ 関数系[1]と呼ぶことにしよう。また, 補助関数として,

$$\lambda(z) = q^{-1/4}u^{-1} = \exp\left(\frac{\pi K'}{4K} - \frac{\pi i}{2K}u\right),$$

を定義しておこう。そのとき, Θ 関数系の関数には,

$$\Theta(z+K) = \Theta_1(z), \tag{4.11a}$$

$$\Theta(z+iK') = i\lambda(z)\,H(z), \tag{4.11b}$$

$$\Theta(z+K+iK') = \lambda(z)\,H_1(z), \tag{4.11c}$$

なる関係が成立する。ここで, $u = e^{\pi i\,z/2K}$ に注意して Θ 系の関数を z の関数として明示的に書くと,

$$\Theta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{n\pi}{K}u, \tag{4.12a}$$

$$\Theta_1(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos\frac{n\pi}{K}u, \tag{4.12b}$$

$$H(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2K}u, \tag{4.12c}$$

$$H_1(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2K}u, \tag{4.12d}$$

[1]読み方を書くと, Θ 関数はテータ関数, H 関数はエータ関数 (エイチではない) である。本章で最終的に導入する ϑ 関数もテータ関数なので, Θ 関数と H 関数をあえて, カタカナ表記することは避けることにする。

が得られる。これらの式は, フーリエ級数の形になっている。これらの数式から $\Theta(z)$ と $\Theta_1(z)$ が $2K$ を周期に, $H(z)$ と $H_1(z)$ が $4K$ を周期とすることがわかる。また, K と K' が実数であるならば, これらの関数も実数となる。これに関して, 関数 $H(z)$ の定義が虚数因子 $-i$ を含んでいるため, 完全楕円積分 K と K' が実数である場合に $H(z)$ が実数となるのである。

関数 $\Theta(z)$ が $2mK+(2n+1)iK'$ を零点とすることは前節で述べたとおりである。ここで, (4.11a) から (4.11c) の関係に注意すると他の関数の零点も特定することができる。具体的には,

$$\begin{aligned}
&\Theta(z)\text{ の零点:} && 2mK+(2n+1)iK' \\
&\Theta_1(z)\text{ の零点:} && (2m+1)K+(2n+1)iK' \\
&H(z)\text{ の零点:} && 2mK+2n\,iK' \\
&H_1(z)\text{ の零点:} && (2m+1)K+2n\,iK'
\end{aligned}$$

が零点となる。そのうち, $\Theta(z)$ の零点は, ヤコビの楕円関数と補助関数, すなわち, sn 関数, cn 関数, dn 関数の極と一致する。また, $H(z)$, $H_1(z)$, $\Theta_1(z)$ の零点は, それぞれ, sn 関数, cn 関数, dn 関数の零点と一致する。

表 4.1: $\Theta(z)$ 関数系の値

変数 \ 関数	Θ 関数	Θ_1 関数	H 関数	H_1 関数
$z+K$	$\Theta_1(z)$	$\Theta(z)$	$H_1(z)$	$-H(z)$
$z+iK'$	$i\lambda(z)\,H(z)$	$\lambda(z)\,H_1(z)$	$i\lambda(z)\,\Theta(z)$	$\lambda(z)\,\Theta_1(z)$
$z+K+iK'$	$\lambda(z)\,H_1(z)$	$i\lambda(z)\,H(z)$	$i\lambda(z)\,\Theta_1(z)$	$-i\lambda(z)\,\Theta(z)$

続いて, 周期性について考察しよう。まず, 補助関数 $\lambda(z)$ は定義式によって,

$$\lambda(z+K)=-i\lambda(z),\qquad \lambda(z+iK')=q^{-1/2}\lambda(z),$$

であることがわかる。この $\lambda(z)$ の関係と, 表 4.1 を参照すると,

$$\begin{aligned}
&\Theta(z+2K)=\Theta_1(z+K)=\Theta(z),\\
&\Theta(z+2iK')=i\lambda(z+iK')\,H(z+iK')=-\mu(z)\,\Theta(z),
\end{aligned}$$

