

連続体の物理学

はじめに

目次

第1章 連続体	1
1.1 連続体の定義	1
1.2 数式による記述	2
1.2.1 オイラー記述	2
1.2.2 ラグランジュ記述	3
1.3 連続の方程式	4
第2章 変形と運動	7
2.1 連続体に作用する力	7
2.2 応力	8
2.2.1 典型的な応力の例	8
2.2.2 応力テンソル	10
2.2.3 応力テンソルの対称性	13
2.3 テンソルに関する数学	14
2.4 運動方程式	17
2.5 連続体の変形	18
2.5.1 歪みの速度	22
2.5.2 歪みのエネルギー	23
2.6 弾性体と流体	24
2.6.1 弾性体	24
2.6.2 流体	26

2.7	歪みのエネルギー	28
第3章	弾性体の静的変形	31
3.1	弾性体の変形	31
3.2	応力と歪み	31
3.3	棒の伸縮変形	33
3.4	片もち梁の変形	35
3.4.1	集中荷重による変形	35
3.4.2	均等荷重による変形	42
3.4.3	中央集中荷重による両もち梁の変形	44
3.4.4	均等荷重による両もち梁の変形	45
3.5	棒の座屈	46
3.6	しなやかな棒の変形	49
3.6.1	数学的設定	49
3.6.2	しなやかな棒の座屈	51
3.6.3	片もち梁	55
第4章	弾性波	59
4.1	弾性波の伝搬	59
4.1.1	弾性波の方程式	59
4.1.2	縦波と横波	61
4.2	表面波	64
4.3	有限の弾性体を伝搬する波	68
4.3.1	弦の振動	68
4.3.2	棒の振動	71
第5章	流体の運動	73
5.1	流体の性質	73

	7
5.1.1 粘性流体	73
5.1.2 各種粘性	75
5.2 流体の流れ	75
5.2.1 流線	75
5.2.2 流管	76
5.2.3 流跡線と流脈線	78
5.3 渦度と渦線	79
5.3.1 渦線	80
5.3.2 渦管	80
5.4 流体の運動方程式	81
5.5 ベルヌーイの諸定理	83
5.5.1 完全流体の基礎方程式	83
5.5.2 渦なしの流れ	87
第6章 流体の流れ	89
6.1 ポテンシャル流	89
6.2 ポテンシャルの湧き出し	90
6.3 軸対称のポテンシャル	91
6.3.1 球を通り過ぎる一様流	93
6.3.2 運動する球で発生する流れ	95
6.3.3 誘導質量	97
6.4 粘性流	99
6.4.1 粘性流体の基本方程式	100
6.4.2 レイノルズの相似則	100
第7章 流体の波	103
7.1 水の波	103

7.2	線形波	106
7.3	長波と短波	111
7.3.1	長波	111
7.3.2	短波	113
7.3.3	表面張力波	114
7.4	位相速度と群速度	117
付録 A 楕円積分・楕円関数		119
A.1	楕円積分	119
A.2	ヤコビの楕円関数	120

第1章 連続体

本書で取り扱う物体は、質点や剛体とは異なり、大きさをもち変形をする連続体と呼ばれる物質である。物質の変形は、微視的には、物質を構成する分子の配置の変化であり、個別の分子の間に作用する分子間力が関係する。とはいえ、物質を構成する分子は 10^{23} オーダーの個数があるため、個別の分子に作用する力を解析することは非効率的である。その代わりに、分子の大きな集合体として変形を含む運動を取り扱う手法が必要である。本章では、連続体を取り扱うための数学について説明し、基本法則である連続方程式を導出する。

1.1 連続体の定義

本書で取り扱う連続体は、質点や剛体とは異なり、大きさをもち変形をする物質である。そのような性質をもつ物質は、固体だけでなく、液体や気体も含まれる。連続体に含まれるといっても、固体と液体や気体では性質が大きく異なる。

固体は構成する分子の配列が変化しない物質である。力を加えることによって、分子間の距離が伸縮や、配列のねじれが生じるが、構成分子が単独で移動しない。特に、力の作用によって生じた変形が、力を緩めることによって、もとの状態に戻る物体は弾性体と呼ばれる。それに対し、力を緩めても変形が戻らない物体は塑性体と呼ばれる。本書では、塑性体は取り扱わない。弾性体の例として、建築における梁や、楽器の弦が挙げられる。梁は建物を支える構造体であり、固定方法や作用する力の分布によって変形をする。変形の度合いを見積もることは建造物の設計において重要なことである。楽器の弦は力の作用によって変形し、力を解放することによって変形が復元し、その復元が振動となり伝搬する。その振動によって楽器は音を発するのだ。弾性体を伝搬する振動は、地球規模の例では地震波である。地下で発生する地殻変動によって、岩盤の歪みが波動として伝搬するのが地震波である。地震波も連続体の物理で取り扱うことができる。

液体や気体は、弾性体とは異なり、構成分子が個別に自由に移動できる。とはいえ、分子間の距離には物質固有の標準値がある。その標準値とのずれが変形に対する復元力になる。液体や気体は流体と呼ばれる。例えば、回転を加えて投げられたボールは回転方向に応じて軌跡を曲げて飛ぶ。その現象は、ボールが空気という流体の中を運動するからであ

る。流体中を運動する物体は流体から抵抗力の作用を受ける。さらに、回転する物体は流体の循環を生成するため、その循環によって物体の軌跡を曲げる揚力を作り出す。

弾性体にしても流体にしても、連続体は膨大な数の分子によって構成されている。構成する分子を個々に運動解析するのではなく、大域的に見た連続体の振る舞いを取り扱うのが連続体の物理である。その意味で、連続体の物理は熱力学に類似している。

1.2 数式による記述

分布した物質の運動を記述する手法として、ラグランジュ記述とオイラー記述の二通りを説明する。前者は運動する質点と同様、連続体の中の特定の点について運動によって移動する場所を逐一追跡し、記述する方法である。後者は、連続体の個々の点の動きを気にすることなく、絶対的な場所において、連続体がどのように変化するかを表現する。

1.2.1 オイラー記述

オイラー記述は、ある時刻において、特定の場所の連続体の状態を表現する表記法である。その記述法は、連続体が運動をしていたとしても、その運動を追うことなく、淡々と決められた時刻に決められた位置の物理量を観測することに相当する。例えば、流れる河川に流速計を固定し、その定点における流速を計測することがオイラー記法の例である。

オイラー記法を数式で表現するには、物理量を位置 \boldsymbol{x} と時刻 t の関数で記述するのである。なお、位置 \boldsymbol{x} は時刻 t における位置であるが、位置 \boldsymbol{x} と時刻 t は独立の変数とみなされる。運動する連続体は、中に含まれる物質が時間の経過とともに流れていくモデルを考えると、特定位置 \boldsymbol{x} における物質は時間 t の経過とともに推移していく。しかし、物質の運動を気にすることなく、ある時刻 t における \boldsymbol{x} での物理量がオイラー記述で表現されるのだ。その場合、流速 \boldsymbol{u} は、 \boldsymbol{x} が時刻 t の関数であるとの前提で、

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t},$$

のように定義される。さらに、質点の物理と同様に、速度の時間微分によって加速度:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2},$$

が定義される。この加速度は質点の加速度と等しいとは限らない。なぜなら、この加速度はある定点を通過する速度の変化を扱っているのであり、流体中の特定の小片の速度変化ではないからだ。特定の小片の速度変化は、次項で説明するラグランジュ法の加速度に相当する。

1.2.2 ラグランジュ記述

ラグランジュ記述は質点の運動の記述と同一の記述法である。ラグランジュ記述とは、連続体の中の特定の点 \boldsymbol{x} に注目し、その特定の点を追跡した様子を数学表現するのだ。例えば、位置 \boldsymbol{x} と時刻 t の関数 $A(\boldsymbol{x}, t)$ を考えよう。ラグランジュ記述では、変数 \boldsymbol{x} に t の依存性が隠れていることを想定する。例えば、 $t = 0$ のとき、 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ であると仮定し、 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ と考えればよい。そのような仮定の下では、 t についての微分は単に $\partial A / \partial t$ となるのではなく、

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{Dz}{Dt} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) A(\boldsymbol{x}, t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

のように計算できる。微分を与える演算子は常微分演算子 d/dt でもよいのだが、ラグランジュ記法における微分を明示するため、習慣的に D/Dt なる演算子が用いられる。ラグランジュ微分の演算子は、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla), \quad (1.2)$$

数式 (1.1) の導出には、解析学における陰関数の公式が適用されている。さらに、位置 $\boldsymbol{x} \equiv [x, y, z]$ には時刻 t の依存性しか含まれていないことから $D\boldsymbol{x}/Dt = \boldsymbol{u}$ が成立するはずなので、数式 (1.1) が得られる。

ラグランジュ微分 (1.1) は、図 1.1 によって説明することができる。この図は、ラグランジュ微分とオイラー微分の違いを示すことができる。この図は、1次元空間を流れる連続体を表している。その連続体は物理量 A を伴って流れている。図中の濃い曲線が時刻 t の状態、淡く太い曲線が時刻 $t - \Delta t$ の状態を表す。連続体は物理量 A が変化しながら速度 u

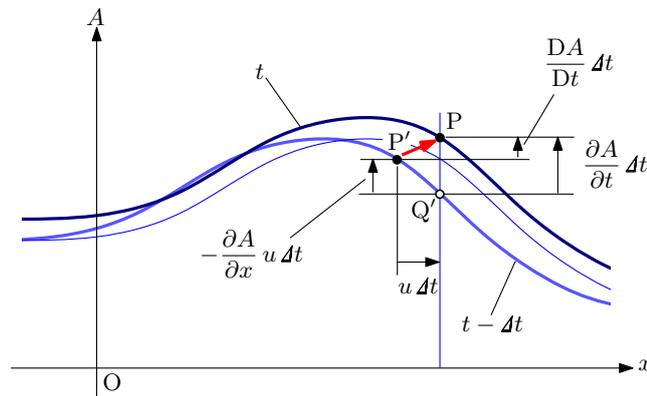


図 1.1: オイラー微分とラグランジュ微分

で運動している。例えば、時刻 t に点 P に存在する連続体が、時刻 $t - \Delta t$ に点 P' に存在していたとする。点 P における偏微分 $\partial A / \partial t$ は点 Q' から点 P への変化率であり、それはオ

イラー微分である。それに対し、点Pに存在する連続体の小片に着目して時間について偏微分すると、点P'から点Pへの変化率が得られる。それがラグランジュ微分である。この図から、ラグランジュ微分が(1.1)となることが理解できるだろう。

関数 $A(\mathbf{x}, t)$ をベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ に拡張することも容易である。ベクトル \mathbf{A} が $\mathbf{A} \equiv [A_x, A_y, A_z]$ のように成分表示できたとき、

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla A_x \\ \mathbf{u} \cdot \nabla A_y \\ \mathbf{u} \cdot \nabla A_z \end{bmatrix},$$

のように記号を定義する。その定義された記号によって、ラグランジュ微分は、

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

のように拡張される。ラグランジュ記法によると、位置 \mathbf{x} における連続体の加速度 \mathbf{a} は、

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (1.4)$$

のように記述できる。得られた数式の右辺の第1項はオイラー記述による加速度である。つまり、第2項 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ がオイラー記述とラグランジュ記述による加速度の違いである。例えば、速度 \mathbf{u} が場所によらず一定、すなわち、一様流ならば二つの記法による加速度は等しい。

1.3 連続の方程式

時刻 t_0 において体積 V_0 に含まれる連続体が移動し、時刻 t において体積 V を占めるように変化したとする。また、位置 \mathbf{x} における連続体の密度が $\rho(\mathbf{x})$ であるとする。連続体の質量が時刻 t_0 と t で一定であるはずなので、

$$\int_{V_0} \rho(\mathbf{x}) dV_0 = \int_V \rho(\mathbf{x}) dV,$$

が成立する。この数式は、移動する連続体を追跡して得られる数式であるのでラグランジュ記述である。時刻 t における連続体の位置 $\mathbf{x} \equiv [x_1, x_2, x_3]$ が、時刻 t_0 における位置 $\mathbf{x}_0 \equiv [x_{01}, x_{02}, x_{03}]$ に座標変換されると仮定すれば、連続体の質量は、

$$\int_V \rho(\mathbf{x}) dV = \int_V \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} dx_{01} dx_{02} dx_{03}, \quad (1.5)$$

のように書ける。右辺に記述した記号:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{vmatrix},$$

はヤコビアンと呼ばれる行列式である。数式 (1.5) が質量保存則を満たすためには,

$$\rho_0(\mathbf{x}_0) = \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})}, \quad (1.6)$$

でなければならない。方程式 (1.6) はラグランジュ記述における質量保存側である。この方程式はラグランジュの連続方程式とも呼ばれる。

連続体が非圧縮の連続体の場合、密度が運動によって変化しないので、 $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}_0)$ なる等式が成立する。すなわち,

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} = 1,$$

が非圧縮の連続体を特徴づける数式である。

オイラー記述における連続方程式は、異なるアプローチで導かれる。ある体積 V を考え、その表面が S であるとする。その表面における外向きの単位ベクトルを \mathbf{n} とする。そのとき、連続体の運動速度ベクトル \mathbf{u} の外向き成分は $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ となるはずだ。つまり、連続体は表面 S の特定の場所から、単位時間あたりに $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ だけ質量が流出する。したがって、 $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ を S 全体にわたって積分すると、体積 V に含まれる連続体の質量の単位時間あたりの減少に等しくなる。その性質を数式表現すると、

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

となる。この数式は、ガウスの積分公式を用いて、

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \rho \mathbf{u} dV,$$

のように書き換えられる。この積分は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (1.7)$$

なる数式で表現することもできる。この数式がオイラー記述における連続方程式である。連続方程式 (1.7) は、当然、ラグランジュ微分を用いて記述することもできる。微分演算子 (1.2) とベクトルの微分公式:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho,$$

に注意すると, 連続方程式は,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.8)$$

のように書き換えることができる。連続方程式 (1.7) と (1.8) はともにオイラーの連続方程式と呼ばれる。

非圧縮の連続体では連続方程式がかなり簡素化できる。既に示したように, 非圧縮の連続体では $D\rho/Dt = 0$ となる。この性質を (1.8) に代入すると,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.9)$$

が得られる

第2章 変形と運動

剛体とは異なり、一般の連続体は力の作用を受けて、運動するだけでなく変形する。変形といっても、単に収縮/伸長するだけでなく、ねじれやたわみもある。そのような変形は、連続体を構成する物質によって異なる。物質によって異なるとはいえ、変形に寄与するパラメータを定義することによって、連続体における物理を定式化することができる。

2.1 連続体に作用する力

連続体は空間に連続的に広がっているため、注目する領域を定め、その領域に作用する力を議論すべきである。ここで、作用する力を考えるための領域を、単純閉曲面 S で囲まれた体積 V であるとする。その領域の連続体に作用する力は、体積力と面積力に分類される。

体積力 連続体は質点と同様に、重力、電磁気力、遠心力などの作用を受ける。それらの力は、遠隔力として連続体を構成する分子、または、原子の一つ一つに作用する。物質のすべての構成要素に作用するため、その合力は、物質の体積、または、質量に比例すると考えてよい。したがって、遠隔力による力の作用は、連続体の物理学では、**体積力**と呼ばれる。

体積力は、場所による力の依存性に比べて十分小さい領域では一定とみなせるため、領域の体積に比例すると考えてよい。すなわち、連続体の微小体積素 dV に作用する力は、 $\mathbf{K}\rho dV$ のように表現できる。ここで、ベクトル \mathbf{K} は、連続体の単位質量あたりに作用する力である。したがって、体積 V に作用する力は、

$$\mathbf{F}_B = \int_V \rho \mathbf{K} dV,$$

によって与えられる。上で述べたように、重力、電磁気力、遠心力はこの数式で記述できる形態の力である。

面積力 連続体には、遠隔力だけでなく、分子間力のような近接力が作用する。近接力は、物質を構成する分子のうち、隣り合う分子からの力の作用である。例えば、外側から連続体を押したときに生じる圧力を考えよう。圧力は連続体の内部に遠隔で作用するのではな

く、隣り合う分子どうしで力が作用する。作用を受けた分子はさらに隣の分子を押す。そのように隣の分子から受ける力が圧力となるのだ。圧力のような力の作用は、連続体中にある断面を考えたとき、その断面に作用する力と考えることができる。したがって、近接力に由来する力の作用は、連続体の物理学では、面積力と呼ばれる。

面積力は、連続体の表面 S (仮想的に設けた面でもよい) に依存する力である。その力の存在が質点との大きな相違点であり、解析の難しさに関する要因である。面積力をベクトルとして表現するためには、面が向いている方向が重要になる。また、体積力と同様に、変化率に対して十分に小さい表面積の条件では、面積力は表面積に比例すると考えるべきである。したがって、面積素 dS に作用する力は $\mathbf{p}(\mathbf{n}) dS$ であると仮定すればよいだろう。ここで、 $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ は表面の単位面積あたりに作用する力であり、表面の法線単位ベクトル \mathbf{n} の関数である。その \mathbf{n} への依存性が、面の向きによる性質を表すのだ。力の要素 $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ は応力 (stress) と呼ばれる。領域 V における連続体に作用する面積力の合力は、

$$\mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{p}(\mathbf{n}) dS,$$

で表される。ここで、積分域 S は対象とする連続体 V の表面全体である。その表面は、連続体の物体の表面であってもよいし、連続体中に仮定された部分領域の表面であってもよい。

2.2 応力

応力は、前節で説明したように、単位面積あたりに作用する面積力である。応力の代表例として、理想気体に関する熱力学で取り扱う圧力がある。圧力は、対象なる面に対して法線方向に作用する応力である。一般の連続体では、法線方向だけでなく接線方向にも応力が作用する。

2.2.1 典型的な応力の例

対象とする表面において、応力は法線ベクトルに沿った成分と、それと垂直をなす成分 (接線成分) に分離できる。つまり、応力の記述には法線ベクトルとの関係が重要である。本節は、応力と法線ベクトルの関係を説明するため、連続体の棒を引っ張る力と、液体や気体による圧力について説明する。

棒を引っ張る力 図 2.1 のように、連続体の両端を力 \mathbf{F} で引っ張る状態を考えよう。引っ張られた棒は、その内部では、棒を構成する分子どうしが力を作用させ、棒を変形させようとする。内部で発生するその力は、分子間力に起因するので近接力である。そのような近

接力による作用は、棒のいたる場所で発生するため、任意の場所に切断面を仮定した場合、必ず、切断面を挟んだ連続体どうしで力の作用が発生している。例えば、図 2.1 (a) のように切断面を力 \mathbf{F} に対して垂直にとった場合、切断面には、力 \mathbf{F} が分割された連続体の外に向かって作用すると考えられる。この場合、切断面に作用する力は切断面の法線ベクトルと同一方向である。また、連続体の断面積を S 、両側から引っ張る力の大きさを $F \equiv |\mathbf{F}|$ とすれば、切断面の応力は大きさ F/S で法線方向に作用する。一方、図 2.1 (b) のように切

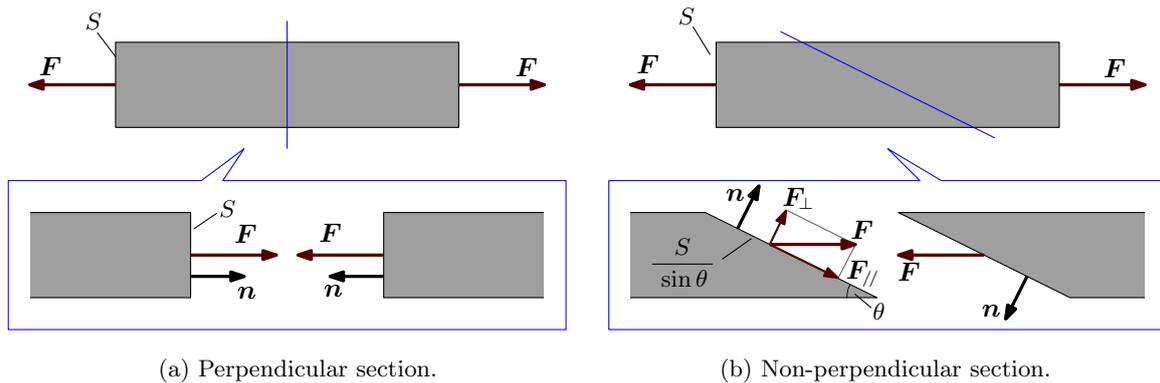


図 2.1: 切断面の選択と応力

断面を斜めに設定した場合、応力は上の場合とは異なる。切断面を斜めに設定しても、切断面に作用する力は \mathbf{F} である。その力は切断面の法線ベクトル \mathbf{n} と同一方向でないため、接線成分 F_{\perp} と接線成分 F_{\parallel} に分離できる。切断面の面積が $S/\sin\theta$ であることから、その切断面における垂直応力 p_{\perp} と接線応力 p_{\parallel} は、

$$|p_{\perp}| = \frac{F}{S} \sin^2 \theta, \quad |p_{\parallel}| = \frac{F}{S} \sin \theta \cos \theta,$$

となる。これらの力の合力は、いうまでもなく、

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{F}}{S} \sin \theta,$$

となる。切断面に作用する応力は、方向が \mathbf{F} と同じだが、その大きさは切断面の方向 $\sin\theta$ に依存する。

流体による圧力 液体や気体のような流体では、連続体の引っ張りとは 応力の性質が異なる。その理由は、流体が特定の形をもたず、自由に変形できることに起因する。自由に変形できるゆえに、静止する流体は任意の表面に対し、法線方向にしか力を与えない¹。

静止する流体が任意の表面に対して法線方向の力しか与えないことは、流体を構成する分子の運動に起因する。自由に変形できる流体では、流体を構成する分子は図 2.2 (a) に示

¹表面が流体に対して運動する場合、粘性によって接線方向に応力が作用する。

すように自由に運動する。運動する分子が表面に衝突した際に与える運動量が表面に与える力となる。図に示すように、表面に衝突する分子の運動方向が任意であるので、それらの合成ベクトルは接線成分が打ち消し合い、法線成分しか残らない。その結果、流体から作用を受ける力は図 2.2 (b) に示すように法線成分のみである。この図は、あらゆる表面

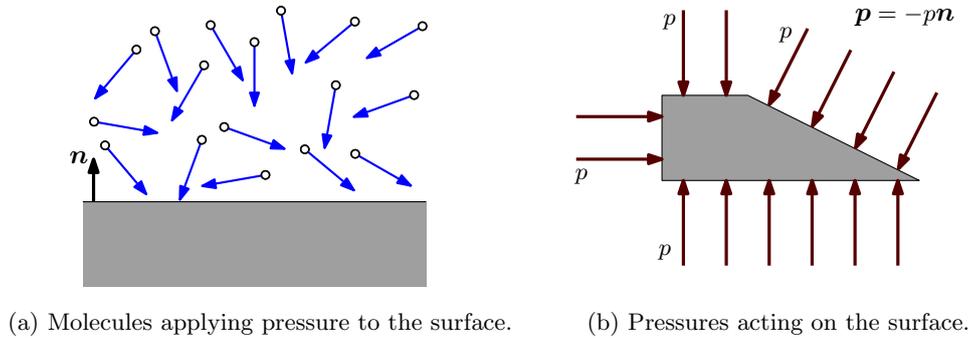


図 2.2: 流体による圧力

に同一の圧力が作用するという、いわゆるパスカルの原理を表している。つまり、表面の単位面積あたりに作用する力は $\mathbf{p} = -p\mathbf{n}$ である。ここで、法線ベクトルが外向きの力であるので、圧力を表すため右辺には負の符号を付している。

上で説明した例のように、固体と、液体や気体とでは、表面に作用する力、すなわち、面積力の性質は異なる。そのように、物質によって性質が異なる面積力の数学的な取り扱いには、次項で説明する応力テンソルを用いる。

2.2.2 応力テンソル

前項では例を挙げ、応力のベクトル表現が対象とする面の法線ベクトルに依存することを説明した。しかも、固体を引っ張るように力を作用させて生じる応力と、液体や気体の圧力によって生じる応力では性質が異なる。そのような異なる性質の応力を数学的に記述するには、**応力テンソル**を用いるのが便利である。本項では、応力の釣り合いを用いて、一般的な応力を記述するための応力テンソルを導出する。

応力が法線ベクトル \mathbf{n} に依存するので、応力を法線ベクトルの関数として $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ と記述しよう。図 2.3 に示すように、ある微小面に作用する応力を考えたとき、その微小面に作用反作用の法則が成立するはずだ。微小面の一方の面における法線ベクトルが \mathbf{n} とすれば、その裏面における法線ベクトルは $-\mathbf{n}$ となるはずだ。つまり、前者に対応する応力が $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ であり、もう一方の応力は $\mathbf{p}(-\mathbf{n})$ である。したがって、微小面における応力の作用反作用の法則は、

$$\mathbf{p}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{p}(\mathbf{n}), \quad (2.1)$$

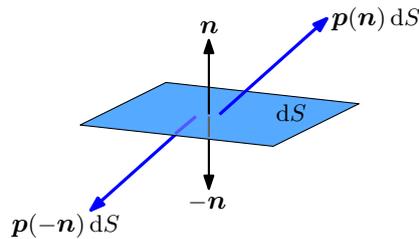


図 2.3: 微小面積に作用する応力の釣り合い

となる。この数式の意味を具体的には、二つの領域 V_1 と V_2 が接している面積素 dS での作用反作用を考えればよい。体積 V_1 の表面としての法線単位ベクトルが \mathbf{n} であるならば、体積 V_2 の表面としての法線単位ベクトルは $-\mathbf{n}$ である。このとき、 V_2 から V_1 に作用する面積力が $\mathbf{p}(\mathbf{n}) dS$ であり、 V_1 から V_2 に作用する面積力は $\mathbf{p}(-\mathbf{n}) dS$ となるはずだ。これらの力は作用反作用の関係にあるため、(2.1) が成立する。

一般的な応力の成分間の関係を図 2.4 に示す簡単なモデルによって考察しよう。カルテシアン座標系 $[x_1, x_2, x_3]$ の原点 O を頂点とし、 x_1 軸上の $x_1 = \Delta x_1$ となる点 A 、 x_2 軸上の $x_2 = \Delta x_2$ となる点 B 、 x_3 軸上の $x_3 = \Delta x_3$ となる点 C によって張られる四面体 $OABC$ に作用する力を考える。その座標系における x_1, x_2, x_3 軸方向の単位ベクトルを、それぞれ、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とするとき、面 OAB の法線ベクトルは $-\mathbf{e}_3$ 、面 OBC の法線ベクトルは $-\mathbf{e}_1$ 、面 OCA の法線ベクトルは $-\mathbf{e}_2$ となる。面 ABC の法線ベクトルは、それらの 1 次結合によって与えられるが、ここでは \mathbf{n} であるとしておこう。四面体の各面に作用する応力は法線

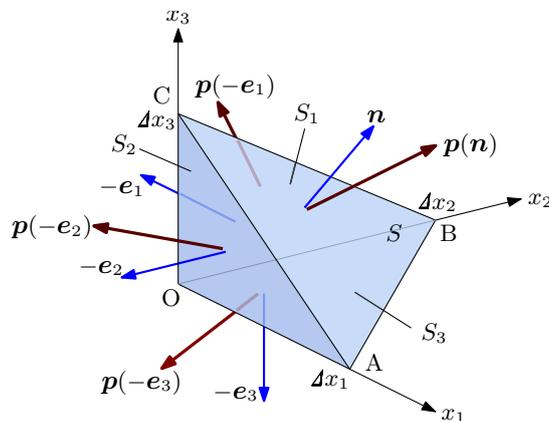


図 2.4: 微小四面体に作用する応力の釣り合い

ベクトルに依存するので、三角形 OAB に作用する応力は $\mathbf{p}(-\mathbf{e}_3)$ 、三角形 OBC については $\mathbf{p}(-\mathbf{e}_1)$ 、三角形 OCA については $\mathbf{p}(-\mathbf{e}_2)$ 、三角形 ABC については $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ となる。厳密には、応力は座標にも依存するが、ここでは微小四面体に作用する応力を考えているので座標への依存性は無視できるものとする。上で説明した条件設定によって、四面体 $OABC$

に作用する応力の合力は,

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{p}(-\mathbf{e}_1) \Delta S_1 + \mathbf{p}(-\mathbf{e}_2) \Delta S_2 + \mathbf{p}(-\mathbf{e}_3) \Delta S_3 + \mathbf{p}(\mathbf{n}) \Delta S,$$

となる。ここで, ΔS_1 は三角形 OBC の面積, ΔS_2 は三角形 OAC の面積, ΔS_3 は三角形 OAB の面積である。これらの面積が,

$$\Delta S_1 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \Delta S, \quad \Delta S_2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) \Delta S, \quad \Delta S_3 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) \Delta S,$$

と書けることに注意すると, 応力 \mathbf{F}_S は,

$$\mathbf{F}_S = \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{p}(-\mathbf{e}_1) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{p}(-\mathbf{e}_2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{p}(-\mathbf{e}_3) + \mathbf{p}(\mathbf{n}) \right] \Delta S,$$

のように書き換えられる。四面体 OABC には, 面積力と体積力の双方が作用するはずだが, 四面体の大きさを限りなく小さくすれば, 面積力に比べ体積力が無視できるようになる。なぜなら, 面積力が四面体の寸法について 2 次の依存性であることに対し, 体積力は 3 次の依存性であるからだ。つまり, 体積力の方が面積力よりも速くゼロに収束するのだ。したがって, 無限小の四面体を考えると面積力だけで合力がゼロになるべきであり,

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{p}(\mathbf{e}_1) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{p}(\mathbf{e}_2) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{p}(\mathbf{e}_3),$$

が成立する。ここで, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3$ が, それぞれ, \mathbf{n} の x 成分, y 成分, z 成分であることから, $n_1 \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1, n_2 \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2, n_3 \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3$ とおけば, 面積力の合力は,

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = n_1 \mathbf{p}(\mathbf{e}_1) + n_2 \mathbf{p}(\mathbf{e}_2) + n_3 \mathbf{p}(\mathbf{e}_3),$$

のように書き換えられる。この応力をカルテシアン座標系で成分分解すると,

$$p_1(\mathbf{n}) = n_1 p_1(\mathbf{e}_1) + n_2 p_1(\mathbf{e}_2) + n_3 p_1(\mathbf{e}_3),$$

$$p_2(\mathbf{n}) = n_1 p_2(\mathbf{e}_1) + n_2 p_2(\mathbf{e}_2) + n_3 p_2(\mathbf{e}_3),$$

$$p_3(\mathbf{n}) = n_1 p_3(\mathbf{e}_1) + n_2 p_3(\mathbf{e}_2) + n_3 p_3(\mathbf{e}_3),$$

のように書くことができる。この数式は,

$$p_\mu(\mathbf{n}) = \sum_{\nu=1}^3 n_\nu p_\mu(\mathbf{e}_\nu),$$

なる記法で表現できる。さらに, $P_{\mu\nu} \equiv p_\mu(\mathbf{e}_\nu)$ なる記号を定義すると, 応力の成分は,

$$p_\mu(\mathbf{n}) = \sum_{\nu=1}^3 P_{\mu\nu} n_\nu, \quad (2.2)$$

なる数式で記述できる。ここで定義した $P_{\mu\nu}$ は応力テンソルと呼ばれる。言い換えると、応力テンソルの成分 $P_{\mu\nu}$ は、法線ベクトル e_ν となる面に作用する応力ベクトルの第 μ 成分である。

応力テンソル $P_{\mu\nu}$ はテンソル代数学において、2階のテンソルに分類される。数学的に記述において、2階のテンソルは、行列として記述することができるので、応力テンソルは、

$$[P_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix},$$

のように記述するとイメージしやすい。前に説明したように、応力テンソルの成分 $P_{\mu\nu}$ は、カルテシアン座標系の基本ベクトル e_ν を法線ベクトルとする面に作用する応力 $\mathbf{p}(e_\nu)$ の第 μ 成分である。そのモデルから、法線応力は $P_{\mu\mu}$ のような対角成分である。法線応力は、 $P_{\mu\mu} > 0$ のとき、外向きの力であり、張力と呼ばれる。逆に、 $P_{\mu\mu} < 0$ であれば圧力と呼ばれる。

2.2.3 応力テンソルの対称性

自明ではないが、応力テンソルは対称テンソルであり、 $P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu}$ が成立する。応力テンソルの対称性は、数学的な見地でなく、物理学的な洞察によって導出することができる。本項では、応力テンソルが対称テンソルであることを示す。

応力テンソルの対称性は、微小直方体に作用する応力によるモーメントを評価することによって証明できる。カルテシアン座標系の x_1, x_2, x_3 方向に、それぞれ、長さ $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ の辺をもつ微小直方体を考える。その直方体の中心が原点 O となるように座標が設定されている。その座標系において、原点を通る座標軸まわりのモーメントの釣り合いに注意すれば応力テンソルの対称性が導出できるのだ。

図 2.5 を参照しながら、 x_3 軸周りのモーメントを評価しよう。微小直方体のうち、 $x_1 = \Delta x_1/2$ なる側面に作用する接線応力は、法線ベクトルが \mathbf{e}_1 である面における x_2 成分であるので、応力テンソルの定義に注意すると P_{21} であることがわかる。その反対側の面 $x_1 = -\Delta x_1/2$ は、法線ベクトルが $-\mathbf{e}_1$ であるので、接線応力は $-P_{21}$ となるはずだ。それらの側面の面積が、それぞれ、 $\Delta x_2 \Delta x_3$ であるので、 $x_1 = \pm \Delta x_1/2$ となる側面に作用する力の法線成分は $\pm P_{21} \Delta x_2 \Delta x_3$ (複合同順) である。したがって、それらの側面に作用する力による x_3 軸周りのモーメントの合計は $P_{21} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ となる。同様に、二つの面 $x_2 = \pm \Delta x_2/2$ に作用する応力によるモーメントは $-P_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ となる。カルテシアン座標系の x_3 軸まわりのモーメントで応力からの寄与は、それらですべてである。したがって、 x_3 軸まわ

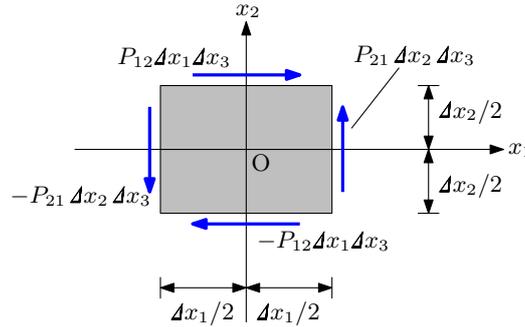


図 2.5: 微小直方体に作用する力の接線成分

りのモーメントで応力からの寄与は,

$$(P_{21} - P_{12}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3,$$

となるわけだ。直方体 V には体積力も作用するので、体積力によるモーメントも発生しているのだが、直方体を無限小とすれば、体積力は面積力に比べて無視できるので、面積力によるモーメントだけで総和がゼロとならなければならない。したがって、 $P_{21} = P_{12}$ が成立すべきである。同様の考察を、 x_1 軸周りのモーメントと、 x_2 軸周りのモーメントについて実行すると、必ず、 $P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu}$ なる対称性が成立することが導かれる。ゆえに、応力テンソルは対称テンソルである。

