

第2章 ヤコビのの楕円関数

本章では、逆三角関数と三角関数の関係のように、楕円積分の逆関数となる関数を導入する。その逆関数はヤコビの楕円関数と呼ばれる関数である。本章の後半で例を示すとおり、ヤコビの楕円関数は物理現象を表現するために有用な関数である。

2.1 楕円積分の逆関数

ヤコビの楕円関数は、楕円積分の逆関数を正弦関数にならって定義される。正弦関数 $\sin u$ を例にとると、その逆関数¹ $\arcsin x$ は定積分:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

で定義される。ただし、実数関数の範囲では、 x は $[-1, 1]$ の範囲に限定され、逆正弦関数の主値は $[-\pi/2, \pi/2]$ の範囲に収まる。この三角関数にならって、第1種の楕円積分:

$$u = F_J(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

の逆関数は $x = \operatorname{sn} u$ と定義される。この関数は、母数 k にも依存するので、 $\operatorname{sn}(u, k)$ と書かれるが、誤解を生じない場合、簡単に $\operatorname{sn} u$ と書く。ところで、誰がこの記法を定着させたか知らないが、楕円積分は $F(x, k)$ と書くにも関わらず、楕円関数は $\operatorname{sn}(u, k)$ と書く。このように、楕円積分と楕円関数では、変数の記述順が違うのだから困ったものだ。話を戻し、実数関数の範囲では、第1種の楕円積分の変数 x は $[-1, 1]$ の範囲に限られる。その x の範囲全体において、被積分関数が正の数であるので、第1種楕円積分は x の増加に対して単調増加となる。そのため、 x が $[-1, 1]$ の範囲において、逆関数 $\operatorname{sn} u$ が一意的に定まるはずである。逆に、第1種楕円積分は sn 関数の逆関数なので、 $F_J(k, x) = \operatorname{arcsn} x$ と書くことができる。さらに、 $\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$ にならって、

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u},$$

¹逆正弦関数は $\sin^{-1} x$ や $\operatorname{Sin}^{-1} x$ と書くこともある。しかし、 $\sin^2 x$ が正弦関数の自乗を表すことを考えると、著者は $\sin^{-1} x$ を逆正弦関数と読み替えることに抵抗を感じるので、本書では逆正弦関数を $\arcsin x$ と記述する。

なる2つの補助関数を定義しておく。なお, sn 関数, cn 関数, dn 関数は, それぞれ, 単純にエヌ関数, シーエヌ関数, ディーエヌ関数と読む。

上のように定義された sn 関数は奇関数である。つまり, $\text{sn}(-u) = -\text{sn } u$ が成立する。その性質は, 第1種楕円積分の積分域を $[0, -x]$ として計算すればよい。

$$\int_0^{-x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = -u.$$

この計算は $t = -x$ の置き換えを用いた。この計算結果から, $-x = \text{sn}(-u)$ であると言えるので, $\text{sn}(-u) = -\text{sn } u$ が成立する。言い換えると, sn 関数は奇関数である。逆に, 補助関数 cn 関数と dn 関数は, それらの定義から明らかに偶関数である。

特別な値として, 積分域を $[0, 1]$ とすると, 楕円積分は完全楕円積分になるので,

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

である。右辺の K は $K(k)$ を簡略化した記号である。この積分結果から, $\text{sn } K = 1$, さらに, sn 関数が奇関数であるので $\text{sn}(-K) = -1$ が得られる。補助関数を含め, 楕円関数を定義域 $[-K, K]$ での増減を調べると次の表のようになる。なお, 表中の k' は補母数 ($= \sqrt{1-k'^2}$) である。

表 2.1: 定義域の中における楕円関数の増減

	$-K$	\dots	0	\dots	K
sn u	-1	\nearrow	0	\nearrow	1
cn u	0	\nearrow	1	\searrow	0
dn u	k'	\nearrow	1	\searrow	k'

現時点でヤコビの楕円関数に関してこの性質までが規定できる。つまり, 補助関数を含め楕円関数の定義域は $[-K, K]$ である。関数の値域は, sn 関数は $[-1, 1]$, cn 関数は $[0, 1]$, dn 関数は $[k', 1]$ である。まだ関数の定義域が狭いが, これから様々な規則性を見つけながら定義域を拡張していく。

2.2 微分公式

楕円関数の性質を探る手がかりは微分に関する性質である。ヤコビの楕円関数が第1種楕円積分 $F_J(k, x)$ の逆関数であることを利用すればよい。楕円積分 $u = F_J(k, x)$ を x につ

いて微分すると,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

が得られる。このとき, $x = \operatorname{sn} u$ であるはずなので, この導関数の逆関数をとると,

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

が得られる。補助関数が sn 関数の関数で記述できているので, 補助関数の導関数も容易に計算することができ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{cn} u &= \frac{\operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}} = \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u &= \frac{\operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}} = \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \end{aligned}$$

が得られる。念のため, 得られた微分公式を改めて書くと,

$$(\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{cn} u)' = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{dn} u)' = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \quad (2.1)$$

となる。ただし, プライム (') は u についての微分を意味する。

テイラー展開 楕円関数の微分公式を得たので, 楕円関数をテイラー級数で展開することが可能である。楕円関数 $\operatorname{sn} u$ を順次, 微分を繰り返していくと,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sn} u)' &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ (\operatorname{sn} u)'' &= -\operatorname{sn} u \operatorname{sn}^2 u - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn}^2 u = -(1+k^2) \operatorname{sn} u + 2k^2 \operatorname{sn}^3 u, \\ (\operatorname{sn} u)''' &= -(1+k^2)(\operatorname{sn} u)' + 6k^2 \operatorname{sn}^2 u (\operatorname{sn} u)' = -(1+k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)', \\ (\operatorname{sn} u)^{(4)} &= -(1+k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)'' + 12k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'^2, \\ (\operatorname{sn} u)^{(5)} &= -(1+k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)''' + 36k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'(\operatorname{sn} u)'' + 12k^2(\operatorname{sn} u)'^3, \\ (\operatorname{sn} u)^{(6)} &= 48k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'(\operatorname{sn} u)''' + 72k^2(\operatorname{sn} u)'^2(\operatorname{sn} u)'' \\ &\quad + 36k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)''^2 - (1+k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)^{(4)}, \\ (\operatorname{sn} u)^{(7)} &= 120k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)''(\operatorname{sn} u)''' + 120k^2(\operatorname{sn} u)'^2(\operatorname{sn} u)'' + 180k^2(\operatorname{sn} u)'(\operatorname{sn} u)''^2 \\ &\quad + 60k^2 \operatorname{sn} u (\operatorname{sn} u)'(\operatorname{sn} u)^{(4)} - (1+k^2 + 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)(\operatorname{sn} u)^{(5)}, \end{aligned}$$

が得られる。これを利用して, $u = 0$ を中心にテイラー級数展開する。級数展開の中心 $u = 0$ では, $\operatorname{sn} u = 0$, $\operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = 1$ である。これを利用して, 導関数の値を調べると, 偶数階の導関数はすべてゼロであることがわかる。奇数階の導関数の値を計算してすると

sn 関数のテイラー級数展開が得られる。補助関数についても、同様に高階の導関数を評価すればテイラー級数展開できる。結果を書くと、

$$\operatorname{sn} u = u - \frac{1+k^2}{3!}u^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}u^5 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!}u^7 + \dots \quad (2.2a)$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1+4k^2}{4!}u^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!}u^6 + \dots \quad (2.2b)$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - \frac{k^2}{2!}u^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{4!}u^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{6!}u^6 + \dots \quad (2.2c)$$