のような関係がえれられる。ただし,

$$\mu(z)=q^{-1/4}\lambda(z)^2=\exp\!\left(-\frac{\pi i}{K}+\frac{\pi K'}{K}\right),$$

とおいた。この結果をもう一度繰り返すと,

$$\Theta(z+4K)=\Theta(z),\qquad \Theta(z+2K+2iK')=-\mu(z)\,\Theta(z),$$

なる関係が得られる。同様の考察を適用すると, 他の関数についても $z+2K$, $z+4K$, $z+2iK'$, $z+2K+2iK'$ における値を調べることができる。計算過程を省略するが, その結果は表 4.2 のようになる。

表 4.2: Θ 関数系の周期性

変数 \ 関数	Θ 関数	Θ_1 関数	H 関数	H_1 関数
$z+2K$	$\Theta(z)$	$\Theta_1(z)$	$-H(z)$	$-H_1(z)$
$z+4K$	$\Theta(z)$	$\Theta_1(z)$	$H(z)$	$H_1(z)$
$z+2iK'$	$-\mu(z)\,\Theta(z)$	$\mu(z)\,\Theta_1(z)$	$-\mu(z)\,H(z)$	$\mu(z)\,H_1(z)$
$z+2K+2iK'$	$-\mu(z)\,\Theta(z)$	$\mu(z)\,\Theta_1(z)$	$\mu(z)\,H(z)$	$-\mu(z)\,H_1(z)$

この結果は非常に興味深い。これら 4 つの関数は実数方向に周期性をもっている。一方, $z+2iK'$, $z+2K+2iK'$ における値を参照すると, $\mu(z)$ を気にしなければ周期的に見える。その解釈によると, 例えば, $\Theta_1(z)$ は変数の変化 $2iK'$ に対して擬似的な周期性をもつ。他の Θ 関数系の関数も擬似的な周期性をもっている。そのため, Θ 関数系の関数は擬二重周期関数という。

これらの関数とヤコビの sn 関数の共通点に注意しよう。表 4.1 によると, $\Theta(z)$ は $\mathrm{sn}\,z$ の極を零点にもち, $H(z)$ は $\mathrm{sn}\,z$ と同一の零点をもつ。これらの関数の定義式より, 零点はすべて 1 位である。したがって, これらの関数の比によって定義される関数 $H(z)/\Theta(z)$ は, $\mathrm{sn}\,z$ 関数の零点と極がすべて一致する関数となる。さらに, 表 4.2 より,

$$\frac{H(z+4K)}{\Theta(z+4K)} = \frac{H(z)}{\Theta(z)},$$

$$\frac{H(z+2iK')}{\Theta(z+2iK')} = \frac{-\,\mu(z)\,H(z)}{-\,\mu(z)\,\Theta(z)} = \frac{H(z)}{\Theta(z)},$$

であることが示されるので, $H(z)/\Theta(z)$ は $\mathrm{sn}\,z$ と同一の二重周期をもつ。前節に示した楕円関数の性質によると, 関数 $f(z)$ と $g(z)$ が, 同一の二重周期をもち, すべての極と零点が一致していれば, 2 つの関数は定数因子 c を用いて $f(z) = c\,g(z)$ の関係を満たす。つまり, $H(z)/\Theta(z)$ は $\mathrm{sn}\,z$ ということである。ここで, $\mathrm{sn}\,K = 1$ なる条件から定数因子を定めると,

$$\mathrm{sn}\,z = \frac{\Theta(K)}{H(K)}\frac{H(z)}{\Theta(z)} = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)}\frac{H(z)}{\Theta(z)},$$

のように sn 関数が Θ 関数系で書くことができる。同様の考察を cn 関数と dn 関数についても適用することができる。結果を改めて書くと,

$$\mathrm{sn}\,z = \frac{\Theta_1(0)\,H(z)}{H_1(0)\,\Theta(z)}, \qquad \mathrm{cn}\,z = \frac{\Theta(0)\,H_1(z)}{H_1(0)\,\Theta(z)}, \qquad \mathrm{dn}\,z = \frac{\Theta(0)\,\Theta_1(z)}{\Theta_1(0)\,\Theta(z)}, \tag{4.13}$$