2.3 テンソルに関する数学

テンソルは連続体を取り扱うために必要な数学の手法である。応力テンソルは行列と同様に見えるが、テンソルは単になる数字の2次元配列ではない。テンソルは座標系と密接な関係があるのだ。本節では、数学におけるテンソルの取り扱いを説明する。

本題に入る前に、以降の数式ではアインシュタインの総和規約を採用しよう。アインシュタインの総和規約は、1次変換のような成分の荷重総和を簡略化する記法である。既に示したように、法線ベクトルが $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$ である表面において、応力ベクトル $\mathbf{p} \equiv [p_1, p_2, p_3]$ は、

$$p_\mu = \sum_{\nu=1}^3 P_{\mu\nu} n_\nu,$$

のように記述できる。応力の成分は、法線ベクトルの1次結合であり、その結合係数が応力テンソルで与えられる。連続体の物理学ではこのような1次結合が多く現れる。上の数式のように、物理学で取り扱う1次結合は積をとる二つの物理量で共通に表れる添え字(この例では ν) について総和がとられる。その結果、総和の対象となる添え字が消失する。この規則性に着目し、一つの項にペアとなる共通の添え字が存在する場合、その添え字につい

て総和をとることを暗黙の規則を設ける。すなわち、応力ベクトルの成分は、 $p_\mu = P_{\mu\nu}n_\nu$ なる数式で記述する。これまでの総和記号を用いた記法との対応関係は、

$$p_\mu = P_{\mu\nu}n_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^3 P_{\mu\nu}n_\nu,$$

となるわけだ。このように、総和記号を省略した記法は**アインシュタインの総和規約**と呼ばれる。その簡略表記は、一般相対性理論の数学記述の際に、アインシュタインが導入したことに端を発する。さらに、アインシュタインの総和規約では、同一のテンソルであってもペアになる添え字が存在する場合、その添え字について総和をとるものとする。例えば、

$$A = A_{\mu\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^3 A_{\mu\mu} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

という具合だ。この例は、行列の対角成分の和であり、行列のトレースと呼ばれる量である。

ベクトルの成分表示 $[a_1, a_2, a_3]$ は、暗黙の座標系が定められている場合を除き、それだけではベクトルの具体的な方向を示していない。具体的なベクトルの方向を示すには、座標系が明確である必要がある。座標系が定まると、各座標軸に沿った基本ベクトル e_1, e_2, e_3 が決まる。その上で成分表示 $[a_1, a_2, a_3]$ が与えられると、ベクトル:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \equiv a_\mu\mathbf{e}_\mu,$$

が特定できるのだ。なお、右辺にはアインシュタインの総和規約を用いた。ベクトルの成分 a_μ は、ベクトル \mathbf{a} を特定するための、基本ベクトルに対応する重み係数なのだ。このベクトルを、別の基本ベクトル \mathbf{e}'_μ を基底とする座標系で記述するとき、ベクトルの成分は異なる値 a'_μ になるはずだ。そのとき、

$$\mathbf{a} = a'_\mu\mathbf{e}'_\mu,$$

が成立する。ただし、 \mathbf{e}_μ を基底とする座標系も、 \mathbf{e}'_μ を基底とする座標系も、ともに正規直交座標系であるとする。つまり、基本ベクトルの大きさは1であり、同一座標系の異なる基本ベクトルどうしが直交する条件:

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad \mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}'_\nu = \delta_{\mu\nu},$$

を満たす²。異なる正規直交系の間の変換は、座標回転によって記述できる。つまり、回転行列 $\alpha_{\mu\nu}$ を用い、基本ベクトルは、

$$\mathbf{e}'_\mu = \alpha_{\mu\nu}\mathbf{e}_\nu, \tag{2.3}$$

²テンソルの本領を発揮すれば正規直交系以外でも簡潔に数学記述できるのだが、本書は簡単のため、正規直交系のみを取り扱う。

によって変換される。この変換式に e_λ を内積させると、

$$e_\lambda \cdot e'_\mu = \alpha_{\mu\nu} e_\lambda \cdot e_\nu = \alpha_{\mu\nu} \delta_{\lambda\nu} = \alpha_{\mu\lambda},$$

となるので、変換行列 $\alpha_{\mu\nu}$ が、

$$\alpha_{\mu\nu} = e'_\mu \cdot e_\nu, \quad (2.4)$$

であることがわかる。この数式からわかるように、 $\alpha_{\mu\nu} \neq \alpha_{\nu\mu}$ である。言い換えると、変換行列 $\alpha_{\mu\nu}$ は対称行列ではない。一方、変換式 (2.3) は、

$$e_\mu = \alpha_{\nu\mu} e'_\nu, \quad (2.5)$$

と書き換えることができる。なぜなら、(2.5) に e'_λ を内積すると (2.4) が得られ、矛盾が生じないからである。さらに、(2.5) に (2.3) を代入すると、

$$e_\mu = \alpha_{\nu\mu} e'_\nu = \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} e_\lambda,$$

となるので、

$$\alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}, \quad (2.6)$$

が成立しなければならない。つまり、変換行列 $\alpha_{\mu\nu}$ とその転置行列 $\alpha_{\nu\mu}$ は逆行列の関係にある。さらに、任意のベクトル \mathbf{a} を展開し、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_\mu e_\mu = a_\mu \alpha_{\nu\mu} e'_\nu \\ &= a'_\mu e'_\mu = a'_\mu \alpha_{\mu\nu} e_\nu, \end{aligned}$$

のように書いてみる。この数式の第1行目は e_μ を基底にする座標系で、第2行目は e'_μ を基底にする座標系で展開した結果である。この数式展開によって、

$$a'_\nu = \alpha_{\nu\mu} a_\mu, \quad a_\nu = \alpha_{\mu\nu} a'_\mu, \quad (2.7)$$

なる変換式が得られる。つまり、ベクトルの成分は基本ベクトルと同一の座標変換にしたがう。実は、この性質がベクトルの条件なのだ。ベクトルとは、単に一行に並べた数値の集合でなく、座標変換によって、基本ベクトルとともに一定の規則³で変換される。

複数のベクトルの積によって得られる数値からテンソルが得られる。ここで述べるベクトルの積とは一般化された積であり、 $A_{\mu\nu} \equiv a_\mu b_\nu$ なる値である。二つの数値 a_μ と b_ν がともにベクトルであれば、座標変換によって、 $a'_\mu = \alpha_{\mu\lambda} a_\lambda$ 、 $b'_\nu = \alpha_{\nu\sigma} a_\sigma$ を満たすので、

$$A'_{\mu\nu} = a'_\mu b'_\nu = \alpha_{\mu\lambda} a_\lambda \alpha_{\nu\sigma} a_\sigma = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A_{\lambda\sigma},$$

³正規直交系では基本ベクトルとベクトルの成分は同一の変換となるが、一般的には同一とは限らない。

のように変換される。このように、二つのベクトルの積で得られる量は2階のテンソルと呼ばれる。上の数式で説明できるように、2階のテンソルは座標変換 $e'_\mu = \alpha_{\mu\nu} e_\nu$ に対して、

$$A'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A_{\lambda\sigma}, \quad A_{\mu\nu} = \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\sigma\nu} A'_{\lambda\sigma}, \quad (2.8)$$

なる変換則を満たす。なお、テンソルの階数とは、生成するにあたって乗じたベクトルの個数である。例えば、0階のテンソルは座標変換に対して不変の値であり、**スカラー**と呼ばれる。また、1階のテンソルはベクトルである。

テンソルの縮約について

2.4 運動方程式

連続体の運動方程式は、運動量保存の法則から得られる。既に導出した質量保存の法則での手法が、運動方程式を導出する際の参考になる⁴。

連続体の中に仮想的に単純閉曲面 S を考え、それによって囲まれる体積 V の運動量を考える。連続体の密度 ρ と速度 \mathbf{u} が与えられたとき、単位体積当たりの運動量は $\rho\mathbf{u}$ となる。したがって、体積 V の運動量は、

$$\mathbf{M} = \int_V \rho\mathbf{u} \, dV, \quad (2.9)$$

で与えられる。質量保存速度と同様に、体積 V に流入した運動量と流出した運動量の差が運動量の増加分に等しい。単位時間あたりの増加分を数式表現すると、

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho\mathbf{u} \, dV = \int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} \, dV,$$

のようになる。なお、この数式はオイラー記述であり、体積が時間とともに変化しないので積分と微分の順序を入れ替えることができている。運動量の変化は、等式:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} \, dV = - \int_S \rho\mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_V \rho\mathbf{K} \, dV + \int_S \mathbf{p}(\mathbf{n}) \, dS, \quad (2.10)$$

を満たす。左辺は既に述べたように、単位時間当たりの運動量の増加分である。一方、右辺の第1項は単位時間あたりに表面 S を通って流入する運動量と流出する運動量の差であり、第2項は体積 V に作用する体積力、第3項は表面積 S に作用する面積力である。このベクトル記法を成分表示すると、

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_\mu)}{\partial t} \, dV = - \int_S \rho u_\mu \sum_{\nu=1}^3 u_\nu n_\nu \, dS + \int_V \rho K_\mu \, dV + \int_S \sum_{\nu=1}^3 P_{\mu\nu} n_\nu \, dS, \quad (2.11)$$

⁴相対性理論によると、運動量保存はエネルギー保存則であり、エネルギー保存則と質量保存は同一法則なので同一手法で導出できるのは当然の事実である。

のように書き換えられる。この数式の右辺の第1項と第3項は、ガウスの定理を適用することができ、

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_\mu)}{\partial t} dV = \int_V \left[-\sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial(\rho u_\mu u_\nu)}{\partial x_\nu} + \rho K_\mu + \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \right] dV,$$

のように体積分に書き換えられる。この方程式が恒等的に成立することは、

$$\frac{\partial(\rho u_\mu)}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial(\rho u_\mu u_\nu)}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \rho K_\mu, \quad (2.12)$$

と等価である。すなわち、公式(2.12)が導出すべき運動方程式である。公式(2.12)の左辺を変形していくと、

$$\begin{aligned} \text{LHS of (2.12)} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} u_\mu + \rho \frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_\nu} u_\mu u_\nu + \rho \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} u_\nu + \rho u_\mu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right) u_\mu + \rho \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_\mu \right) + \rho u_\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) u_\mu + \rho \frac{Du_\mu}{Dt} = \rho \frac{Du_\mu}{Dt}, \end{aligned}$$

が得られる。この計算の最終結果を得るには、(1.8)を利用した。この結果から、運動方程式が、

$$\frac{Du_\mu}{Dt} = \frac{1}{\rho} \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + K_\mu, \quad (2.13)$$

のようにラグランジュ微分として書き換えられる。この方程式は、運動する体積に作用する力は面積力と体積力のみであることを意味している。方程式(2.12)の左辺の第2項は、オイラー記述ゆえに現れる運動量の流れを表している。また、(2.12)の形から、 $\rho u_\mu u_\nu$ が応力のように振る舞っているように見える。

連続体の運動を解析する場合、密度 ρ 、速度 u_μ 、応力テンソル $P_{\mu\nu}$ が未知数となる。導かれた運動方程式は、それらの未知数を決定するには不十分である。未知数の決定には、応力テンソル $P_{\mu\nu}$ を連続体の運動と関係づけることが必要である。連続体に作用する応力は、連続体を変形させるので、変形と応力の関係を定式化することによって運動方程式を解けるようになるのだ。

2.5 連続体の変形

図2.6に示すように、連続体に含まれる2点 \mathbf{x} と \mathbf{x}' を動かした場合を考えよう。これら2点は、互いに近接した点であるとする。一方の点 \mathbf{x} を \mathbf{r} だけ移動する間に、もう一方の

点 \boldsymbol{x}' は \boldsymbol{r}' だけ移動すると仮定する。つまり、移動後の位置は、それぞれ、 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{r}'$ である。そのとき、 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ であれば、連続体は単に平行移動しただけであり、そうでない場合、連続体は変形したことになる。言いかえると、 $\delta\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ は変形の大きさを表す。注

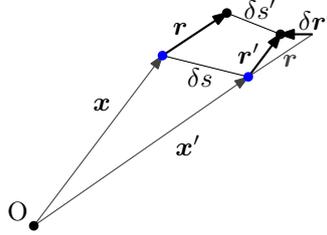


図 2.6: 連続体の変形変形

目する 2 点間の距離 $\delta\boldsymbol{x}$ に対して、 \boldsymbol{r} が大きければ、その連続体は柔らかく、小さければ固いと解釈される。ここで、 \boldsymbol{x} と \boldsymbol{r} が無限小だとすると、解析学の公式から、

$$\delta r_\mu = \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial r_\mu}{\partial x_\nu} \delta x_\nu,$$

であることがわかる。この数式は、変形のベクトルが 2 点間の距離の 1 次結合で表現されることを意味している。そのとき、

$$D_{\mu\nu} = \frac{\partial r_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (2.14)$$

と定義すれば、変形が $\delta r_\mu = D_{\mu\nu} \delta x_\nu$ で与えられる。

続いて、連続体の変形による 2 点間の距離 $\delta s \equiv |\delta\boldsymbol{x}|$ の変化について調べよう。変形前の距離が、

$$\delta s^2 = \delta x_m \delta x_m,$$

を満足することに注意し、変形後の距離の自乗 $\delta s'^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \delta s'^2 &= \left(\delta x_m + \frac{\partial r_m}{\partial x_n} \delta x_n \right) \left(\delta x_m + \frac{\partial r_m}{\partial x_k} \delta x_k \right) \\ &\simeq \delta x_m \delta x_m + \frac{\partial r_m}{\partial x_n} \delta x_m \delta x_n + \frac{\partial r_n}{\partial x_m} \delta x_m \delta x_n \\ &= \delta x^2 + (D_{mn} + D_{nm}) \delta x_m \delta x_n, \end{aligned}$$

のように、変形テンソル D_{mn} を用いた数式が得られる。数式変形において、変形テンソルの 2 次の項は高次の微小量として無視した。変形テンソルは、一般的に、対称テンソルでも交代テンソルでもないが、任意の 2 階テンソルは、必ず、対称テンソルと交代テンソルの和:

$$D_{mn} = E_{mn} + F_{mn}, \quad (2.15)$$

で記述することができる。ここで、 E_{mn} ($= E_{nm}$) が対称テンソル、 F_{mn} ($= -F_{nm}$) が交代テンソルであるとする。具体的には、それらのテンソルは、

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_m}{\partial x_n} + \frac{\partial r_n}{\partial x_m} \right), \quad F_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r_m}{\partial x_n} - \frac{\partial r_n}{\partial x_m} \right), \quad (2.16)$$

のように定義される。そのように変形テンソルを分解すると、変形後の微小距離 $\delta s'^2$ は、

$$\delta s'^2 = \delta x^2 + 2E_{mn}\delta x_m\delta x_n, \quad (2.17)$$

のように記述できる。この記述から、変形テンソル D_{mn} のうち、交代テンソルの成分 F_{mn} は微小距離の変化に寄与しないことがわかる。変形テンソルの対称テンソルと交代テンソルが物理的にどのような役割を担うかを後の段落で確認しよう。

対角成分について考えよう。明らかに、対角成分は対称テンソルでしかゼロ以外の値をとらない。変形テンソルに、ゼロでない成分が対角成分しか存在しない場合、連続体の変形量は、

$$\delta r_1 = E_{11}\delta x_1, \quad \delta r_2 = E_{22}\delta x_2, \quad \delta r_3 = E_{33}\delta x_3,$$

のように、単純な関係によって与えられる。得られた変形は、カルテシアン座標系のベクトル $[E_{11}, E_{22}, E_{33}]$ 方向への伸縮を表す。

対称テンソルの場合において、変形テンソルの対角成分以外について考察しよう。簡単のため、 $E_{12} = E_{21}$ のみがゼロでない場合を考えよう。そのとき、変形量は、

$$\delta x_1 = E_{12}\delta x_2, \quad \delta x_2 = E_{12}\delta x_1, \quad \delta x_3 = 0,$$

となる。この変形によって、図 2.7 に示すように、直方体の連続体が平行六面体に変形する。具体的には、 x_1 軸が x_3 軸について右ねじの方向に角度 $\arctan E_{12} \simeq E_{12}$ だけ回転し、

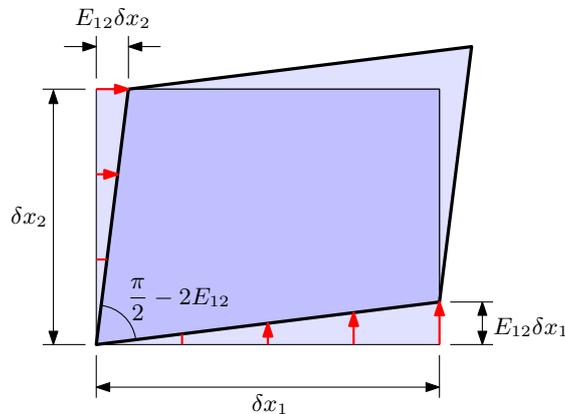


図 2.7: 微小連続体のずれ歪み ($E_{12} = E_{21}$)

x_2 軸が逆方向に同じ角度だけ回転した形状に変形する。このような変形は、ずれ歪みと呼

ばれる。ずれ歪みによる体積変化は、歪みテンソルの2次の無限小となるため、無視できる量である。

反対称テンソルは、対角成分が、必ず、ゼロとなる。反対称テンソル F_{mn} について、

$$\Omega_1 = -2F_{23} = 2F_{32}, \quad \Omega_2 = -2F_{31} = 2F_{13}, \quad \Omega_3 = -2F_{12} = 2F_{21}, \quad (2.18)$$

なるベクトル Ω を定義する。このベクトルを、歪み量 r_m を用いて書くと、

$$\Omega_1 = \frac{\partial r_3}{\partial x_2} - \frac{\partial r_2}{\partial x_3}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial r_1}{\partial x_3} - \frac{\partial r_3}{\partial x_1}, \quad \Omega_3 = \frac{\partial r_2}{\partial x_1} - \frac{\partial r_1}{\partial x_2}, \quad (2.19)$$

となる。これらの成分表示から明らかのように、

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{r}, \quad (2.20)$$

と書くことができる。つまり、ベクトル Ω は歪みベクトル \mathbf{r} の回転である。

回転 Ω の意味を調べるため、反対称テンソルの成分のうち F_{12} だけがゼロでない場合を仮定しよう。そのとき、歪み量は、

$$\delta r_1 = F_{12}\delta x_2, \quad \delta r_2 = -F_{12}\delta x_1, \quad \delta r_3 = 0,$$

となる。この変換によって得られる変形は、図 2.8 に示すように、 x_3 軸についての時計回りに角度 F_{12} だけ回転させることに相当する。微小な直方体に関する限り、回転はその微小体積の形状を変化させない。

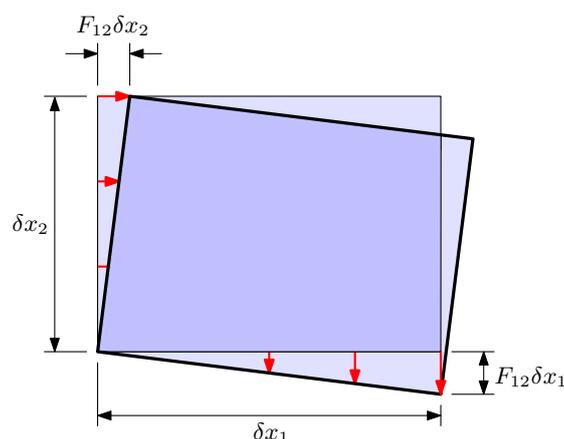


図 2.8: 微小連続体の回転 ($E_{12} = E_{21}$)

歪みテンソル D_{mn} の影響は次のように解釈できる。対称成分 E_{mn} は連続体の形状を歪ませ、反対称成分 F_{mn} は単独では連続体の形状を変化させないが、 E_{mn} と組み合わせることで連続体にねじれが発生する。

2.5.1 歪みの速度

連続体の変形は、応力によって一瞬で発生するのではなく、時間の経過とともに連続的に生じる。本節の冒頭で定義したように、連続体の2点 \boldsymbol{x} と \boldsymbol{x}' に注目したとき、それらの点において生じる時間経過のもとでの変位 \boldsymbol{r} と \boldsymbol{r}' の差異、すなわち、 $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ が変形となる。つまり、単位時間当たりの変形は、

$$\frac{\partial\delta\boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial t} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}',$$

となるはずだ。この数式において、変位 \boldsymbol{r} を t で微分して得られる量が、連続体の注目点における速度という意味だ。結果として、単位時間当たりの変形は、連続体中の異なる点の速度の違いによって生じる。これまでの記法と同様に、異なる2点間の速度の差を $\delta\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'$ と定義すれば、連続体中の2点間の変形速度は、

$$\delta\boldsymbol{u} = \frac{\partial\delta\boldsymbol{r}}{\partial t}, \quad (2.21)$$

なる数式で記述できる。解析学における偏微分の公式を用いて、この関係式を数式変形すると、

$$\delta u_m = \frac{\partial\delta r_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial r_m}{\partial x_n} \delta x_n = \frac{\partial^2 r_m}{\partial t \partial x_n} \delta x_n = \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \delta x_n,$$

が得られる。得られた右辺において、 δx_n への乗数は2階のテンソルであり、それを変形速度テンソル:

$$\dot{D}_{mn} \equiv \frac{\partial u_m}{\partial x_n}, \quad (2.22)$$

として定義する。変形速度テンソルを用いると、変形速度は $\delta u_m = \dot{D}_{mn} \delta x_n$ のように記述できる。変形速度テンソルについても、前項と同様に、

$$\dot{E}_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right), \quad (2.23a)$$

$$\dot{F}_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right), \quad (2.23b)$$

によって対称テンソル \dot{E}_{mn} と交代テンソル \dot{F}_{mn} を定義すれば、

$$\dot{D}_{mn} = \dot{E}_{mn} + \dot{F}_{mn}, \quad (2.24)$$

のように表現できる。そのうち、対称テンソル \dot{E}_{mn} は歪み速度テンソルと呼ばれる。さらにそのうち、対角成分 \dot{E}_{11} , \dot{E}_{22} , \dot{E}_{33} は伸縮歪み速度と呼ばれる。それ以外の成分 \dot{E}_{mn} ($m \neq n$) は、 x_m 軸と x_n 軸方向の2辺がなす角度の変化率を表し、ずれ歪み速度と呼ばれる。また、対角成分の和 (行列のトレース) は、

$$\dot{E}_{mm} = \frac{\partial u_m}{\partial x_m} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}, \quad (2.25)$$

のように計算される。この数式は、アインシュタインの総和の規約を用いていることを注釈しておく。得られた量は、単位時間当たりの体積ひずみを与えるので、体積歪み速度と呼ばれる。当然の性質であるが、非圧縮性の連続体では $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ が成立するため、体積ひずみが存在しないことがこの数式からも確かめられる。

交代テンソル \dot{F}_{mn} から、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ なるベクトルが定義される。その定義は、

$$\omega_1 = -2\dot{F}_{23} = 2\dot{F}_{32}, \quad \omega_2 = -2\dot{F}_{31} = 2\dot{F}_{13}, \quad \omega_3 = -2\dot{F}_{12} = 2\dot{F}_{21}, \quad (2.26)$$

のように記述できる。渦度は言うまでもなく、ベクトル記述では、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (2.27)$$

で記述できるように、速度ベクトルの回転であり、また、連続体の回転ベクトルの時間微分 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ である。

2.5.2 歪みのエネルギー

応力の作用を受けて変形した連続体は、その内部にエネルギーを蓄えている。その事実を示す例として、ボールを地面や机に強く押し付け、その後、急激にその圧力を開放してみればよい。圧力を開放された途端、ボールは飛び上がるはずだ。その現象は、応力によって蓄えられていたエネルギーが運動エネルギーに変換されたと考えればよい。本項は、応力によって蓄えられるエネルギー、すなわち、歪みのエネルギーを定式化する。

カルテシアン座標系に存在し、各辺の長さが $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ の微小直方体に作用する応力を考えよう。その直方体は、重心が原点に位置し、各辺が座標の x_1 軸, x_2 軸, x_3 軸に平行となる向きに配置されている。直方体の各面には、応力テンソル P_{mn} で決まる応力が作用している。直方体の面のうち、 $x_1 = \pm \Delta x_1/2$ となる二つの面について考えよう。それらの面に作用する応力は、

$$\pm [P_{11}, P_{12}, P_{13}] \Delta x_2 \Delta x_3,$$

である。ただし、正符号は $x_1 = \Delta x_1/2$ の面で、負符号は $x_1 = -\Delta x_1/2$ の面での応力である。その応力を受け、 $x_1 = \Delta x_1/2$ の面が $[\Delta r_1^+, \Delta r_2^+, \Delta r_3^+]$ だけ変位を生じ、 $x_1 = -\Delta x_1/2$ の面が $[\Delta r_1^-, \Delta r_2^-, \Delta r_3^-]$ だけ変位を生じたとする。それらの変位は、歪みテンソル E_{mn} を用いて、

$$\begin{aligned} \Delta r_1^+ &= E_{11}(\Delta x_1/2) \frac{\Delta x_1}{2}, & \Delta r_1^- &= -E_{11}(-\Delta x_1/2) \frac{\Delta x_1}{2}, \\ \Delta r_2^+ &= E_{21}(\Delta x_1/2) \frac{\Delta x_1}{2}, & \Delta r_2^- &= -E_{21}(-\Delta x_1/2) \frac{\Delta x_1}{2}, \\ \Delta r_3^+ &= E_{31}(\Delta x_1/2) \frac{\Delta x_1}{2}, & \Delta r_3^- &= -E_{31}(-\Delta x_1/2) \frac{\Delta x_1}{2}, \end{aligned}$$

のように書くことができる。これらの数式で表される変位と応力の内積が連続体が失うエネルギーであるはずだから、 $x_1 = \pm \Delta x_1/2$ の面に作用する応力によって蓄えられるエネルギーは、

$$\begin{aligned} & P_{11} (E_{11}(\Delta x_1/2) - E_{11}(-\Delta x_1/2)) \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{2} \\ & + P_{21} (E_{12}(\Delta x_1/2) - E_{12}(-\Delta x_1/2)) \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{2} \\ & + P_{31} (E_{13}(\Delta x_1/2) - E_{13}(-\Delta x_1/2)) \frac{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}{2} \\ & = (P_{11} dE_{11} + P_{21} dE_{12} + P_{31} dE_{13}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3, \end{aligned}$$

のように書くことができる。歪みテンソル E_{mn} の対称性に注意し、 $x_2 = \pm x_2/2$, $x_3 = \pm x_3/2$ の面に作用する応力についてもエネルギーを加えると、連続体に蓄えられるエネルギーは $P_{nm} dE_{mn} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ となる。したがって、応力によって単位体積あたりに蓄えられるエネルギーは、

$$\varepsilon = P_{nm} dE_{nm}, \quad (2.28)$$

となる。

2.6 弾性体と流体

連続体は応用の作用を受け変形するが、その変形の振る舞いは連続体の種類によって異なる。すなわち、実際の物体の応力と変形の関係は、基本的な原理だけで説明ができず、物性に立ち入ることが必要である。本書では、物性に立ち入らない範囲で議論するため、連続体の典型的なモデルを取り扱おう。典型的なモデルとして、弾性体と流体と取り扱う。

2.6.1 弾性体

固体に作用する応力が小さければ、変形が小さく、力学的に剛体とみなせる。作用する応力が大きくなると変形が生じ、連続体として取り扱わなければならない。応力に対する反応が早く、変形や復元がただちに発生する連続体は、弾性体と呼ばれる。理想的な弾性体のモデルは、応力と変形が複雑さを排除し、単純化した関係で表される。

実際の連続体は、応力がある限界を超えると、変形後の復元ができず、永久に変形したままとなる。そのような性質を示す連続体は塑性体と呼ばれる。例えば、粘土に力を作用させ形状を作る場合が塑性にあたる。塑性が現れる場合、応力を増加する過程と減少する過

程で変形の振る舞いが異なるのだ。それによって引き起こされる永久変形は、弾性履歴現象と呼ばれる。

複雑な分子構造をもつ高分子物質では、応力と変形の間時間的なずれが生じ、一定の応力を加えている状況においても、変形が徐々に増加して一定値に収束する振る舞い(遅延弾性)、または、徐々に変形が減少する振る舞い(応力緩和)などの現象が現れる。そのような応力と変形間の複雑な関係は、レオロジーと呼ばれる分野で研究される。本書ではレオロジーを取り扱わず、金属のような固い物質に作用する小さな応力に対して適用可能な単純モデルについて議論する。本項では、単純なモデルの例として、線形弾性体と等方弾性体を説明する。

線形弾性体 応力と変形が線形変換で対応づけられる弾性体を考えよう。数学的には、応力テンソル P_{mn} と歪みテンソル E_{mn} が、

$$P_{mn} = C_{nmkl} E_{kl}, \quad (2.29)$$

で記述できることを想定する。そのような性質をもつ弾性体は線形弾性体と呼ばれる。そのとき、係数 C_{nmkl} は弾性定数と呼ばれる物質固有のパラメータである。弾性定数 C_{nmkl} は4階のテンソルであるので、形式上、 $3^4 = 81$ 個の要素で構成される。しかし、(2.29)によって関係づけられる P_{mn} と E_{mn} が対称テンソルであり、それぞれ、6個の独立成分があることから、弾性定数 C_{nmkl} の独立成分は36個まで減少できる。さらに、後に示すように弾性定数 C_{nmkl} が $\{n, m\}$ と $\{k, l\}$ について対称性を示すので、独立成分は21個である。

等方性弾性体 弾性体の分子構造によって物理的性質は方向に依存する。一方、金属のように微細分子が均等に整列した構造をもつ場合、物理的性質は方向に依存しない。方向に依存しない性質は等方性と呼ばれる。

弾性体としての性質が等方性である場合、その弾性体は等方性弾性体と呼ばれる。等方性弾性体の弾性定数テンソル C_{nmkl} は、座標系の任意の回転に対して不変である。後に示すように、そのような条件を満足するには弾性定数の独立成分は、たかだか2個まで減少できる。

等方性を調べるには、等方テンソルなるテンソルを考えるとよい。等方テンソルは任意の座標回転に対して不変となるテンソルである。これから等方テンソルの条件を満たすテンソルを挙げ、説明していく。テンソルの階数を2階とすれば、 δ_{mn} は座標回転によっても形が変わらない。弾性定数のような4階テンソルは、2階テンソルの積でつくられることを考えると、座標回転に対して不変である4階テンソルは、

$$C_{nmkl} = \lambda \delta_{mn} \delta_{kl} + \mu \delta_{mk} \delta_{nl} + \nu \delta_{ml} \delta_{nk},$$

なる形であると予想される。ここで、添え字 k と l を交換すると、

$$C_{mnlk} = \lambda \delta_{mn} \delta_{kl} + \mu \delta_{ml} \delta_{nk} + \nu \delta_{mk} \delta_{nl},$$

が得られるが、弾性定数テンソルが k と l について対称であるので、 $C_{mnlk} = C_{mnlk}$ であるはずだ。その要請から、 $\nu = \mu$ でなければならない。それゆえに、弾性定数 C_{mnlk} は、

$$C_{mnlk} = \lambda \delta_{mn} \delta_{kl} + \mu (\delta_{mk} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{nk}), \quad (2.30)$$

のように、二つの定数 λ , μ を用いて特定する。これらの定数は、ラメの弾性定数と呼ばれる。この弾性定数を用いると、応力テンソルは、

$$P_{mn} = \lambda \delta_{mn} E_{kk} + 2\mu E_{mn}, \quad (2.31)$$

のように特定できる。右辺の第1項にはアインシュタインの総和の規約が適用されていることには注意が必要である。この関係式を用いて応力テンソルのトレースを計算すると、

$$P_{mm} = (3\lambda + 2\mu) E_{mm},$$

が得られる。この関係式によると、応力テンソルのトレースは歪みテンソルのトレースの定数倍である。得られたトレースを (2.31) に代入すると、

$$E_{mn} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P_{kk} \delta_{mn} + \frac{1}{2\mu} P_{mn}, \quad (2.32)$$

が得られる。この関係式から、ラメの弾性定数 λ と μ が大きくなると、大きな応力を与えても小さな歪みしか得られない。ラメの弾性定数の無限大の極限で歪みはゼロに近づく。その極限が剛体である。

2.6.2 流体

液体や気体のように、一定の形状をもたず自由に変形することができ、応力によって膨張/収縮する連続体は流体と呼ばれる。本項では、流体をいくつかに分類し、その性質を説明する。

静止流体 容器の内部で静止している気体、または、液体を考えよう。その連続体 (気体、または、液体) の容器の壁面に作用する応力を考える。一般的に、応力は、接線応力と法線応力に分解できる。気体や液体は応力を受けると自由に変形し、応力がなくなった状態で静止するはずだ。法線応力については、容器の壁との作用反作用でせき止められているが、接線応力を妨げる存在がないので、連続体が静止するためには接線応力がゼロでなければ

ならない。この現象は、容器と接する場所だけでなく、連続体の内部も同様であるので、静止する気体や液体に作用する応力が法線応力のみである。このように、法線応力しか存在しない連続体は、流体と呼ばれる。さらに、静止状態の流体は静止流体と呼ばれる。

静止流体の応力を考えよう。上で述べたように、静止流体の応力は法線応力のみであるから、

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = p(\mathbf{n})\mathbf{n},$$

のように表される。ここでは、法線応力が面の方向 \mathbf{n} に依存することを仮定し $p(\mathbf{n})$ と書いたが、実は \mathbf{n} に無関係である。その事実を証明しよう。法線ベクトルが x_n 方向の基本ベクトル \mathbf{e}_n であると仮定すると、流体に作用する応力は、

$$\mathbf{p}(-\mathbf{e}_n) = -p(\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n,$$

となるはずだ。これを利用し、微小4面体に作用する応力の釣り合いを記述すると、

$$\mathbf{p}(\mathbf{n})\mathbf{n} = \sum_{n=1}^3 p(\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_n),$$

となる。この数式の両辺と \mathbf{e}_k の内積をとり、 $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{nk}$ であることを利用すると、

$$p(\mathbf{n}) = p(\mathbf{e}_k),$$

が得られる。この数式は、 $k = 1, 2, 3$ すべてについて成立するので、静止流体の法線応力 $p(\mathbf{n})$ は、法線ベクトルとは無関係に一定である。したがって、接線応力は、