のようになる。ここでは、cn 関数と dn 関数の展開係数を得るための手順を省略したが、sn 関数と同様の手順で計算すれば展開係数が得られる。この式から判定しづらいが、これらの級数は $|u| < K' (= K(k'))$ が収束半径²である。

2.3 加法公式

三角関数や双曲線関数と同じように、ヤコビの楕円関数も加法公式をつくることができる。しかし、三角関数や双曲線関数のように簡単な構造ではない。まず、sn 関数の加法公式を考察しよう。ヤコビの楕円関数 sn u は母数が $k = 0$ のとき $\sin u$ と同一であり、 $k = 1$ のとき $\tanh u$ と同一である。それら二つの関数に関する加法公式は、

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v,$$

$$\tanh(u+v) = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u \tanh v},$$

である。楕円関数の補助関数が、 $k = 0$ のとき $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = \cos u$ であり、 $k = 1$ のとき $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = 1 - \tanh^2 u$ であることに注意すると、楕円関数の加法公式が、

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

となることが推測できる。楕円関数の母数が $k = 0, 1$ となる場合、この推測は上に示した正弦関数と双曲線正接関数の加法公式と一致する。この推測が正しいことを一般の母数 k でも成立することを証明しよう。

推測した加法公式を証明するには、次のような形を考えるとよい。

$$\operatorname{sn} c = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(c-u) \operatorname{dn}(c-u) + \operatorname{sn}(c-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(c-u)}.$$

²後の章で明らかにするが、ヤコビの楕円関数を複素数に拡張した場合、 $u = iK'$ が原点に最も近い極である。その事実により、原点を中心にするテイラー級数展開の収束半径が $|u| < K'$ となる。

この式は c を定数とする。この式の右辺が変数 u と無関係であることを証明すればよい。数式変形の便宜上、分母を $N(u)$ 、分子を $D(u)$ としよう。つまり、

$$\begin{aligned} N(u) &= \operatorname{sn} u \operatorname{cn}(c-u) \operatorname{dn}(c-u) + \operatorname{sn}(c-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ &= \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn} u)' - \operatorname{sn} u (\operatorname{sn}(c-u))', \\ D(u) &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(c-u), \end{aligned}$$

である。ここで、プライム ($'$) は u についての微分を意味する。この後の計算のため、 sn 関数の 2 階微分:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sn} u)'' &= -(1+k^2) \operatorname{sn} u + 2k^2 \operatorname{sn}^3 u, \\ (\operatorname{sn}(c-u))'' &= -(1+k^2) \operatorname{sn}(c-u) + 2k^2 \operatorname{sn}^3(c-u), \end{aligned}$$

を計算しておく。これを用いて分子と分母を微分すると、

$$\begin{aligned} N'(u) &= \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn} u)'' - \operatorname{sn} u (\operatorname{sn}(c-u))'' \\ &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(c-u)), \\ D'(u) &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(c-u) \operatorname{dn}(c-u) - \operatorname{sn}(c-u) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u), \end{aligned}$$

が得られる。これを利用すると、

$$\begin{aligned} N(u) D'(u) &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) (\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2(c-u) \operatorname{dn}^2(c-u) - \operatorname{sn}^2(c-u) \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u) \\ &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) [\operatorname{sn}^2 u (1 - \operatorname{sn}^2(c-u))(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(c-u)) \\ &\quad - \operatorname{sn}^2(c-u) (1 - \operatorname{sn}^2 u) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)] \\ &= 2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(c-u) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(c-u)) (\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(c-u)) \\ &= N'(u) D(u), \end{aligned}$$

が導かれるのだが、この関係式から、

$$\left(\frac{N(u)}{D(u)} \right)' = \frac{N'(u) D(u) - N(u) D'(u)}{D(u)^2} = 0,$$

となり、証明する関係式の右辺が確かに u と無関係な定数であることが明らかになる。その定数とは、 u に適当な値、例えば $u = 0$ を代入して、

$$\frac{N(0)}{D(0)} = \operatorname{sn} c,$$

であることが導かれる。したがって、証明する関係式が成立することが示せた。◻

補助関数 $\text{cn } u$ と $\text{dn } u$ についても同様に加法公式を導出することができる。それらの加法公式をまとめて書くと、

$$\text{sn}(u+v) = \frac{\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v + \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (2.3a)$$

$$\text{cn}(u+v) = \frac{\text{cn } u \text{ cn } v - \text{sn } u \text{ sn } v \text{ dn } u \text{ dn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (2.3b)$$

$$\text{dn}(u+v) = \frac{\text{dn } u \text{ dn } v - k^2 \text{sn } u \text{ sn } v \text{ cn } u \text{ cn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (2.3c)$$

となる。これがヤコビの楕円関数に関する加法定理である。

倍角と半角の公式 三角関数と同様に、楕円関数も加法公式を利用して倍角の公式を導出することができる。この加法公式に $u = v$ を代入すると、

$$\text{sn } 2u = \frac{2 \text{sn } u \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^4 u}, \quad (2.4a)$$

$$\text{cn } 2u = \frac{1 - 2 \text{sn}^2 u + k^2 \text{sn}^4 u}{1 - k^2 \text{sn}^4 u}, \quad (2.4b)$$

$$\text{dn } 2u = \frac{1 - 2k^2 \text{sn}^2 u + k^2 \text{sn}^4 u}{1 - k^2 \text{sn}^4 u}, \quad (2.4c)$$

なる倍角公式が得られる。特に、 cn 関数の倍角の公式は、

$$k^2(1 + \text{cn } 2u) \text{sn}^4 u - 2 \text{sn}^2 u + 1 - \text{cn } 2u = 0,$$

なる方程式となる。この方程式を $\text{sn}^2 u$ について解くと、

$$\begin{aligned} \text{sn}^2 u &= \frac{1 - \sqrt{1 - k^2(1 - \text{cn}^2 u)}}{k^2(1 + \text{cn } 2u)} = \frac{1 - \text{dn } 2u}{k^2(1 + \text{cn } 2u)} \\ &= \frac{(1 - \text{dn } 2u)(1 - \text{cn } 2u)}{k^2(1 - \text{cn}^2 2u)} = \frac{1 - \text{cn } 2u}{1 + \text{dn } 2u}, \end{aligned}$$

が得られる。この結果を利用すれば、ただちに $\text{cn}^2 u$ と $\text{dn}^2 u$ を計算することができる。それらの結果を半角の公式として書くと、

$$\text{sn}^2 \frac{u}{2} = \frac{1 - \text{cn } u}{1 + \text{dn } u}, \quad (2.5a)$$

$$\text{cn}^2 \frac{u}{2} = \frac{\text{cn } u + \text{dn } u}{1 + \text{dn } u}, \quad (2.5b)$$

$$\text{dn}^2 \frac{u}{2} = \frac{k'^2 + \text{dn } u + k^2 \text{cn } u}{1 + \text{dn } u}, \quad (2.5c)$$

が得られる。この公式に $u = K$ を代入すると、

$$\text{sn} \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \text{cn} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \quad \text{dn} \frac{K}{2} = \sqrt{k'},$$