となる。つまり, ヤコビの Θ 関数系を用いてヤコビの楕円関数を表現できたのだ。

4.3　テータ関数

前節で導入した Θ 関数系の関数は, 変数 z と, パラメータ K と K' に依存する関数である。ところが, パラメータ K と K' は独立ではなく, 楕円関数の母数 k に依存するパラメータであるので, 一つにまとめるべきである。本節では, そのようにパラメータを見直して Θ 関数系の代わりとなる新たな関数系を定義し, ヤコビの楕円関数を記述する。

パラメータ K と K' は, 母数 k に依存して一意的に決まる数値である。二つのパラメータ K と K' をまとめるには, やはり, 母数 k に依存して一意的に決まる数値でなければならない。その性質をもつパラメータとして,

$$\tau \equiv \frac{iK'}{K},$$

を導入する。母数 k の増加に対して, K' は単調減少, K は単調増加であるので, パラメータ τ の虚部は単調減少となる。つまり, k に依存して一意的に決まる数値である。しかも, τ の虚数部は $(0, \infty)$ の範囲を占めることがわかる。さらに, 変数 z に関して $z/2K \mapsto z$ のように置き換える。したがって, Θ 関数系の関数の記述を簡略化するために用いた記号 u と q は,

$$u = e^{\pi i z}, \qquad q = e^{\pi i \tau}, \tag{4.14}$$

のように与えられる。このとき, Θ 関数系の関数は,

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= -i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}(u^{2n+1} - u^{-(2n+1)})\\ &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}u^{2n+1},\end{aligned} \tag{4.15a}$$

$$\vartheta_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}(u^{2n+1} + u^{-(2n+1)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}u^{2n+1}, \tag{4.15b}$$

$$\vartheta_3(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}(u^{2n} + u^{-2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}u^{2n}, \tag{4.15c}$$

$$\vartheta_4(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(u^{2n} + u^{-2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}u^{2n}, \tag{4.15d}$$

のように書き換えることができる。これら新しく定義された関数を**テータ関数**と呼ぶ。テータ関数は (4.14) のような置き換えをしているため, 形式上, 前節で導入した Θ 関数系とまったく同じように見える。しかし, 厳密には,

$$\vartheta_1(z) = H(2Kz), \qquad \vartheta_2(z) = H_1(2Kz),$$

$$\vartheta_3(z) = \Theta_1(2Kz), \qquad \vartheta_4(z) = \Theta(2Kz),$$

のような対応関係が成立する。これら新しい関数を用いると, ヤコビの楕円関数は,

$$\mathrm{sn}\,2Kz = \frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(z)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_4(z)}, \quad \mathrm{cn}\,2Kz = \frac{\vartheta_4(0)\,\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_4(z)}, \quad \mathrm{dn}\,2Kz = \frac{\vartheta_4(0)\,\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(z)}, \tag{4.16}$$

のように書くことができる。ヤコビの楕円間に関して母数が $0 < k < 1$ であることから, 完全楕円積分 K と K' はともに正の実数であった。それに対応するパラメータ τ は虚部が正の数である純虚数である。さらに一般化して, τ が複素数であっても, その虚部が正の数であれば, $|q| < 1$ となるので, 級数 (4.15a) から (4.15d) が収束する。テータ関数は $\vartheta_1(z)$ のようにパラメータ τ を省略することが多いのだが, τ の依存性を強調する場合には, $\vartheta_1(z;\tau)$ のように書く。

新たに定義したテータ関数においても, Θ 関数系と同様に, 指数関数を三角関数に書き換えることができる。そのように関数を書き換えると,

$$\vartheta_1(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi z, \tag{4.17a}$$