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = -p\mathbf{n}, \quad (2.33)$$

あるいは、

$$p_m(\mathbf{n}) = -pn_m, \quad (2.34)$$

と書くことができる。ここで、 p は実定数であり、 $p > 0$ のときに圧力を意味するよう、右辺に負の符号を付加しておいた。上の数式における p は静水圧と呼ばれる。そのとき、応力テンソルは、

$$[P_{mn}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix},$$

あるいは、

$$P_{mn} = -p\delta_{mn},$$

と記述される。

非常に簡略化されたモデルのように思えるが、法線ベクトルと無関係に圧力が一定であることは、気体や液体における実際の現象と合致している。気体や液体に作用する応力は、常に圧力のみである。

2.7 歪みのエネルギー

応力を受ける連続体は、歪みを受けることによってエネルギーが内部に蓄えられる。単位体積あたりに蓄えられたエネルギー、すなわち、エネルギー密度を ϵ としよう。エネルギー密度 ϵ は、歪みの量を表す歪みテンソル E_{mn} の関数によって記述できるはずだ。歪み量が小さいものとして、

$$\epsilon = [\epsilon]_0 + \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial E_{mn}} \right]_0 E_{mn} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial E_{mn} \partial E_{kl}} \right]_0 E_{mn} E_{kl}, \quad (2.35)$$

のように歪みテンソルの2次関数で記述できる。ここで、下付き添え字0を伴うブラケット ($[]_0$) は、歪みがない状態 ($E_{mn} = 0$) での量を意味する。歪みなしの状態が平衡状態であると仮定すると、1階微分は $[\partial \epsilon / \partial E_{mn}]_0 = 0$ と考えるのが妥当である。また、その平衡状態でのエネルギーがゼロであると考え、連続体のエネルギー密度は、

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial E_{mn} \partial E_{kl}} \right]_0 E_{mn} E_{kl}, \quad (2.36)$$

となる。歪み量についてのエネルギー密度の2階の偏微分は、4階のテンソルと考えることができる。この数式から明らかなように、4階のテンソル $[\partial^2 \epsilon / \partial E_{mn} \partial E_{kl}]_0$ は、 $\{m, n\}$ と $\{k, l\}$ の間で対称である。後の議論のため、(2.36) を微分しておく、

$$\delta \epsilon = \left[\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial E_{mn} \partial E_{kl}} \right]_0 E_{mn} \delta E_{kl}, \quad (2.37)$$

となる。エネルギー密度の微分(2.37)は、連続体を微小に変化させたときのエネルギー密度の変化を表現している。それは、連続体に与えた応力が微小変形をもたらすことによつてなした仕事と等しい。

テンソル $[\partial^2 \epsilon / \partial E_{mn} \partial E_{kl}]_0$ を特定するため、応力による微小変形の仕事を計算しよう。既に導出したように、応力によって微小体積 dV に作用する力は、

$$f_m dV = \frac{\partial P_{mn}}{\partial x_n} dV,$$

で与えられる。ここで、 P_{mn} は応力テンソルである。その力によって連続体が歪み δr_m だけ移動すると、 $f_m \delta r_m dV$ だけ仕事をする。有限の体積 V において応力がなす仕事は、その微小量を積分すれば得られるので、

$$\delta W = \int_V \delta r_m \frac{\partial P_{mn}}{\partial x_n} dV, \quad (2.38)$$

となる。この数式を計算すると、

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_V \left[\frac{\partial(\delta r_m P_{mn})}{\partial x_n} + P_{mn} \frac{\partial \delta r_m}{\partial x_n} \right] dV \\ &= \int_{S=\partial V} \delta r_m P_{mk} n_k dS + \int_V P_{mn} \delta E_{mn} dV, \end{aligned}$$

のように数式変形できる。右辺の第1項はガウスの法則を用いて面積分に変換した。その第1項は体積 V の表面 S に作用する応力の合力であり、第2項は体積力を表している。

ある体積 V に対する仕事は、

$$\int_V \delta\epsilon \, dV = \int_{S=\partial V} P_{kl} n_l \delta r_k \, dS,$$

のように書くことができる。ここで、 P_{mn} は応力テンソル、 n_l は体積 V の表面 S に対する法線ベクトル、 δr_k は応力によって与えられた微小変形量である。ベクトル解析におけるガウスの定理を用いると、この数式の右辺は、

$$\text{RHS} = \int_V \frac{\partial P_{kl} \delta r_k}{\partial x_l} \, dV = \int_V \left(\delta r_k \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l} + P_{kl} \frac{\partial \delta r_k}{\partial x_l} \right) \, dV,$$

のように計算できるが、ここで、変形量 r_k に対して応力テンソル P_{kl} の変化が十分に小さいと仮定すれば、

$$\text{RHS} = \int_V P_{kl} \frac{\partial \delta r_k}{\partial x_l} \, dV = \int_V P_{kl} \delta E_{kl} \, dV,$$

のように数式変形できる。任意の体積 V に対してこの関係が恒等的に成立するのであれば、

$$\delta\epsilon = P_{kl} \delta E_{kl} = C_{klmn} E_{mn} \delta E_{kl}, \quad (2.39)$$

であるはずだ。この数式は既に挙げた (2.37) と比較することによって、弾性定数テンソル C_{klmn} が、

$$C_{klmn} = \left[\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial E_{kl} \partial E_{mn}} \right]_0,$$

であると特定できた。したがって、連続体のエネルギー密度は、

$$\epsilon = \frac{1}{2} C_{klmn} E_{kl} E_{mn}, \quad (2.40)$$

であることが導かれた。この数式によって、弾性定数テンソル C_{klmn} が添え字 $\{k, l\}$ と $\{m, n\}$ の組み合わせに対して対称でなければならないことがわかる。歪み量テンソル E_{mn} が6個の独立成分をもっていることから、 C_{klmn} の独立成分の数は、 $6 \times (6 + 1)/2 = 21$ 個であることが導かれる。

第3章 弾性体の静的変形

本章では、連続体の中でも弾性体の変形を取り扱う。弾性体の変形を解析するには、応力が重要である。例えば、弾性体の左端に力を印加させたとき、弾性体の全体にわたって曲線的に変形する。全体にわたって変形するのは、左端に印加された力を起点に応力が弾性体全体に連なるためだ。その応力の変化率が弾性体の変形を決めることになる。印加された力の向きや分布に応じて、応力が分布し、伸縮・曲げ・せん断などの変形差生じる。本章では、そのような変形について、応力をメカニズムとして解析する。

3.1 弾性体の変形

応力の作用がないときに一定の形状を保つ弾性体を考えよう。その弾性体はゼロの応力作用によって平衡状態を示すと考えてもよい。その弾性体に応力が作用すると歪みが生じ、歪みのもとで新たな平衡状態に落ち着く。そのときの歪みが変形である。その変形は弾性体に作用する応力に依存し一意的に決まるはずだ。

本節で取り扱う変形は、時間に依存しない変形、すなわち、静的変形である。それに対し、時間に依存する変形は動的変形と呼ばれる。

3.2 応力と歪み

等方性弾性体における基本的な変形を考察しよう。前章で導出したように、等方性弾性体では、変形テンソル E_{mn} が与えられたとき、

$$P_{mn} = \lambda E_{kk} \delta_{mn} + 2\mu E_{mn},$$

によって応力テンソルが決まる。この数式を変形テンソル E_{mn} について解くと、前章で導出したように、

$$E_{mn} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P_{kk} \delta_{mn} + \frac{1}{2\mu} P_{mn},$$

となる。なお、この数式はアインシュタインの総和の規約が適用されている。これらの公式を基礎として基本的な変形を考察しよう。

伸縮歪み 単純な例として、弾性体が x_1 方向に伸縮する場合を考えよう。簡単のため、他の方向、すなわち、 x_2 方向と x_3 方向への伸縮はないとする。その状況は、 x_1 方向に有限の厚さをもち、 x_2x_3 平面上に無限に広がる弾性体のシートを考えればよい。その場合、変形を表すのは歪みテンソルの成分 E_{11} のみである。歪みテンソルのほかの成分はすべてゼロである。公式を適用すると、弾性体に作用する応力は、

$$P_{11} = (\lambda + 2\mu) E_{11}, \quad P_{22} = P_{33} = \lambda E_{11}, \quad P_{mn} = 0 \quad (m \neq n), \quad (3.1)$$

となる。得られた数式によると、 x_1 方向の応力は E_{11} 、すなわち、 x_1 方向の歪み量に比例する。それは、いわゆるフックの法則 $F = kx$ に相当する。比例定数 $\lambda + 2\mu$ が大きい場合、その弾性体は固く、変形しにくいことを意味する。しかも、張力の作用で伸び、圧力の作用で縮むという経験則から $\lambda + 2\mu > 0$ でなければならない。

面白いことに、 P_{22} と P_{33} がゼロでない。それは、 x_1 方向に伸縮させるとき、 x_2 方向や x_3 方向の長さを一定に保つには、 x_2 方向や x_3 方向にも応力を作用させなければならないことを意味する。これを数式で書くと、

$$P_{22} = P_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{11},$$

となる。我々の経験則から、 x_1 方向に伸ばそうとして張力を作用させると、 x_2 方向と x_3 方向に縮もうとするため、それらの方向の長さを一定に保つには、張力を与えなければならない。逆に、 x_1 方向に圧力を作用させると、 x_2 方向と x_3 にも圧力が必要となる。つまり、 $\lambda > 0$ であるはずだ。数学的に $\lambda > 0$ が導かれるわけではないが、それに反する物質は現在までに見つかっていない。

ずれ歪み 無限に広がる弾性体において、 x_2 座標に比例して x_1 方向に歪みがある場合を考えよう。つまり、歪みテンソル D_{12} のみが存在し、他の成分はすべてゼロである。歪みテンソル D_{mn} は対称テンソルではなく、ここで考えている状況では $D_{21} = 0$ であるとする。その設定から、対称テンソルである変形テンソルは $E_{12} = E_{21} = D_{12}/2$ となる。変形テンソルの他の成分はすべてゼロである。その変形テンソルの成分から、公式を用いてゼロでない応力テンソルの成分を特定すると、

$$P_{12} = P_{21} = 2\mu E_{12} = \mu D_{12},$$

が得られる。この数式から、比例係数 μ はずれ歪みの発生しやすさを表すことがわかる。同一ずれ歪み D_{12} を起こすにしても、 μ が小さければ、小さな接線応力で十分であるのだ。逆にずれ歪みの起こしにくさは剛性と呼ばれる。そのため、 μ は**剛性率**と呼ばれる。さらに、この考察から $\mu > 0$ でなければならないことがわかる。

体積歪み 無限に広がる連続体の中の直方体に静水圧が作用している状態を考えよう。つまり、直方体には $P_{11} = P_{22} = P_{33} = -p$ のみが作用している。ここで、 $p > 0$ ならば圧力、 $p < 0$ ならば張力が直方体に作用していることになる。応力テンソルと歪みテンソルの関係式から、

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu},$$

が得られる。つまり、静水圧による変形は等方的である。さらに、圧力によって連続体は圧縮されるべきであるので、 $p > 0$ ならば $E_{11} < 0$ となることが条件となる。したがって、ラメの係数は $3\lambda + 2\mu > 0$ でなければならない。

体積ひずみは変形テンソル E_{mn} のトレースで与えられる。この例における体積ひずみは、

$$E_{kk} = E_{11} + E_{22} + E_{33} = -\frac{p}{\lambda + 2\mu/3},$$

となるわけだ。ここで、

$$k = \lambda + \frac{2\mu}{3}, \quad (3.2)$$

なる体積弾性率を定義すると、変形テンソルと圧力/張力の間には、

$$p = -kE_{mn}$$

なる簡単な関係が成立する。また、体積弾性率の逆数 $1/k$ は圧縮率と呼ばれる。フックの法則 $F = kx$ と比較すると、変形テンソルは単位体積当たりのばね定数であると考えられる。

3.3 棒の伸縮変形

有限の長さもった棒の一端を固定し、もう一方の端に圧力、または、張力 F を作用させた場合を考えよう。棒の断面積を S としたとき、棒の端には F/S のような法線応力が作用する。この例に関し、棒の長さ方向に x_1 座標を設定すると、応力テンソルは $P_{11} = F/S$ がゼロでない成分であり、他の成分はすべてゼロである。応力と歪みの関係から、

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} P_{11}, \\ E_{22} = E_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P_{11}, \\ E_{mn} &= 0 \quad (m \neq n), \end{aligned} \quad (3.3)$$

が得られる。これらの数式は、 x_1 方向に作用する応力によって、棒が x_1 方向だけでなく x_2 方向と x_3 方向にも変形することを意味する。既に述べたように、 $\mu > 0$ と $3\lambda + 2\mu > 0$ な

ので、正の張力が作用されると、棒は x_1 方向に伸び、 x_2 方向と x_3 方向に縮むのだ。これは、ゴム製の棒を引っ張ったときに目にする現象と合致している。

物質の伸縮は弾性体において観測される基本現象であるので、ラメの弾性定数を用いる代わりに、伸縮に関して定義された弾性率を用いることが多い。伸縮に関する弾性率は、

$$Y = \frac{P_{11}}{E_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (3.4)$$

のように定義される。その定義された定数は、導入した人物の名前から**ヤング率**と呼ばれる。いうまでもなく、ヤング率は物質固有の定数である。ヤング率を用いると、単位長さの弾性体に作用する張力 P_{11} とその伸び E_{11} は、

$$P_{11} = Y E_{11}, \quad (3.5)$$

なる関係で記述できる。変形テンソルが無次元なので、ヤング率は応力と同一の次元をもつ量である。例えば、MKSA 単位系ならば、ヤング率を表す単位は Pa (もしくは N/m^2) である。

長さとは垂直方向 x_2 と x_3 についても同様に考察できる。ラメの弾性定数が $\lambda > 0$ と $\mu > 0$ であると考えれば、棒を引っ張って伸ばすと棒は細くなり、棒を圧縮すると棒は太くなる。もし、 λ が負であれば、引っ張られた棒が太くなるという理解しがたい現象を意味することになる。数学的に証明されないが、そのような理由で $\lambda > 0$ に違いないのだ。棒の太さ方向の変形に関して、

$$E_{22} = E_{33} = -\sigma E_{11} = -\frac{\sigma}{Y} P_{11},$$

のような記述を考えよう。新たな係数 σ は**ポアソン比**と呼ばれ、

$$\sigma = -\frac{E_{22}}{E_{11}} = -\frac{E_{33}}{E_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (3.6)$$

のように定義される。ポアソン比は、物体を伸縮させる張力が作用したときの、長さ方向の変形に対する太さ方向の変形の比率である。その比率も物質固有の定数である。

ヤング率 Y とポアソン比 σ がわかれば、ラメの弾性定数 λ と μ が特定できる。上で定義した (3.4) と (3.6) を λ と μ について解き、さらに、(3.2) を用いて体積弾性率 k を特定すれば、

$$\lambda = \frac{Y\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)}, \quad k = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}, \quad (3.7)$$

が得られる。つまり、棒状に成型した物質の長さ方向に接線応力を作用させ、長さど太さの変化を測定すれば、物質固有のこれら定数を決定できるのだ。ここで、 $Y > 0$ 、 $\mu > 0$ 、 $k > 0$ を利用してポアソン比 σ の有効範囲を考察すると、 $-1 < \sigma < 1/2$ が得られる。つまり、不思議なことに $\sigma < 0$ 、さらに、 $\lambda < 0$ である可能性を否定できないのだ。

本節での考察は、伸びと縮みを同様に扱ったが、実際の物質ではそうならない。縮の場合、棒が直線を保てず、横方向に張り出した曲線状になることがある。棒がある程度細長い、または、作用する圧力が大きい場合、直線的な形状が外力に対して不安定となるため直線状を保てないのだ。そのような変形は**座屈**と呼ばれる。

本節での考察で、特定方向の歪み E_{11} を与えたとき、それとは垂直方向に応力 P_{22} と P_{33} が発生するという奇妙な現象が導かれた。その奇妙な現象は、物質を構成する分子間力が原因である。特定方向に物質を引っ張ると、構成分子の間隔が広がる。分子間力に引かれ、隣接分子が空いた場所へ移動しようとする。隣接分子が移動してくると垂直方向の変形が生じてしまうので、それを阻止するには、分子間力による引力と釣り合うだけの応力を印加しなければならない。それが、垂直方向に発生する応力の正体である。逆に、圧力を加えて圧縮する場合も同様に、分子間力が垂直方向の応力に関係する。本節で示した数式は、分子間力を意識して構成されたわけではないが、結果的に、分子間力を起因とする歪みの現象を説明することができる簡易的な数学モデルになっている。

3.4 片もち梁の変形

垂直に立った壁上に、長さ L の棒が水平方向に固定した場合を考えよう。その棒は、水平方向を向くように壁に固定されている。そのように固定された水平方向の棒は**片もち梁**と呼ばれる。片もち梁は、固定点以外の場所に左右する力によって曲がる。そのような変形は**曲げ**と呼ばれる。有限の太さをもつ棒の曲げは、棒の断面の中心を連ねた**中立線**の変形を取り扱うことによって解析される。後に示すように、中心線は棒の断面の重心を取るのが適当である。

3.4.1 集中荷重による変形

片もち梁の自由端に、鉛直下方に力 N が作用する場合を考えよう。ここでは、棒が無重力状態に固定されている、もしくは、棒に作用する重力が無視できるとの仮定で問題を取り扱う。棒の固定端が座標の原点であり、棒の長さ方向が x 軸に、高さ方向が z 軸になるように座標軸が設定されている。つまり、 $x = L$ の点に外力 N が下方に作用している。そのとき、図 3.1 のように梁は変形する。その変形した形状を解析しよう。

任意の位置 x での棒の断面には、断面に対して法線方向と接線方向に力が作用している。法線方向の力は、棒が曲がることによって発生する伸縮に起因する。法線方向に作用する力は後に説明する。接線方向に作用する力は、この例において、場所によらず大きさが N となる。その理由は次のとおりである。棒の自由端を含む微小区間を考えた場合、自由端

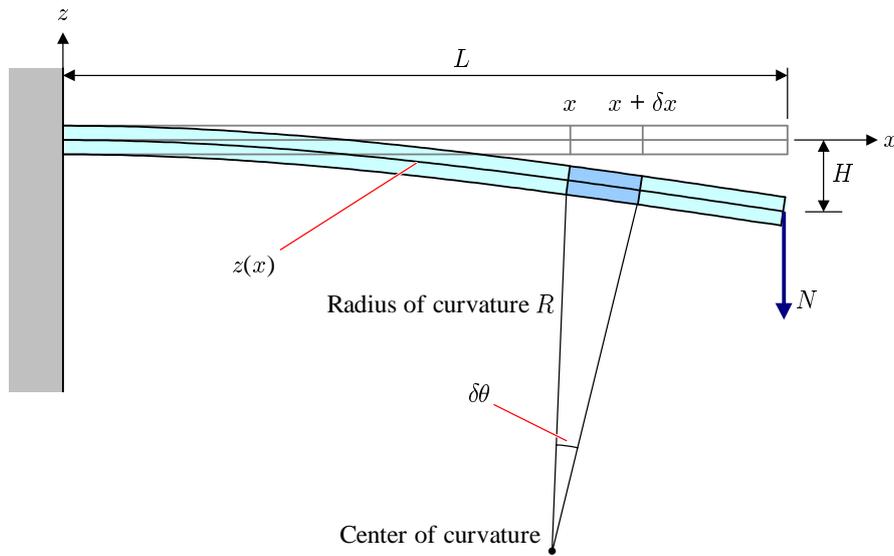


図 3.1: 集中荷重による片もち梁の変形

には応力が作用しないが、自由端で下方に作用する外力 N と釣り合うため、微小区間の左断面には、上方に向かう接線応力 N が発生する。その左隣に接する微小区間区間では、右断面に作用反作用の法則で下方に向かう接線応力が発生する。その断面全体で応力を積分した合力は下向きに N となるはずだ。隣り合う微小区間で、断面に対する接線が右から左へ棒全体に伝搬し、任意の断面で接線方向に力 N が上向きと下向きに作用することになるのだ。

法線方向に作用する力は、棒の曲げに起因する。棒の中立線の y 座標を x の関数 $z(x)$ で表現しよう。曲げによる棒の変形を解析するには、 $z(x)$ の曲率による棒の伸縮を取り扱う。解析学によると、曲線 $z(x)$ の曲率は、

$$\kappa = -\frac{1}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}} \frac{d^2z}{dx^2},$$

によって与えられる。ここで、曲率に負符号を付したのは、上に凸の形状で曲率を正にするためである。曲げの量が十分に小さければ、 $(dz/dx)^2 \ll 1$ と考えられるので、近似的に $\kappa \simeq -d^2z/dx^2$ が成立する。したがって、棒の中立線は、

$$R = \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{d^2z/dx^2},$$

なる曲率半径を示す。中立線を基準にしたとき、曲率の外側が伸長し、内側が収縮する。ここで、座標 x と $x + \delta x$ で挟まれた微小区間について考える。棒の曲率半径を R とし、曲率の中心から微小区間を見込んだ角度を $\delta\theta$ とすれば、 $\delta x = R\delta\theta$ が成立する。棒の中心線から外側に r だけ離れた位置では、この微小区間の長さは $(R + r)\delta\theta$ となっているはずで

ある。この長さは中立線における長さとは異なるので、伸長/収縮が発生しているはずだ。中立線における長さとの差は、

$$(R + r) \delta\theta - R\delta\theta = r\delta\theta = \frac{r}{R}\delta x$$

となる。つまり、長さ δx の微小区間が曲げによって $r\delta x/R$ だけ長さが変化するので、

$$E(r) = \frac{r}{R}, \quad (3.8)$$

だけ変形率が発生している。この変形率は、正では伸長を、負では短縮を意味する。このように伸縮に関する変形率が、 r の関数になっているので、図 3.2 に示すように、棒の中に r を微小に変化させた薄い層を積み重ねた状態を考えるとよい。それらの層ごとに、変形率が少しずつ異なるのだ。各層の伸縮率によって、作用する応力が異なる。位置 r にお

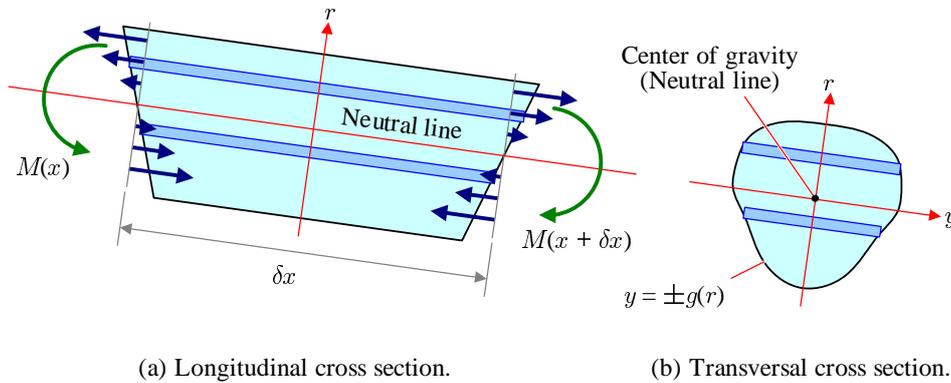


図 3.2: 微小区間の変形に関する応力のイメージ

る層に作用する応力を $P_{11} \equiv P(r)$, 発生する変形を $E_{11} = E(r)$ とすると、

$$P(r) = YE(r) = \frac{Yr}{R},$$

のように関係づけられる。ここで、 Y は棒のヤング率である。この応力を棒の断面全体で積分すれば、断面に作用する力が得られる。ここで、棒の断面が z 軸 (r 軸) に対して対称であり、 $y = \pm g(r)$ で与えられるとしよう。そのとき、棒の断面に作用する長さ方向の力は、

$$F = 2 \int_{r_1}^{r_2} g(r) P(r) dr = \frac{2Y}{R} \int_{r_1}^{r_2} rg(r) dr,$$

で計算できる。ここで、棒は z 座標にして $[z(x) + r_1, z(x) + r_2]$ の範囲に断面が分布していると仮定した。棒の断面に作用する応力の合力として、長さ方向に力が作用しないのであれば、上の式はゼロであるべきなので、

$$\int_{r_1}^{r_2} rg(r) dr = 0, \quad (3.9)$$

が成立するはずだ。この数式から、図3.2 (b) に描くように、中立線が棒の断面の重心を通ることがわかる。言い換えると、異なる位置での断面にわたって、断面の重心を通過する曲線が、棒の中立線である。

既に述べたように、 r に依存して棒の微小部分に対して伸縮を引き起こすことから、棒の断面に作用する応力は r に依存して変化する。場所によって応力が異なるため、棒を曲げるモーメントが発生するのだ。応力によって原点まわりに発生するモーメント¹は、

$$\begin{aligned} M &= -2 \int_{r_1}^{r_2} (z(x) + r) g(r) P(r) dr \\ &= -\frac{2Y}{R} \left(z(x) \int_{r_1}^{r_2} r g(r) dr + \int_{r_1}^{r_2} r^2 g(r) dr \right) \\ &= -\frac{2Y}{R} \int_{r_1}^{r_2} r^2 g(r) dr = -\frac{YI}{R}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

のように計算される。第2行目から第3行目の数式変形において、第1項が消去されたのは(3.9)を適用したからだ。さらに、新たに導入した記号 I は、

$$I \equiv \int_{r_1}^{r_2} r^2 g(r) dr, \quad (3.11)$$

のように定義される。記号 I は、境界線を $g(r)$ で与えられる断面における中立線まわりの慣性モーメントである。計算されたモーメント M は、曲率半径 R の依存性を含む。曲率半径 R が x によって異なるため、モーメント M は x の関数である。具体的に記述すると、

$$M(x) = YI \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad (3.12)$$

となる。なお、ヤング率と断面の慣性モーメントの積 YI は**曲げ剛性率**と呼ばれる。

先端に作用する力 N によって、棒が変形するため、棒の微小区間には棒を変形させるためのモーメントが作用している。微小区間 $[x, x + \delta x]$ について、棒を変形させるモーメントの釣り合いを方程式として記述しよう。モーメントの記述は、原点を中心とした立場で実行してみよう。微小区間の一端 x には垂直上方に N の力が、もう一端には垂直下方に N の力が作用している。棒の曲げが十分に小さければ、その力によって作用する原点中心のモーメントは、

$$Nx - N(x + \delta x) = -N\delta x,$$

である。このモーメントが、微小区間を変形させるために使われると考えよう。すでに計算したように、棒が変形すれば、微小区間の左断面 x からモーメント $-M(x)$ が、右断面 $x + \delta x$ から $M(x + \delta x)$ が作用する。つまり、モーメントの釣り合いは、

$$-M(x) + M(x + \delta x) - N\delta x = 0,$$

¹位置 \mathbf{r} における力 \mathbf{F} に関するモーメントの定義 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ に基づき、 xz 平面内における xz 平面上の力ではモーメントは、 y 成分しかもたない。よって、ここではモーメントの定義にしたがって計算されたベクトルの y 成分を表示する。

なる数式で記述できる。この方程式は、 $\delta x \rightarrow 0$ の極限で、

$$\frac{dM}{dx} = N, \quad (3.13)$$

なる微分方程式に書き換えられる。モーメント $M(x)$ が (3.12) であることに注意すると、

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{N}{YI}, \quad (3.14)$$

が導かれる。この方程式を1回だけ積分すると、

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{N}{YI}(x - L),$$

が得られる。ここで、 $x = L$ で $d^2z/dx^2 = 0$ となるように積分定数を選んだ。そのように選んだ理由は、棒の自由端である $x = L$ では法線応力がゼロであるので、中立線の曲率がゼロになるはずだからである。さらに積分すると、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{N}{2YI}x^2 - \frac{NL}{YI}x,$$

が得られる。今度は、棒の固定条件として、 $x = 0$ で $dz/dx = 0$ となるように積分定数を選んだ。この数式をさらに積分すると、

$$z = -\frac{NL^3}{2YI} \cdot \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{x}{3L}\right), \quad (3.15)$$

となる。この積分では、 $x = 0$ で $z = 0$ となるように積分定数を選んだ。得られた数式によると、棒の曲げが小さければ、変形した棒の中立線は近似的に3次曲線を描くことになる。棒の先端の湾曲量 H は、

$$H = \frac{NL^3}{3YI}, \quad (3.16)$$

で与えられる。この結果から、湾曲量が棒のヤング率と断面の慣性モーメントに反比例することがわかる。曲げ剛性率 YI に反比例する、と言い換えてもよい。また、先端に印加した力に比例して湾曲することもわかる。さらに、湾曲量は棒の長さの3乗に比例する。棒の長さが2倍になれば、同じ力が作用すると、変形した棒の先端は8倍も下がるということだ。

棒の湾曲量が剛性率 YI に反比例する事実は、構造設計において重要である。棒の断面形状によって湾曲量が異なるからだ。例えば、高さ方向に a 、奥行方向に b の長方形断面をもつ棒を想定した場合、(3.11) によって計算すると、

$$I = \frac{a^3b}{12},$$

が得られる。この計算結果によると、幅 b を広くとるよりも、高さ a を大きくする方が変形を小さくできる。一定の体積で実現するなら、 ab を一定に保ち、 b に比べ a を大きくと

れば変形を小さくできる。しかし、実際、 b を薄くすると垂直方向からの力で曲がりやすくなるため、捩れ変形を起こしやすくなる。そのような理由で、実際の建築で利用される梁は、変形の方に厚いだけでなく、その垂直方向にもある程度の厚さをもつように、I字型やH字型の断面をもっている。

てこに作用する力 片もち梁の応用として、てこの歪みを解析することができる。図 3.3 に示すように、てこの長さを $L_A + L_B$ とする。支点 O から左に L_A だけ隔てた位置に、鉛直下方に力 F_A を作用させる。同様に、支点 O から右に L_B だけ隔てた位置に、鉛直下方に

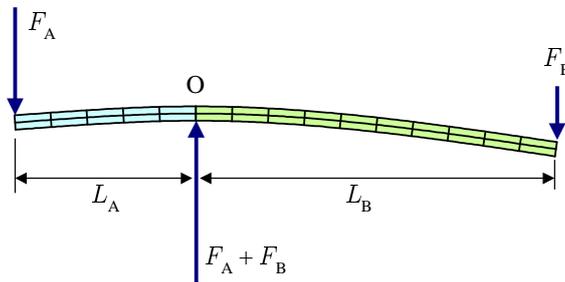


図 3.3: 釣り合った状態のてこの変形

力 F_B を作用させる。このとき、図 3.3 に描いたてこは釣り合っているとす。釣り合った状態においては、支点 O より左側と右側は、ともに、片もち梁として扱ってもよい。簡単のため、左側を梁 A、右側を梁 B と呼ぼう。釣り合いの状態において、梁 A にとって、梁 B は壁面の役割を果たす。逆に、梁 B にとって、梁 A は壁面の役割を果たす。

片もち梁の変形は、既に導出されたように、数式 (3.15) によってその湾曲の具合が表現されている。その数式に、この例におけるてこの長さとお荷重を代入すると、

$$z = \begin{cases} -\frac{F_A L_A}{2YI} x^2 \left(1 + \frac{x}{3L_A}\right) & \text{if } x \leq 0, \\ -\frac{F_B L_B}{2YI} x^2 \left(1 - \frac{x}{3L_B}\right) & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

が得られる。ここで、 $x \leq 0$ は左側の片もち梁、 $x > 0$ は右側の片もち梁に対応する。ここで、中立線から r だけ離れた梁の内部における応力が、

$$P(r) = -Yr \frac{d^2z}{dx^2},$$

であることに注意すると、 $x = 0$ における応力は、

$$P_A(r) = \frac{F_A L_A}{I} r, \quad P_B(r) = \frac{F_B L_B}{I} r,$$

となる。ここで、 $P_A(r)$ と $P_B(r)$ は、それぞれ、支点 O より左側と右側の片もち梁に作用する応力である。任意の位置 r において、これらの応力が釣り合うには、

$$F_A L_A = F_B L_B,$$

でなければならない。これがてこの原理である。つまり、支点からの距離が大きくなると小さな力で釣り合いをとることができるのだ。得られた数式からわかるように、てこの原理はモーメントの釣り合いで説明できる。実際この現象としては、力点に力を作用させることで棒が変形し、応力が発生する。応力は棒を伝搬し、支点 O では、支点から見たモーメントに比例する応力が作用している。支点の両側から伝搬してきた応力が釣り合った状況がてこの動作状態というわけだ。

図 3.3 において、支点 O には $F_A + F_B$ の力が上向きに作用する。その事実は次のように説明できる。支点 O より左側の梁に着目し、梁を x 軸方向に多数の微小区間に分割したとする。最も左の微小区間の左端に力 F_A が下向きに作用している。釣り合いを考えると、その微小区間の右端には力 F_A が上向きに作用するはずだ。その場合、作用反作用の法則で、右隣の微小区間の左端には力 F_A が下向きに作用する。その理屈で、微小区間をまたいで力 F_A が伝搬し、支点 O で力 F_A が上向きに作用することになる。支点 O より右側の梁についても同様の考察で、最終的に、支点 O で力 F_B が上向きに作用することが導かれる。それらの結果として、支点 O では $F_A + F_B$ の力が上向きに作用するのだ。

てこは図 3.4 に示すように、第 1 種 (first class) と第 2 種 (second class) のてこに分類される。これらのてこは、ともに、図 3.3 で説明した応力の釣り合いを利用して力を増強する。第 1 種てこ (図 3.4 (a)) は支点 (fulcrum) が力点 (effort) と作用点 (resistance) の間に

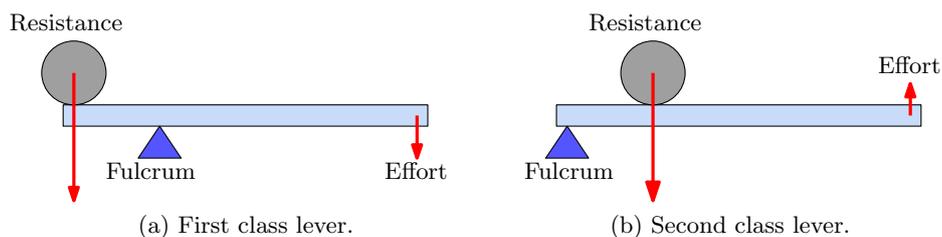


図 3.4: てこの種類

ある。この機構はバールや、自動車の変速機のシフトレバーに応用されている。第 2 種てこ (図 3.4 (b)) は作用点が支点と力点の間にある。この機構は、栓抜きや、自動車のブレーキペダルに応用されている。

3.4.2 均等荷重による変形

片もち梁として設置した棒は、通常、自らに作用する重力(重量)によって変形する。前項での手順を参考にすれば、自らの重量による変形を解析できる。この場合、棒の任意の断面に作用する接線方向の力が前項と異なる。その違いに注意すれば、解析は難しくない。