が得られる。

2.4 実数全体への定義域拡張

前節で導出した加法公式を利用するとヤコビの楕円関数の定義域を実数全体に拡張することができる。まず、加法公式について、 $v = K$ を代入しよう。その際、 $\operatorname{sn} K = 1$, $\operatorname{cn} K = 0$, $\operatorname{dn} K = \sqrt{1 - k'^2}$ ($= k'$)に注意すると、

$$\operatorname{sn}(u + K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cn}(u + K) = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u}, \quad \operatorname{dn}(u + K) = \frac{k'}{\operatorname{dn}^2 u},$$

が得られる。これまでの議論では、ヤコビの楕円関数の定義域は $[-K, K]$ だった。しかし、その定義域で定義された楕円関数に対して、この公式を適用して実数全体で楕円関数を定義できるようにしよう。倍角の公式を用いると、

$$\operatorname{sn} 2K = 0, \quad \operatorname{cn} 2K = -1, \quad \operatorname{dn} 2K = 1,$$

が得られる。この結果を利用してさらに加法公式を適用すると、

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u,$$

なる関係が導かれる。この関係式をもう1回適用すると、 $\operatorname{sn}(u + 4K) = \operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn}(u + 4K) = \operatorname{cn} u$ となるので、 sn 関数と cn 関数は $4K$ の周期をもつ。一方、 dn 関数は $2K$ の周期をもつ。前に説明したように、 K は楕円関数の母数 k に依存する値である。一例として $k = 0.8$ を挙げると、ヤコビの楕円関数は図2.1に示す曲線を描く。母数 k が小さい場合、 sn 関数と cn 関数は正弦波に近い形状であるが、 k が大きくなると図のように sn 関数は上下を潰したような形状になる。逆に、 cn 関数は上下に尖った形状になる。形状が正弦波からずれても、ヤコビの楕円関数は周期関数であり、実数全体にわたって単一のパターンを繰り返す関数である。なお、図に示す $k = 0.8$ の場合、楕円関数の周期は $4K = 7.9812$ であり、これは正弦波の周期の約1.27倍である。

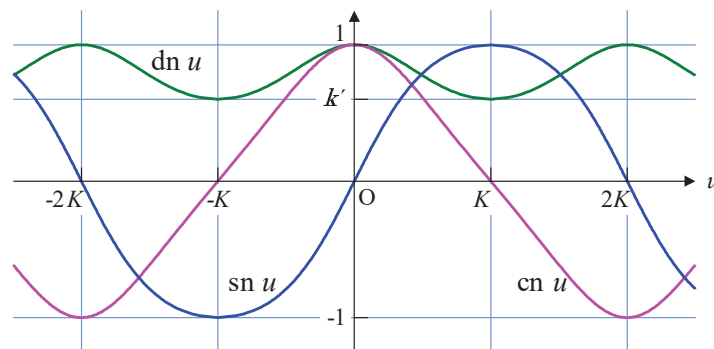


図 2.1: ヤコビの楕円関数 ($k = 0.8$)

第1種の楕円積分は、 $x = \sin \varphi$ のように置き換えると、

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

のように書き換えることができる。このとき、 u は φ の関数として、実数全体で単調増加で1価の連続関数となる。その逆関数を φ の振幅と呼び、 $\varphi = \text{am } u$ なる振幅関数で表す。この振幅関数を用いると、sn 関数は、

$$\text{sn } u = x = \sin \varphi = \sin(\text{am } u),$$

と書くことができる。同様に cn 関数は、

$$\text{cn } u = \cos(\text{am } u),$$

と書くことができる。この振幅関数は図 2.2 に示す曲線を描く。母数が $k = 0$ のとき、 $\text{sn } u$ は $\sin u$ と一致するので、 $\text{sn } u = \sin u = \sin(\text{am } u)$ であることから $\text{am } u = u$ となる。母数が大きくなるほど図 2.2 に描くように直線からずれてくる。なお、母数 k が異なると楕円関数の周期が異なるので、このグラフの横軸は K で正規化した尺度で描いている。図の $k = 0.9$ のグラフが、 $u/K = 0$ で傾きが大きく、 $u/K = \pm 1$ で傾きが小さいことは、図 2.1 に示した sn 関数の形状と合致する。

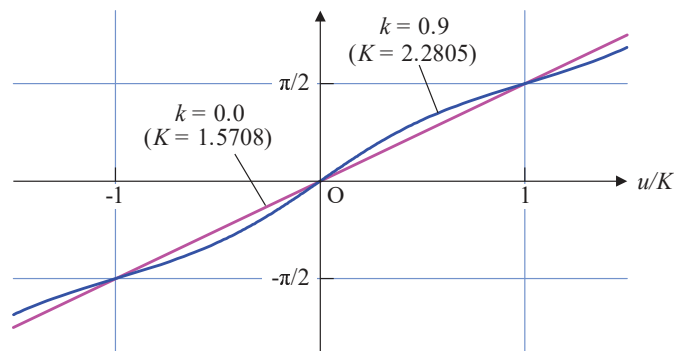


図 2.2: 振幅関数 $\text{am } u$

2.5 楕円関数の微積分

楕円関数の導関数が、 $(\text{sn } u)' = \text{cn } u \text{ dn } u$, $(\text{cn } u)' = -\text{sn } u \text{ dn } u$, $(\text{dn } u)' = -k^2 \text{sn } u \text{ cn } u$ であることを考えると、楕円関数の微積分の公式は三角関数のような単純な形にならないであろう。特に積分を解析的に実行するには、様々な微分公式の中から一致するものを選ぶ必要がある。本節では、楕円関数の微分公式をいくつか導出し、導出された公式に基づき、積分公式を探してみる。

2.5.1 微分公式

原始関数が楕円関数どうしの比である場合、その導関数は単純な形である。原始関数の分母の自乗が導関数の分母になり、原始関数の分子にも分母にも含まれない楕円関数が導関数の分母に含まれる。具体的には、

$$\frac{d}{du} \frac{\text{cn } u}{\text{sn } u} = -\frac{\text{dn } u}{\text{sn}^2 u}, \quad \frac{d}{du} \frac{\text{dn } u}{\text{sn } u} = -\frac{\text{cn } u}{\text{sn}^2 u}, \quad (2.6a)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\text{sn } u}{\text{cn } u} = \frac{\text{dn } u}{\text{cn}^2 u}, \quad \frac{d}{du} \frac{\text{dn } u}{\text{cn } u} = \frac{k'^2 \text{sn } u}{\text{cn}^2 u}, \quad (2.6b)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\text{sn } u}{\text{dn } u} = \frac{\text{cn } u}{\text{dn}^2 u}, \quad \frac{d}{du} \frac{\text{cn } u}{\text{dn } u} = -\frac{(1+k^2)\text{sn } u}{\text{dn}^2 u}, \quad (2.6c)$$