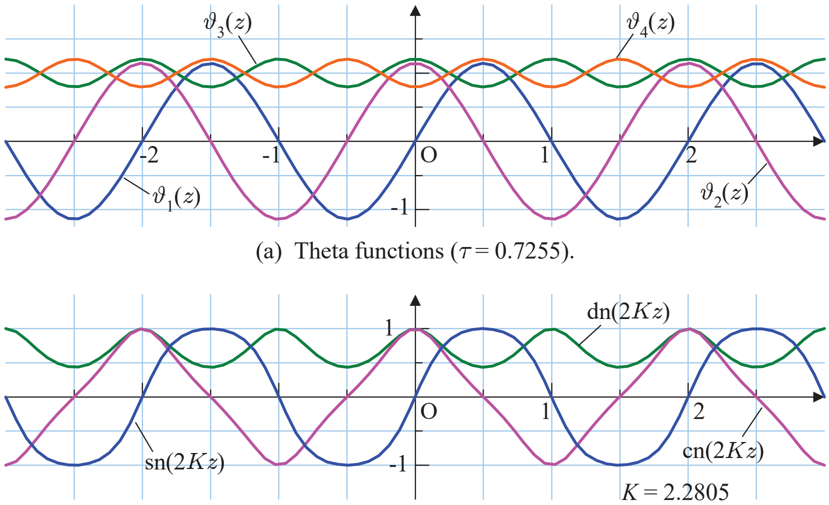
$$\vartheta_2(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi z, \tag{4.17b}$$

$$\vartheta_3(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi z, \tag{4.17c}$$

$$\vartheta_4(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi z, \tag{4.17d}$$

のようになる。この式から, テータ関数のうち $\vartheta_1(z)$ が奇関数で, 一方, $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$, $\vartheta_4(z)$ が偶関数であることがわかる。特に, $q \to 0$ の極限で, $\vartheta_1(z) = 2q^{1/4}\sin\pi z$, $\vartheta_1(z) = 2q^{1/4}\cos\pi z$, $\vartheta_3(z) = \vartheta_4(z) = 1$ となる。つまり, この極限では $\mathrm{sn}\,2\pi z = \sin\pi z$, $\mathrm{cn}\,2\pi z = \cos\pi z$, $\mathrm{dn}\,2\pi z = 1$ が成立する。実は, $q \to 0$ の極限は, 楕円関数の母数がゼロに近いことを意味する。

フーリエ変換で表された級数 (4.17a) から (4.17d) は, 収束が速い。なぜなら, $0 < k < 1$ なる母数に対して, $|q| < 1$ であり, フーリエ級数の n 次の展開係数が q^{n^2}, または, $q^{(n+1/2)^2}$ であるので, n の増加に対して急速にゼロに収束するからである。例えば, 楕円関数の母数 $k = 0.9$ に対応して, $\tau = 0.72554$ となる。その条件では, $q = e^{\pi i\tau} = 0.10235$ となるので 5 次の級数展開で 10 進数の 20 桁以上の有効桁が得られるのだ。その意味で, これらの公式はヤコビの楕円関数を計算する上で有用である。ヤコビの楕円関数を計算するには, 級数 (4.17a) から (4.17d) を用いてテータ関数を計算し, その結果を公式 (4.16) に代入すればよい。一例として, 実数変数を与えたときのテータ関数と, それを用いてヤコビの楕円関数を計算した結果を図 4.1 に示す。 この例では, 楕円関数の母数を $k = 0.9$ とした。ヤコビの楕円関数は, 既に, 第 2 章でテイラー級数による算出法を示した。しかし, 級数展開



(a) Theta functions ($\tau = 0.7255$).

(b) Elliptic functions calculated by the formulea.