単位長さあたりの棒の質量を ρ としよう。任意位置の小区間 $[x, x + \delta x]$ に作用する接線方向の力を考えてみる。右端には下方に力 $N(x + \delta x)$ が作用している。同様に、左端には上方に力 $N(x)$ が作用しているとする。それだけでなく、微小区間が質量 $\rho \delta x$ をもつため、微小区間には下方に $\rho g \delta x$ の重力が作用しているはずだ。それらの力が釣り合っている状態では、

$$N(x) - N(x + \delta x) - \rho g \delta x = 0,$$

が成立するはずだ。この力の釣り合いは、 $\delta x \rightarrow 0$ の極限で、

$$\frac{dN}{dx} = -\rho g,$$

なる常微分方程式に書き換えられる。棒の自由端で応力がゼロになる条件で微分方程式を解くと、

$$N = \rho g (L - x), \quad (3.17)$$

が得られる。つまり、固定点に近づくほど、単位長さあたりで ρg ずつ接線方向に作用する力が増加するのだ。その結果を用いて、微小区間に作用する接線方向の力と重力による原点まわりのモーメントを計算すると、

$$\begin{aligned} xN(x) - (x + \delta x)N(x + \delta x) - \rho g x \delta x \\ &= -x(N(x + \delta x) - N(x)) + N(x + \delta x)\delta x - \rho g x \delta x \\ &= -x \frac{dN}{dx} \delta x + N(x)\delta x - \rho g x \delta x \\ &= \rho g x \delta x + N(x)\delta x - \rho g x \delta x \\ &= N(x)\delta x = \rho g (L - x)\delta x, \end{aligned}$$

が得られる。これが前項との違いである。

法線方向に作用する力は、棒の変形によって発生する応力に起因するので前項と同様である。したがって、本項の場合、棒の中立線を与える微分方程式(3.14)は、

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\rho g}{YI} (L - x), \quad (3.18)$$

となる。いうまでもなく、右辺には先ほど考察した力 N の x 依存性が含まれている。微分方程式(3.18)の解は、

$$y(x) = -\frac{\rho g L^4}{24YI} \cdot \frac{x^2}{L^2} \left(6 - \frac{4x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right), \quad (3.19)$$

となる。棒の先端にのみ外力が作用する場合、棒の中立線が3次関数となっていたが、一様に重力が作用するモデルでは4次関数となる。なお、この解は、以下の考察によって積分定数が決定されている。

1. 棒の先端 $x = L$ では、接線応力がゼロになるので、棒を変形させない。つまり、 $x = L$ では中立線の曲率がゼロとなるため、 $d^2y/dx^2 = 0$ となる。
2. 棒の固定条件から、 $x = 0$ で $dy/dx = 0$ となる。
3. 棒の固定条件から、 $x = 0$ で $y = 0$ となる。

導出された数式によると、長さ L の棒を片もち梁として固定すると、棒が変形することによって先端部が、

$$H = \frac{\rho g}{8YI} L^4, \quad (3.20)$$

だけ下がるという計算になる。この計算結果は図 3.5 のような湾曲を表す。この図は、同じ材質で同じ断面の梁の変形を比較している。長さ L は 1.4 倍程度だが、湾曲量が L の 4

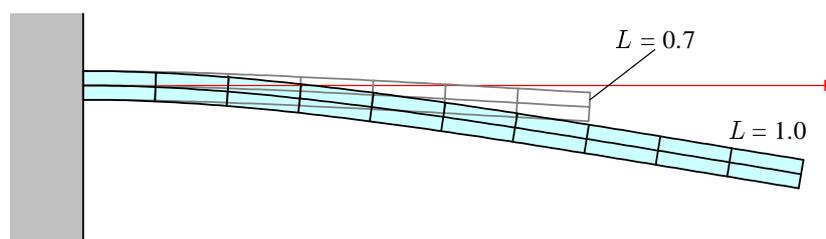


図 3.5: 均等荷重による梁の変形

乗に比例するので、先端部の湾曲量が 4 倍程度になっている。

均等荷重の梁において、湾曲が長さの 4 乗に比例することは構造設計において注意が必要な事実である。集中荷重モデルは、自らに作用する重力が無視できる場合に、局所的な外力による梁の変形を表していた。例えば、住宅のバルコニー設計においては、先端部に数名の人が乗った状況において、それらの人に作用する重力が外力となる。それに対し、均等荷重は、自らに作用する重力による梁の変形を表す。仮に、梁の密度 ρ が小さいなら、自らに作用する重力を無視して外力のみを考えて十分だとしても、梁の長さ L が大きくなると、もはや、自らに作用する重力を無視できなくなる。極端に L が大きくなると、バルコニー先端に乗った人による湾曲よりも、自らの重量による湾曲が支配的になることもある。

3.4.3 中央集中荷重による両もち梁の変形

既に確認したように、片もち梁における棒の変形は、固定点からの距離に対して、3次または4次の依存性で大きくなる。少なくとも、両端を固定点か支点にすれば変形に寄与する距離は半分になるので、変形の大きさを10分の1程度に抑えることができるだろう。そのように、両端を固定、もしくは、支持する構造は両もち梁と呼ばれる。本項では、特に、両もち梁の中央に集中荷重を与えたときの変形を調べよう。

両もち梁の代表的なモデルとして、図3.6に示すように、(a) 支持梁 (supported beam) と、(b) 固定梁 (fixed beam) が挙げられる。支持梁は、両端に梁を支える台座を有し、その台座の上で梁は向きを変えることが許容される。一方、固定梁は、両端でしっかりと向きも定められた状態で固定される。図3.6は、両もち梁における集中荷重の一例だ。梁の中央に、鉛直下方に向かって力 F を作用させた状況である。このように、中央に集中荷重を

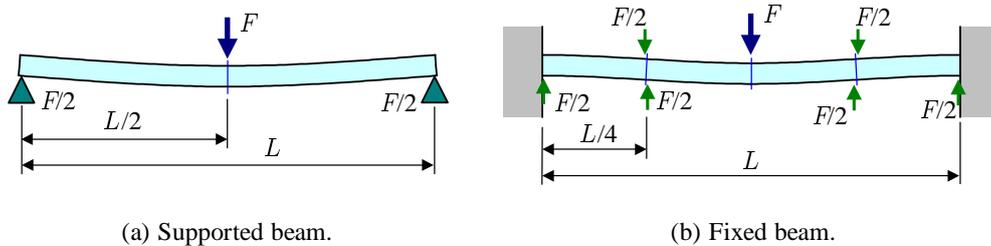


図 3.6: 両もち梁のモデル

与えたケースでは、対称性を利用して片もち梁の問題に帰着することができる。つまり、新たに方程式を導出せず、既に片もち梁の問題で導出した公式 (3.16) を用いて梁の湾曲量が算出できるということだ。以降の段落で、支持梁と固定梁のそれぞれについて、中央の湾曲量 $z(L/2)$ を計算しよう。

支持梁 図3.6 (a) から明らかなように、この梁は $x = L/2$ について左右対称である。中央に作用する力 F は、対称性ゆえに、左右で均等分配される。すなわち、左半分について、左端に集中荷重 $F/2$ が鉛直下方に作用するため、左端の台座では $F/2$ が鉛直上方に作用する。この様子は、片もち梁を上下反転した状態である。したがって、この梁の湾曲量は、(3.16) に $L \mapsto L/2$, $N \mapsto F/2$ の置き換えをすれば計算できる。その計算結果は、

$$z(L/2) = -\frac{FL^3}{48YT},$$

となる。つまり、支持梁によって両もち梁を構成すれば、湾曲量は片もち梁の16分の1まで小さくすることができるのだ。

固定梁 図 3.6 (b) に示すように、固定梁は両端の向きまで含めて固定している。梁の中央で鉛直下方に印加した力 F は、左側半分と右側半分で、 $F/2$ ずつに均等分配される。分配された力は応力として梁を伝搬し、左端では固定部 (壁面) から鉛直上方に $F/2$ の作用を受ける。右側半分も同様だ。ここで、左側半분을さらに、 $x = L/4$ で分割しよう。力の関係を見ると、 $x = L/4$ で対称性があることに気づくだろう。つまり、この梁は左から 4 分の 1 ($0 \leq x \leq L/4$) の区間で片もち梁と等価である。したがって、(3.16) に $L \mapsto L/4$ 、 $N \mapsto F/2$ の置き換えをすれば、計算すべき湾曲量の半分に相当する量が計算できる。その結果を 2 倍すれば、計算すべき $z(L/2)$ が算出できる。その計算結果は、

$$z(L/2) = -\frac{FL^3}{192YI},$$

となる。この湾曲量は、端点に集中荷重を作用させた片もち梁のわずか 64 分の 1 である。このように、両もち梁にすることで梁の変形をかなり小さくすることができる。建築において、バルコニーを大きく張り出す場合、張り出したバルコニーに脚を設けるのはこのような理由があるのだ。

3.4.4 均等荷重による両もち梁の変形

均等荷重の場合、中央に集中荷重を与えたときのような大胆な対称性は使えない。そのため、片もち梁の公式を使うわけにはいかないで、新たに公式を導出することにしよう。ただ、 $x = L/2$ について左右対称である対称性は使える。

左右対称であるので、両もち梁の左半分 ($0 \leq x \leq L/2$) に着目して公式を導出しよう。左右の台座、または、固定点 (壁面) で荷重を折半しているようなイメージを考えればよい。均等荷重の両もち梁では、基本となる微分方程式は (3.18) に基づき、

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{\rho g}{2YI}L - \frac{\rho g}{YI}x, \quad (3.21)$$

である。この微分方程式に、境界条件を適用し、積分定数を決定しながら積分を実行すると解が得られる。課すべき境界条件は、支持梁と固定梁では異なる。

支持梁 支持梁は両端が自由端であるので、 $x = 0$ で曲率がゼロである。そのため、 $x = 0$ で $d^2z/dx^2 = 0$ となるはずだ。さらに、 $x = L/2$ について左右対称であることから、 $x = L/2$ で $dz/dx = 0$ となるべきだ。それらの境界条件に考慮しながら、(3.21) を積分すると、

$$z(x) = -\frac{\rho g L^4}{24YI} \cdot \frac{x}{L} \left(1 - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right), \quad (3.22)$$

が得られる。なお、この数式を特定するうえで、 $z(0) = 0$ なる境界条件も付加した。この形態では、最下点の高さは、得られた数式に $x = L/2$ を代入し、

$$z(L/2) = -\frac{5\rho g L^4}{384YI},$$

であることがわかる。この変形量は片もち梁の約0.1倍である。

固定梁 固定梁ではさらに湾曲量が小さくなる。固定梁も同様に、微分方程式(3.21)から始まる。固定梁における境界条件は、 $x = 0, L/2$ で $dz/dx = 0$ となることである。さらに、 $z(0) = 0$ を境界条件として追加すると、梁の中立線の高さは、

$$z(x) = -\frac{\rho g L^4}{24YI} \cdot \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right), \quad (3.23)$$

となる。この形態では、最下点の高さは、得られた数式に $x = L/2$ を代入し、

$$z(L/2) = -\frac{\rho g L^4}{384YI},$$

であることがわかる。この変形量は片持ち梁の約0.02倍である。

3.5 棒の座屈

棒を伸ばす作用が安定であるのに対し、縮める作用は不安定である。安定であるとは、棒に作用させる力が攪乱によって軸からずれてしまった場合の振る舞いを意味する。その安定性は、図3.7の状況を考えるとわかりやすい。棒を伸縮させるには、棒の軸に沿った力を作用させることが重要である。図3.7は、作用させた力が棒の軸からずれた状況を描いている。軸からずれた力は、図に示すように、軸方向の成分と、それと直交する成分に分離

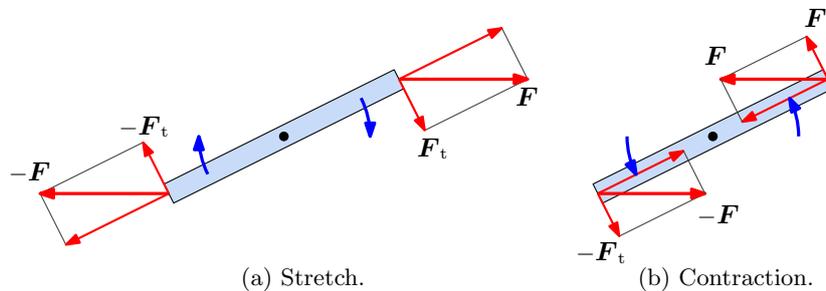


図 3.7: 軸からずれて棒を伸縮させる力

できる。軸方向の成分が望み通り棒を伸縮させるわけだが、それに対して、直交する成分は棒を回転させる。図3.7(a)のように、伸ばす過程において、力が軸からずれると、ずれ

を小さくするように棒が回転する。そのため、棒は安定して引き伸ばされる。一方、収縮する過程において力が軸からずれると、棒はそのずれを拡大する方向に回転する。その理由で縮める作用は不安定なのだ。

不安定性がゆえに、棒を収縮する際に垂直方向からの攪乱によって意図しない方向への変形が生じる。例えば、その収縮過程において、棒の先端が横に逸れる、または、棒の中央が湾曲するなどの変形が発生するわけだ。そのような変形は**座屈**と呼ばれる。

水平面に長さ L の棒を立て、棒と水平面の接合部を固定した場合を考えよう。棒は垂直に立つよう固定されるとする。棒の長さ方向に z 座標、その垂直方向に x 座標を設定しよう。棒の自由端には、力 F を鉛直下方に作用させる。その力によって棒は圧縮されるが、その圧縮は微小であるとする。理想的に鉛直方向に圧縮されるなら、棒はわずかに縮むだけである。外部からの攪乱によって力が棒の軸からずれると、図 3.8 に示すように、棒に曲げが発生する。ここで、外部からの攪乱によって棒が曲がり、自由端が H だけ横に動いた場合を想定する。そのとき、任意の位置 z と $z + \delta z$ に挟まれる小区間に作用する力の釣り

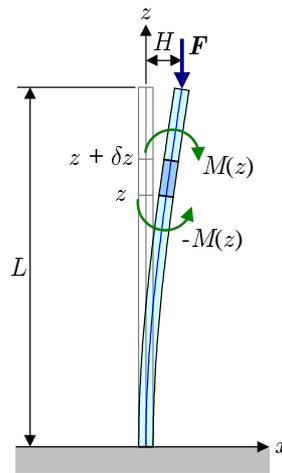


図 3.8: 棒の座屈

合いと、力のモーメントの釣り合いを考える。力に関しては、断面 z には z 軸方向に F が、断面 $z + \delta z$ には z 軸方向に $-F$ が作用している。モーメントに関しては、断面 z に作用する応力によるモーメント $-M(z)$ と断面 $z + \delta z$ に作用する応力によるモーメント $M(z)$ が存在する。さらに、力 F も棒の曲がりによってモーメント $F \cdot (x(z) - x(z + \delta z))$ を発生させる。したがって、微小区間のモーメントの釣り合いは、

$$-M(z) + M(z + \delta z) + F \cdot (x(z + \delta z) - x(z)) = 0,$$

のように記述できる。この方程式は、 $\delta z \rightarrow 0$ の極限で、

$$\frac{\partial M}{\partial z} + F \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad (3.24)$$

なる微分方程式になる。力 F が z の関数でないので、この微分方程式は容易に積分でき、

$$M(z) + Fx(z) = c_1,$$

が得られる。ただし、 c_1 は積分定数である。自由端 $z = L$ で応力がゼロであることに注意すると、

$$c_1 = 0 + Fx(L) = FH,$$

のように積分定数が決定される。したがって、モーメントの釣り合いから導かれる関係は、

$$M(z) + F(x(z) - H) = 0,$$

となる。応力によるモーメント $M(z)$ は棒の曲げの問題と同様に、 $M(z) = YI \cdot d^2x/dz^2$ であるはずだから、

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{F}{YI} (x(z) - H) = 0, \quad (3.25)$$

と書くことができる。この方程式を解けば、棒の収縮時に外部攪乱があった場合の棒の形状 $x(z)$ が特定できるわけだ。

棒の形状を決定する微分方程式 (3.25) は2階の常微分方程式であり、その一般解は積分定数 c_2 と c_3 を用いて、

$$x(z) = H + c_2 \cos \sqrt{\frac{F}{YI}} z + c_3 \sin \sqrt{\frac{F}{YI}} z, \quad (3.26)$$

のように表される。この一般解に対して、 $x(0) = 0$ と $x(L) = H$ を境界条件として用いると、積分定数 c_2 と c_3 は、

$$c_2 = -H, \quad c_3 = H \cot \sqrt{\frac{F}{YI}} L,$$

のように決定される。したがって、

$$x(z) = H \left\{ 1 - \frac{\sin[\sqrt{F/YI}(L-z)]}{\sin(\sqrt{F/YI}L)} \right\}, \quad (3.27)$$

が得られる。実は、この時点で使っていない境界条件が一つある。それは、 $z = 0$ で棒が鉛直上方を向くように固定されていること、すなわち、 $dx/dz = 0$ となることである。それを要求すると、

$$\cos \sqrt{\frac{F}{YI}} L \equiv \cos \sqrt{T} = 0, \quad (3.28)$$

でなければならない。ただし、新たな記号 T は、

$$T \equiv \frac{FL^2}{YI},$$

のように定義される。境界条件 (3.28) を満たす T は,

$$T = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.29)$$

のように複数存在する。そのうちの最小値:

$$T_c = \frac{\pi^2}{4}, \quad (3.30)$$

は**臨界値**と呼ばれる。この臨界値に対応する荷重は**座屈荷重**と呼ばれ、 $T = \pi^2/4$ となる荷重として,

$$F_c = \frac{\pi^2 Y I}{4L^2}, \quad (3.31)$$

が特定できる。棒の鉛直上方から作用させる荷重が座屈荷重を超えると座屈が発生する。座屈荷重は、 YI に比例していることから、変形しづらい材質ほど大きな値となる。逆に、長さの自乗に反比例するので、材質や形状が同じであっても、棒が長くなると小さな荷重で座屈するのだ。

座屈は次のように解釈すればよい。棒を長さ方向に圧縮するとき、加える力 F が小さく座屈荷重に満たない場合、直線形状が唯一の安定状態である。しかし、座屈荷重を超えると、湾曲した状態でさえ安定状態になり得るのだ。そうなると、外部攪乱によって垂直方向の作用が混合すると、順次に湾曲した状態に遷移するというわけだ。

3.6 しなやかな棒の変形

これまで変形量が非常に小さい場合を扱った。ここでは、しなやかに変形するような細い弾性体の棒を大きく曲げた状態を解析しよう。本節で取り扱う、細い材質がしなやかに曲がって描く形状はエラスチカ (elastica) と呼ばれる。本節では、ピアノ線のように大きく曲がる棒を定式化し、これまでに取り扱った近似との対応関係を調べる。具体的には、鉛直方向に立てた棒の変形、および、水平方向に指示する片もち梁を解析する。

3.6.1 数学的設定

しなやかに変形する弾力がある細い棒を、水平方向に片もち梁の形で渡した場合を考えよう。棒の自由端に鉛直下方に向かう力 F を印加する。図 3.9 のように、変形した棒の長さに沿って座標 s を設定し、任意の地点 s において、針が水平方向から角度 ϕ だけ傾いているとする。当然、 ϕ は s の関数である。さらに、水平方向に座標 x 、鉛直下方に向かって座標 z を設定する。その設定のもと、傾き ϕ は、

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \phi, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dz} = \tan \phi, \quad (3.32)$$

のように表現できる。なお、傾き ϕ は x 軸から時計回りにとった角度である。ここで、棒の曲率 κ は、

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds}, \quad (3.33)$$

である。ここで、 R は曲率半径である。ここで、(3.32) の第3式に注意すると、

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{dz}{dx} \right) = \frac{1}{1 + (dz/dx)^2} \frac{d^2z}{dx^2}.$$

が得られる。一方、(3.32) の第1式は、

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

となる。これらの式を組み合わせると、曲率 κ は、

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{ds} = \frac{1}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}} \frac{d^2z}{dx^2}, \quad (3.34)$$

のように計算できる。変形が十分に小さく、 $dz/dx \ll 1$ をみなせる場合、曲率は $\kappa \simeq d^2z/dx^2$ のように近似できる。その近似が成り立つのは、これまでに議論してきた小さな変形に相当する。

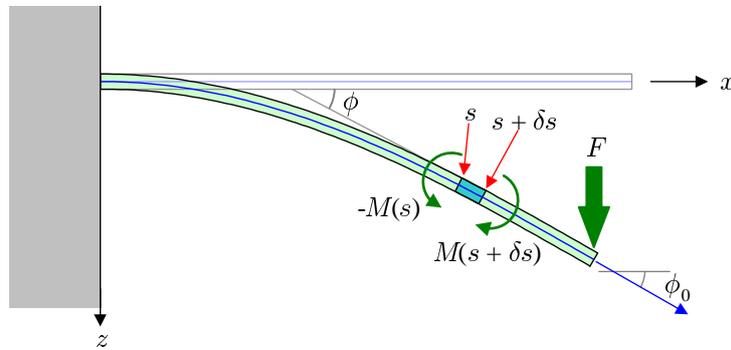


図 3.9: 先端に印加する力によってしなやかに変形する棒

本節では、 dz/dx が無視できないような大きな変形を取り扱う。長さ座標 s における微小長さ δs の微小区間において、図に示すように、微小区間の根元に近い端には応力のモーメント $-M(s)$ が、もう一方の端には応力モーメント $M(s + \delta s)$ が発生している。なお、(3.10) によると、応力のモーメントは、

$$M(s) = YI \frac{d\phi}{ds}, \quad (3.35)$$

である。これが変形する棒にかかる厳密な応力のモーメントだ。ここで、応力のモーメント $M(s)$ が弾性限界を超えないようにことを仮定する。すなわち、 YI が、さらに正確には、

棒断面の慣性モーメント I が十分に小さいことを想定する。例えば、その棒がピアノ線のように細くて弾力性に富む材質であるとする。

この流れで図 3.9 を示すような片もち梁を分析したいところだが、次項で座屈を分析した後に取り扱うことにする。座屈の方が数学的な解析が歓談だからである。座屈の解析結果を利用して、後に、図 3.9 にしめす片もち梁を解析することにする。

3.6.2 しなやかな棒の座屈

弾力性に富む細い棒を鉛直方向に立て、鉛直下方に向かう力を棒の上端に作用させたときの座屈を取り扱おう。解析にあたり、図 3.10 に示すように、棒の長さ方向に座標 s をとり、水平方向に座標 x 、鉛直上方に座標 z をとる。棒の長さ方向に関し、任意の位置 s における微小長さ δs における応力のモーメントのつり合いを考える。なお、座標 s において、棒は鉛直方向から角度 ϕ だけ傾斜するように変形しているとする。当然、傾き ϕ は s の関

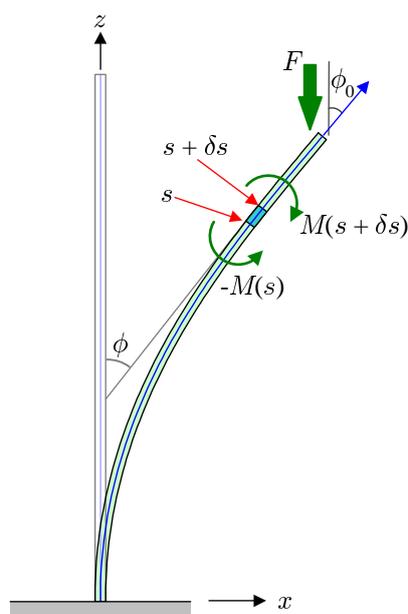


図 3.10: しなやかな細い棒の座屈

数である。考察する微小長さの両端を s と $s + \delta s$ とすれば、 $s + \delta s$ には正の力モーメント作用し、 s には負の力のモーメントが作用している。また、その場所において角度 ϕ だけ棒が傾いているので、力のモーメントのつり合いは、

$$-M(s) + M(s + \delta s) + F \delta s \cdot \sin \phi = 0,$$

となる。ここで、 $\delta s \rightarrow 0$ の極限をとると、その力のモーメントのつり合いは、

$$\frac{dM(s)}{ds} + F \sin \phi = 0, \quad (3.36)$$

なる微分方程式に書き換えられる。ここで、(3.35)を参考にすると、 $M(s) = YI d\phi/ds$ と考えられるので、微分方程式は、

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{F}{YI} \sin \phi = 0, \quad (3.37)$$

のように書き換えられる。

微分方程式(3.37)は、一般振り子と同一形の方程式であり、初等数学の範囲では解くことができない。ここでは、本書の付録Aで紹介する楕円関数を導入して方程式を解いていこう。両辺に $d\phi/ds$ を乗じて積分すると、その方程式は、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = \frac{F}{YI} (\cos \phi - \cos \phi_0), \quad (3.38)$$

のように変形できる。ここで、 $\phi = \phi_0$ のとき、 $d\phi/ds = 0$ となるように積分定数を決定した。物理的な意味としては、 ϕ_0 は棒の自由端($s = L$)における傾きである。この方程式は、

$$\left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = \frac{4F}{YI} \left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right), \quad (3.39)$$

のように書き換えることができる。ここで、

$$\xi \equiv \frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\phi_0/2)}, \quad k \equiv \sin \frac{\phi_0}{2}, \quad (3.40)$$

なる置き換えを適用すると、微分方程式(3.39)は、

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \sqrt{\frac{F}{YI}} \int ds, \quad (3.41)$$

なる積分を実行して解くことができる。この数式の左辺は第1種楕円積分である。第1種楕円積分の逆関数がヤコビの楕円関数であることに注意すると、この方程式の解は、

$$\xi = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{F}{YI}} s; k \right),$$

となる。ここで、 k は楕円積分の母数である。なお、 $s = 0$ のとき $\xi = 0$ となるように積分定数を決定した。記号 ξ と k をもとに戻すと、

$$\sin \frac{\phi}{2} = \sin \frac{\phi_0}{2} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{F}{YI}} s; \sin \frac{\phi_0}{2} \right), \quad (3.42)$$

が得られる。ここで, sn がヤコビの楕円関数である。上で述べた積分定数の決定は, $s = 0$ のとき $\phi = 0$ ことを意図していたのだ。なお, ヤコビの楕円関数 (sn 関数) の二つのパラメータのうち, 第1のパラメータが関数の変数であり, もう一方が楕円積分の母数である。

棒の長さについて, パラメータを合わせておこう。すでに書いたように, 棒の長さが L であるので, $s = L$ のとき, $\phi = \phi_0$ となるようにパラメータを決めるのだ。棒の長さを計算する積分は,

$$L = \int_0^L ds = \int_0^{\phi_0} \frac{ds}{d\phi} d\phi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{YI}{F}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)}},$$

となる。ここでも, (3.40) なる置き換えを適用すると,

$$L = \sqrt{\frac{YI}{F}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \sqrt{\frac{YI}{F}} K\left(\sin \frac{\phi_0}{2}\right), \quad (3.43)$$

が得られる。ここで, $K(k)$ は, 母数 k の第1種完全楕円積分である。ヤコビの楕円関数が $\text{sn}(K(k); k) = 1$ を満たすので, (3.42) が $s = L$ のとき $\phi = \phi_0$ となる。なお, (3.43) を ϕ_0 について解けば, 印加した力 F に対する棒の先端の傾斜 ϕ_0 が特定できる。とはいえ, (3.43) は解析的に解けないので, 数値解法で解くことが必要だ。印加した力と先端の傾きの関係を図3.11に示す。図に示すように, 力が特定の大きさに満たなければ棒は鉛直方向に立ったままである。その特定の大きさとは, $F = \pi^2 YI / 4L^2$, すなわち, 座屈荷重である。座屈

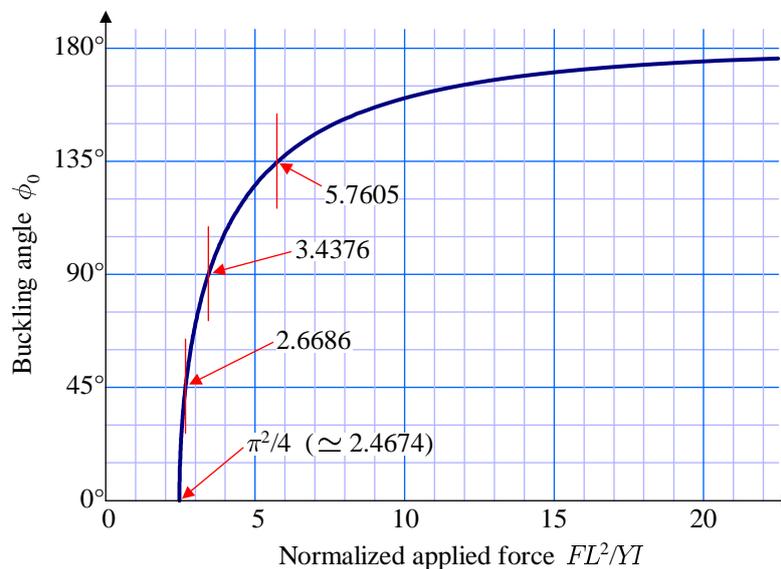


図 3.11: 印加した力に対する座屈角

荷重を超える力を印加すると, 棒は急激に変形する。図に示すように, 座屈荷重からわずか8%だけ力を大きくしただけで, 棒の先端は45°も傾くのだ。このような不連続的な特性が座屈の特徴だ。その特性は, 力を徐々に加えていったとき, ある時点を境に, 突然, 大

大きく変形するような現象となるだろう。さらに、座屈荷重から約39%だけ力を大きくすると先端の角度は 90° も傾く。ただし、棒の破壊や塑性変形がないことが条件である。

変形した棒の形状を水平座標 x と鉛直座標 z を積分形式で書いてみよう。棒が鉛直方向から角度 ϕ だけ傾いている状態では、微小長さ ds に対して、水平方向の微小変位が $dx = \sin \phi ds$ 、鉛直方向の変位が $dz = \cos \phi ds$ であるから、

$$x = \int_0^x \sin \phi ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{YI}{F}} \int_0^\phi \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)}}, \quad (3.44a)$$

$$z = \int_0^x \cos \phi ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{YI}{F}} \int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)}}, \quad (3.44b)$$

なる積分で計算できる。これらのうち、 x 座標は初等的な積分となり、角度 ϕ についての関数として書くと、

$$x = 2\sqrt{\frac{YI}{F}} \left(\sin \frac{\phi_0}{2} - \sqrt{\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right), \quad (3.45)$$

が得られる。一方、 z 座標の計算には楕円積分が必要であり、これ以上の具体的な計算は割愛する。すでに、棒の傾き ϕ を s の関数として、(3.42) に計算結果を示しておいた。その結果を数値積分すれば具体的な形状を得ることができる。

座屈した棒の先端の水平方向の変位 H は、(3.45) に ϕ_0 を代入すれば得られる。その代入の結果は、

$$H = 2\sqrt{\frac{YI}{F}} \sin \frac{\phi_0}{2}, \quad (3.46)$$

となる。なお、角度 ϕ_0 は、すでに説明したように、(3.43) を解くことによって決定できる。座屈が十分に小さい場合、

$$H \simeq \sqrt{\frac{YI}{F}} \phi_0 \quad (\phi_0 \ll 1),$$

のように近似できるのだが、 ϕ_0 が十分に小さい場合、(3.43) は、 $L = (\pi/2)\sqrt{YI/F}$ のように ϕ_0 を含まない形になる。つまり、小さな座屈においては、印加した力 F に対して ϕ_0 が定まらない。その数学的な性質は、座屈の開始が不連続的な性質をもつことに起因する。

ピアノ線のような細い弾性棒を鉛直方向に立て、鉛直下方に力を印加して座屈させたときの形状は、図3.12のように変形する。この形状は、(3.42) によって、長さ s における傾き ϕ を逐次計算することによって描いた。弾力性がある細い棒は、大きな力を印加すると大きく曲がる。しかも、根本付近で大きく曲がるのだ。このような変形は棒高跳びの棒にも見られる。競技の初期は、棒高跳びは木製や竹製の棒を使用していたが、1960年以降、グラスファイバ製の棒を使用するようになった。グラスファイバは屈曲角を大きくでき、その

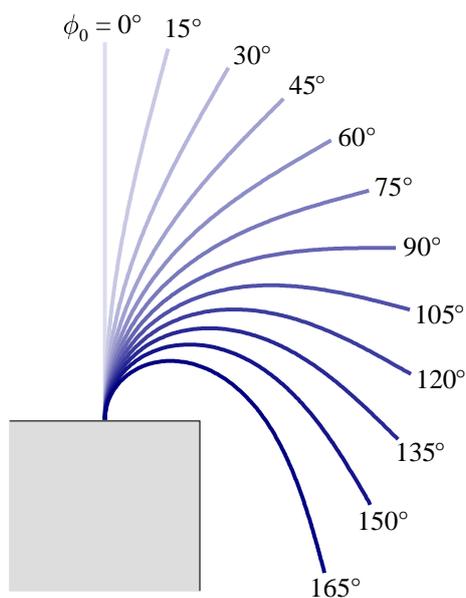


図 3.12: 細い弾性棒の座屈

復元力を利用し、棒高跳びの記録が伸びている。棒高跳びの競技中の棒の変形は、図 3.12 に似ている。

一方、エラスティカ以外の材質においても座屈限界は重要である。上に見たように、座屈限界を超えると、急激に変形が進むからだ。その結果、座屈限界を超えたはずみで、材質の弾性限界を超えてしまう危険性がある。弾性限界を超えると、材質は永久変形、もしくは、破壊に至ってしまう。建築においては、垂直に立てた柱にかかる荷重が座屈限界を超えないように注意が必要なのだ。万一、座屈限界を超えた場合、建物が倒壊する危険性があるのだ。

3.6.3 片もち梁

エラスチカの解析例として座屈を最初に取り扱ったのは、微分方程式の解が(どちらかというと)簡単だったからだ。水平に支える片もち梁では、座屈に比べると方程式が解きにくい。本稿では、直接的に方程式を解く代わりに、座屈の解を利用して片もち梁を解析しよう。

座屈モデルを片もち梁の解析に利用するには、図 3.13 のように、座屈角が $\pi/2$ を超える状況を考えればよい。座屈角がちょうど $\pi/2$ になっている場所を、棒の根元からの長さで s_0 とする。この位置に片もち梁の固定点があると考えなのだ。棒の焦点は、根元からの長さで $s_0 + L$ とする。このようにすれば、長さ L の片もち梁の変形が解析できる。