のようになる。これらの公式は、関数の積や商で表現される関数の微分公式にしたがって計算すると容易に導出できるので、特段、ここで導出過程を示す必要はないだろう。

楕円関数と補助関数の三つの関数のうち、二つを分子に残りの一つを分母に設定した原始関数を微分して得られる導関数は、

$$\frac{d}{du} \frac{\text{sn } u \text{ cn } u}{\text{dn } u} = \frac{1}{k^2} \left(\text{dn}^2 u - \frac{k'^2}{\text{dn}^2 u} \right), \quad (2.7a)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\text{cn } u \text{ dn } u}{\text{sn } u} = -\frac{1}{\text{sn}^2 u} + 1 - \text{dn}^2 u, \quad (2.7b)$$

$$\frac{d}{du} \frac{\text{sn } u \text{ dn } u}{\text{cn } u} = \text{dn}^2 u + k'^2 \left(\frac{1}{\text{cn}^2 u} - 1 \right), \quad (2.7c)$$

となる。これらの微分公式も、関数の積や商で表現される関数の微分公式にしたがえば導出できるのだが、代表として(2.7a)の導出過程を示そう。関数の積と関数の商に対する微分公式を機械的に適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \frac{\text{sn } u \text{ cn } u}{\text{dn } u} &= \frac{\text{cn}^2 u \text{ dn}^2 u - \text{sn}^2 u \text{ dn}^2 u + k^2 \text{sn}^2 u \text{ cn}^2 u}{\text{dn}^2 u} \\ &= \text{cn}^2 u - \text{sn}^2 u + \frac{(1 - \text{dn}^2 u) \text{cn}^2 u}{\text{dn}^2 u} \\ &= 1 - 2\text{sn}^2 u + \frac{(1 - \text{dn}^2 u)(1 - \text{sn}^2 u)}{\text{dn}^2 u} \\ &= 1 - \frac{2(1 - \text{dn}^2 u)}{k^2} + \frac{1 - \text{dn}^2 u}{\text{dn}^2 u} \left[1 - \frac{1 - \text{dn}^2 u}{k^2} \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) \frac{1}{\text{dn}^2 u} + \frac{\text{dn}^2 u}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left(\text{dn}^2 u - \frac{k'^2}{\text{dn}^2 u} \right), \end{aligned}$$

が得られ、(2.7a)が得られる。他の二つの公式も同様に導出できる。

2.5.2 積分公式

ヤコビの楕円関数を組み合わせた関数の導関数は、sn 関数、cn 関数、dn 関数の導関数を知っていれば、一般関数の微分公式を用いれば導出できる。しかし、積分は原始関数とその導関数の関係を利用するので、簡単ではない。そのため、前項でいくつかの微分公式を導出しておいたのだ。

三角関数の場合、 $(\sin u)' = \cos u$ 、 $(\cos u)' = -\sin u$ であるので、正弦関数と余弦関数の積分は単純であった。しかし、ヤコビの楕円関数は三角関数のように単純ではない。ヤコビの楕円関数自体の積分公式は、

$$\int \operatorname{sn} u \, du = -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh} \frac{k \operatorname{cn} u}{k'}, \quad (2.8a)$$

$$\int \operatorname{cn} u \, du = \frac{1}{k} \operatorname{arcsin}(k \operatorname{sn} u) = \frac{1}{k} \operatorname{arccos}(\operatorname{dn} u), \quad (2.8b)$$

$$\int \operatorname{dn} u \, du = \operatorname{arcsin}(\operatorname{sn} u) = \operatorname{arccos}(\operatorname{cn} u), \quad (2.8c)$$

のような形になるのだ。以外にも、ヤコビの楕円関数を積分すると、逆双曲線関数や逆三角関数が現れるのだ。なお、これら不定積分の積分定数の記述を省略している。この積分公式のうち、(2.8a) の導出過程を示そう。補助関数との関係 $\operatorname{dn}^2 = k'^2 - k^2 \operatorname{cn}^2 u$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn} u \, du &= \int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u} du = - \int \frac{(\operatorname{cn} u)'}{\sqrt{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u}} du \\ &= -\frac{1}{k} \log(k \operatorname{cn} u + \sqrt{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u}) \\ &= -\frac{1}{k} \log(k \operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u) = -\frac{1}{k} \operatorname{arcsinh} \frac{k \operatorname{cn} u}{k'}, \end{aligned}$$

が導かれる。残り二つの公式も同様に証明できる。

ヤコビの楕円関数の自乗を積分すると、第2種楕円積分を含む関数になる。具体的に積分公式を示すと、

$$\int \operatorname{dn}^2 u \, du = E_J(k, \operatorname{sn} u) = E(k, \operatorname{am} u), \quad (2.9a)$$

$$\int \operatorname{sn}^2 u \, du = \frac{u - E(k, \operatorname{am} u)}{k^2}, \quad (2.9b)$$

$$\int \operatorname{cn}^2 u \, du = \frac{E(k, \operatorname{am} u) - k'^2 u}{k^2}, \quad (2.9c)$$

である。当然、これらの公式も積分定数を省略している。そのうち、第1の公式は、

$$\int \operatorname{dn}^2 u \, du = \int \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx = E_J(k, x) = E_J(k, \operatorname{sn} u) = E(k, \operatorname{am} u),$$

によって導出される。ここで, E_J と E は,

$$E_J(k, z) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx, \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

によって定義される楕円積分の標準形と, ルジャンドルの標準形である。第2の公式は, $\operatorname{sn}^2 u = (1 - \operatorname{dn}^2 u)/k^2$ を利用すれば容易に導出できる。第3の公式は, $\operatorname{cn}^2 u = (\operatorname{dn}^2 u - k'^2)/k^2$ を利用すれば容易に導出できる。

前項で導出した微分公式を利用し, 不定積分の公式を記述しよう。微分公式 (2.6a) から (2.6b) を利用すると,

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad (2.10a)$$

$$\int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} du = \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad (2.10b)$$

$$\int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} du = \frac{1}{1 + k^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad (2.10c)$$

が容易に得られる。これらの公式は, 導出に関して特に注意すべきことはない。

引き続き, 微分公式 (2.7a) から (2.7c) までを利用して積分公式をつくると,

$$\int \frac{du}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{1}{k'^2} \left[E(k, \operatorname{am} u) - \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right], \quad (2.11a)$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = u - E(k, \operatorname{am} u) - \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad (2.11b)$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{1}{k'^2} \left[k'^2 u - \frac{1}{k'^2} E(k, \operatorname{am} u) + \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \right], \quad (2.11c)$$

が得られる。この公式の導出には, $\operatorname{dn}^2 u$ の原始関数が第2種楕円積分 $E(k, \operatorname{am} u)$ であることを利用した。そのヒントさえ述べれば, 特に導出過程を示す必要はないだろう。

2.6 楕円積分との関係

ヤコビの楕円関数を定義したことによって, 楕円積分の結果を簡潔に表現することができる。その表現方法は, $(1 - x^2)$ の不定積分を逆正弦関数 \arcsin を用いて記述するのと同様に, ヤコビの楕円積分の逆関数を用いて数式を記述するのだ。本節では, 楕円積分に関する公式を導出する。

2.6.1 逆楕円関数による楕円積分の記述

第1種楕円積分は、ヤコビの楕円積分の逆関数を用いて記述することができる。被積分関数 $(1-x^2)^{-1/2}(1-k^2x^2)^{-1/2}$ について、 $x \equiv \operatorname{sn} u$ なる置き換えを適用すると、積分公式:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \operatorname{arcsn}(x, k), \quad (2.12)$$