図 4.1: テータ関数とそれらから計算されるヤコビの楕円関数 ($k = 0.9$)

では任意の変数に対して十分な収束速度を約束できないので, 収束速度を得るために倍角公式を繰り返す工夫を施した。一方, テータ関数による計算ではそのような工夫は不要である。

パラメータ τ が $\tau \equiv iK'/K$ のように定義され, テータ関数の変数 z が Θ 関数系の $2Kz$ に対応していることを利用すると, 各関数の零点が,

$$\vartheta_1 \text{ 関数の零点: } m + n\tau$$

$$\vartheta_2 \text{ 関数の零点: } m + 1/2 + n\tau$$

$$\vartheta_3 \text{ 関数の零点: } m + 1/2 + (n + 1/2)\tau$$

$$\vartheta_1 \text{ 関数の零点: } m + (n + 1/2)\tau$$

となることが容易にわかる。さらに, 主要点における各関数の値も容易に計算できる。導出過程を特に説明するすることもないだろうから, 結果のみを表 4.3 に示す。なお, 表 4.3 で補助的に用いた記号 $\lambda(z)$ と $\mu(z)$ は,

$$\lambda(z) = q^{-1/4}u^{-1} = e^{-(z+\tau/4)\pi i}, \quad \mu(z) = q^{-1}z^{-1} = e^{-(2z+\tau)\pi i}, \tag{4.18}$$

である。これらの表によると, テータ関数は擬二重周期性をもっている。ます, $\vartheta_1(z)$ と $\vartheta_2(z)$ は 2 を周期とし, $\vartheta_3(z)$ と $\vartheta_4(z)$ は 1 を周期とする。一方, 補助的な振幅関数 $\lambda(z)$ と $\mu(z)$ を気にしなければ, $\vartheta_1(z)$ は $1 + \tau$ を, $\vartheta_2(z)$ と $\vartheta_3(z)$ は τ を周期とし, $\vartheta_4(z)$ は 2τ を周期とする。

前節で $\Theta(z)$ が無限乗積で書けることを示した。関数 $\Theta(z)$ と対応関係にある $\vartheta_4(z)$ は無

表 4.3: 主要点におけるテータ関数の値

関数 \ 変数	ϑ_1 関数	ϑ_2 関数	ϑ_3 関数	ϑ_4 関数
$-z$	$-\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$
$z+1/2$	$\vartheta_2(z)$	$-\vartheta_1(z)$	$\vartheta_4(z)$	$\vartheta_3(z)$
$z+1$	$-\vartheta_1(z)$	$-\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$
$v+\tau/2$	$i\lambda(z)\,\vartheta_4(z)$	$\lambda(z)\,\vartheta_3(z)$	$\lambda(z)\,\vartheta_2(z)$	$i\lambda(z)\,\vartheta_1(z)$
$z+\tau$	$-\mu(z)\,\vartheta_1(z)$	$\mu(z)\,\vartheta_2(z)$	$\mu(z)\,\vartheta_3(z)$	$-\mu(z)\,\vartheta_4(z)$
$z+(1+\tau)/2$	$\lambda(z)\,\vartheta_3(z)$	$-i\lambda(z)\,\vartheta_4(z)$	$i\lambda(z)\,\vartheta_1(z)$	$\lambda(z)\,\vartheta_2(z)$
$z+1+\tau$	$\mu(z)\,\vartheta_1(z)$	$-\mu(z)\,\vartheta_2(z)$	$\mu(z)\,\vartheta_3(z)$	$-\mu(z)\,\vartheta_4(z)$

限乗積によって表現できる。その無限乗積表現は,

$$\begin{aligned}\vartheta_4(z) &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}u^2)(1-q^{2n-1}u^{-2}) \\ &= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi z + q^{4n-2}),\end{aligned}$$

となる。ただし, Q_0 は前節で Θ 関数系を記述したときと同様に,

$$Q_0 \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}),$$

である。これを足がかりに, $\vartheta_3(z) = \vartheta_3(z+1/2)$ の関係から $\vartheta_3(z)$ を無限乗積で書ける。さらに, $\vartheta_2(z) = \lambda^{-1}\vartheta_3(z+\tau/2)$, $\vartheta_1(z) = -\vartheta_2(z+1/2)$ を利用すると, $\vartheta_2(z)$ と $\vartheta_1(z)$ が順次, 無限乗積で表現できる。数式変形では, z から $z+1/2$ と $z+\tau/2$ の置き換えは, u において iu と $q^{1/2}u$ への置き換えに対応する。無限乗積に表現した結果を書くと,