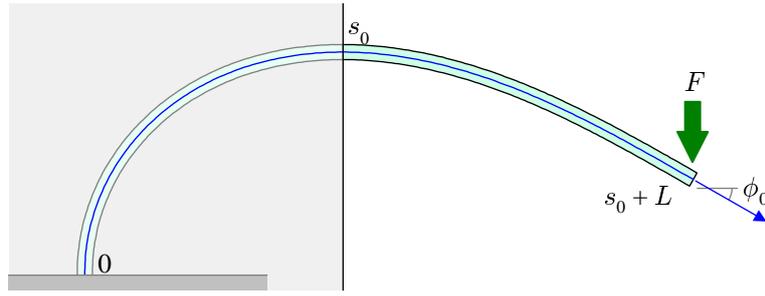


図 3.13: 座屈モデルを利用した片もち梁の解析

座屈モデルで片もち梁を解析するには, (3.42) を利用することになる。ただし, 片もち梁の固定点を $s = 0$ とし, 水平方向からの傾きを ϕ とするならば, (3.42) は,

$$\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{F}{YI}}(s + s_0); \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (3.47)$$

のように書き換えられる。この数式は, (3.42) に対して $\phi \mapsto \phi + \pi/2$, $\phi_0 \mapsto \pi_0 + \pi/2$, $s \mapsto s + s_0$ を適用すれば得られる。力 F を先端に作用させた状況を解析するには, 得られた (3.47) に含まれる未知数 s_0 と ϕ_0 を決定する必要がある。未知数を決定するには, $s = 0$ で $\phi = 0$, $s = L$ で $\phi = \phi_0$ となることを利用すればよい。その条件を数式で表現すると,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{F}{YI}} s_0; \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$\sqrt{\frac{F}{YI}}(s_0 + L) = K\left(\sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

なる方程式が得られる。この方程式を, s_0 と ϕ_0 について解けばよいのだが, いささか取り扱いが難しい。なぜならば, 未知数 ϕ_0 は, 上の第 1 式における sn 関数の母数 k に関係するからだ。母数 k は楕円関数の形状を変えるで取り扱いが難しい。その方程式に書いた方程式は, 図 3.14 のように図解できる。図に描いた曲線が sn 関数である。その関数は, 振幅が 1 の周期関数である意味では正弦波に類似している。特に, 母数が $k = 0$ のとき, sn 関数は正弦波と一致する。しかし, 母数 k が大きくなる (1 に近づく) と, 頂点が平らになり, 周期が長くなることが特徴だ。この関数が, $1/\sqrt{2}k$ となる点を A, 楕円関数の頂点を B とすると, 図 3.14 のように, 点 A の x 座標は s_0 に対応し, 点 B の x 座標は $s_0 + L$ に対応する。このような関係を満たす s_0 と k を特定することによって, 片もち梁を解析するためのパラメータが抽出できるのだ。なお, 母数 k は,

$$k = \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

である。母数 k が決定できたら, この方程式を ϕ_0 について解けば, 端点における屈曲角がわかる。グラフによって屈曲角 ϕ_0 を示すと図 3.15 のようになる。屈曲角 ϕ_0 が 20° 以内で

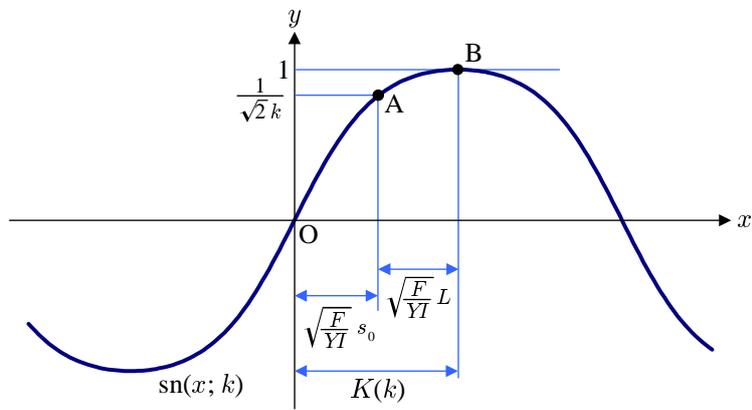


図 3.14: 片もち梁の屈曲解析のパラメータ抽出

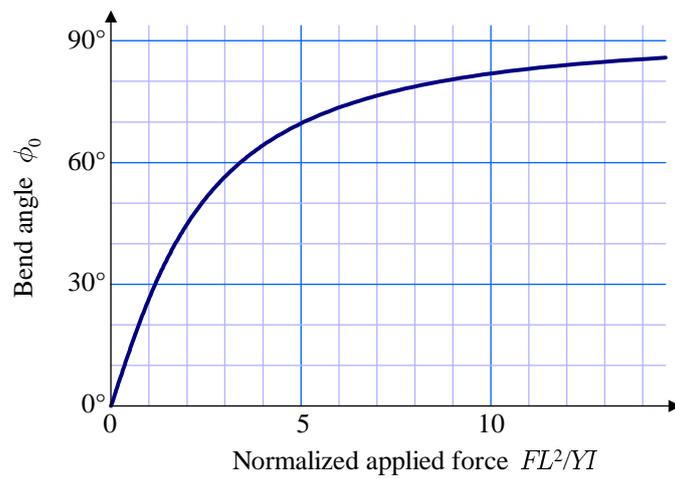


図 3.15: 片もち梁に印加する力と屈曲角

は、屈曲角は端点に印加した力にほぼ比例している。屈曲角が大きくなると、その比例関係は崩れる。屈曲角 30° に比べると、屈曲角 60° に達するには3倍もの力が印加されている。小さな屈曲角において、屈曲角が印加する力にほぼ比例するという事は、小さい屈曲角では近似的にフックの法則が成り立っているということだ。変形をもたらした力を解放すると、定規の端を指ではじいたときのように、復元力で棒は振動する。フックの法則が成立する範囲では、特定の振動数で振動する。しかし、一般振り子と同様に、屈曲角が大きくなるとフックの法則からずれ、復元力による振動するが振幅に依存するようになる。

第4章 弾性波

外部からの応力によって変形した弾性体は、応力から解放されると復元する。動的に応力が変化する環境にある弾性体は、常に変形と復元を繰り返し、その変化が弾性波として周囲に伝搬する。弾性波の代表例が地震波である。本章では、動的な変形の現象として、弾性波について解析する。

4.1 弾性波の伝搬

弾性体の動的な変形は、波として周囲に伝搬する。その伝搬は、一般の波と同様に、波動方程式によって記述される。本節は、比較的小さな変形を仮定し、弾性体の変形が波動方程式に帰着することを導く。さらに、波動方程式を導出した時点で、弾性体の変形は、縦波成分と横波成分で伝搬速度が異なることも明らかになる。

4.1.1 弾性波の方程式

弾性体の変形が非常に小さく、変位 \mathbf{r} の空間的变化と時間的变化が緩やかである場合を仮定すると、速度 \mathbf{u} は微小量と考えられる。そのような仮定は、**微小変形**の仮定と呼ばれる。そのとき、ラグランジュ微分演算子:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

の右辺の第2項は第1項に比べ2次の無限小となるので、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t},$$

とみなす。この近似のもとで、連続の方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

となり、 $\partial \rho / \partial t$ は \mathbf{u} と同程度の微小量であることがわかる。そのため、 ρ は、ほぼ一定とみなされる。

上で説明した近似のもとで, 運動方程式は,

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{mn}}{\partial x_n} + K_m, \quad (4.1)$$

のように記述できる。この方程式をさらに時間について微分して得られる方程式:

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P_{mn}}{\partial t \partial x_n} + \frac{\partial K_m}{\partial t}, \quad (4.2)$$

をさらに数式変形しよう。数式変形するにあたって, 等方性の連続体を仮定し, 応力テンソル P_{mn} は,

$$P_{mn} = \lambda E_{kk} \delta_{mn} + 2\mu E_{mn},$$

であるとする。繰り返し補足するが, 数式にはアインシュタインの総和規約が適用されている。なお, E_{mn} は,

$$\frac{\partial E_{mn}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right),$$

によって定義される変形テンソルである。変形テンソルに用いたベクトル u_m は局所的な連続体の速度である。前に書いたように, 速度が場所によって異なることが変形のメカニズムという考え方である。それらの定義に注意して (4.2) を変形すると,

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \mu \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} \right] + \frac{\partial K_m}{\partial t}, \quad (4.3)$$

が得られる。この数式に含まれる微分演算子 $\partial^2 / \partial x_n \partial x_n$ はラプラシアンである。この数式はベクトル表記すると,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \right] + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

なる形となる。この形態ではわかりにくいかもしれないが, この方程式は波動方程式である。方程式 (4.3) が波動方程式であることを示すため, $K_m = 0$ であり, 速度 u_m が x_1 にしか依存しない場合を考えよう。その制限のもとで (4.3) を成分ごとに書くと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

が得られる。これらの数式はいずれも, x_1 軸方向に伝搬する波の波動方程式である。この数式によると, u_1 は伝搬方向と同一方向への変形速度であり, u_2 と u_3 は伝搬方向と垂直

方向への変形速度である。そのため、 u_1 は縦波成分、 u_2 と u_3 は横波成分と呼ばれる。波動方程式 (4.5) によると、縦波成分と横波成分で伝搬速度が異なる。任意の波動関数 f に関して、波動方程式:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

が伝搬速度 c の波動を表現することから類推すると、(4.5) は縦波成分の伝搬速度 \hat{c} と横波成分の伝搬速度 \bar{c} が、それぞれ、

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (4.6)$$

である。ラメの弾性定数について、 $\lambda > 0$, $\mu > 0$ が成立するので、2種類の伝搬速度の間には、少なくとも $\hat{c} > \sqrt{2}\bar{c}$ なる関係が成立する。つまり、縦波成分は横波成分の $\sqrt{2}$ 倍を超える速度で伝搬する。

表 4.1: 密度・弾性定数から計算した縦波と横波の伝搬速度

材質	密度 $\times 10^3 \text{ kg/m}^3$	ヤング率 $\times 10^9 \text{ Pa}$	ポアソン比	縦波速度 m/s	横波速度 m/s
工業用純鉄	7.87	205	0.27	5705	3202
銅	8.7	125	0.34	4702	2315
アルミニウム	2.6	70	0.345	6503	3164
チタン合金	4.4	106	0.32	5975	3009
ガラス	2.4	71.3	0.22	5824	3489

4.1.2 縦波と横波

縦波と横波は伝搬する情報の性質が異なる。縦波は疎密を伝搬し、横波は体積変化に寄与しない変形、すなわち、横ずれを伝搬する。後に示す数学的考察から、縦波は発散波、横波は回転波とも呼ばれる。

縦波と横波の波動方程式を一般化した形式で記述してみよう。外力を $K_m = 0$ として、波動方程式 (4.3) を、

$$\frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \mu \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} \right] - \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = 0, \quad (4.7)$$

のように記述しておく。この方程式をもとに波動方程式の一般化を試みる。方程式 (4.7) の発散を計算すると、

$$\nabla \cdot (4.7) = \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \mu \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} \right] - \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \\
&= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m},
\end{aligned}$$

が得られる。計算された値はゼロに等しいはずなので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} = 0, \quad (4.8)$$

なる波動方程式に変換される。この方程式はベクトル記法では、

$$\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (4.9)$$

のように記述できる。この方程式は、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ が速度 $\hat{c} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ で伝搬することを意味する。第1章で示したように、非圧縮、すなわち、密度が不変な連続体で $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ となることを考えると、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ の伝搬は密度の疎密が伝搬することを意味する。

波動方程式(4.3)の回転を計算してみよう。ベクトルの回転を成分表示で記述するには、レビ・チビタ記号 ε_{klm} を用いると便利である。レビ・チビタ記号とは、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\
\varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \\
\varepsilon_{klm} &= 0 \quad (\text{その他 } \{k, l, m\} \text{ の組み合わせ}),
\end{aligned} \quad (4.10)$$

のように定義された記号である。実は、レビ・チビタ記号の値には規則性があり、 $\{k, l, m\} = \{1, 2, 3\}$ を基準にして、偶数回の添え字の交換で成り立つ添え字の並び(偶置換)には1を、奇数回の交換で成り立つ添え字の並びには-1を割り当てている。複数の添え字に同じ数字が表れる場合、偶置換でも奇置換でも成り立たないので0を割り当てる。そのような記号を用いると、ベクトルの回転は、

$$(\nabla \times \mathbf{u})_k = \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l},$$

のように成分表記できる。この成分記法に基づいて(4.3)の回転を計算すると、

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (4.3)]_k &= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \mu \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} \right] - \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \\
&= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_n} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \\
&= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l},
\end{aligned}$$

のように数式変形できる。第2行目の第1項が第3行目で消去されているのは次の理由による。添え字 l と m について総和をとる過程で、必ず、 l と m を交換した組み合わせも総和の対象になる。導関数 $\partial^2 u_n / \partial x_l \partial x_m$ は l と m の交換に対して不変であるが、レビ・チビタ記号 ε_{klm} は交換に対して符号反転する。そのため、総和の仮定で第2行目の第1項は相殺され、第3行目のように数式変形されるわけだ。計算された数式はゼロに等しいはずなので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} = 0, \quad (4.11)$$

なる波動方程式として書き換えられる。この波動方程式は、ベクトル表記では、

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \times \mathbf{u}) = 0, \quad (4.12)$$

のように記述できる。この方程式は、 $\nabla \times \mathbf{u}$ が速度 $\hat{c} = \sqrt{\mu/\rho}$ で伝搬することを意味する。回転 $\nabla \times \nabla$ は渦度と呼ばれ、第1章で示したように体積変化に寄与せず、横方向のずれを表す。つまり、横波は渦度の伝搬である。

任意のベクトル \mathbf{u} は回転を伴わないベクトル \mathbf{u}_1 と、発散を伴わないベクトル \mathbf{u}_t の和で表すことが可能¹である。すなわち、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_t \quad \text{where } \nabla \times \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0,$$

のようにベクトル分離ができるのだ。分解されたベクトルについて、 \mathbf{u}_1 は非回転のベクトル場、 \mathbf{u}_t は非発散のベクトル場という名称で呼ばれる。ベクトルの分解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_t$ を波動方程式(4.4)に代入し、両辺の発散を計算すると、

$$\nabla \cdot \left(\nabla^2 \mathbf{u}_1 - \frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} \right) = 0,$$

が得られる。既に分離されたベクトルであるため、この数式の括弧の内部に対する回転は明らかにゼロである。得られた方程式が恒等的にゼロであるためには、括弧の中がゼロであると考えればよく、

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 - \frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = 0, \quad (4.13)$$

が得られる。これが縦波の波動方程式である。一方、 \mathbf{u}_t についても同様に、

$$\nabla^2 \mathbf{u}_t - \frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} = 0, \quad (4.14)$$

が得られる。これは、横波の波動方程式である。これまでに導出したように、等方性弾性体は歪み(変形)が波として伝搬する。その波は、疎密を伝搬する発散波 \mathbf{u}_1 が縦波として、伝搬方向とは垂直の変形による回転波 \mathbf{u}_t が横波として伝搬する。しかも、それらの伝搬速度は異なり、縦波の方が速い。

¹この事実は、ベクトル成分 u_m の導関数 $\partial u_m / \partial x_n$ を考えれば理解できる。導関数のうち、 $m = n$ となる成分が発散に寄与し、 $m \neq n$ となる成分が回転に寄与する。つまり、ベクトル成分を微分して、発散に寄与する(回転を伴わない)成分 \mathbf{u}_1 を特定すればよい。残りが回転に寄与する(発散を伴わない)成分 \mathbf{u}_t である。定数項はどちらにも寄与しないので、どちらに含めるかは自由である。

4.2 表面波

前節で等方弾性体を発散波と回転波が伝搬することを導出した。それらは、数学的に、独立に伝搬するかのように見える。しかし、実際の弾性体の大きさは有限であり、弾性体の表面には表面波が伝搬し、その存在が発散波と回転波を関係づける。本節では表面波について考察しよう。

表面波を解析するため、 $z \leq 0$ の半無限空間を等方弾性体で満たした状態を考えよう。つまり、 $z = 0$ が自由空間との境界である。発散波 \mathbf{u}_l と回転波 \mathbf{u}_t は、性質が異なり、異なる速度で伝搬するが、波動であることに相違ないので、波動方程式:

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0,$$

にしたがう。ここで、発散波と回転波を同一方程式で書く意味で、それらを区別するための添え字は省略した。一例として、 x 軸方向に伝搬する平面単色波を数式で記述すると、

$$\mathbf{u} \propto f(z) e^{ik(x-\tilde{c}t)}, \quad (4.15)$$

となる。ここで、 \tilde{c} が表面を伝搬する伝搬速度であり、 $f(z)$ は座標に依存する振幅を表す。波動関数の基本形 (4.15) を波動方程式に代入すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k^2 \left(1 - \frac{\tilde{c}^2}{c^2} \right) f, \quad (4.16)$$

が得られる。この2階の微分方程式が表面波を特徴づけるのだ。

方程式 (4.16) の解は、 $1 - \tilde{c}^2/c^2 < 0$ のとき三角関数となり、減衰せずに弾性体の内部に伝搬する波を表現することになる。そのような解は、弾性体内部を3次元的に伝搬する波であるので、本節で取り扱うべき表面波ではない。平面波では $1 - \tilde{c}^2/c^2 > 0$ であることが必要である。つまり、 $\tilde{c} < c$ である。そのとき、波動方程式の解は数学的に、

$$\mathbf{u} \propto e^{\pm \kappa z + ik(x-\tilde{c}t)} \quad \text{where } \kappa = k \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}^2}{c^2}},$$

と書けるが、指数関数の指数に付した符号は正符号でなければ弾性体の無限深 $z \rightarrow -\infty$ で発散してしまう。したがって、波動方程式の解は、

$$\mathbf{u} \propto e^{\kappa z + ik(x-\tilde{c}t)}, \quad (4.17)$$

と書かれるべきである。つまり、平面波は境界からの距離に対して振幅が指数関数的に減少することが特徴である。

平面波も既に議論したように、発散波 $\hat{\mathbf{u}}$ と回転波 $\bar{\mathbf{u}}$ の成分に分解することが可能である。分解した成分は、

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_1 e^{\hat{\kappa}z + ik(x - \hat{c}t)}, \quad (4.18a)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_t e^{\bar{\kappa}z + ik(x - \bar{c}t)}, \quad (4.18b)$$

のように記述できる。ここで、

$$\hat{\kappa} = \sqrt{1 - \frac{\bar{c}^2}{\hat{c}^2}}, \quad \bar{\kappa} = \sqrt{1 - \frac{\hat{c}^2}{\bar{c}^2}}, \quad (4.19)$$

である。さらに、 \mathbf{A}_1 と \mathbf{A}_t は定ベクトルである。また、伝搬速度の間に $\bar{c} < \bar{c} < \hat{c}$ なる関係がある。つまり、表面波の位相速度は発散波や回転波の位相速度よりも遅い。弾性体の表面は、半分が開放されているため変形によって作用する応力が弾性体内部より小さいので、表面を小さい速度で伝搬する波が許容されると解釈できる。

無限の等方性弾性体における発散波と回転波は独立であることができたが、弾性体が有限である場合、 $z = 0$ での境界条件を満たすため、それら2種類の波は一定の関係を満たす必要がある。さらに、その場合、発散波と回転波はもはや縦波や横波といった意味をもたなくなる。境界条件として、 $z = 0$ が自由表面であると仮定すると、 $z = 0$ で応力がゼロであるので、

$$p_m = P_{ml}n_l = 0,$$

を満たすべきである。ここで、 P_{ml} は応力テンソル、 n_l は z 軸の正方向に向かう法線ベクトルである。等方性弾性体として応力テンソルを展開すると、

$$p_m = \lambda E_{kk}n_m + 2\mu E_{ml}n_l,$$

と書くことができる。ここで、座標と変形速度を $\mathbf{x} = [x, y, z]$, $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]$ と書くことにしよう。変形速度は y に依存しないとする。また、法線ベクトルが $\mathbf{n} = [0, 0, 1]$ であることに注意して、 $z = 0$ における応力を記述すると、

$$p_1 = 2\mu E_{13} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.20a)$$

$$p_2 = 2\mu E_{23} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad (4.20b)$$

$$p_3 = \lambda(E_{11} + E_{33}) + 2\mu E_{33} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (4.20c)$$

なる境界条件が得られる。得られた第2式から $u_y = 0$ を特定してもよいだろう。改めて残った二つの境界条件を書き出すと、

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad (4.21a)$$

$$\left(1 - \frac{2\bar{c}^2}{\hat{c}^2}\right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (4.21b)$$

が得られる。ここで、第2式の導出には、

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2\hat{c}^2}{\hat{c}^2},$$

であることを利用した。

導出された境界条件を満たすように、発散波 $\hat{\mathbf{u}}$ と回転波 $\bar{\mathbf{u}}$ を特定しよう。発散波 $\hat{\mathbf{u}}$ の場合、回転がゼロとなるはずなので、

$$\kappa\hat{u}_x - ik\hat{u}_z = 0,$$

を満たすべきである。この条件は、 $\nabla \times \hat{\mathbf{u}}$ の y 成分であり、他の成分は設定した条件によって既にゼロであることが約束されている。この条件から、 $\hat{\mathbf{u}}$ の成分は、

$$\hat{u}_x = k\hat{A}e^{\hat{\kappa}z+ik(x-\hat{c}t)}, \quad \hat{u}_z = -i\hat{\kappa}\hat{A}e^{\hat{\kappa}z+ik(x-\hat{c}t)}, \quad (4.22)$$

のように書くことができる。一方、回転波 $\bar{\mathbf{u}}$ の場合、発散がゼロとなるはずなので、

$$ik\bar{u}_x + \bar{\kappa}\bar{u}_z = 0,$$

を満たすべきである。この条件から、 $\bar{\mathbf{u}}$ の成分は、

$$\bar{u}_x = \bar{\kappa}\bar{A}e^{\bar{\kappa}z+ik(x-\bar{c}t)}, \quad \bar{u}_z = -ik\bar{A}e^{\bar{\kappa}z+ik(x-\bar{c}t)}, \quad (4.23)$$

のように書くことができる。発散波 (4.22) と回転波 (4.23) を境界条件 (4.21a) と (4.21b) に代入し、未知数を決定しよう。境界条件 (4.21a) に必要な導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} &= \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial x} = k\hat{\kappa}\hat{A}e^{\hat{\kappa}z+ik(x-\hat{c}t)}, \\ \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} &= \bar{\kappa}^2\bar{A}e^{\bar{\kappa}z+ik(x-\bar{c}t)}, \\ \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial x} &= k^2\bar{A}e^{\bar{\kappa}z+ik(x-\bar{c}t)}, \end{aligned}$$

が得られる。これらを境界条件 (4.21a) に代入すると、

$$2k\hat{\kappa}\hat{A} + (k^2 + \bar{\kappa}^2)\bar{A} = 0, \quad (4.24)$$

が得られる。第2の境界条件 (4.21b) についても同様の考察で、

$$\left[\frac{\hat{c}^2}{\bar{c}^2}(\hat{\kappa}^2 - k^2) + 2k^2 \right] \hat{A} + 2k\bar{\kappa}\bar{A} = 0,$$

が得られる。ここで、(4.19) から導かれる関係式:

$$(\hat{\kappa}^2 - k^2)\hat{c}^2 = (\bar{\kappa}^2 - k^2)\bar{c}^2,$$

に注意すると、境界条件 (4.21b) は、

$$(\bar{\kappa} + k^2) \hat{A} + 2k\bar{\kappa}\bar{A} = 0, \quad (4.25)$$

のように書き換えられる。任意の振幅 \hat{A} と \bar{A} について境界条件 (4.24) と (4.25) が成立するには、これらの方程式が相似である必要がある²。したがって、

$$(k^2 + \bar{\kappa}^2)^2 = 4k^2\hat{\kappa}\bar{\kappa}, \quad (4.26)$$

なる条件を満たすことが必要だ。この方程式を自乗し、(4.19) を代入すると、

$$\left(2 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right)^4 = 16 \left(2 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right) \left(2 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right),$$

なる方程式に変形される。この方程式をさらに変形すると、

$$\frac{\tilde{c}^6}{\bar{c}^6} - \frac{8\tilde{c}^4}{\bar{c}^4} + \frac{8\tilde{c}^2}{\bar{c}^2} \left(3 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right) = 0, \quad (4.27)$$

が得られる。方程式 (4.27) は、 \tilde{c}/\bar{c} についての 6 次方程式である。この方程式の中に係数として記述したが、回転波と発散波の伝搬速度の比 \tilde{c}/\bar{c} は、既に議論した内容から、

$$\frac{\tilde{c}}{\bar{c}} = \sqrt{\frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}},$$

のように、ポアソン比だけで表現できることがわかる。ポアソン比は $0 < \sigma < 1/2$ であるので、 $\tilde{c}/\bar{c} < \sqrt{1/2}$ である。その事実に注意すると、方程式の右辺は $\tilde{c}/\bar{c} = 0$ のとき負になり、 $\tilde{c}/\bar{c} = 1$ のとき正になる。しかも、方程式の右辺を微分してわかるように、右辺は $0 < \tilde{c}/\bar{c} < 1$ で単調増加関数である。したがって、方程式 (4.27) は、 $(0, 1)$ の区間において一つだけ解をもつ。方程式 (4.27) を解いて速度の比を計算すると、図 4.1 (a) に示すグラフが得られる。弾性体を伝搬する波は発散波が最も速い。回転波の伝搬速度は、ポアソン比 σ の上昇とともに小さくなり、 $\sigma = 1/2$ で理論的にゼロとなる。表面波の伝搬速度は、回転波よりも遅く、その比率 $\alpha \equiv \tilde{c}/\bar{c}$ は、 σ に依存して $0.875 < \alpha < 0.955$ の範囲である。

表面波の位相速度に関するパラメータ \tilde{c}/\bar{c} が求まると、発散波と回転波の振幅の関係を導出できる。境界条件 (4.24) を利用すると、

$$\frac{\hat{A}}{\bar{A}} = -2\sqrt{\frac{1 - \tilde{c}^2/\bar{c}^2}{2 - \tilde{c}^2/\bar{c}^2}}, \quad (4.28)$$

が得られる。この振幅比は図 4.1 (b) に示す曲線を描く。具体的な値として、 $-0.786 < \hat{A}/\bar{A} < -0.545$ となる。つまり、発散波よりも回転波の方が振幅が大きいのだ。振幅に関するこの性質は地震波で顕著に表れる。地震波における発散波は初期微動と呼ばれ、回転波は主要動と呼ばれる。初期微動という名称は、最初に到達し、振幅が小さいことに起因する。まさに、本節で導出した性質に合致しているということだ。

²二つの方程式が独立であれば、 \hat{A} と \bar{A} が一意的に決まってしまうので、自由度がなくなる。

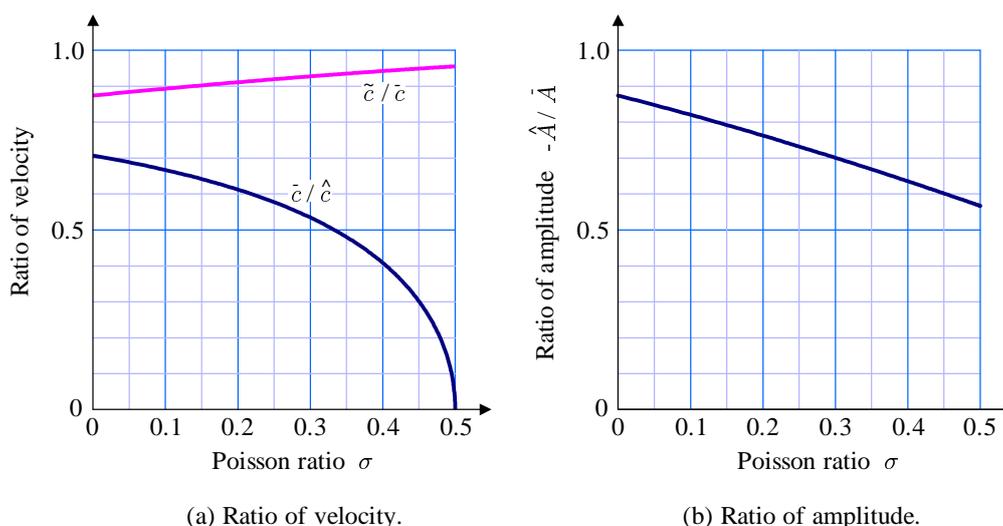


図 4.1: 弾性体を伝搬する波の速度と振幅の比

4.3 有限の弾性体を伝搬する波

これまで無限の弾性体を媒質とする波を取り扱った。現実的には、伝搬する波の波長が無視できるくらい十分に大きな媒質がその問題に相当する。それに対し、本節では、寸法のうち、波長と同程度、もしくは、それより小さな寸法が含まれる形状の弾性体を伝搬する波を取り扱う。モデルとしては、十分な長さをもつが波長に比べて小さな断面をもつ弾性体を想定する。そのモデルに相当する弾性体は棒である。断面積がさらに小さく、曲げ剛性率³が無視できるほど小さいとき、棒は糸に分類される。糸にある一定の張力を与えると直線形状を保つことができる。その張力を変動させると、張力の変動が波として伝搬する。そのような糸は弦と呼ばれる。

4.3.1 弦の振動

一様な弦が、 x 軸上の 2 点で張力 T を与えられた状態で固定されているとする。一方の固定点が原点 O であり、もう一方が $x = L$ であるとする。これからの解析に使用する座標として、 x 軸と直交する座標を y とする。静止状態では、弦は x 軸上に存在し、その各点には張力 T が作用している。弦に含まれる微小区間 $[x, x + \delta x]$ に注目すると、左端 (x) には張力 $-T$ が、右端 ($x + \delta x$) には張力 T が作用しているため、釣り合いを保っている。

弦が y 方向に微小量だけ変位したとする。その y 座標は x の関数として、 $y(x)$ のように記述できるとしよう。弦は曲げ剛性率が無視できるくらい小さいので、弦の長さ方向と垂

³既に定義したように、ヤング率と断面の慣性モーメントの積 YI のことだ。

直をなす方向への応力が存在しない。つまり、弦の運動を支配するのは張力だけである。弦の変位が十分に小さいとすると、弦の伸びは無視できるくらいの微小量であり、弦に作

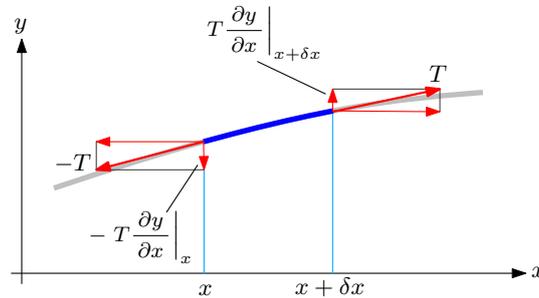


図 4.2: 減の微小区間に作用する張力

用する張力は T のままだとしよう。弦の微小区間 $[x, x + \delta x]$ に注目し、その区間に作用する力を描くと図 4.2 のようになる。変位 y が十分に小さければ、弦の傾きが非常に小さいため、張力の x 成分は、

$$F_x(x) = -T, \quad F_x(x + \delta x) = T,$$

となり、釣り合いを保っている。一方、 y 成分は、

$$F_y(x) = -T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x, \quad F_y(x + \delta x) = T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\delta x},$$

となるはずだ。これらの力の合力が、微小区間の運動を決定する。弦の密度を ρ 、断面積を S とすれば、運動方程式は、

$$\begin{aligned} \rho S \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= F_y(x) + F_y(x + \delta x) \\ &= T \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right) = T \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

となる。両辺に δx の逆数を乗じると、この方程式は、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho S}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.29)$$

のように書き換えられる。この方程式は波動方程式であり、弦の変位が速さ $c = \sqrt{T/\rho S}$ で伝搬することを示唆している。波動方程式 (4.29) の一般解は、

$$y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

のような関数形で記述できる。ここで、 f と g は、それぞれ、任意の関数である。物理的な意味として、 $f(x - ct)$ は x の正方向に伝搬する波、 $g(x + ct)$ は x の負方向に伝搬する波である。

正弦関数による表現 フーリエ変換によると、任意関数は正弦関数の重ね合わせで表現できるので、弦の振動を正弦関数として解析しよう。減の振動は、 $0 \leq x \leq L$ の区間で制限されているため、伝搬する波は弦の端点で反射を繰り返すだろう。弦の端点 $x = 0, L$ が固定端なので、

$$y(0) = y(L) = 0, \quad (4.30)$$

なる境界条件を満たさなければならない。少なくとも、この条件を満たすには、反射時に波の位相が π だけシフトすることが要求される。このような位相シフトを仮定すると、進行波と反射波の重ね合わせとして、必ず、端点で波動関数がゼロになる。

任意の位置 x における波動関数を考えよう。その位置での波動関数は、いくつかの反射波の重ね合わせである。例えば、ある時刻 t において、位置 x における波動関数が $\cos(\omega t - kx)$ であるとする。この波動は、 x の正方向に伝搬している。この波が $x = L$ で反射すると、 $\cos(\omega t - k(2L - x) + \pi)$ となる。この波は x の負方向に伝搬する。この波は、 $x = 0$ で再び反射すると、波動関数 $\cos(\omega t - (2L + x))$ で表される波となる。このように端点での反射を繰り返した波の重ね合わせが位置 x で観測されるとすれば、波動関数 $f(x)$ は、

$$f(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos[\omega t - k(2jL + x)] + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \cos[\omega t - k(2jL - x)],$$

となるはずだ。ここで、右辺の第1項の総和は端点で偶数回だけ反射し、 x の正方向に伝搬する波であり、第2項の総和は端点で奇数回だけ反射し、 x の負方向に伝搬する波である。また、 a_j と b_j は振幅である。このような波は、概して、 j の変化とともに位相が変化する。異なる位相の正弦波を加算すると正負で相殺するので、 $f(x)$ がゼロでない値をもつためには、少なくとも、第1項の総和が同一位相の三角関数の重ね合わせであるべきだ。第2項も同様に、同一位相の三角関数の重ね合わせであるべきだ。その条件を満たすには、

$$2kL = 2\pi m, \quad (4.31)$$

でなければならない。ここで、 m は任意の整数である。ここで、波数が $k = 2\pi/\lambda$ であることに注意すると、

$$L = \frac{m\lambda}{2}, \quad (4.32)$$

であることが導かれる。つまり、弦の固定端の間の距離は半波長 ($= \lambda/2$) の整数倍である。この結果を反映すると、波動関数 $f(x, t)$ は、

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \cos(\omega t - kx) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \cdot \cos(\omega t + kx) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) \cdot \cos \omega t \cos kx + \sum_{j=0}^{\infty} (a_j - b_j) \cdot \sin \omega t \sin kx, \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで、 $x = 0, L$ で $f(x, t) = 0$ であるという、いわゆる、固定端の境界条件を満たすには、 $\sum a_j = -\sum b_j$ でなければならない。この性質が成立するための厳しい条件 $a_j = -b_j$ を仮定すると、波は固定端で反射するたびに符号が入れ替わる。言い換えると、位相が π だけ変化する。したがって、波動関数 $f(x, t)$ は、

$$f(x, t) = A \sin \omega t \sin kx, \quad (4.33)$$

である。ここで、 $A = 2\sum a_j$ である。この波形は、空間波形が一定であり、その中を時間に依存して波が振動する形態を示す。このような波形は、**定在波**と呼ばれる。