が得られる。今後の説明のため、この積分を sn 関数型の楕円積分と呼ぼう。なお、 $\operatorname{arcsn}(x, k)$ は $\operatorname{sn}(u, k)$ の逆関数である³とする。なお、この積分は $0 < k < 1$, $-1 \leq x \leq 1$ が条件づけられているとする。

続いて、 $x \equiv \operatorname{cn} u$ となる置き換えを適用すると、異なる形の積分の記述が可能になる。その置き換えによると、 $\operatorname{sn} u = \sqrt{1-x^2}$, $\operatorname{dn} u = \sqrt{k'^2 - k^2x^2}$ であることから、

$$\frac{dx}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u = -\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)},$$

なる関係が得られる。この関係式から、

$$u = \int_1^x \frac{dx}{-\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)}} = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)}},$$

が導かれるのだ。この積分で積分範囲を $[x, 1]$ としたのは $\operatorname{cn} 0 = 1$ だからである。したがって、

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2x^2)}} = \operatorname{arccn}(x, k), \quad (2.13)$$

なる積分公式が導かれる。この積分は先ほどの楕円関数の名称にならって、 cn 関数型の楕円積分と呼ばれる。さらに、 $x = \operatorname{dn} u$ とおくと、同様の計算によって、

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2 - k'^2)}} = \operatorname{arcdn}(x, k), \quad (2.14)$$

が導かれる。この積分は dn 関数型の楕円積分と呼ばれる。

三角関数における正接関数と同様に、 $\operatorname{tn} u \equiv \operatorname{sn} u / \operatorname{cn} u$ なる楕円関数を定義すると、その導関数は、

$$\frac{d}{du} \operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn} u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u},$$

となる。ここで、 $x \equiv \operatorname{tn} u$ とおき、 $1 + \operatorname{tn}^2 = 1 / \operatorname{cn}^2 u$ が成立することに注意しながら数式変形すると、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}} = \operatorname{arctn}(x, k), \quad (2.15)$$

³この逆関数は $\operatorname{sn}^{-1}(x, k)$ と書く文献が多いかもしれないが、マイナス1乗との混同を避けるため、本書では $\operatorname{arcsn}(x, k)$ と書く。同様に、本書では $\operatorname{cn}(u, k)$ と $\operatorname{dn}(u, k)$ の逆関数を、それぞれ、 $\operatorname{arccn}(x, k)$, $\operatorname{arcdn}(x, k)$ と書く。

が導かれる。この積分を tn 関数型の楕円積分と呼ぼう。

上に示した基本形から次の楕円積分の公式が導かれる。被積分関数は同じような形をしているが、パラメータ a や b と変数 x との大小関係によるバリエーションをこれらの例は示している。なお、右辺に示した逆楕円関数の第2変数が楕円関数の母数である。

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsn}\left(\frac{x}{b}, \frac{b}{a}\right) \quad (0 \leq |x| \leq b < a), \quad (2.16a)$$

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsn}\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{a}\right) \quad (0 < b < a \leq x), \quad (2.16b)$$

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcdn}\left(\frac{x}{a}, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (0 < b \leq x \leq a), \quad (2.16c)$$

$$\int_x^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arccn}\left(\frac{x}{b}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \quad (0 \leq x \leq b), \quad (2.16d)$$

$$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(x^2 - b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arccn}\left(\frac{b}{x}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \quad (b \leq x), \quad (2.16e)$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctn}\left(\frac{x}{b}, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arccn}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}, \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \quad (b \leq a). \end{aligned} \quad (2.16f)$$

第1の積分公式 (2.16a) は、 $t \equiv x/a$ とおけば、母数 $k = b/a$ の第1種楕円積分となることから導出される。第2の積分公式 (2.16b) は、 $t \equiv a/x$ とおけば、母数 $k = b/a$ の第1種楕円積分となることによる。

第3の公式 (2.16c) の左辺は、 $t \equiv x/a$ とおけば、補母数 $k' = b/a$ で dn 関数型の楕円積分になる。つまり、母数は $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ となり、(2.16c) が導かれる。

第4の公式 (2.16d) の左辺は、 $t \equiv x/b$ とおけば、母数 $k = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ の cn 関数型の楕円積分となる。それによって、(2.16d) が導かれる。さらに、第5の公式 (2.16e) の左辺は、 $t \equiv b/x$ の置き換えによって、母数 $k = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ の cn 関数型の楕円関数となる。それによって、(2.16e) が成立する。

第6の公式 (2.16f) の左辺は、 $t \equiv x/a$ とおけば、補母数 $k' = b/a$ の tn 関数型の楕円積分となる。そのとき、母数は $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ となるので第1行目の右辺が等号で結ばれる。第2行目は、 $1 + \operatorname{tn}^2 u = 1/\operatorname{cn}^2 u$ であることからただちに得られる。

2.6.2 完全楕円積分の微分方程式

第1種と第2種の完全楕円積分は、それぞれ、 $K(k)$ と $E(k)$ のように記述できることから、母数 k の関数と考えることができる。本項では完全楕円積分を母数 k で微分したときに成立する微分方程式を紹介する。

第1種と第2種の完全楕円積分 $E(k)$ と $K(k)$ は、母数 k について微分すると、

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}, \quad (2.17a)$$

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{kk'^2} - \frac{K}{k}, \quad (2.17b)$$

となる。この数式において、変数 k を省略して記述した。

上に示した公式のうち、第1式の導出は、

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= \frac{d}{dk} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx = - \int_0^1 \frac{kx^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx, \\ &= -k \int_0^K \text{sn}^2 u du = - \left[\frac{u - E(k, \text{am } u)}{k} \right]_0^K = \frac{E - K}{k}, \end{aligned}$$

のようになる。第1行目から第2行目への数式変形は、積分変数を $x \equiv \text{sn } u$ のように置き換えた。そのとき、 $\text{sn } 0 = 0$, $\text{sn } K = 1$ であることから、積分区間は $[0, K]$ となる。ここで、 K は第1種完全楕円積分 $K(k)$ を意味する。第2行目の積分を実行するには、積分公式 (2.9b) を適用した。また、位相関数 $\text{am } u$ は、 $u = K$ のとき $\text{am } u = 1$ となるので、 $E(k, \text{am } u) = E(k, 1) = E(k)$ となる。したがって、右辺が導出される。

第2の積分公式も同様に、 $x \equiv \text{sn } u$ なる置き換えを適用すれば導出できる。導出過程を示すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial k} &= \frac{d}{dk} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \int_0^1 \frac{kx^2}{(1 - x^2)^{1/2}(1 - k^2 x^2)^{3/2}} dx \\ &= k \int_0^K \frac{\text{sn}^2 u}{\text{dn}^2} du = \frac{1}{k} \int_0^K \left(\frac{1}{\text{dn}^2 u} - 1 \right) du = \frac{E}{kk'^2} - \frac{K}{k}, \end{aligned}$$

となる。この場合も前と同じ考察で積分区間が $[0, K]$ になっている。第2行目の積分を実行するために積分公式 (2.11a) を利用した。

完全楕円積分 E と K の母数 k についての導関数は、ともに、他方の完全楕円積分を含む数式で表現される。しかし、2階の微分方程式では、 E を含まない K だけの微分方程式:

$$\frac{d}{dk} \left(kk'^2 \frac{dK}{dk} \right) = kK, \quad (2.18)$$

を書くことができる。この微分方程式は、

$$k(1-k^2)\frac{d^2K}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dK}{dk} - kK = 0,$$