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= -iq^{1/4}(u-u^{-1})\,Q_0 \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}u^2)(1-q^{2n}u^{-2}) \\ &= 2q^{1/4}\sin\pi z \cdot Q_0 \prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi z + q^{4n}), \qquad (4.19\text{a})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(z) &= q^{1/4}(u+u^{-1})\,Q_0 \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}u^2)(1+q^{2n}u^{-2}) \\ &= 2q^{1/4}\cos\pi z \cdot Q_0 \prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi z + q^{4n}), \qquad (4.19\text{b})\end{aligned}$$

$$\vartheta_3(z) = Q_0 \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}u^2)(1+q^{2n-1}u^{-2})$$

$$= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}), \tag{4.19c}$$

$$\vartheta_4(z) = Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} u^2)(1 - q^{2n-1} u^{-2})$$

$$= Q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}), \tag{4.19d}$$

のようになる。次に, Q_0 と同様に,

$$Q_1 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}), \quad Q_2 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}), \quad Q_3 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}),$$

のように定義してみよう。ここで, $z = 0$ (または, $u = 1$) を無限乗積の公式に代入すると,

$$\vartheta_1(0) = 0, \tag{4.20a}$$

$$\vartheta_2(0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4} Q_0 Q_1^2, \tag{4.20b}$$

$$\vartheta_3(0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = Q_0 Q_2^2, \tag{4.20c}$$

$$\vartheta_4(0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = Q_0 Q_3^2, \tag{4.20d}$$

が導出される。ところで, 定義式から

$$Q_0 Q_1 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n}), \qquad Q_2 Q_3 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{4n-2}),$$

であるので, $Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = Q_0$ が成立することがわかる。さらに, $Q_0 \neq 0$ であるので,

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 1, \tag{4.21}$$

が導かれる。

続いて, $\vartheta_1(0) = 0$ であることから, 微分の定義によって

$$\vartheta_1'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\vartheta_1(z)}{z},$$

である。この関係を利用すると, $\vartheta_1'(0) = 2\pi q^{1/4} Q_0^3$ であるが, 上で導出した積の公式によると,

$$\vartheta_1'(0) = \pi\, \vartheta_2(0)\, \vartheta_3(0)\, \vartheta_4(0), \tag{4.22}$$

なる関係式が得られる。

4.4 テータ関数の間の関係

前節の表 4.3 によると, テータ関数の自乗は, 周期性や擬周期性を示す。正弦波の自乗の記述 ($\sin^2 z$ など) にならい, テータ関数の自乗を $\vartheta^2(z)$ と書くことにすると,

$$\vartheta^2(z+1) = \vartheta^2(z), \quad \vartheta^2(z+\tau) = [\mu(z)]^2\vartheta(z),$$

が成立する。なお, この数式はすべてのテータ関数について成立するので, 関数を識別する添え字を省略している。この数式によると, テータ関数の自乗は周期 1 と擬周期 τ をもつ関数である。この性質のため, テータ関数自乗の比:

$$f_1(z) \equiv \frac{\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_2^2(z)}, \quad f_2(z) \equiv \frac{\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_2^2(z)},$$

は, ともに 1 と τ を周期とする楕円関数となる。これらの楕円関数は $\vartheta_2(z)$ の零点を極とする。関数 $\vartheta_2(z)$ の零点は無限乗積表現 (4.19b) によって $z = 1/2$ であることがわかる。よって, 楕円関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は $z = 1/2$ を極とする。さらに, (4.19b) によると, $z = 1/2$ のとき乗積記号が作用する因子はどれもゼロでないので, その零点の位数は 1 である。したがって, $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は $z = 1/2$ に 2 位の極をもつのである。それら楕円関数の基本周期平行四辺形, すなわち, 原点から 1 および原点から τ が張る平行四辺形, の内部に $z = 1/2$ 以外の極が存在しないことも無限乗積 (4.19b) からわかる。つまり, $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は 2 位の楕円関数である。