波動方程式 (4.33) は、任意の自然数 m を用いて、波数が $k = m\pi/L$ を満たせば、両端を固定した長さ L の弦の振動を表す関数となる。ここで、 $k_m = m\pi/\lambda$ とおくと、線形結合:

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \omega t \sin k_m x, \quad (4.34)$$

も弦の振動を表す解である。この波動関数はフーリエ級数の形態で書かれている。フーリエ級数によると、係数 a_m が適切に選ばれれば任意形状の関数を記述できるのだ。

4.3.2 棒の振動

棒は弦と異なり、曲げ剛性率が無視できない。そのため、張力を与えなくても、弾性波を伝えることができる。曲げ剛性があると、変形に対して応力が発生する。応力が復元力となり、その際に作用反作用の法則で、周囲に応力を引き起こすため、変形が伝搬するのだ。それが弾性波である。どんなに細長い物体であろうとも、曲げ剛性率が無視できなければ、弦でなく棒に分類される。

棒の伸縮波 一定の断面形状と断面積 S を有するまっすぐな棒が、長さ方向に力 F で引っ張られたとする。そのとき、棒の断面には F/S の一様な応力発生が、張力として作用する。カルテシアン座標系 $[x_1, x_2, x_3]$ において、棒の長さ方向を x_1 軸にとれば、応力テンソル P_{nm} には、 $P_{11} = F/S$ だけがゼロでない成分となる。棒の伸縮において、応力テンソル P_{mn} は、変形テンソル E_{mn} との関係 (3.3) にて表現できる。特に棒の長さ方向 (x_1 方向) については、ヤング率 Y を用いて、

$$P_{11} = Y E_{11} = Y \frac{\partial r_1}{\partial x_1}, \quad (4.35)$$

なる関係が成立する。ここで、 r_1 は x_1 方向の変形の大きさである。

棒の長さ方向に与えた力によって生じた変形は、波として棒を伝搬するのだ。その現象を数式で示そう。弾性体の運動方程式 (4.1) に棒の長さ方向の応力 (4.35) を代入すると、

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 r_1}{\partial x_1^2},$$

が得られる。ここで、 u_1 は変形に起因する棒の速度である。簡単のため、外力は無視した。この数式両辺を時間 t で偏微分し、 $u_1 = \partial r_1 / \partial t$ であることに注意すると、

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},$$

なる波動方程式が得られる。ここで、長さ方向の座標と速度成分を、それぞれ、 x_1 から x に、 u_1 から u に書き換えると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.36)$$

が得られる。この波動方程式は、棒の伸縮速度 u が棒の長さ方向に伝搬することを示唆している。この波動方程式の形態から、その伝搬速度が、

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\rho}},$$

であることがわかる。ここで、 λ と μ はラメの弾性定数である。

波動方程式 (4.36) に起因する波は、棒の伸縮速度 u を伝搬するため、棒の伸縮波である。伝搬する u は棒の長さ方向、すなわち、波の伝搬方向に振動するので、伸縮波は縦波である。しかし、長さ方向に引き伸ばされた弾性体は、断面方向に細くなるので、厳密には、横波成分も含んでいるはずだ。つまり、棒の伸縮波は縦波と横波の両方の成分を含む混合波である。

伸縮波が混合波であることは波の伝搬速度を調べてもわかる。既に導出したように、縦波 (発散波) の速度 \hat{c} と、横波 (回転波) の速度 \bar{c} は、

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

である。これらの速度と、棒における伸縮波の速度 c を比べてみると、

$$\hat{c}^2 - c^2 = \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)\rho} > 0,$$

$$\bar{c}^2 - c^2 = -\frac{(2\lambda + \mu)\mu}{(\lambda + \mu)\rho} < 0,$$

であるので、 $\bar{c} < c < \hat{c}$ であることがわかる。つまり、伸縮波の伝搬速度は、横波より速く、縦波より遅い。この速さは、伸縮波が合成波であることに起因している。

第5章 流体の運動

流体は弾性体とは異なり、自由に形を変えることができる連続体である。その性質がゆえに、弾性体とは取り扱うモデルが異なるが、モデルを確立すれば弾性体と同様に物理現象を記述できる。

5.1 流体の性質

流体は自由に形を変えることができるのが弾性体との大きな違いである。流体は容器に入れなければ特定の形に収めることができない。その性質ゆえに、静止した状態では、流体に接線方向の応力が存在しない。なぜなら、容器入れた流体が、仮に、容器から接線方向の応力の作用を受けた場合、流体はその応力の方向に運動することができる。流体が形を一定に保っている状態は、応力を受けずに平衡状態が成立していると考えられる。したがって、静止状態にある流体には法線応力しか作用できないと考えるのが妥当だ。したがって、静止状態の流体に作用する応力は、

$$P_{mn} = -p \delta_{mn}, \quad (5.1)$$

となる。ここで、 p は圧力を意味する。圧力の符号が負になれば、応力テンソルの接線成分は正となり、それは張力を意味する。このように対角成分しか存在しない応力テンソルは静水圧と呼ばれる。

5.1.1 粘性流体

流体には接線揚力が作用しないと述べたが、それは静止した流体の性質である。現実の気体や液体は、運動するとき、その流れの方向に抵抗力がはたらく。その抵抗力は、接線応力による作用と考えてはどうだろうか？ 運動する流体における接線応力は、流体の運動によって引き起こされるということは、運動がもたらす変形の速さに関係すると考えることができる。

流体における応力は、弾性体の場合を参考にし、変形テンソル E_{mn} と関係づけるのが妥当だろう。とはいえ、流体の場合、弾性体のように変形テンソル E_{mn} と直接結びつけるのではなく、変形テンソルの時間微分 $\partial E_{mn}/\partial t$ と結びつけるのがよい。すなわち、流体における応力テンソルは、

$$P_{mn} = G_{mn} + G_{mnkl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

であると仮定する。なお、2階のテンソル G_{mn} は静止状態における応力であり、4階のテンソル G_{mnkl} は運動がもたらす応力のための定数を与える。このような関係で応力が記述できる流体は、**粘性流体**、または、**ニュートン流体**と呼ばれる。静止状態における応力を与える G_{mn} は静水圧でなければならないので、 $G_{mn} = -p\delta_{mn}$ となるはずだ。

運動による応力への寄与を表すテンソル G_{mnkl} は、弾性体における弾性定数テンソル C_{mnkl} と同様に、一般的に81個の成分をもつが、流体が等方性であれば、

$$G_{mnkl} = \zeta \delta_{mn} \delta_{kl} + \eta (\delta_{lk} \delta_{nm} + \delta_{ml} \delta_{nk}), \quad (5.3)$$

のように、二つのパラメータ η と ζ のみで記述できる。なお、 η は**ずれ粘性率**、 ζ は**第2粘性率**と呼ばれる。ラメの弾性定数と同様、 $\eta > 0$ 、 $\zeta > 0$ であると考えてよい。

等方性流体における弾性定数 (5.3) を用いると、応力テンソルは、

$$P_{mn} = \left(-p + \zeta \frac{\partial E_{kk}}{\partial t} \right) \delta_{mn} + 2\eta \frac{\partial E_{mn}}{\partial t}, \quad (5.4)$$

のように書けるはずだ。このテンソルのトレースを計算すると、

$$P_{mm} = -3p + (3\zeta + 2\eta) \frac{\partial E_{kk}}{\partial t},$$

となる。ここで、第2項の係数を 3χ とおくと、トレースは、

$$P_{mm} = 3 \left(-p + \chi \frac{\partial E_{kk}}{\partial t} \right), \quad (5.5)$$

のように書ける。新たに定義された記号:

$$\chi = \zeta + \frac{2}{3}\eta, \quad (5.6)$$

は、流体の体積変化に対する抵抗を表す定数であるので、**体積粘性率**と呼ばれる。体積粘性率と呼ばれる理由は、応力テンソルを次のように変形してみればわかる。変形テンソル E_{mn} の定義に注意して P_{mn} を変形すると、

$$\begin{aligned} P_{mn} &= \left(-p + \chi \frac{\partial E_{kk}}{\partial t} \right) \delta_{mn} + 2\eta \left(\frac{\partial E_{mn}}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{\partial E_{kk}}{\partial t} \delta_{mn} \right) \\ &= \left(-p + \chi \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{mn} + 2\eta \left(\frac{\partial E_{mn}}{\partial t} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{mn} \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

が得られる。既に弾性体における議論で、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ が体積歪みに関係することを述べた。応力テンソルが、係数 χ と $\nabla \cdot \mathbf{u}$ の積を含むことから、 χ が体積粘性率と呼ばれるわけだ。

流体において、三つのパラメータ χ, η, ζ がすべてゼロとみなせるとき、応力テンソルは $P_{mn} = -p\delta_{mn}$, すなわち、完全流体の応力テンソルと一致する。その意味で、完全流体は**非粘性流体**と呼ばれる。

5.1.2 各種粘性

粘性率 η によってモデル化された粘性流体の特性は、実際の気体や液体によく適合している。体積弾性率 χ については実測データが多くない。その理由は、 χ が体積変化を伴う量であるため、液体の流れ、音速より遅い気体の流れのような、体積変化率 E_{kk} が極めて小さい流れでは無視されることが多いからだ。しかし、音波や衝撃波の減衰のような液体の圧縮性(体積変化率)と粘性がともに関係する現象においては、体積粘性率の影響が大きい。そのような場合に χ の測定がなされている。

[静止状態で分子衝突による力の作用が平衡状態になっている。運動すると、その平衡状態が崩れるが、分子衝突のアンバランスが新たな力の作用につながる。その新たな作用が粘性である。粘性によって平衡状態に引き戻される。]

5.2 流体の流れ

流体の弾性体とは異なる性質として、力が作用する限り変形を続ける。弾性体には変形に限界があるが流体には限界がない。その独特の性質ゆえに、流れという概念が必要になる。流れとは、力を加えたときの流体の変形を表す運動である。例えば、ある位置 \mathbf{x} での時刻 t における流体の速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が流体の流れである。

5.2.1 流線

流体の流れの軌跡は流線と呼ばれる。流れに沿った微小ベクトルを $d\mathbf{s} \equiv \mathbf{e}_l ds$ としよう。ここで、 \mathbf{e}_l は流れに沿った単位ベクトルであり、 ds は微小長さである。そのベクトルは、速度ベクトル \mathbf{u} と平行のはずなので、

$$d\mathbf{s} = \frac{\mathbf{u}}{u} ds,$$

なる関係を満たす。つまり、流れに沿った単位ベクトルは $\mathbf{e}_l = \mathbf{u}/u$ である。上に書いた ds の表現式を $d\mathbf{s} = (ds/u) \mathbf{u}$ のように解釈すると、 ds/u は、ベクトル $d\mathbf{s}$ と \mathbf{u} の間の比例

係数となるので、それらのベクトルが $ds \equiv [ds_1, ds_2, ds_3]$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ のように成分表示できるとき、

$$\frac{ds_1}{u_1} = \frac{ds_2}{u_2} = \frac{ds_3}{u_3}, \quad (5.8)$$

を満足する。数学上、この方程式は3次元空間中の直線の方程式である。物理的な意味として、 \mathbf{s} がたどる軌跡、すなわち、流線の接線である。その直線の方程式は、

$$\frac{ds_1}{ds_3} = \frac{u_1}{u_3}, \quad \frac{ds_2}{ds_3} = \frac{u_2}{u_3},$$

のような独立な二つの微分方程式に書き換えられる。これらの数式を積分することによって流線が決定できる。局所的に見れば、一つの微分方程式の解は平面となるので、与えられる流線はそれら平面の交点でつくられる直線である。大域的に見れば、一つの微分方程式の解は曲面となり、与えられる流線は曲面が交差する曲線となる。

簡単な関数で速度が与えられる流体の流れを例にして、流線を特定してみよう。速度 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ が、

$$u_1 = U_0, \quad u_2 = V_0 \cos(kx_1 - \omega t), \quad u_3 = 0,$$

で与えられる流れを取り扱おう。これら速度線分を (5.8) に代入すると、

$$\frac{dx_1}{U_0} = \frac{dx_2}{V_0 \cos(kx_1 - \omega t)},$$

が得られるので、流線は微分方程式:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{V_0 \cos(kx_1 - \omega t)}{U_0},$$

で決定できる。この方程式を積分することによって、

$$x_2 = \frac{V_0}{kU_0} \sin(kx_1 - \omega t) + C,$$

が導かれる。ここで、 C は積分定数である。この結果から、取り扱った流れは、 x_1x_2 平面上を正弦波関数の形で蛇行することがわかる。しかも、積分定数 C の任意性から、その蛇行した流れが x_1x_2 平面を均一に分布していることがわかるのだ。

5.2.2 流管

空間中に設定した閉曲面を通過する流体の運動を追跡して得られる3次元の領域は流管と呼ばれる。そのため、流管の側面は速度ベクトル \mathbf{u} が張り付くため、流管の側面では法線ベクトルと速度ベクトルの内積がゼロとなる。

特定の流管に注目したとき、その流管の任意の断面を通過する流体の質量は等しい。これは質量保存側である。ある閉曲面で囲まれた面積 S_0 を通過する流体の流管に注目する。その流管の下流の断面 S_1 を設定したとき、断面 S_0 と S_1 で切断された流管は、質量保存の法則を満たすはずだ。質量保存の法則は、

$$\left(\int_{S_0} + \int_{S_{\text{side}}} + \int_{S_1} \right) \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

が成立する。ここで、 S_{side} は流管の側面、 \mathbf{n} は領域の外側に向かう法線ベクトルである。特に、流管の側面では $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ が成立するので、側面における面積分はゼロである。したがって、特定の流管を切断する断面 S_0 と S_1 について、

$$\left(\int_{S_0} + \int_{S_1} \right) \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

が成立する。同一の流管の切断面を S_1 を、 S_0 より下流の別の切断面 S_2 に変更すると、

$$\left(\int_{S_0} + \int_{S_2} \right) \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

が成立するはずである。したがって、

$$\int_{S_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \text{const}, \quad (5.9)$$

が成立することが導かれる。特定の流管に注目した場合、その流管をどの場所で切断しても、その切断面を通過する流体の質量は等しい。この方程式は流管における連続の法則である。この数式の定数量 (const) は**質量流量**と呼ばれる。

特に、非圧縮性の流体の場合、 ρ が一定であるので、流管における連続の法則は、

$$\int_{S_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \text{const}, \quad (5.10)$$

と書き換えることができる。この関係式における一定量は、流管を単位時間あたりに通過する流量を表す。つまり、単位時間あたりの流量は流管のどの断面で計測しても等しいのだ。その単位時間あたりの流量は**流管の強さ**と呼ばれる。

比較的細い流管を考えるとその流管内での流れの速度は一定と考えることができる。その細い流管の2箇所の断面について、断面積を σ_1 と σ_2 、速度を u_1 と u_2 とすれば、

$$\sigma_1 u_1 = \sigma_2 u_2,$$

が成立する。この関係は、模式的に描くと図 5.1 に示すように、流管が細くなる場所では速度が大きくなる。例えば、断面積が2分の1になれば、流れの速度は2倍になるのだ。流管の断面積と速度の関係は、道路交通の性質と大きく異なる。道路が2車線から1車線に減少する箇所があれば、交通量が多いとき渋滞の原因となる。それば、2車線で走行していた

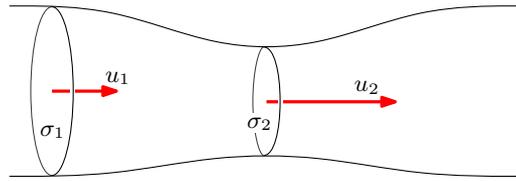


図 5.1: 流管の断面積と速度

車両が1車線に合流する際に、事故を避けるために速度を落とすからである。道路交通では車線が減少すると速度が小さくなる傾向にある。実は、流管における断面積と速度の関係が、流れが滞らない条件となっている。実際の交通では、工事等によって車線規制をした場合、安全のため運航速度が通常時より低くなる。これが流れが滞らない条件を大きく逸脱するため、必然的に渋滞が発生してしまうのだ。

5.2.3 流跡線と流脈線

既に取り扱った流線と類似した曲線として、流跡線と流脈線を説明する。流線は時間的な概念を含まず、ある時刻において、流れの接線ベクトルをつないで形成される曲線が流線であった。それに対し、流跡線と流脈線は特定の位置を通過する流体を追跡することによって得られる。

微小時間 dt の間の流体の変位 ds は、流体の速度を \mathbf{u} とすると、 $ds = \mathbf{u} dt$ で与えられる。このベクトルによる関係式の成分を書き出すと、

$$\frac{ds_1}{u_1} = \frac{ds_2}{u_2} = \frac{ds_3}{u_3} = dt, \quad (5.11)$$

なる関係が得られる。得られた関係式は流線を特定するための関係式と同一に見えるが、流線を議論したときには、右辺については特に言及しなかった。今回は、右辺が dt であることに注目している。この点が流線との違いである。

流線の特定に二つの微分方程式を用いていたのに対し、流跡線を特定するための関係式(5.11)から微分方程式を三つ抽出する。流線の特定で取り扱った例で流跡線を考察しよう。再び条件を書くと、

$$u_1 = U_0, \quad u_2 = V_0 \cos(kx_1 - \omega t), \quad u_3 = 0,$$

である。流跡線を特定する微分方程式は、(5.11)を用いると、

$$\frac{du_1}{dt} = U_0, \quad \frac{du_2}{dt} = V_0 \cos(kx_1 - \omega t),$$

となる。第1式を節分して得られる $u_1 = U_0 t + C_1$ を第2式に代入すると、

$$\frac{du_2}{dt} = V_0 \cos [(kU_0 - \omega)t + kC_1],$$

が得られる。この数式を積分すると、

$$u_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin [(kU_0 - \omega)t + kC_1] + C_2,$$

なる流跡線が特定できる。先ほど求めた x_1 を用いて t を消去すると、

$$u_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin \left[\left(k - \frac{\omega}{U_0} \right) x_1 + \frac{\omega}{U_0} C_1 \right] + C_2,$$

が曲線の方程式と特定された流跡線である。なお、 C_1 と C_2 は積分定数であり、流体中の注目する点の初期位置によって決まるパラメータである。例えば、 $t = 0$ のとき $[x_1, x_2] = [0, 0]$ となるように積分定数を選べば、

$$u_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin \left(k - \frac{\omega}{U_0} \right) x_1,$$

となるのだが、これはいかなる時刻 t においても、流線とは一致しない。なぜなら、振幅が異なるからだ。この例では、流線と流跡線が一致するには、 $\omega = 0$ でなければならないのだ。それは流れが時間依存しない条件、すなわち、定常流である場合に限られるのだ。

類似した流体中の曲線として、**流脈線**が挙げられる。流脈線は、特定の点を通じた流体が、ある時刻において並ぶ曲線である。上の例において、原点 $[u_1, u_2] = [0, 0]$ を通過した流体の時刻 $t = 0$ における流脈線を導出しよう。原点を通過する時刻を $t = -t_0$ として積分定数を決定すると、 $C_1 = U_0 t_0$ 、 $C_2 = 0$ となる。得られた積分定数を代入し、 $t = 0$ における流体の位置を特定すると、

$$x_1 = U_0 t_0, \quad x_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin kU_0 t_0,$$

となる。したがって、求める流脈線は、

$$x_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin kx_1,$$

である。この結果からわかるように、流線、流跡線、流脈線は一般的にすべて異なる。特殊な例として、定常流であれば、それら3種類の曲線は一致する。

5.3 渦度と渦線

流れが特定の方向に向かって曲がっている状態は渦と呼ばれる。渦は、渦度 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{u}$ なる量で記述される。この定義式から、速度が直線的である場合、または、対称性を保って広がる場合に $\boldsymbol{\omega} = 0$ となる。流れを取り扱ったときと同様に、渦の場合は、渦線や渦管によって渦の性質を議論する。

5.3.1 渦線

渦線は、ある一瞬の観測において見出すことができる渦を表現するための曲線である。その曲線は、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を接線とするので、流線と同様に、

$$\frac{ds_1}{\omega_1} = \frac{ds_2}{\omega_2} = \frac{ds_3}{\omega_3},$$

によって特定することができる。流線と同様に、この方程式から二つの微分方程式を取り出すことができるので、その解は二つのパラメータを用いて記述できる。

5.3.2 渦管

流管の定義と同様、閉曲線の任意の点を通る渦線で形成される曲面を考えよう。その曲面は渦管と呼ばれる。渦管の側面の法線ベクトルを \boldsymbol{n} とすると、渦管の側面では、 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ を満たす。

渦管において成立する保存則は、定常流の流管とは異なる。流体中に任意の閉曲線 C をとり、 C の線素を $d\boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{e}_l ds$ 、速度 \boldsymbol{u} の接線方向の成分を $u_l (= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_l)$ であるとすると、 C を周回する線積分:

$$\Gamma = \int_C u_l ds = \int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s},$$

は、閉曲線 C に沿った循環と呼ばれる。この積分が $\Gamma > 0$ であれば、流れは積分路と同じ方向に回っている。一方、 $\Gamma < 0$ であれば、流れの方向は積分路とは逆である。

閉曲線 C に沿った線積分は、ストークスの定理によって、 C で囲まれる曲面 S における面積分書き換えることができる。その書き換えは、

$$\int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} dS,$$

のようになる。この積分公式を利用すると、渦管を特徴づける公式が得られる。ある渦管を切断する閉曲線に沿って流体の速度 \boldsymbol{u} を線積分すると、その積分は切断面の位置とは無関係に一定値となる。それを形式的に書くと、

$$\int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} = \text{const}, \quad (5.12)$$

となる。この関係式を証明するには、特定の渦管を切断する二つの断面 S_1 と S_2 を考えればよい。それらの外周を、それぞれ、 C_1 と C_2 であるとする。流管の側面に C_1 から C_2 まで切れ込みを入れ、 C_1 から C_2 を切れ込みに沿う経路を C_{12} としよう。このとき、閉曲線

$C_1 + C_{12} - C_2 - C_{12}$ は、渦管の側面 S_{side} を取り囲む閉曲線であると考えられる。上で説明したように、渦管の側面では $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ であるので、その経路に沿って \boldsymbol{u} を線積分すると、

$$\int_{C_1+C_{12}-C_2-C_{12}} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{S_{\text{side}}} \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_{S_{\text{side}}} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0,$$

が得られる。ところで、

$$\int_{C_1+C_{12}-C_2-C_{12}} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} = \left(\int_{C_1} - \int_{C_2} \right) \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s},$$

であることに注意すると、

$$\int_{C_1} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{C_2} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s},$$

が成立する。積分路 C_1 と C_2 は任意であるので、特定の渦管を切断する任意の断面の境界線に沿った \boldsymbol{u} の周回積分は、切断面の選択によらず一定値となる。すなわち、(5.12) が成立する。その数式は、

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} dS = \text{const}, \quad (5.13)$$

のように書くこともできる。つまり、特定の渦管を切断する任意の断面で渦度 $\boldsymbol{\omega}$ を面積分した値は、切断面の選択によらず一定なのだ。

十分に細い渦管を2箇所切断し、それぞれの面積と渦度を σ_1, ω_1 と σ_2, ω_2 であるとすれば、

$$\sigma_1 \omega_1 = \sigma_2 \omega_2,$$

が成立する。例えば、同一の渦管において、断面積が小さくなると渦度がそれに反比例して大きくなるのだ。この法則は流管における流れの速度と同じである。

5.4 流体の運動方程式

流体は連続体の一種であるので、第**章で導出した連続体の運動方程式をもとに流体の運動方程式が導かれる。つまり、考察の原点は、連続体の運動方程式:

$$\frac{Du_m}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{mn}}{\partial x_n} + K_m,$$

である。ここで、 P_{mn} は応力テンソル、 K_m は外力である。この方程式の P_{mn} に流体の特徴を適用することによって流体の運動方程式が得られる。

完全流体 もっとも単純な例として完全流体を考えよう。完全流体は粘性がないため、運動状態に関わらず接線応力が発生しない。つまり、 $P_{mn} = -p\delta_{mn}$ である。したがって、運動方程式は、

$$\frac{Du_m}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_m} + K_m, \quad (5.14)$$

なる形に書き換えられる。この方程式はベクトル表記すると、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{K}_m, \quad (5.15)$$

となる。この方程式は、完全流体の運動方程式であり、オイラーが最初に導出したことから、**オイラー方程式**と呼ばれる。

粘性流体 一般の粘性流体は、運動しているとき、その速度に比例し接線応力が発生するので、完全流体とは運動方程式が異なる。粘性流体の応力テンソル (5.7) を連続体の運動方程式に適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{Du_m}{Dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_m} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\chi \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\eta \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{mn} \right) \right] + K_m, \end{aligned} \quad (5.16)$$

なる運動方程式が得られる。この数式の変形において、変形テンソル E_{mn} が、

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right),$$

によって定義されていることを利用した。一般的に、粘性率 χ と η は温度や圧力に依存するので、定数として微分演算子の前に出すことはできない。しかし、その依存性が小さい場合、粘性率 χ と η を近似的に定数とみなすことができるので、運動方程式は、

$$\frac{Du_m}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_m} + \frac{1}{\rho} \left(\chi + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} + K_m, \quad (5.17)$$

となる。この方程式をベクトル表記で記述すると、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \left(\chi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K}, \quad (5.18)$$

となる。この方程式は、ナビエとストークスが独立に導出したことから、**ナビエ・ストークス方程式**と呼ばれる。この方程式の特殊形として、 $\chi = \eta = 0$ とすれば、完全流体の運動方程式が得られる。

流体の運動方程式は、流体の物理量を決定するには不十分である。なぜなら、ベクトル \mathbf{u} だけでなく、 ρ と p もこの方程式の未知数だからだ。流体の方程式は、速度や力の他に、

密度や圧力といった熱力学的変数を含んでいるため、熱力学的な物理法則が必要となる。流体の物理量を決定するには、質量と運動量の保存則だけでなく、エネルギー保存則を用いるのが一般的である。エネルギー保存則に対応する方程式は、流体の密度や圧力だけでなく、熱力学同様、内部エネルギーを新たな変数として含むため、新たな変数を支配する新たな関係式が必要になる。

不定性の連鎖を断ち切るために、通常、流体の熱力学的平衡を仮定する。その仮定は、流体が静止状態で熱力学的平衡にあるとし、運動によって平衡から外れても速やかに回復し、流体は常に平衡状態を維持しているとの考えに基づく。その仮定のもとで、密度 ρ 、圧力 p に加えて、温度 T 、エントロピー S を含み、流体を支配する状態方程式によって物理量を決定する。

5.5 ベルヌーイの諸定理

完全流体について、熱力学的平衡に基づいて考察しよう。既に述べたように、完全流体は局所的に熱力学的平衡にあると仮定する。圧力 p 、密度 ρ 、温度 T の物理量が与えられたとき、

$$f(p, \rho, T) = 0, \quad (5.19)$$

なる状態方程式が成立する。ここでは、関数 f を特定しないが、何らかの関係で状態方程式が記述できることを表している。さらに、等温変化、あるいは、断熱変化(エントロピー一定)の過程を規定すれば、圧力 p と密度 ρ の間に特定の関係:

$$\rho = f(p), \quad (5.20)$$

が成立する。そのような変化は順圧変化と呼ばれる。等温変化や断熱変化だけでなく、密度一定の変化も順圧変化である。

5.5.1 完全流体の基礎方程式

エネルギー保存則に相当する基礎方程式は、運動方程式を基準に導出できる。その導出の準備として、ラグランジュ微分の演算子について考察しておこう。ラグランジュ微分は直交座標系で、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u},$$

なる記述ができるが、この数式は直交座標系でしか成立しない。一般的な取り扱いのため、ベクトル公式:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla u^2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

を利用すると、運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{2} \nabla u^2 + \mathbf{K} + \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (5.21)$$

のように書き換えられる。ここで、順圧関係を考慮し、

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad (5.22)$$

なる圧力関数を定義すると、運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left(P + \frac{1}{2} u^2 \right) + \mathbf{K} + \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (5.23)$$

のように書き換えられる。流体の運動を決める基本方程式は、圧力関数 (5.22) と (5.23)、さらに、順圧方程式 (5.20) である。

静止状態 運動方程式を適用する最も簡単な例として、 $\mathbf{u} = 0$ を考えよう。その場合の運動方程式は非常に簡単であり、

$$\nabla P = \mathbf{K}, \quad (5.24)$$

となる。この方程式は、外力がポテンシャルをもつ保存力であることを示唆している。この運動方程式から、完全流体が外力のもとで静止するためには、外力が保存力でなければならない。保存力でなければ静止状態にならないのである。

外力が保存力であると仮定すれば、外力は何らかのポテンシャル Λ と、

$$\mathbf{K} = -\nabla \Lambda,$$

なる関係で結びつけられる。これを運動方程式に代入すると、 $\nabla(P + \Lambda) = 0$ が得られるので、 $P + \Lambda$ が定数である。これが成立するためには、等圧面、すなわち、 $P(p)$ が一定の面と、等ポテンシャル面が一致しなければならない。

外力の一例として、一様な重力を考えた場合、重力加速度が g 、鉛直上方に z 軸をとった場合、重力ポテンシャルが $\Lambda = gz$ となるので、 $P + gz$ は一定である。

一定流速 次の簡単な例として、 $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ の場合を考えよう。注意すべきは、 $\partial \mathbf{u} / \partial t$ はオイラー記述でゼロであるということだ。言い換えると、定点観測で得られる速度が常に一定ということだ。流れる流体を追跡して計測した速度が一定とは限らない。その前提条件を運動方程式に代入すると、

$$\nabla \left(P + \frac{1}{2} u^2 + \Lambda \right) = \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (5.25)$$

が得られる。ここで、外力 \mathbf{K} が保存力であり、先ほどと同様に $\mathbf{K} = -\nabla\Lambda$ を仮定した。この方程式の右辺は、速度 \mathbf{u} と渦度 $\nabla\times\mathbf{u}$ と直交する方向を向くベクトルである。勾配ベクトルがそのような定ベクトルとなるには、 $P + u^2/2 + \Lambda$ が流線に沿って一定とならなければならない。つまり、

$$P + \frac{1}{2}u^2 + \Lambda = \text{const.} \quad (5.26)$$

である。単純な例として、非圧縮性の流体について考えてみよう。非圧縮性の流体では、 ρ が一定であるので、圧力関数は、

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho},$$

である。さらに、重力加速度 g の一様な重力場を考えると、 $\Lambda = gz$ であるので、運動方程式は、

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gz = \text{const.} \quad (5.27)$$

となる。これは流体の単位体積あたりのエネルギー保存則である。この方程式によると、圧力はエネルギー密度と等価である。この関係式は**ベルヌーイの法則**と呼ばれる。この法則の応用で導かれる性質や発明について以降の段落で紹介する。

トリチェリの原理 水中は深く潜るほど圧力(水圧)が大きくなる。水を満たした大きな水槽の下部に穴をあけると、その水圧で水が押し出される。水槽が高ければ、水槽の底での大きな水圧のため、水は大きな速度で押し出されるわけだ。

準備段階として、水深と水圧の関係を調べよう。大気圧を p_0 、水面の高さをゼロ、水槽の底の高さを $-z$ としよう。水槽の水が静止している場合、ベルヌーイの法則は、 $p_0 = p - \rho gz$ となるので、水槽の底での水圧は、

$$p = p_0 + \rho gz,$$

となる。この結果によると、水深が10メートル深くなるごとに圧力が $0.98 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ (約1気圧) ずつ増加する。例えば、水深3000メートルの深海では300気圧の水圧がかかるのだ。

水槽の下部に小さな穴をあけたとき、上で導出した水圧によって水が速度をもって流出する。その速度を算出しよう。算出するにあたり、水面の面積、すなわち、水槽の上面の面積にくらべ、下部にあけた穴が無視できるくらい小さいとする。そのとき、下部から流出する水の速度がどうであっても、水面の下降速度がゼロであると考え。今度は、穴の高さをゼロ、水面の高さを h 、流出する水の速度を u とすると、ベルヌーイの法則は、

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2,$$

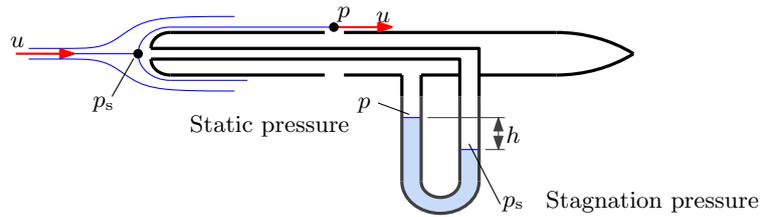


図 5.2: ピトー管

なる等式で記述できる。水面に位置する水も、穴から流出する水も、直接大気に触れているのだから、それらに作用する圧力はいずれも p_0 ということなのだ。方程式を見ると明らかのように、ベルヌーイの法則はエネルギー保存則である。したがって、流出する水の速度は、

$$u = \sqrt{2gh}, \quad (5.28)$$

が導かれる。つまり、水槽の下部に設けた小さな穴から流出する水の速度は、水槽の高さを自由落下する物体の速度と等しいのだ。

ピトー管 航空機が大気との相対速度、すなわち、対気速度を計測するため、ベルヌーイの法則を利用した**ピトー管**と呼ばれる計測器を用いる。ピトー管は図5.2に示すように二重の管構造であり、内側の管の入口は先端の開口部である。外側の管の入口は管の側面である。実際のピトー管では、側面には複数個の穴が設けられている。内側の管と外側の管は、個別に出口が設けられている。ピトー管は、図5.2に示すように、内側の管と外側の管の間の圧力差を計測する器具を接続して使用する。図の例では、液体を入れたU字型の管をつなぎ、液面の高さの差 h で圧力差が計測できる仕組みになっている。管の正面に流れてきた流体は、圧力計でせき止められるため、管の内部に入ることができず、開口部でよどむ。つまり、速度がゼロになる。その場所の圧力 p_s は淀み圧と呼ばれる。一方、管の側面をかすめる流体は、相対速度 u で流れ、圧力が p であるとする。その条件にてベルヌーイの法則を記述すると、

$$p_s = p + \frac{1}{2}\rho u^2,$$

となる。なお、右辺について、 p は静圧、 $\rho u^2/2$ は動圧と呼ばれる。動圧は単位体積当たりの流体の運動エネルギーであるが、圧力として作用する意味で動圧と呼ぶのだ。つまり、単位当たりの流体の運動エネルギーだけ、淀み圧と静圧の差が生じる。この方程式を速度 u について解くと、

$$u = \sqrt{\frac{2(p_s - p)}{\rho}},$$

が得られる。つまり、淀み圧と静圧の差がわかれば、流体の相対速度が算出できるのだ。航空機での適用として、気体の外にピトー管を出していれば、航空機の対気速度が計測で

きる。

厳密には、この例ではベルヌーイの法則が成立するとは言い切れない。なぜなら、ベルヌーイの法則は1本の流線に沿って成立する法則である。管の正面でよどむ流線と、側面を沿って流れる流線が異なるので、ベルヌーイの法則が厳密に成立するとは言えないのだ。しかし、ピトー管が十分に細いのであれば、互いに接近する流線が同じ性質をもっていると考え、ベルヌーイの法則が近似的に成立すると仮定している。