のように書き換えてもよいだろう。公式(2.18)は、公式(2.17b)に kk'^2 を乗じた数式を母数 k で微分すれば導出できる。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk}\left(kk'^2\frac{dK}{dk}\right) &= \frac{d}{dk}(E - k'^2K) = \frac{dE}{dk} + 2kE - k'^2\frac{dK}{dk} \\ &= \frac{E-K}{k} + 2kK - \frac{E}{k} + \frac{1-k^2}{k}K = kK, \end{aligned}$$

のようにして公式(2.18)が導出できる。

2.7 楕円関数の応用例

前章で単振り子の周期が楕円積分であることを紹介した。ヤコビの楕円関数を用いれば単振り子の運動を時間の関数として記述することが可能となる。本節では、楕円関数応用例として、単振り子の運動と、その延長線としてローラコースターの運動を解析する。

2.7.1 単振り子の運動

本節では長さ l の単振り子の運動を時刻 t の関数で表そう。振り子の位置を鉛直下方から測った角度 θ で表すことにする。既に前節で示したが、振り子の位置は微分方程式:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}[\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)]}$$

で表される。ここで、 θ_0 は振り子が到達する最高点の位置である。前章ではこの方程式から単振り子周期を求めたのであるが、本節では θ を t の関数で表す。前章と同様に、 $x = \sin(\theta/2)/\sin(\theta_0/2)$ なる置き換えをして微分方程式を書き換える。その置き換えの結果、微分方程式は、

$$dx = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot (1-x)(1-k^2x^2)} dt$$

のように書き換えられる。ただし、 $k = \sin(\theta_0/2)$ である。この微分方程式の解を得るには、方程式を、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt$$

の形に書き直せばよい。この式の右辺が $\sqrt{g/l} \cdot t$ であるので、

$$x = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

が微分方程式の解である。ただし、時刻 $t = 0$ で $\theta = 0$ となるように積分定数を選んでい
る。変数の置き換えを元に戻すと、

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

が得られる。特に、振れ幅が小さい ($\theta_0 \ll 1$) とき、

$$\theta \simeq \theta_0 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

のように近似できる。求められた解を用いて振り子の運動を計算すると図 2.3 のようにな
る。この図は、長さ 0.25 m の振り子を振れ幅 60 度と、120 度で往復運動させたときの運動
を残像として描いている。振れ幅 (片側の角度 θ_0) が 60 度するとき、振り子は片道を 0.5 秒

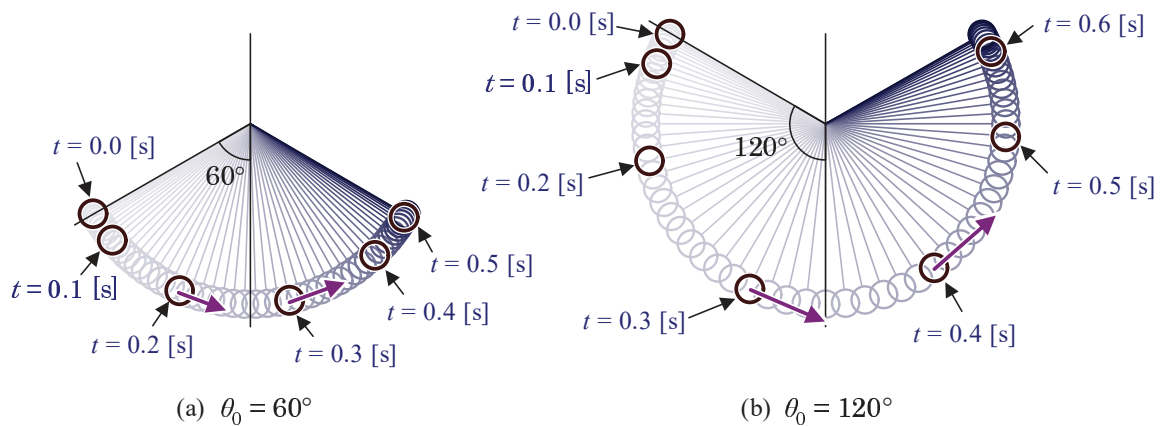


図 2.3: 振り子の運動 ($l = 0.25$ [m])

強の時間で移動する。一方、振れ幅が 120 度では、片道を移動するのに 0.6 秒を超える時
間を要する。これは、既に前章で示したように振り子の周期が振れ幅に依存する現象であ
る。任意の時刻における振り子の位置は、本節で導出したようにヤコビの楕円関数を用い
て記述できた。

2.7.2 ローラコースターの運動

前に解析した単振り子の問題は、重力によって往復運動する条件で物体の運動を計算し
た。この単振り子の問題に関して、 $\theta = \pi$ において速度をもつ条件をつけると、往復運動
でなく周回運動に対応する。その運動は、ローラコースターの運動が一例である。

周回運動の最下点、すなわち、 $\theta = 0$ での角速度を ω_0 としよう。そのとき、その物体の運
動は、

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos \theta - 1)} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{4g}{l} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.19)$$

なる方程式にしたがう。ただし、ローラコースターが周回運動するために、 $\omega_0 > 2\sqrt{g/l}$ を満足しなければならない。方程式(2.19)は運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定である法則、いわゆるエネルギー保存則に対応する。この方程式は、 $k^2 \equiv \omega_0^2 l / 4g$ によってパラメータ k を定義すると、

$$\frac{d\theta}{dt} = 2k \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad (2.20)$$

のように書き換えられる。周回運動となるこの運動の周期は、

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2(\theta/2)}} \\ &= \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} K(1/k), \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで、 $K(1/k)$ は母数を $1/k$ とする第1種の完全楕円積分である。上に書いた k の定義によると、最下点での角速度が $\omega_0 \rightarrow \infty$ の極限で、楕円積分の母数はゼロに近づく。したがって、その極限で $K(1/k) \rightarrow \pi/2$ であるので、

$$T \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{as } \omega_0 \rightarrow \infty$$

であることが導かれる。この極限は次のように解釈すればよい。最下点での角速度が大きくなると、最高点での速度との差が小さくなるため、その周回運動は近似的に角速度 ω_0 の等速円運動とみなすことができる。そのため、その周期は近似的に $2\pi/\omega_0$ となる。

単振り子の問題と同様に、ローラコースターの位置は時間の関数で表すことができる。微分方程式(2.19)を解くと、

$$\sin \frac{\theta}{2} = \text{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} kt, \frac{1}{k} \right), \quad (2.21)$$

が得られる。この結果からローラコースターの運動軌跡を描くと図2.4のようになる。この図は、ループの直径を 30 m、最下点でのローラコースターを $\omega_0 l = 28.5 \text{ m/s}$ とする。ローラコースターは 28.5 m/s の速度でループに突入し、最高点を通過時に速度が 15.0 m/s となり、約 4.4 秒でループを一周する。ただし、この計算にローラコースターの長さの影響やレールとの摩擦を無視している。

母数についての考察 単振り子とローラコースターは、一様重力場の中の鉛直面における円弧上を運動することが共通する点であり、双方とも楕円関数によって解析することができた。定式化する際に用いたパラメータ k は、それらの問題で個別に定義したが、実は共通の意味がある。