関数 $f_1(z)$ は上の考察によると, -2 次の項が最低次数である。その最低次数の展開係数は,

$$\lim_{z\to 1/2}\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_2^2(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2\vartheta_2^2(z)}{\vartheta_1^2(z)} = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_1'(0)^2},$$

のように計算できる。同様に, $f_2(z)$ の最低次数の展開係数は $\vartheta_3^2(0)/\vartheta_1'(0)$ となる。一方,

$$\vartheta_3^2(0)\, f_1(z) - \vartheta_2^2(0)\, f_2(z), \tag{4.23}$$

なる関数を考えよう。この関数は, $f_1(z)$, $f_2(z)$ と同一の周期をもつ楕円関数である。ところが, この関数は互いに -2 次の項が打ち消しあうように定義されているので, 位数は 1 以下となるはずである。しかし, 前節で調べたように 1 位の楕円関数は存在しない。また, 0 位の楕円関数が定数となるので, (4.23) で定義された関数は定数関数である。その定数を求めるため, 関数に $z = 0$ を代入すると,

$$c = \vartheta_3^2(0)\frac{\vartheta_1^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} - \vartheta_2^2(0)\frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_2^2(0)} = -\vartheta_4^2(0),$$

である。ここで, $\vartheta_1(0) = 0$ であることを利用した。この事実を利用して (4.23) で定義される関数に $\vartheta_2^2(z)$ を乗じると,

$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_4^2(z) - \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(z) = \vartheta_4^2(0)\,\vartheta_2^2(z), \tag{4.24a}$$

なる関係が得られる。この式の変数 z の代わりに $z+1/2$, $z+\tau/2$, $z+(1+\tau)/2$ を順に代入すると,

$$\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_3^2(z) - \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_2^2(z) = \vartheta_4^2(0)\,\vartheta_1^2(z), \tag{4.24b}$$

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(z) - \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1^2(z) = \vartheta_4^2(0)\,\vartheta_3^2(z), \tag{4.24c}$$

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3^2(z) - \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2^2(z) = \vartheta_4^2(0)\,\vartheta_4^2(z), \tag{4.24d}$$

が得られる。ここで, (4.24a) から (4.24d) に, それぞれ, $\vartheta_2^2(z)$, $-\vartheta_1^2(z)$, $-\vartheta_3^2(z)$, $\vartheta_4^2(z)$ を乗じ, 得られた積をすべて加算する。その結果が,

$$\vartheta_4(0)\left[\vartheta_2^4(z) - \vartheta_1^4(z) - \vartheta_3^4(z) + \vartheta_4^4(z)\right] = 0,$$

であるので,

$$\vartheta_2^4(z) + \vartheta_4^4(z) = \vartheta_1^4(z) + \vartheta_3^4(z), \tag{4.25}$$

なる関係が得られる。

4.5　ヤコビの楕円関数との関係

楕円関数におけるテータ関数の役割は大きい。テータ関数とヤコビのヤコビの楕円関数の関係を調べると, 母数 k と完全楕円積分 K までもがテータ関数を用いて表現できることがわかる。

母数 k が $(0,1)$ の範囲に含まれる場合のヤコビの楕円関数は, 前節で書いたように,

$$\mathrm{sn}\,2Kz = \frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(z)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_4(z)},$$

なるテータ関数を用いた形で表現できる。なお, テータ関数のパラメータ τ は, $\tau \equiv iK'/K$ で与えられる。この sn 関数のテータ関数表現から, 定数因子を除き, 微分すると,

$$\left(\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right)' = \frac{\vartheta_1'(z)\,\vartheta_4(z) - \vartheta_1(z)\,\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4^2(z)},$$