5.5.2 渦なしの流れ

後に示すように、完全流体では渦度は発生しなければ、消滅もしない。例えば、静止状態から始まった流れや、無限上流が一様流である場合、初期状態に渦がないので、流れは常に渦を含まない。渦は、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ なる渦度で表現される。つまり、

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} = 0, \quad (5.29)$$

をいたる場所で満足する流れは渦なし流と呼ばれる。

渦なし流は $\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$ であるので、速度 \boldsymbol{u} はあるスカラ関数 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ を用いて、

$$\boldsymbol{u} = \nabla \Phi, \quad (5.30)$$

のように定義することができる。スカラ関数 Φ は**速度ポテンシャル**と呼ばれる。力学や電磁気学では、ポテンシャルは勾配ベクトルに対して符号反転するものだが、速度ベクトルは習慣的に符号反転しない。

流体の運動方程式(5.23)に、速度ポテンシャルと、渦なし流の条件を適用すると、

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \frac{u^2}{2} \right) = \boldsymbol{K},$$

が得られる。この方程式から、外力 \boldsymbol{K} はポテンシャルをもつべきである。つまり、 $\boldsymbol{K} = -\nabla \Lambda$ である。そのとき、上記の運動方程式は、空間積分すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \frac{u^2}{2} + \Lambda = f(t), \quad (5.31)$$

のように書き換えられる。ここで、積分定数として記述した $f(t)$ は空間座標に関して定数である。ただし、時間に関しては定数である必要がないので時間の関数として $f(t)$ と書いた。変形された運動方程式(5.31)は一般化されたベルヌーイの定理と呼ばれる。

第6章 流体の流れ

流体の運動は、流体自身が移動する流れと、その場で振動し、位相だけが伝搬する波に大別される。

6.1 ポテンシャル流

非圧縮性の完全流体の流れを考える上で、ポテンシャルの概念は便利である。既に述べたように、完全流体では渦度が発生も消滅もしないので、例えば、静止状態 ($\mathbf{u} = 0$) や一様流 ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$) のような渦なしの状態から出発した流れは、常に渦なしである。そのため、渦なし流は一意的な状態でなく、長時間かつ広い空間領域にわたって存在しうる流れである。渦なし流では、速度ポテンシャルが存在するので、その流れはポテンシャル流と呼ばれる。

速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ は、渦なし流の速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ との間に、

$$\mathbf{u} = \nabla \phi, \quad (6.1)$$

なる関係が成立する。流れの速度 \mathbf{u} が与えられると、ポテンシャル ϕ は積分定数を除き、一意的に定まる。一方、 ϕ が与えられると、容易に \mathbf{u} が特定できる。さらに、ベクトル公式によると、勾配ベクトルの発散は、必ず、ゼロになるので、速度ポテンシャルの概念は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

を必然的に満たす非圧縮性の流体を記述するのに適している。このとき、速度ポテンシャルは、

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (6.2)$$

なるラプラスの方程式を満足する。このことから、非圧縮性流体による渦なし流は、ラプラス方程式の解、すなわち、調和関数によって記述されるポテンシャル ϕ で表現される。

非圧縮性の流体の運動について、速度ポテンシャル ϕ が調和関数となるが、具体的に特定するには境界条件が必要である。例えば、静止した固体の壁で囲まれている場合、完全流体は壁に沿って運動するはずだから、速度ベクトルの境界面に対する法線方向の成分が

ゼロでなければならない。つまり、境界面のすべての点において $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ を満たさなければならない。その境界条件を Φ を用いて書き換えると、

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0,$$

となる。ここで、 n についての微分は、境界面の法線方向に沿った微分を意味する。そのように境界条件を課すことによって、積分定数を含めポテンシャル Φ が特定されるわけだ。

境界条件を考慮したラプラス方程式の解として速度ポテンシャル Φ が特定できたとすると、任意の定数 C を用いた $\Phi(\mathbf{x}) = C$ は空間中の曲面を与える。その曲面は、速度ポテンシャルが特定の値 C となる曲面であるので、**等ポテンシャル面**と呼ばれる。つまり、 C を変化させて描いた曲線を重ねていくと、等高線のようにポテンシャルの分布を表現できるのだ。

等ポテンシャル面に沿った単位ベクトルを \mathbf{s} 、その方向に沿った速度成分を u_s とすれば、

$$u_s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0,$$

となるはずだ。ここで、 s についての偏微分は、 s の方向について微分することを意味する。さらに、 \mathbf{s} が等ポテンシャル面のベクトルであるので、当然、この数式の右辺はゼロとなる。したがって、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = 0$ 、すなわち、速度ベクトルと等ポテンシャル面は直交している。

6.2 ポテンシャルの湧き出し

簡単な速度ポテンシャルの例として、原点から湧き出すポテンシャルを考えよう。湧き出したポテンシャルが方向に依存せず、一様に拡散することを仮定すれば、ポテンシャルは点対称である。

点対称のポテンシャルを取り扱うには、球面座標系 $[r, \theta, \varphi]$ を扱うのが好都合である。ここで、 r は動径座標、 θ は天頂角、 φ は方位角である。これらの座標は、カルテシアン座標系 $[x, y, z]$ と

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

によって関係づけられる。球座標系におけるラプラス方程式は、ベクトル幾何学の公式によって、

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad (6.3)$$

なる形で記述される。点対称の場合、動径座標 r の依存性しか残らないので、ラプラス方程式は、

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0, \quad (6.4)$$

なる形に書き換えられる。この微分方程式の解として、

$$\Phi = -\frac{m}{r} + C,$$

が得られる。なお、 m と C は積分定数である。得られたポテンシャルから速度ベクトル \mathbf{u} を計算すると、

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi = \frac{m}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

が得られる。ただし、 \mathbf{e}_r は動径方向の単位ベクトルである。原点から R だけ離れた球面を通過する流量は、

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta R^2 \cdot \frac{m}{R^2} = 4\pi m,$$

である。このように、球面を通過する流量は半径 R に依存しない。したがって、得られた流量 $4\pi m$ は原点から湧き出す流量である。さらに、原点でなく \mathbf{x}_0 から湧き出す場合は、

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|},$$

であることは容易に推測できる。また、積分定数 m が負であれば、速度 \mathbf{u} が原点に向かうので、吸い込みを意味する。

互いに近接した2点 \mathbf{x}_0 と \mathbf{x}_1 から、それぞれ、同じ量の湧き出しと吸い込みがある場合を考察しよう。ラプラス方程式が線形であるので重ね合わせの理が成立し、ポテンシャルは、

$$\Phi(\mathbf{x}) = -m \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} \right) = -m \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right),$$

となる。ただし、 $r_0 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ 、 $r_1 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|$ とした。ここで、 \mathbf{x}_0 と \mathbf{x}_1 がともに x 軸上に存在し、それぞれの x 座標が $-\varepsilon$ と ε であるとする。原点から \mathbf{x} への距離が r 、その方向と x 軸のなす角が θ であるならば、

$$r_0 = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 + 2r\varepsilon \cos\theta}, \quad r_1 = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 2r\varepsilon \cos\theta},$$

となる。そのとき、ポテンシャルは、

$$\Phi = \frac{m(r_0 - r_1)}{r_0 r_1} \simeq \frac{2m\varepsilon}{r^2 \cos\theta} = \frac{\mu \cos\theta}{r^2},$$

が得られる。ここで、 $\mu \equiv 2m\varepsilon$ は湧き出しの**双極子モーメント**である。

6.3 軸対称のポテンシャル

運動する流体からの作用を評価するには、円筒座標系でポテンシャルを考えるのが便利である。運動する流体が物体の影響を受けて曲がった流線をたどり、物体を通り過ぎると

再び集結して流れていく。その問題は、流体の流れの方向を軸方向にとり円筒座標を設定するのが効果的だ。

円筒座標系におけるポテンシャルを考察するには、ポテンシャルを決定するラプラス方程式を円筒座標で記述することが第一歩だ。流体が x 方向に流れている場合、円筒座標の軸方向を x 軸方向に設定すればよい。さらに、 x 軸からの距離を r 、 x 軸まわりの方位角を θ とすれば、ラプラス方程式は、

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (6.5)$$

となる。つまり、ここで扱う円筒座標系は $[r, \theta, x]$ を座標成分とする。流体の中に置かれた物体が球や、 x 軸方向に沿った円筒のように軸対称であるならば、 θ のついでにの依存性が消えるので、ラプラス方程式は、

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (6.6)$$

のように書き換えられる。ところで、速度 \mathbf{u} の座標成分を $\mathbf{u} \equiv [u_r, u_\theta, u_x]$ とすれば、

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0, \quad u_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

である。これらの成分をラプラス方程式に代入すると、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,$$

が得られる。任意の関数 $\Psi(r, x)$ を用いて定義した関数:

$$u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad (6.7)$$

はラプラス方程式の解である。その任意の関数 Ψ は**ストークスの流れの関数**と呼ばれる。

円筒座標の軸 (x 軸) まわりの円錐の側面を通過する流量を計算しよう。円錐の設定として、 x 軸上の点 O と任意の点 P を結ぶ任意の曲線 C を x 軸周りに回転して得られる立体を考える。流れの速度を \mathbf{u} 、円錐の側面の法線ベクトルを \mathbf{n} とすれば、円錐の側面を通過する流量は、

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{OP} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) r ds = 2\pi \int_{OP} (u_x n_x + u_r n_r) r ds \\ &= 2\pi \int_{OP} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = 2\pi \int_{OP} \frac{d\Psi}{ds} ds \\ &= 2\pi \int_{OP} d\Psi = 2\pi (\Psi(P) - \Psi(O)), \end{aligned}$$

となり、2点を結ぶ曲線 C に依存せず、終点 P の位置にのみ依存する。特に、 C が流線の場合、流れは円錐の側面を横切ることがないので、 $\Psi(O) = \Psi(P)$ が成立する。つまり、ストークスの流れの関数は、流線に沿って一定ということだ。逆に、ストークスの流れの関数を一定にする曲線は流線である。

6.3.1 球を通り過ぎる一様流

球の存在によって影響を受ける一様流は、一對の湧き出しと吸い込みを一様流に重ねることによって表現できる。速度ポテンシャルを考える場合、速度 U の一様流はポテンシャル Ux に対応し、微小な湧き出しと吸い込みの対は $\mu \cos \theta / r^2 = \mu x / r^3$ に対応する。つまり、一様流の中に球を配置したとき、速度ポテンシャルは、

$$\Phi = \left(U + \frac{\mu}{r^3} \right) x, \quad (6.8)$$

と書くことができる。このポテンシャルが、一様流の中に球を配置した場合に対応することを示そう。

座標系を、一様流の方向を x 軸にとり、その軸を対称軸とする円筒座標系 $[r, \varphi, x]$ を考える。動径座標 r は、 x 軸からの距離を表し、 φ は x 軸周りの方向を表す座標である。ここでは軸対称のポテンシャルを扱うので φ の依存性は考えなくてもよい。ストークスの流れの関数 Ψ を取り扱う場合、円筒座標系における速度成分は、(6.7) のように記述できるので、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ru_r, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = ru_x,$$

が成立する。これらの数式をポテンシャル Φ を用いて書き換えると、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 3\mu \frac{xr^2}{R^5}, \quad (6.9a)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = r \frac{\partial \Phi}{\partial x} = Ur - 3\mu \frac{x^2 r}{R^5} + \mu \frac{r}{R^3}, \quad (6.9b)$$

が得られる。ここで、 R は座標の原点からの距離 $R \equiv \sqrt{x^2 + r^2}$ である。この距離 R については、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^n} \right) = -\frac{nx}{R^{n+2}}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R^n} \right) = -\frac{nr}{R^{n+2}},$$

が成立する。この関係式を利用すれば、上に示した $\partial \Psi / \partial x$ が容易に計算できる。偏導関数 (6.9b) を利用すれば、流れの関数 Ψ が特定できる。流れの関数の特定には、全微分表現:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr,$$

を積分すればよい。積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \Psi &= \int d\Psi = \int \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \int \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr \\ &= 3\mu \int \frac{xr^2}{R^5} dx + \int \left(Ur - 3\mu \frac{x^2 r}{R^5} + \mu \frac{r}{R^3} \right) dr \\ &= -\mu \left[\frac{r^2}{R^3} \right]_{r=\text{const}} + \left[\frac{U}{2} r^2 + \frac{\mu x^2}{R^3} - \frac{\mu}{r} \right]_{x=\text{const}} \\ &= \left(\frac{U}{2} - \frac{\mu}{R^3} \right) r^2, \end{aligned}$$

のように数式変形できる。この数式変形には解説が必要だろう。第2行目の数式では、第1項の積分が r を一定に保ち、 x について積分を実行する。一方、第2項の積分は、 x を一定に保ち、 r について積分を実行する。第1項の積分は、不定積分では x の依存性が消えてしまうので、 r 一定のもとでの積分はゼロになる。つまり、第2の積分しか残らない。その結果として、右辺が得られるのだ。また、被積分関数は原点以外で正則であるので、積分路が原点を通らない限り、積分路によらず、同一の結果が得られるはずだ。したがって、得られた流れの関数は、

$$\Psi = \left(\frac{U}{2} - \frac{\mu}{R^3} \right) r^2, \quad (6.10)$$

である。この関数は、

$$r = 0, \quad R = \left(\frac{2\mu}{U} \right)^{1/3},$$

の条件で $\Psi = 0$ となる。第2の数式で指定される半径を a 、すなわち、 $a \equiv (2\mu/U)^{1/3}$ とおこう。流れの関数が一定となる経路は流線であるので、 $\Psi = 0$ は、 x 軸上を流れる流体は $x = -a$ で向きを変え、半径 a の球の表面を流れ、再び、 $x = a$ で向きを変え、 x 軸上を流れる状態に対応する。したがって、(6.8)は半径 a の球を通過する一様流の速度ポテンシャルである。改めて、記号 a を用いて Φ と Ψ を書くと、

$$\Phi = Ux \left(1 + \frac{a^3}{2R^3} \right), \quad (6.11)$$

$$\Psi = \frac{U}{2} r^2 \left(1 - \frac{a^3}{R^3} \right), \quad (6.12)$$

となる。これらの数式から、球を通過する一様流は図6.1に示す流線で表現できる。その流線を描く方法は、本項の最後に説明する。球の正面に向かう流れは、球の近傍で急激に

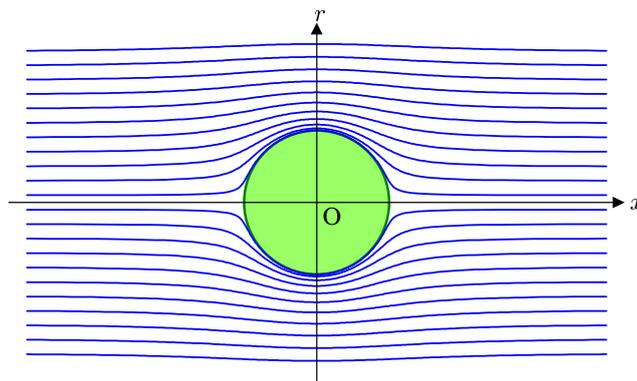


図 6.1: 球を通過する一様流の流線

曲げられ、球面に沿って反対側へ回り込み、遠方に流れていくことが図で表現されている。

数式 (6.11) と (6.12) から、球面を通過する流れは、最大で周囲の流れの 1.5 倍の速度をもつことがわかる。なぜなら、球面を通過する流れの速度は、

$$u_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta},$$

で計算され、その見積もった速度から結論できるからだ。実際に、 $R = a$ となる条件で速度を計算すると、

$$u_\theta = \frac{3}{2} U \sin \theta,$$

が得られ、 $\theta = \pi/2$ で最大値 $u_\theta = 3U/2$ となることが導かれる。つまり、球面を通過する流れは最大で一様流の速度の 1.5 倍なのだ。一方、 $\theta = 0, \pi$ で最小値 $u_\theta = 0$ となる。言い換えると、球面が x 軸と交わる 2 点では、流れがよどんでいるのだ。

球を通過する一様流の流線、すなわち、図 6.1 を描いてみよう。既に説明したように、流線は流れの関数 Ψ が一定となる曲線である。数式 (6.12) の左辺 Ψ を定数として、曲線を特定すればよい。ここで、 $x = R \cos \theta$, $r = R \sin \theta$ とすると、

$$R^3 - \frac{2\Psi}{U \sin^2 \theta} R = a^3, \quad (6.13)$$

なる関係式が得られる。これで、定数 Ψ が与えられると流線を描くことができる。この数式が流線の方程式である。数式に含まれる定数 Ψ の物理的意味を考察しよう。その考察は容易であり、(6.12) に $R \rightarrow \infty$ を代入すれば、 $\Psi \rightarrow Ur^2/2$ が得られる。つまり、定数 Ψ は無限遠における動径座標 r によって与えられる。その Ψ を代入すれば、3 次方程式 (6.13) は、

$$R^3 - \frac{r_0^2}{\sin^2 \theta} R = a^3, \quad (6.14)$$

のように書き換えられる。なお、無限遠における流線の動径座標を r_0 とおいた。この結果から、流線の方程式は流れの速度 U に依存しないという、意外な事実が得られる。その性質は、実際の物質における振る舞いとは異なる。水などの流体を球に当てると、その速度によって球の背後に乱流が発生し、その振る舞いが速度に依存するのだ。乱流の発生は流体の粘性に依存するのだが、本項の議論には粘性が含まれていない。流れの速度が十分に小さければ粘性が無視できるため、図 6.1 のような流線を描くはずだ。また、具体的に流線を描くには、 x 軸となす角度 θ を設定したうえで (6.14) を R について解けばよい。方程式 (6.14) は、3 次方程式なので三つの解をもつが、必ず、一つだけ正の実数を解にもつ。つまり、正の実数解を取り出せば図 6.1 が描ける。

6.3.2 運動する球で発生する流れ

静止する流体の中を球が運動する場合、その球によって流れが乱される。その流れは、前項の結果から導かれる。前項は、静止する球を一様流が速度 U で通過する場合を取り扱った。今回は、静止する流体に対して速度 U で球が運動する場合を取り扱う。

速度 U で運動する球によって流体に発生する流れを考えるには、前項の問題を流体と並走する観測者から見た現象を考えればよい。つまり、ポテンシャル (6.11) から一様流のポテンシャル Ux を取り除いたポテンシャル:

$$\Phi = Ux \frac{a^3}{2R^3},$$

が流体と並走する観測者から見たポテンシャルである。この場合、球は速度 $-U$ で運動しているように見えるので、 U で運動する球によるポテンシャルは、 U を $-U$ に置き換える必要があり、

$$\Phi = -Ux \frac{a^3}{2R^3}, \quad (6.15)$$

となる。得られたポテンシャルは、微小な双極子によるポテンシャルである。前項で説明した手順によって流線を描くと図 6.2 が得られる。運動する球の周囲では、運動の前方から湧き出した流体が、後方に回り込んで吸い込まれていく。数学的に湧き出しと吸い込み

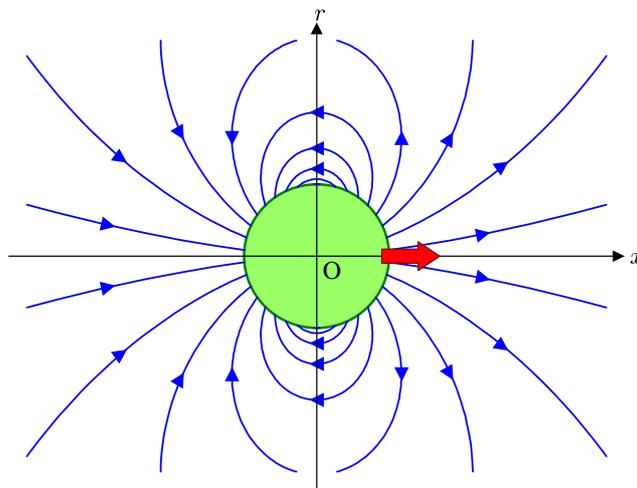


図 6.2: 静止する流体の中を運動する球の周囲の流線

であるが、実際に流体が湧き出しているのではないことに注意が必要だ。この図は、球の中心が原点 O に位置するときの流線であり、球が運動しているため、流線は時間とともに変化するのだ。つまり、この例は非定常流である。湧き出しに相当するのは、球の運動によって押し出される流体である。一方、運動の後方では、球がとり残した空間があり、その空間に流体が流れ込む。それが吸い込みに相当する。なお、前に説明したように、非定常流では、流線と流跡線が一致しないので、図 6.2 は球の中心が原点に位置する瞬間の局所的な流れの方向を連ねて描いた曲線であり、その経路を流体が運動するわけではない。

得られたポテンシャル Φ を、観測地点の位置ベクトル \mathbf{x} と球の速度 \mathbf{U} を用いてベクトル表記すると、

$$\Phi = -\frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} \frac{a^3}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (6.16)$$

が得られる。ただし、(6.16) は球の中心が原点に位置する主観におけるポテンシャルである。既に述べたように、流体中を運動する球によってつくられる流れは非定常流であり、時間とともに変化する。

6.3.3 誘導質量

流体中を運動する球によって、流体に流れた発生することが前項からわかった。発生した流体の流れの運動エネルギーを計算してみよう。流体は半径 a の外部となる無限空間を占めるとし、その無限空間で運動エネルギーを積分するのだ。ポテンシャル Φ を用いると、流体の速度は $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ であるから、運動エネルギーは、

$$E = \frac{\rho}{2} \int |\mathbf{u}|^2 dV = \frac{\rho}{2} \int |\nabla\Phi|^2 dV, \quad (6.17)$$

与えられる。前項で述べたように運動する半径 a の球によるポテンシャルは、球の中心が原点に位置する瞬間に、

$$\Phi = \frac{Ua^3}{2} \frac{x}{R^3},$$

となる。ここで、 x 軸を対称軸とする円筒座標系 $[r, \varphi, x]$ を用いている。なお、 $R \equiv \sqrt{x^2 + r^2}$ である。このとき、流れの速度成分は、

$$u_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{Ua^3}{2} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5} \right),$$

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{Ua^3}{2} \frac{3xr}{R^5},$$

となる。しながって、被積分関数 $|\mathbf{u}|^2$ は、

$$|\mathbf{u}|^2 = u_x^2 + u_r^2 = \frac{U^2 a^6}{4} \left(\frac{1}{R^6} + \frac{3x^2}{R^8} \right)$$

$$= \frac{U^2 a^6}{4} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{R^6},$$

のように計算される。ここで、 θ は原点から観測点までの方向が x 軸となす角度である。得られた被積分関数を (6.17) に代入すると、

$$E = \frac{\rho}{2} \int_a^\infty dR \int_0^\pi R d\theta \int_0^{2\pi} R \sin \theta d\varphi \frac{U^2 a^6}{4} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{R^6}$$

$$= \frac{\rho a^6}{8} U^2 \int_a^\infty \frac{dR}{R^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (1 + 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi \rho a^3}{12} U^2 \int_0^\pi (1 + 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi \rho a^3}{3} U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi \rho a^3}{3} U^2,$$

が得られる。この計算では、円筒座標の代わりに球面座標系 $[R, \theta, \varphi]$ を用いた。この計算によると、流体の運動エネルギーの総和は、

$$m = \frac{2\pi\rho a^3}{3}, \quad (6.18)$$

なる質量による運動エネルギーに等しい。その質量は、球が排除する流体の質量のちょうど半分に等しい。球の質量を M とすると、流体を含めた系全体の運動エネルギーは $(M + m)U^2/2$ となるので、エネルギーの観点で質量 $M + m$ の物体の運動と等価である。

球のみならずいかなる形状の物体においても、上の議論のように、物体の運動によって流体の運動エネルギーが発生するので、同様に、付加的な質量 m を定義できる。その付加的質量 m は、**誘導質量**と呼ばれる。さらに、流体中を運動する物体のみの質量 M と誘導質量の和、すなわち、 $M + m$ は見かけの質量と呼ばれる。誘導質量は、物体の形状によって異なる。例えば、軸方向に運動する円筒は単位長さあたり $\pi\rho a^2$ の誘導質量をもつ。この場合は、物体が排除する流体の質量と等しい。対称性をもたない一般的な形状の場合、誘導質量による運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l m_{kl} U_k U_l,$$

のように計算される。ここで、 U_k は速度ベクトルの成分であり、 m_{kl} が誘導質量である。つまり、一般の形状については、誘導質量はテンソルとなる。このとき、見かけの質量は $M\delta_{kl} + m_{kl}$ なるテンソルで記述される。

誘導質量は、流体中の物体を加速するとき、その周囲の流体もともに加速されるため、それに相当する分だけ余分にエネルギーを消費することを意味している。誘導質量の概念は、流体中における抵抗力を説明できるように思えるかもしれないが、それは正しくない。誘導質量は加速に対する抵抗力を説明することができるが、等速度では力の発生に起因しない。しかし、現実には、流体中の物体は等速度であっても抵抗力を受けるのだ。等速度運動における流体からの抵抗力は、粘性を考慮しなければならない。

誘導質量による加速度への抵抗力は日常でも感じることもある。水中で歩行する場合、踏み出す足が重く感じるのは誘導質量に起因している。加速度に対する抵抗力とは、減速の際、減速を妨げる方向に力が作用する。そのため、水中での急激な加速や減速は、空気中よりも困難である。

誘導質量は、物体の体積が排除する流体の質量に比例するので、運動する物体の密度と流体の密度の関係が重要である。一般の固体と空気では密度が数千倍も異なるため、誘導質量は無視できる。一方、水中での人体や、空気中での熱気球のように、密度が同程度の場合、誘導質量による影響が顕著になる。さらに、水中での気泡のように、物体の密度の方が小さい場合には、真空中での質点の物理学では考えられない現象が起きる。

流体中の球の加速度 質量 M の球が密度 ρ の流体中に重力の作用を受けているとする。球の体積を V とすれば、誘導質量は $\rho V/2$ となる。重力加速度を g とすれば、球には Mg の重力が鉛直下方に、 ρVg の浮力が鉛直上方に作用する。球の鉛直上方の速度成分を u とすれば、流体中の球の運動方程式は、

$$\left(M + \frac{\rho V}{2}\right) \frac{du}{dt} = -Mg + \rho Vg,$$

となる。球の平均密度を $\sigma \equiv M/V$ とおけば、運動方程式は、

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\sigma - \rho}{\sigma + \rho/2}g, \quad (6.19)$$

のように書き換えられる。これが、流体中の球に作用する見かけの重力加速度である。

気体中の一般の固体を考えたとき、 ρ/σ は 10^{-3} 程度であるので、気体の密度 ρ はほぼ無視できる。その場合、

$$\frac{du}{dt} \simeq -g,$$

であるため、真空中での重力作用とほとんど変わらない。

物体に密度と流体の密度がほぼ等しい場合 ($\sigma \simeq \rho$) を考えよう。密度の差を $\Delta\sigma \equiv \sigma - \rho$ とおくと、物体に作用する加速度は、

$$\frac{du}{dt} \simeq -\frac{2}{3} \frac{\Delta\sigma}{\sigma}g,$$

となる。この結果は、誘導質量を考慮しない場合の3分の2の加速度である。この状況は、熱気球がバラストを落として上昇する場合や、潜水艦が排水して上昇する場合に相当する。そのような場合には、誘導質量の影響を受けるのだ。

水中の気泡のように、 $\sigma \ll \rho$ である場合、さらに面白い現象が起きる。加速度 (6.19) において σ をゼロとすると、

$$\frac{du}{dt} \simeq 2g,$$

となるのだ。つまり、水中の気泡は $2g$ の加速度で鉛直に上昇するのだ。実は、この場合、誘導質量を考慮しなければ気泡が重力加速度の1000倍の加速度で上昇するという、とんでもない結果を算出するところだったのだ。実際には、誘導質量の効果によって、気泡の上昇は重力加速度の2倍の加速度となる。

6.4 粘性流

流体中を運動する物体に作用する抵抗力の説明には粘性が必要である。しかし、粘性をもつ流体、すなわち、粘性流体の取り扱うは様々な困難を伴う。その大きな理由が、粘性流体の運動方程式が非線形であることである。

粘性流体の取り扱いに関する大きな困難は、完全流体の特異性に代わる特異領域の発生と、乱流の発生が挙げられる。前者を取り扱うには、非線形問題の特異摂動法などの解析手法と高度な数値計算が必要になる。後者の困難は、解の不安定性、分岐、カオスかな喉非線形減少と結びついている。

本節では、粘性流の一般的な性質を取り扱う。粘性の影響だけを考察するため、本節では、特に断らない限り、非圧縮性の流体を仮定する。

6.4.1 粘性流体の基本方程式

非圧縮性の流体では、連続方程式は $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ となり、運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K}, \quad (6.20)$$

で与えられる。ただし、 $\nu \equiv \eta/\rho$ は運動粘性率と呼ばれる定数である。また、 \mathbf{K} は外力である。

運動方程式はベクトルを成分に分解すると三つの方程式で構成され、連続方程式と合わせると、四つの連立方程式となる。それに対し、未知数が速度の成分 $[u_x, u_y, u_z]$ と圧力 p であるので、方程式は未知数を決定する必要十分な数だけそろっていることになる。したがって、連続方程式と運動方程式が非圧縮の粘性流体の基礎方程式となるのだ。

流体の運動を決定するには、適法とな境界条件と初期条件が必要である。粘性流体は、流体が固体表面に付着するという境界条件:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w,$$

を満たさなければならない。ここで、 \mathbf{u}_w は固体表面の速度であるとした。特に、静止した固体表面を取り扱うのであれば、その境界において、流体は $\mathbf{u} = 0$ を満たさなければならない。このような、固体表面での滑りを容認しないことが完全流体との大きな違いである。この違いが、粘性流と完全流体の流れの違いをもたらし、また、問題の取り扱いを困難にしている。

6.4.2 レイノルズの相似則

粘性流体を取り扱うにはレイノルズの相似則が重要である。本書では詳しく取り扱わないが、乱流を議論するにも、レイノルズの相似則を用いることが乱流の分類等が容易になる。また、工学の分野ではレイノルズ数を応用し、巨大なシステムを建造する前に小規模な実験環境で流体解析を実行している。

外力が保存力である場合, すなわち, $\mathbf{K} = -\nabla\Lambda$ を考えよう。そのとき, 運動方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{u},$$

のように書き換えられる。ここで, $p^* \equiv p + \nabla\Lambda$ である。このように, 外力が保存力である場合, 外力は圧力の一形態と考えられ, 流れに直接関係しない。そのとき, 非圧縮の粘性流体の基礎方程式は, 唯一のパラメータ ν を含むだけである。ここで, 流れの場を特徴づける代表的な長さを L , 速度を U とし, 変数を変換則:

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' = \frac{t}{L/U}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p' = \frac{p^*}{\rho U^2},$$

によって無次元化しよう。これらの無次元化した物理量で基礎方程式を書き換えると,

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = \nabla' p' + \frac{1}{R} \nabla'^2 \mathbf{u}', \quad (6.22)$$

が得られる。ここで, ∇' は無次元化された座標 \mathbf{x}' についての微分演算子である。さらに, 新たに定義された定数:

$$R \equiv \frac{LU}{\nu} = \frac{\rho LU}{\eta}, \quad (6.23)$$

はレイノルズ数と呼ばれる無次元数である。当然であるが, 無次元化された物理量においても境界条件 $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_w$ は満足しなければならない。したがって, 無次元化された基礎方程式と境界条件は, レイノルズ数 R を唯一のパラメータとして含むのだ。

その事実から, 幾何学的な形状が相似形であり, かつ, レイノルズ数が等しい系であれば, 発生する流れも相似形である, といえる。この主張がレイノルズの相似則である。この主張によると, 幾何学的な形状が相似なだけでは流れが相似形にならない。流れを相似形にするにはレイノルズ数が等しくなければならないのだ。

レイノルズの相似側は工学的に有意義である。例えば, 大型船舶やジャンボジェット機のような流体解析を必要とする巨大構造物の設計において, 設計時の流体実験は小規模な検証用模型で済ませたい。例えば, 完成品のレイノルズ数を $R_1 = L_1 U_1 / \nu_1$, 検証用模型のレイノルズ数を $R_2 = L_2 U_2 / \nu_2$ であるとしよう。完成品が適用されるものと同じ流体 ($\nu_1 = \nu_2$) で実験する場合, 検証用模型を完成品の 100 分の 1 スケールでつくるならば, 検証用模型に現実の 100 倍の流速を印加しなければならない。実際速度 U_1 が大きい場合, 検証は非常に困難になる。しかし, 完成品の適用が空気 ($\nu_1 = 0.15$) に対し, 水 ($\nu_2 = 0.01$) で検証するのであれば, 速度に対する条件が緩和できるだろう。他にも, 実際より高い気圧で実験するなど, ν_2 を小さくすることによって速度の条件を緩和する措置がとられる。

第7章 流体の波

流体も弾性体と同様に波を伝える。流体は接線応力の作用がないので、流体内部を伝搬する波は縦波である。しかし、重力によって退席した水の表面、すなわち、水面を伝播する波は横波が存在する。それは、弾性体における表面波に相当する。本章は、水面を伝搬する波を取り扱う。

7.1 水の波

一様な重力のもとでの水面を伝搬する水の波を取り扱おう。一般的な水の波における水の運動速度は、たかだか 10 m/s 程度であり、水中の音速 1500 m/s に比べて非常に小さいので、水の波を取り扱う場合、水を非圧縮性の流体と考えてよい。また、簡単のため、粘性も無視して議論を進めよう。水以外の液体であっても、粘性が著しく大きくない限り、本節の議論を適用することができる。

静止水面に沿ってカルテシアン座標系 $[x, y, z]$ を考えよう。座標軸は、鉛直上方を z 軸に選ぶものとする。つまり、静止水面は xy 平面上に位置する。

一般的な例を意識し、推定の深さが場所によって異なることにすると、その z 座標は、

$$z = -h(x, y), \quad (7.1)$$

のように表される。ここで、 $h(x, y) > 0$ とする。また、波立つ水面の高さを ζ とするとき、その座標は一般的に、

$$z = \zeta(x, y, t), \quad (7.2)$$

のように、位置と時刻の関数である。関数 $\zeta(x, y, t)$ は波の高さを表すと同時に、波の形状を表している。

静止状態から始まった流体の運動は、ラグランジュの渦定理から渦なしである。渦なしの流れでは、ポテンシャル Φ が存在し、速度ベクトルが、

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (7.3)$$

なる成分をもつはずだ。特に、非圧縮性の流体ではポテンシャル Φ はラプラス方程式,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (7.4)$$