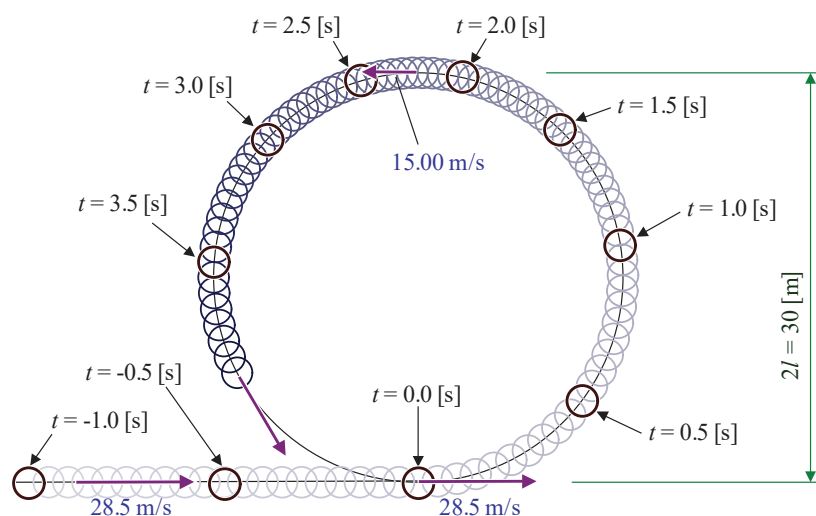


図 2.4: ローラコースターの運動

単振り子の問題では、振り子の最高点を θ_0 としたとき、母数に関連するパラメータとして、 $k \equiv \sin(\theta_0/2)$ と定義した。これを物理法則と照らし合わせて数式変形すると、

$$k = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_0}{2}} = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}},$$

が得られる。ここで、 v_0 は、振り子の最下点における速度である。分母の $2\sqrt{gl}$ は振り子の長さの2倍、すなわち、振り子が描く円の直径に相当する高さから振り子が落下したときの速度である。この落下速度を基準落下速度と呼んだとき、基準落下速度に対する振り子の最大速度の比が k に等しくなる。

ローラコースターの問題では、最下点におけるコースターの角速度を ω_0 としたとき、パラメータ k は、

$$k = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{v_0}{2\sqrt{gl}},$$

のように計算できる。この数式でも、 v_0 を最下点におけるローラコースターの速度とした。つまり、 $v_0 = \omega_0 l$ である。したがって、ローラコースターの場合も基準落下速度に対するコースターの最高速度の比が k となるのである。

パラメータ k の解釈の意味で、単振り子の問題と、ローラコースターの問題は共通化できる問題なのである。基準落下速度に対する最高速度の比が $k < 1$ ならば単振り子の問題、 $k > 1$ ならばローラコースターの問題となる。その中間である $k = 1$ は、物体が円の頂上でつり合っ、動かない状態に対応する。物体の運動周期 T と、位置 θ を単振り子 ($k < 1$)

とローラコースター ($k > 1$) で対比して書くと,

$$T = \begin{cases} 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k), \\ \frac{2}{k}\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\frac{1}{k}\right), \end{cases} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \begin{cases} k \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t, k\right), & (k < 1) \\ \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} kt, \frac{1}{k}\right), & (k > 1) \end{cases} \quad (2.22)$$

のように書くことができる。

2.7.3 回転する縄の形状

縄の両端を固定し、一様な重力場にまかせて縄をたるませると、縄は懸垂線 (双曲線余弦関数) を描くことが知られている。類似の問題として、縄跳びのように両端を固定した縄を回転させると、縄の中央が遠心力で膨らむ。その回転する縄はヤコビの楕円関数で表される形状となる。本節ではその事実を示そう。

縄の形状を求めるため、水平方向を x 軸、鉛直方向を y 軸とした座標系のもと、縄を x 方向に微小長さ Δx だけ切り出そう。切り出された微小長さの縄に作用する力の釣り合いから運動方程式を書いてみるのだ。微小長さの縄の左端と右端の x 座標を、それぞれ、 x 、 $x + \Delta x$ とする。それに対応する縄の両端の y 座標は、それぞれ x の関数とすると、 $y(x)$ 、 $y(x + \Delta x)$ となる。

微小長さの縄には、図 2.5 に示すように、その左側と右側につながった縄から張力を受ける。張力は縄の接線方向に作用し、しかも、張力の x 成分は縄の左側と右側で等しい。なぜなら、微小長さの縄に作用する垂直方向の力は張力の x 成分のみであり、縄は x 方向に釣り合っているからである。張力の水平成分を T とすると、左端に作用する張力の鉛直成分は $-Ty'(x)$ 、右端に作用する張力の鉛直成分は $Ty'(x + \Delta x)$ となる。したがって、微小長さの縄に作用する張力の合力は、鉛直方向に $Ty''(x)\Delta x$ である。微小長さの縄には、張力以外に遠心力が作用している。縄が $y = 0$ を軸に回転していると仮定すると、遠心力は

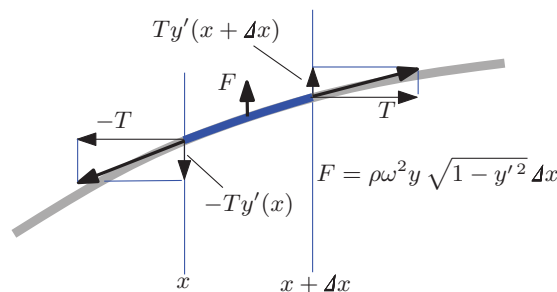


図 2.5: 回転する縄の微小長さに作用する力

$\rho\omega^2 y \sqrt{1 + y'^2} \Delta x$ である。ここで、縄の単位あたりの質量を ρ 、回転の角速度を ω とした。

力が釣り合っていることから、微小長さの縄に作用する力の和はゼロでなければならない。したがって、微小長さの縄に関する運動方程式は、

$$Ty'' \Delta x + \rho\omega^2 y \sqrt{1 - y'^2} \Delta x = 0,$$

となる。この式の両辺に Δx の逆数を乗じると、

$$Ty'' = -\rho\omega^2 y \sqrt{1 + y'^2}, \quad (2.23)$$

が得られる。この式が、縄の形状を決定する微分方程式である。ここで、 $2\alpha \equiv \rho\omega^2/T$ を定義すると、微分方程式は、

$$y'' = -2\alpha y \sqrt{1 + y'^2},$$

のように書き換えられる。この運動方程式の両辺に $y'/\sqrt{1 + y'^2}$ を乗じると、運動方程式は、

$$\frac{y'y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = -2\alpha yy',$$

のようになり、この式の両辺を積分すると、

$$\sqrt{1 + y'^2} = \beta - \alpha y^2,$$

が得られる⁴。この式の右辺に現れる β は積分定数である。この積分定数の値に依存して、 y は様々な関数となるのだが、ここでは回転する縄の形状に関係ありそうな場合に特定しよう。そのような理由で、 $\beta > 1$ の場合のみを考える。そのとき、微分方程式は、

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{\beta + 1}{\alpha} - y^2\right) \left(\frac{\beta - 1}{\alpha} - y^2\right)} \alpha,$$

となる。この微分方程式を解くには、積分公式 (2.16a) を使えばよい。結果を書くと、

$$y = \sqrt{\frac{\beta - 1}{\alpha}} \operatorname{sn}\left(\sqrt{\alpha(\beta + 1)} x, \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}}\right),$$