となる。なお, プライム ($'$) は z についての微分である。もともと, $\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$ が周期 2 と τ の楕円関数であるので, それを微分して得られる関数も周期 2 と τ の楕円関数である。さらに, この導関数に $\vartheta_4^2(z)/\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)$ を乗じた積:

$$f(z) \equiv \frac{\vartheta_1'(z)\,\vartheta_4(z) - \vartheta_1(z)\,\vartheta_4'(z)}{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)},$$

を考えよう。この $f(z)$ は同様に, 周期 2 と τ をもつ楕円関数である。正確には, $f(z)$ は 1 と $\tau/2$ を基本周期とする楕円関数である。この基本周期については, 後に証明する。原点

を基点とする基本周期平行四辺形の内部に, $\vartheta_2(z)$ は $z = 1/2$ に 1 位の零点をもち, $\vartheta_3(z)$ は零点をもたない。よって, $f(z)$ は基本平行四辺形の内部に 1 位の極 $z = 1/2$ だけをもつことがわかる。ところが, 楕円関数の性質によると, 1 位以下の次数の楕円関数は定数でなければならないので, $f(z)$ は定数関数である。その定数を得るには, $f(0)$ を計算してみるとよい。そのうち, $\vartheta_1'(0)$ が (4.22) によって与えられ, $\vartheta_4'(0) = 0$ が (4.17d) によってわかるので, 求める定数は,

$$f(0) = \pi\,\vartheta_4^2(0),$$

となる。これまでの計算結果を利用すると, $\mathrm{sn}\,2Kz$ の導関数は,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{sn}\,2Kz &= \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\left(\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right)' = \frac{\pi\vartheta_3(0)\,\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)} \\ &= \pi\,\vartheta_3^2(0)\frac{\vartheta_4(0)\,\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_4(0)\,\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(z)},\end{aligned}$$

のように書くことができる。ここで, テータ関数同士の関係 (4.24a) から (4.24d) を利用すると,

$$\begin{aligned}\frac{\vartheta_4^2(0)\,\vartheta_2^2(z)}{\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_4^2(z)} &= \frac{\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_4^2(z) - \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_4^2(z)} = 1 - \mathrm{sn}^2\,2Kz, \\ \frac{\vartheta_4^2(0)\,\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(z)} &= \frac{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(z) - \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_4^2(z)} \\ &= 1 - \frac{\vartheta_2^4(0)}{\vartheta_3^4(0)}\frac{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(z)} = 1 - \frac{\vartheta_2^4(z)}{\vartheta_3^4(z)}\,\mathrm{sn}^2\,2Kz,\end{aligned}$$

のように計算できるので, $\mathrm{sn}\,2Kz$ の導関数は,

$$(\mathrm{sn}\,2Kz)' = \pi\,\vartheta_3^2(0)\ \mathrm{cn}\,2Kz\cdot\left(1 - \frac{\vartheta_2^4(v)}{\vartheta_3^4(v)}\,\mathrm{sn}^2\,2Kz\right)^{1/2},$$

のように書くことができる。ここで, $(\mathrm{sn}\,2Kz)' = 2K\ \mathrm{cn}\,2Kz\,\mathrm{dn}\,2Kz$ であることに注意しよう。しかも, $\mathrm{dn}\,2Kz = (1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,2Kz)^{1/2}$ である。その事実によって,

$$K = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0), \qquad k = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}, \tag{4.26}$$

なる関係が導出される。また, 補母数に関しては,

$$K' = \frac{\pi}{2i}\tau\vartheta_3^2(0), \qquad k' = \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}, \tag{4.27}$$

が成立する。この公式のうち, 完全楕円積分 K' に関する公式は, テータ関数のパラメータ $\tau = iK'/K$ から導かれる。一方, k' に関する公式は, 単純に $k'^2 = 1 - k^2$ から導出できる。ただし, その計算過程で公式 (4.24d) を使った。ヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}\,2Kz$ は, 変数 z に関して 2 と τ を周期とする[2]。当然, その周期は, テータ関数表現 $\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$ の周期と一致する。

[2] これは, $\mathrm{sn}\,z$ が $4K$ と $2iK'$ を周期とすることに相当する。