となる。回転する縄の形状はヤコビの楕円関数 (sn 関数) となるのである。この式を見ると、積分定数 β だけで楕円関数の母数 k を決定することがわかるので、 β の代わりに k を使って数式を記述すると、

$$y = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{k}{k'} \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{2\alpha} x}{k'}, k\right), \quad (2.24)$$

が得られる。この記述の方がすっきりしているように見える。回転する縄がヤコビの楕円関数であることが明らかになったが、この数式には未知数が2つ含まれる。具体的は、 k と

⁴本書では力の釣り合いから微分方程式を導出したが、エネルギーが極値をとるという物理的要請から同一の微分方程式を得ることができる。その物理的要請から微分方程式を得るには、変分法という手法を用いる。興味のある読者は変分法のテキストを参照するとよい。

α が未知数⁵である。そのうち、 α はただちに特定できる。なぜなら、 $x = 0, l$ の 2 箇所で $y = 0$ となるのだから、 $\sqrt{2\alpha l/k'} = 2K$ となるはずである。したがって、

$$\alpha = \frac{2k'^2 K^2}{l^2}, \quad (2.25)$$

が導かれる。この α を用いて y を書き直すと、

$$y = \frac{kl}{k'^2 K} \operatorname{sn}\left(\frac{2Kx}{l}, k\right), \quad (2.26)$$

が得られる。これで未知数が k だけになった。

縄の長さは $L (> l)$ であるとする。このとき、縄の長さ L は、

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^l (\beta - \alpha y^2) dx \\ &= \int_0^l \left[\frac{1 + k^2}{k'^2} - \frac{2k^2}{k'^2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{2Kx}{l}, k\right) \right] dx, \end{aligned}$$

のように計算できる。右辺の被積分関数の第 2 項は、既に (??) によって積分の処方箋が与えられている。その処方箋にしたがうと、右辺の第 2 項の積分は、

$$\frac{2k^2}{k'^2} \int_0^l \operatorname{sn}^2\left(\frac{2Kx}{l}, k\right) dx = \frac{2l}{k'^2} \left(1 - \frac{E}{K}\right),$$

のように計算できる。右辺に見られる E は第 2 種の完全楕円積分である。つまり、 E も K と同様に母数 k に依存した値である。この積分値を代入すると、

$$\frac{L}{l} = \frac{2E}{k'^2 K} - 1, \quad (2.27)$$

なる関係が導かれる。この方程式を解けば楕円関数の母数 k が得られるのだ。つまり、母数 k は縄の長さ と 固定転換の距離の比 L/l にしか依存しない。しかし、この方程式を解くには解析的ではなく数値的な解法を用いる。縄の長さの比率 l/L を与えたときの楕円関数の母数 k は、図 2.6 に示すように計算できる。このグラフによると、ロープの長さに対し、固定点の距離を短くとれば楕円関数の母数 k は大きくなる。

例を 2 つ設定し、回転する縄の形状を計算した結果を図 2.7 に示そう。この図の左は、長さ 2.8 m の縄を 0.8m 離れた 2 点を中心に回転させたときの形状である。これは、1 人で縄跳びするときの縄の形状と思えばよい。なお、この例では楕円関数の母数が $k = 0.86$ となり、縄の腹における配点半径は 1.24 m である。右側の例は、長さ 5 m の縄を 3.5 m 離れた 2 点を中心に回転させたときの形状である。この例は長縄跳びにおける縄の形状と思えばよいだろう。この例では、母数が $k = 0.5$ となり、腹における縄の回転半径は 1.5 m となる。

⁵さらに具体的に述べると、 $\alpha = \rho\omega^2/2T$ に含まれる張力 T が未知数である。

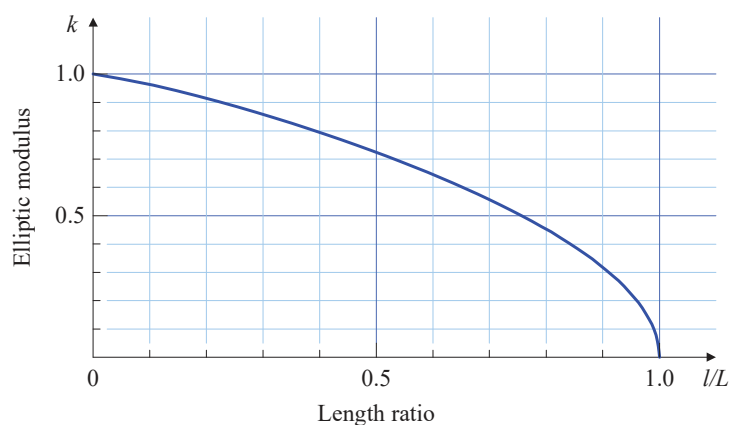


図 2.6: 回転する縄の長さの比率と楕円関数の母数

図 2.6 に示すように長さの比率 l/L を大きくとると母数 k が小さくなる。つまり、一人で縄跳びを飛ぶよりも、大勢で飛ぶ長縄跳びの方が k が小さい。つまり、長縄跳びの方が回転するときの形状が正弦関数に近い形をしている。一人で飛ぶ縄跳びは、正弦波からの変形が大きく楕円関数らしい形状になる。縄跳びの形状は、身近に楕円関数を見ることができる例である。

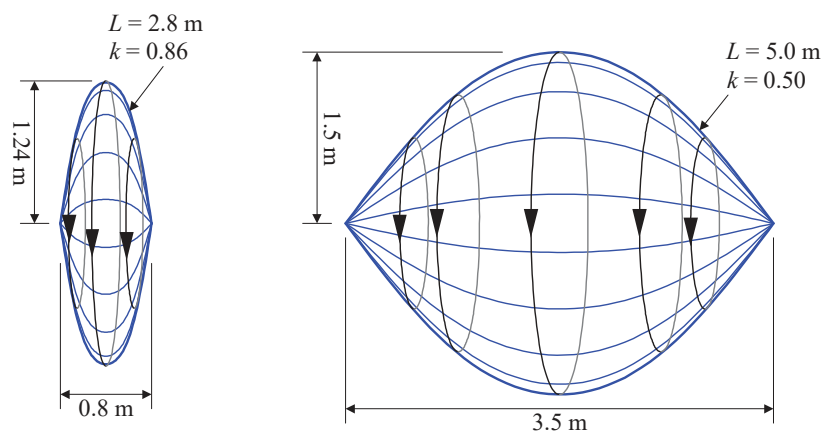


図 2.7: 回転する縄の形状

最後に、もう一つの未知数について考えよう。もう一つの未知数とは α である。その未知数は、(2.25) で計算できる。すでに母数 k が求まっているので、その関係式によって α が計算できるのである。正確に言うと、本当の未知数は α に含まれる張力 T である。関係式 $\alpha = \rho\omega^2/2T$ から、張力 T は、

$$T = \frac{\rho l^2 \omega^2}{4k'^2 K^2},$$

で計算できる。図 2.7 に示した縄跳びの例について、一人で飛ぶ縄跳びでは $T \simeq 0.21\rho l^2 \omega^2$ であり長縄跳びののでは $T \simeq 0.12\rho l^2 \omega^2$ となる。縄に作用する張力は回転の角速度の自乗に比例する。