を満たす。つまり、水の波に伴う運動はポテンシャル流である。その運動を特定するには、境界条件を設定することが必要である。

水の波を特定するには、水底と水面で境界条件を設定することが必要である。水底 $z = -h(x, y)$ における境界条件は、固体表面における境界条件:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (7.5)$$

である。ここで、 $\partial/\partial n$ は法線方向に沿った空間微分である。つまり、固体表面では、法線方向に対するポテンシャル Φ の変化率はゼロになるのだ。

一方、水面での境界条件は複雑である。なぜなら、水面は固定曲面でなく、大気圧との釣り合いのもとに自由に変形するからである。水面では、鉛直方向の座標 z に対し、

$$F(\mathbf{x}, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0,$$

が成立しなければならない。これが水面条件である。この数式は、非常に当前のように感じるかもしれないが、境界条件を考える上で重要である。例えば、ある時刻 t において \mathbf{x} が水面であるとする。その場所の水の速度が \mathbf{u} であるとし、時間 δt だけ経過したときの水面は、

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{u} \delta t, t + \delta t) = 0,$$

を満たすはずだ。これら二つの時刻における水面条件の差をとり、単位時間当たりの変化率を計算すると、

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) F = 0, \quad (7.6)$$

が得られる。つまり、水面条件のラグランジュ微分は常にゼロである。このラグランジュ微分に対して、水面条件 $F(\mathbf{x}, t)$ の定義を用いて数式展開すると、

$$u_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

が得られる。ポテンシャル流の速度 (7.3) に注目すると、上の数式は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (7.7)$$

のように書き換えられる。

渦なし流を考えているので、水面において一般化されたベルヌーイの定理 (5.31) を適用することができる。非圧縮性の流体であるので、圧力関数は $P = p/\rho$ 、外力が重力であるので力のポテンシャルは $\Lambda = gz$ である。このとき、(5.31) は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gz = f(t), \quad (7.8)$$

となる。水面 $z = \zeta$ に接する大気の圧力を p_0 とすれば、水面上では $p = p_0$ であるので、積分定数に当たる関数 $f(t)$ を $f(t) = p_0/\rho$ のように選べば、水面における一般化されたベルヌーイの定理は、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} |\nabla \Phi|^2, \quad (7.9)$$

のように書き換えられる。この方程式が水面における力学的条件を与えるわけだ。

水面における一般化されたベルヌーイの定理 (7.9) を (7.7) に代入すると、ポテンシャル Φ のみで記述された数式が得られるのだが、それは非線形の方程式である。水の波は日常にみられる身近な現象であり、ラプラス方程式という基本的な方程式で支配されているにも関わらず、境界条件を考慮すると非線形方程式になってしまう。そのため、水の波は身近な現象でありながら、解析が困難である。

本書では波の振幅を十分に小さいと仮定し、非線形の境界条件を近似的に線形として取り扱う。なお、そのような考えで取り扱いを簡略化した波は、**最小振幅波**、または、**線形波**と呼ばれる。一方、近似を適用しない一般の波は、**有限振幅波**、または、**非線形波**と呼ばれる。最小振幅波に伴う流体の運動は微小であると考えられるので、速度ポテンシャル Φ と波の高さ ζ は微小量である。しかも、(7.9) の両辺の比較から、両者は同程度の微小量であるとわかる。したがって、(7.7) と (7.9) について、 Φ と ζ の2次の項を無視すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \text{for } z = \zeta, \quad (7.10)$$

が得られる。さらに、この方程式は ζ を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = \zeta, \quad (7.11)$$

のように書き換えられる。

補足的に記載したように、数式 (7.11) は水面 $z = \zeta$ のみでの適用を意識して導出されている。しかし、その数式は平均水位 $z = 0$ で適用してもよい。なぜなら、 Φ の z についてのテイラー展開:

$$\Phi(x, y, \zeta) = \Phi(x, y, 0) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} \zeta + O(\Psi \zeta^2),$$

から明らかなように、 Φ と ζ の2次の項が無視できる場合、 $\Phi(x, y, z) = \Phi(x, y, 0)$ となるので、境界条件を $z = 0$ で与えても問題ない。したがって、境界条件 (7.11) は、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = 0, \quad (7.12)$$

のように書き換えることができる。結果として、振幅が小さい水の波は、ラプラス方程式 (7.4) と線形境界条件 (7.5) と (7.12) を解くことによって特定できる。方程式の解として Φ が得られれば、(7.10) を利用して波の形 ζ が得られる。

7.2 線形波

振幅が小さい水の波を定式化しよう。前節で説明したように、振幅が小さい波では境界条件が近似的に線形であるので**線形波**と呼ばれる。座標軸として、鉛直上方に z 軸をとり、静水面を xy となるように座標軸を設定する。また、水の運動が y 軸方向に成分をもたず、その方向に変化がないとする。そのとき、水の運動は xz 平面に平行な面内における2次元ぬん道となり、波は x 軸方向に伝搬する1次元波である。

前節で導いたが、改めて、水の波を定式化する際に必要な数式を列挙しておこう。基本方程式として、水の波はラプラス方程式にしたがう。特に、上の条件設定のように x 軸方向に伝搬する波は、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (7.13)$$

にしたがうわけだ。満たすべき境界条件は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h, \quad (7.14a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (7.14b)$$

である。第1式は水底における境界条件、第2式は水面における境界条件である。そのとき、波の形状は、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{z=0}, \quad (7.15)$$

によって与えられる。これから、これらの方程式の解として水の波を数式で表現していく。

水の波を与える数学モデルとして、水平座標 x と時刻 t について正弦波となる関数:

$$\Phi(z, z, t) = \phi(z) \cos(kx - \omega t), \quad (7.16)$$

を考えよう。この数式に示すように、正弦波の振幅 $\phi(z)$ は水深 z の関数であるとした。さらに、 k は波数であり、 $k \equiv 2\pi/\lambda$ によって定義される。さらに、 ω は角周波数である。余弦関数の変数は波の位相を表すので、 $\theta = kx - \omega t$ が一定であると考え、波の位相は、

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad (7.17)$$

で移動することがわかる。速度 c は**位相速度**と呼ばれる。この例において、 $c > 0$ であれば波は x 軸の正の方向に、 $c < 0$ であれば x 軸の負の方向に移動する。そのように波が移動することは、波の伝搬と呼ばれる。

波を形成する水の実際の運動は波の伝搬とは異なる。水の運動を特定するため、波動関数 (7.16) を (7.13) に代入すると、振幅関数 $\phi(z)$ についての微分方程式:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - k^2 \phi = 0,$$

が得られる。その方程式の解は、積分定数 C_1 と C_2 を用いて、

$$\phi = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz},$$

なる形で記述できる。つまり、波動関数 Φ が、

$$\Phi = (C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}) \cos(kx - \omega t),$$

であることを意味する。この関数に対して、水底での境界条件 (7.14a) を適用すると、

$$C_1 e^{-kh} = C_2 e^{kh} = \frac{C}{2},$$

が得られる。ここで、 C は別の積分定数である。この積分定数を用いると、速度ポテンシャルは、

$$\Phi = C \cosh [k(z+h)] \cos(kx - \omega t), \quad (7.18)$$

のように表現できる。得られた関数 Φ を (7.10) に代入すると、波の形状:

$$\zeta = -\frac{C\omega}{g} \cosh kh \sin(kx - \omega t), \quad (7.19)$$

が得られる。この結果によると、波の振幅、すなわち、最大波高は $(C\omega/g) \cosh kh$ で与えられる。さらに、波動関数 (7.18) について平均水面 $z = 0$ での境界条件 (7.14b) を適用すると、

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kh}, \quad (7.20)$$

が得られる。波数 k と角速度 ω の関係に平方根や双曲線関数が現れていることから、波の位相速度が波長に依存して異なることが予想される。位相速度の定義式 $c = \omega/k$ を用いると、

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}, \quad (7.21)$$

のように、位相速度が波長に依存して変化することが確認できる。特に、波長よりも水深が十分に浅い場合、位相速度は $c \simeq \sqrt{gh}$ となる。逆に、波長に比べ水深が十分に大きい場合、 $c \simeq \sqrt{g/k}$ が成立する。導出した線形波の位相速度は、図 7.1 に示す曲線を描く。横軸

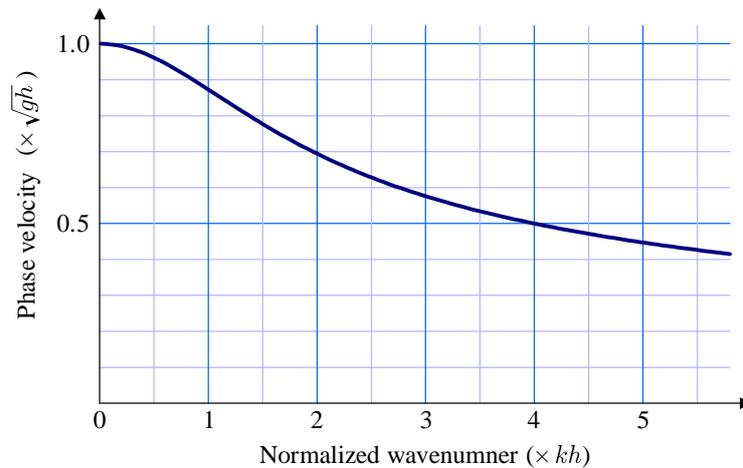


図 7.1: 線形波の位相速度

は正規化された波数 kh である。この値が小さい領域は、深さに比べ波長が長い状況 (長波) に相当する。長波での位相速度は、波数への依存が少なく、近似的に \sqrt{gh} となる。その近似は、図 7.1 によると、深さと波長が 10 倍以上で成立する。一方、 kh が大きい領域は深さに比べ波長が短い状況 (短波) に相当する。短波における位相速度は、上で述べたように $\sqrt{g/k}$ となるので、波数の平方根に反比例する。長波の代表的な例は、海底地震に起因する津波である。上で述べたように、長波の位相速度は \sqrt{gh} となる。例えば、深さ 3000 メートルの太平洋を横断する津波は約 170 m/s の速度で伝搬するのだ。

水の波の位相速度は、上で説明したように、波数 (波長) に依存して異なる値となることが特徴である。任意の波形がフーリエ変換によると異なる波数の波の重ね合わせであることを考えると、波形を構成する各波数成分は、それぞれ異なる位相速度で伝搬する。その結果、任意波形の水の波は時々刻々と形状が変化するのだ。そのような現象は、波の**分散**と呼ばれる。このように波が分散を示す媒質は、**分散性媒質**と呼ばれる。

既に導出したポテンシャル (7.18) に含まれる積分定数 C は物理的意味がわかりにくいので、書き換えてみよう。その書き換えには、(7.19) の形状における振幅に注目すればよい。その振幅を A とすれば、

$$A = -\frac{C\omega}{g} \cosh kh,$$

である。つまり、積分定数 C は、

$$C = -\frac{gA}{\omega \cosh kh},$$

のように、波の振幅、すなわち、波高 A を用いて記述できる。ところが、水の波の位相速度 (7.21) を利用すると、 C はさらに簡略化でき、

$$C = -\frac{Ac^2k}{\omega \sinh kh} = -\frac{Ac}{\sinh kh},$$

が得られる。したがって、ポテンシャル Φ は、

$$\Phi = -\frac{Ac}{\sinh kh} \cosh [k(z+h)] \cos(kx - \omega t), \quad (7.22)$$

のように書き換えられる。このポテンシャルを座標 x と z について、それぞれ、偏微分すれば速度成分が得られる。つまり、速度成分 $u_x = d\Phi/dx$ と $u_z = d\Phi/dz$ は、

$$\frac{dx}{dt} = u_x = \frac{Ack}{\sinh kh} \cosh [k(z+h)] \sin(kx - \omega t), \quad (7.23a)$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z = -\frac{Ack}{\sinh kh} \sinh [k(z+h)] \cos(kx - \omega t), \quad (7.23b)$$

のように計算される。これらの速度成分は、波の伝搬速度でなく、波を構成する水が実際に運動する速度である。これらの微分方程式を解けば波を構成する水の運動軌跡がわかるのだが、それが容易ではない。なぜなら、同一の正弦関数の変数の中に空間座標と時間が含まれているため、微分方程式を変数分離できないからだ。これらの微分方程式は非線形であるので厳密に解くことができないのだ。

波を構成する水の運を規定する方程式 (7.23a) と (7.23b) は、厳密に解けないので、水の変位量が小さい仮定の下で近似的に方程式を解こう。座標 x も z も周期関数であると予想されるので、長時間にわたるそれらの平均値を x_0 と z_0 とし、 $x \equiv x_0 + \Delta x$, $z \equiv z_0 + \Delta z$ とおこう。つまり、平均値からの変位量を Δx と Δz とした。これらを (7.23a) と (7.23b) に代入し、変位量を決定しようというのだ。取り掛かりとして、(7.23a) について、変位量の 1 次までの近似をとると、

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{Ack}{\sinh kh} \left\{ \cosh [k(z_0+h)] \sin(kx_0 - \omega t) \right. \\ \left. + k \sinh [k(z_0+h)] \sin(kx_0 - \omega t) \Delta z - k \cosh [k(z_0+h)] \cos(kx_0 - \omega t) \Delta x \right\}, \end{aligned}$$

が得られるのだが、第 2 項と第 3 項は微小量である。したがって、平均値から変位量は近似的に、

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{Ack}{\sinh kh} \cosh [k(z_0+h)] \sin(kx_0 - \omega t), \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= -\frac{Ack}{\sinh kh} \sinh [k(z_0+h)] \cos(kx_0 - \omega t), \end{aligned}$$

なる微分方程式を満足する。これらの微分方程式は、右辺に含まれる変数が t のみであるので容易に解くことができ、

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{A}{\sinh kh} \cosh [k(z_0+h)] \cos(kx_0 - \omega t), \\ \Delta z &= \frac{A}{\sinh kh} \sinh [k(z_0+h)] \sin(kx_0 - \omega t), \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $k = c/\omega$ なる関係式に注意した。これらの解から、波を構成する水の運動は、

$$x = x_0 + \frac{A}{\sinh kh} \cosh [k(z_0 + h)] \cos(kx_0 - \omega t), \quad (7.24a)$$

$$z = z_0 + \frac{A}{\sinh kh} \sinh [k(z_0 + h)] \sin(kx_0 - \omega t), \quad (7.24b)$$

で表されることがわかる。得られた結果によると、波を構成する水は xz 平面内で楕円運動をすることがわかる。その楕円の x 軸方向と z 軸方向の半径を、それぞれ、 A_x と A_z とすると、

$$A_x = \frac{A \cosh [k(z_0 + h)]}{\sinh kh}, \quad A_z = \frac{A \sinh [k(z_0 + h)]}{\sinh kh},$$

と書くことができる。この数式で示すように、楕円軌跡の大きさは、水底からの距離に依存して変化する。特に、 $z = 0$ における運動の z 方向振幅は A に等しい。つまり、 xz 平面内の楕円運動によって、水面が上下していることを意味する。得られた数式によって明らかになった水の運動は、図 7.2 に描くような運動をしているのだ。水底からの距離によって、長軸方向と短軸方向の半径が異なるが、あらゆる場所の水は楕円運動をしている。場

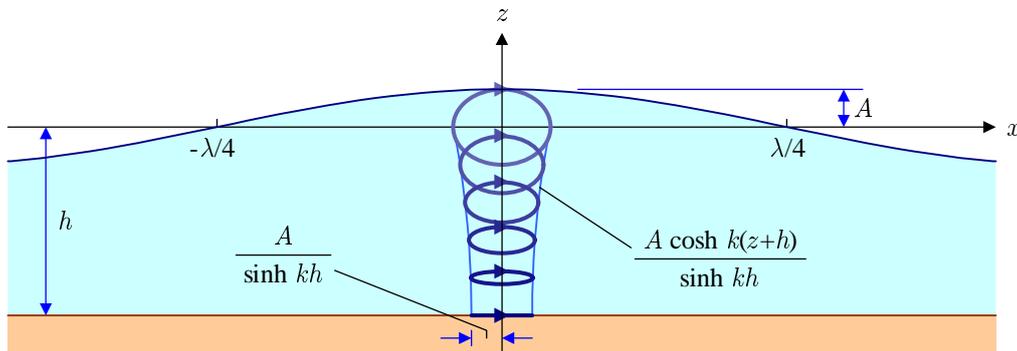


図 7.2: 波を構成する水の運動

所ごとに楕円運動のタイミングが少しずつ異なるため、波が進行しているように見えるが、実際の水は狭い範囲を周回しているに過ぎない。

楕円運動する水が波を引き起こすのは図 7.3 を用いると説明できる。この図は、水中に等間隔で設定した格子点の運動を描いている。既に説明したように、各格子点は楕円を描く。図 7.3 に描いた計算結果によると、波の山の付近では水平方向に点の間隔が小さくなっている。もともと縮まない流体を想定しているので、水平方向の間隔が小さくなった分だけ、鉛直方向の間隔が長くなっている。結果として、格子点で囲まれる四辺形の面積は一定である。一方、谷の付近では格子点の水平方向の間隔が大きくなり、鉛直方向の間隔が小さくなる。そのような水の変形によって山と谷ができる。時間の経過とともに、格子点が楕円を描くと、山や谷が異なる位置へ移っていく。そのようにして波が形成されるのだ。

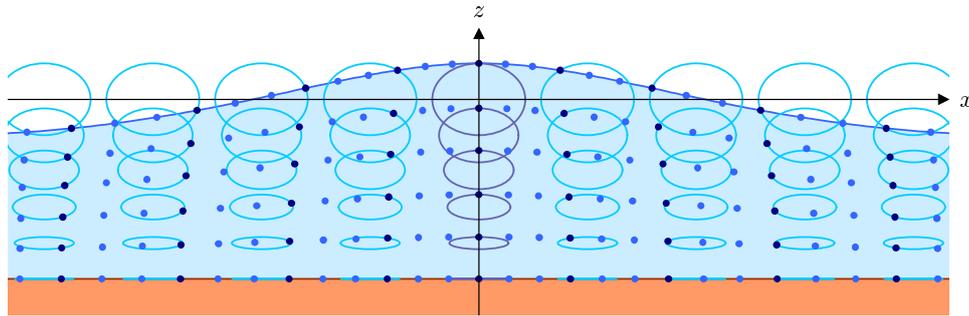


図 7.3: 水の変形によって引き起こされる波

例として、海底の巨大地震で発生する津波を考えてみよう。津波の振幅と波長を、それぞれ、 $A = 5 \text{ m}$, $\lambda = 10 \text{ km}$ とする。波長に対応して、波数は $k = 2\pi/\lambda = 6.28 \times 10^{-4} \text{ rad/m}$ となる。津波が深さ $h = 3000 \text{ m}$ の海を伝搬する場合を考えると、その位相速度は、(7.21) にしたがって、 $c = 122 \text{ m/s}$ と計算される。このとき、海水は水平方向の半径 $A_x = 5, 24 \text{ m}$ 、鉛直方向の半径 $A_z = 5.00 \text{ m}$ の楕円運動をするということだ。さらに、(7.23a) によると、海水の水平方向の速度は、最大値が 0.40 m/s に過ぎない。つまり、津波といえども、沖合では海水の動きが非常に静かであり、たとえ航行中に津波に遭遇してもその事実気づかないことが十分にあり得る。

7.3 長波と短波

前節で説明した線形波は、水深 h と波長 λ の一方が極端に大きい場合、特性が簡潔に表現できるようになる。水深に比べて波長が十分に大きい場合は**長波**、水深に比べ波長が十分に小さい場合は**短波**と呼ばれる。

7.3.1 長波

長波は、波長に比べて水深が十分に小さい状況を表すので、**浅水波**とも呼ばれる。その場合、 $h/\lambda \ll 1$ であるので、 $\tanh kh \simeq kh = 2\pi h/\lambda$ であるので、波の位相速度 (7.21) は、

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}, \quad (7.25)$$

のように、波長の依存性がなくなる。つまり、長波の位相速度は**非分散的**である。

速度ポテンシャル (7.22) は、長波の条件 $\sin kh \simeq kh$, $\cosh[k(z+h)] \simeq 1$ を適用すると、

$$\Phi = -\frac{Ac}{kh} \cos(kx - \omega t), \quad (7.26)$$

のような簡単な数式で書き換えられる。さらに、水の運動軌跡 (7.24a) と (7.24b) は、同様に長波の条件を適用すると、

$$x = x_0 + \frac{A}{kh} \cos(kx_0 - \omega t), \quad (7.27a)$$

$$z = z_0 + \frac{A(z_0 + h)}{h} \sin(kx_0 - \omega t), \quad (7.27b)$$

$$(7.27c)$$

のように簡略化される。ところが、 $1/k \gg h$ であることに注意すると、 z 軸方向の振幅が x 軸方向に比べ無視でき、その結果、水の運動は近似的に x 軸方向の単振動と考えてよいことがわかる。事実、ポテンシャル (7.26) からでは、 x 軸方向の運動しか導出できない。

前の段落で述べたように、長波における水の運動は水平方向 (x 軸方向) の運動が支配的である。しかも、その速度は水深に依存しない。水の運動を表す (7.27a) を時刻 t について微分すると、

$$u_x = A \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx_0 - \omega t),$$

が導かれる。鉛直方向の運動 (7.27b) と比較すると明らかなように、水平方向の運動速度は波の形状と同位相である。図 7.4 に示すように、水の波が山の位置で水は位相の伝搬方向に運動する。谷の位置では、水は位相の伝搬方向と逆方向に運動する。図に描かれている

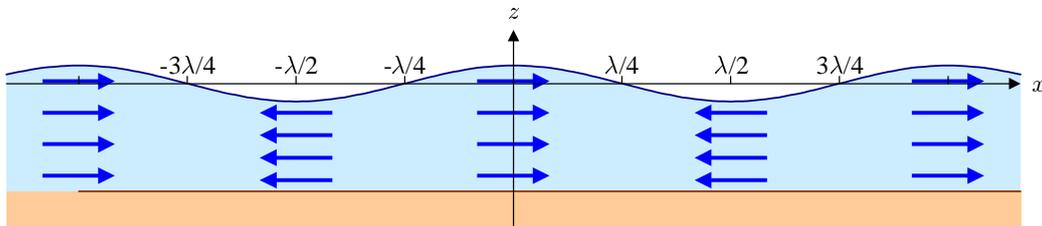


図 7.4: 長波を構成する水の運動

瞬間の波の形状は $x = 0$ に山があるが、すでに $x = 0$ の水は正の方向に運動している。一方、谷である $x = \lambda/2$ の水は負の方向に運動している。時間の経過とともに、水は $x = \lambda/4$ に集まり、山ができる。つまり、時間の経過とともに山は $x = 0$ から $x = \lambda/4$ に移動する。同様に、谷も $x = -\lambda/2$ から $x = -\lambda/4$ に移動する。そのようにして波は伝搬するのだ。

本項で説明したような簡略化されたモデルは水深に比べて波長が十分に長い場合であり、 $\tanh kh \simeq kh$ となることを利用している。双曲線関数 $\tanh x$ のマクローリン展開が、

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \dots$$

であることに注意すると、 $kh < 0.17$ であれば、簡略化されたモデルが 1% 以内の誤差で表現できているとわかる。その条件を満たす波長の条件は $\lambda > 37h$ である。つまり、水深の 40 倍以上の波長の波に関して、本項で取り扱った長波のモデルが成立する。

7.3.2 短波

短波は水深 h に比べ波長 λ が十分に小さい場合、あるいは、波長 λ に比べ水深 h が十分に大きい場合のモデルであり、**深水波**とも呼ばれる。このモデルでは $hk \gg 1$ となるので、 $\tanh hk \simeq$ なる近似が適用される。短波では、波の位相速度は、

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (7.28)$$

のように、波長 λ に依存する。つまり、短波は**分散的**である。一般的な風速によって引き起こされる海面波の波長 $\lambda = 100$ m について位相速度を計算すると $c = 12.5$ m/s となる。海の波は自動車と同程度の速度で伝搬するのだ。さらに、波長と位相速度の関係から、この例において振動の周期は 8 秒である。

短波の条件は $hk \gg 1$ であるので、 $\sinh hk \simeq e^{hk}/2$, $\cosh[k(z+h)] \simeq e^{k(z+h)}/2$ なる近似が成立し、速度ポテンシャル (7.22) は、

$$\Phi = -Ace^{kz} \cos(kx - \omega t), \quad (7.29)$$

となる。そのとき、水の運動軌跡 (7.24a) と (7.24b) は、

$$x = x_0 + Ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t), \quad (7.30a)$$

$$y = y_0 + Ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t), \quad (7.30b)$$

となる。つまり、短波に相当する水は、図 7.5 に示すように、 xz 平面内を半径 Ae^{kz_0} で円運動するのだ。水面の近くでは、水平方向に収縮し、鉛直方向に引き伸ばされた水が波の山となり、水平方向に引き伸ばされ、鉛直方向に縮められた水が波の谷となる。円運動の半

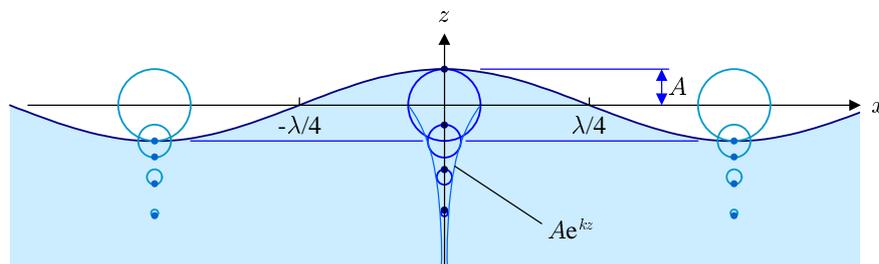


図 7.5: 短波を構成する水の運動

径は水深とともに指数関数的に減少し、波長の深さ $|z_0| = \lambda/2$ において、振幅は水面での 4.3% まで減少する。つまり、水の運動は、せいぜい、半波長程度の水深までしか及ばないのだ。それ以上での水深では水はほとんど運動しない。

短波に相当する例は、風によって引き起こされる海の波である。上で説明した近似は、 $\tanh kh \simeq 1$ であることを利用している。双曲線関数 $\tanh x$ が、

$$\tanh x = \frac{x^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1},$$

であることに注意すると、 $\tanh x = 1$ と考えたときの誤差が1%未満になるのは、 $x > 2.65$ のときである。つまり、 $hk > 2.65$ から $\lambda < 2.37h$ が導かれる。したがって、波長が水深の2倍以下であるとき短波近似が成立する。

7.3.3 表面張力波

波長が短い波では表面張力の影響が無視できなくなる。本節では表面張力波が波の形成に与える影響を考察する。これまで議論してきた水深一定での1次元正弦波は、ラプラス方程式 (7.13) と水底での境界条件 (7.14a) がそのまま適用できる。一方、水面での境界条件 (7.14b) に表面張力による作用が加わる。

これまでと同様に1次元波を取り扱うので、水面は xz 平面上での曲線を取り扱う。その曲線の曲率を κ とすれば、曲率半径は $R = 1/\kappa$ となる。曲率 κ の水面には、表面張力によって水の内部に向かう力 $\delta p = -\gamma\kappa$ が作用する。ここで、 γ が表面張力である。凸形状の曲率 κ が正になるので、水の内部に向かう力を表現するために負の符号を付した。そのとき、水の圧力 p と大気圧 p_0 の間には、

$$\delta p = p - p_0 = -\gamma\kappa, \quad (7.31)$$

が成立する。水面の形状が $z = \zeta(x, t)$ で表されるとき、水面の曲率は、

$$\kappa = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \left/ \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2} \right.,$$

で与えられる。微小振幅波を取り扱ううえで、 $\partial \zeta / \partial x$ は微小量であるので、その自乗は無視できると考えよう。したがって、水面の曲率は近似的に、

$$\kappa = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (7.32)$$

である。その近似のもとで、表面張力波は、

$$\delta p = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (7.33)$$

と書くことができる。

表面張力の影響下で、圧力方程式 (7.8) は、圧力を $p = p_0 + \delta p$ として適用すればよい。そのとき、水面における一般化されたベルヌーイの定理 (7.9) は、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} |\nabla \Phi|^2 - \frac{\delta p}{\rho g}, \quad (7.34)$$

となる。微小振幅波を考えているので Φ についての 2 次の項を無視し、 δp の関係式 (7.33) を代入すると、方程式 (7.34) は、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\gamma}{\rho g} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (7.35)$$

のように書き換えられる。この方程式の右辺の第 2 項が表面張力による寄与である。

これまでに議論してきた水の波で扱った水面での境界条件は、(7.10) から得られた。その数式を再び書くと、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{for } z = \zeta,$$

である。ただし、この方程式に含まれる ζ は (7.35) で定義されている。この方程式を変形することによって、水面における境界条件:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \left(g - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = 0, \quad (7.36)$$

が得られる。この結果は、表面張力を考慮しない場合の水面の境界条件 (7.12) について、 g を $g - (\gamma/\rho)\partial^2/\partial x^2$ で置き換えた結果に相当する。解として、 $\Phi = \phi(z) \cos(kx - \omega t)$ を仮定すると、 g を $g - \gamma k^2/\rho$ で置き換えたと同様と解釈すればよいだろう。そのように考えると、表面張力を考慮した場合、波の角速度は、

$$\omega = \sqrt{\left(g + \frac{\gamma k^2}{\rho} \right)} k \tanh kh, \quad (7.37)$$

となるはずだ。この数式を書き換えると、位相速度が、

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right) \tanh kh} = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}, \quad (7.38)$$

であることが導かれる。

表面張力の影響は波長が小さい場合にのみ現れる。なぜなら、長波の条件 $\lambda \gg h$ を (7.38) に代入すると、 $c \simeq \sqrt{gh}$ となり、表面張力がない場合の位相速度と一致するからだ。つまり、波の性質に表面張力の影響がほとんど寄与していないのだ。一方、短波の条件では $\tanh kh \simeq 1$ であるので、位相速度は、

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}, \quad (7.39)$$

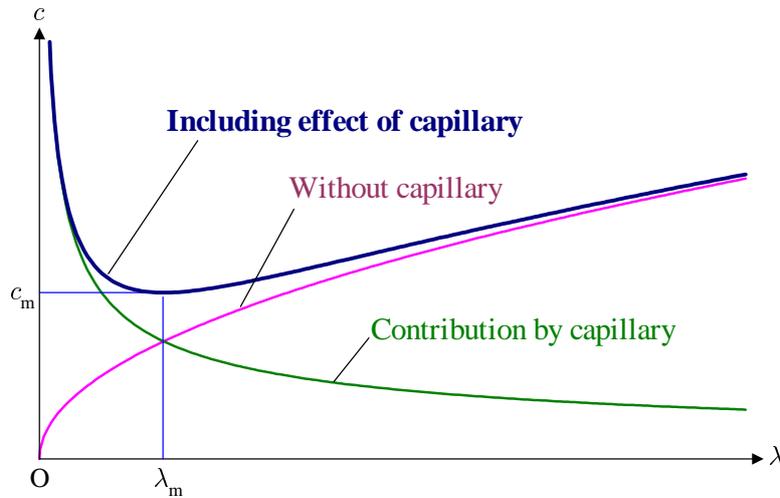


図 7.6: 表面張力を考慮した短波の位相速度

となる。位相速度 (7.39) には、図 7.6 に示すように表面張力の影響が表れている。表面張力の考慮がない場合、波長が短くなれば、その平方根に比例して位相速度が小さくなっていった。しかし、表面張力による寄与 (数式 (7.39) の平方根内の第 2 項) は、波長が小さくなると大きくなる。その影響によって、波長が小さくなると、表面張力を考慮した位相速度は大きくなる。正確に述べるなら、

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad (7.40)$$

が最も位相速度が小さくなる波長である。この長さより短い波長では位相速度が速くなる。言い換えると、波長が $\lambda < \lambda_m$ の条件では表面張力の影響が顕著になるわけだ。そのような波は、**表面張力波** (capillary wave)、または、**さざ波** (ripple) と呼ばれる。なお、波長が λ_m のとき、位相速度は最小値:

$$c_m = \sqrt[4]{\frac{4\gamma g}{\rho}}, \quad (7.41)$$

となる。一方、表面張力の影響が小さい波は、重力を復元力とするため**重力波**¹ (gravity wave) と呼ばれる。なお、位相速度 (7.39) は、 λ と c_m を用いると、

$$c = c_m\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda}\right)}, \quad (7.42)$$

なる簡単な数式で表現できる。

温度 20°C の水について、表面張力の影響を計算しよう。その温度での表面張力は $\gamma = 7.3 \times 10^{-2}$ mN/m である。密度 $\rho = 1.0 \times 10^3$ kg/m³ と重力加速度 9.8 m/s² を上で導出し

¹同じ名称であるが、アインシュタインの重力理論による重力作用が伝搬する波とは異なる。英語では、重力を復元力とする水の波は gravity wave, 重力作用を伝搬する波は gravitational wave のように、異なる用語で区別されている。

た公式に代入すると, $\lambda_m = 0.017 \text{ m}$, $c_m = 0.23 \text{ m/s}$ が計算される。つまり, 波長が 1.7 cm 以下の波は表面張力波ということだ。

7.4 位相速度と群速度

既に示したように, 短波では位相速度が波数 k (または波長 λ) によって異なる。そのような性質は, 分散的であると呼ばれる。分散的な波は, 位相速度がエネルギーを伝搬する速度とは異なる。エネルギーの伝搬速度は, **群速度**と呼ばれる速度である。本節では群速度について説明する。

分散的な波を考え, 波数 k と角速度 ω において, 波数が微小量 δk だけずれたとき, 角速度が $\delta\omega$ だけ変化するとしよう。正方向に波数がずれた波と負方向に波数がずれた波を重ね合わせたとしよう。重ね合わされた波は形式的に,

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cos [(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t] + A \cos [(k - \delta k)x - (\omega - \delta\omega)t] \\ &= 2A \cos(\delta k \cdot x - \delta\omega \cdot t) \cos(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (7.43)$$

のように数式表現できる。重ね合わされた波は, 二つの正弦関数 (余弦関数) の積になっている。その因数のうち, $\cos(\delta k \cdot x - \delta\omega \cdot t)$ は, もう一方に比べ, 小さな波数で遅い角速度の波動関数である。つまり, 小さな波数で遅い角速度の波動関数は, 包絡線に対応する。その包絡線の中に, 大きな波数で速い角速度の波が入っている構造になっている。包絡線の位相が一定になる条件から, 包絡線の伝搬速度を計算しよう。包絡線の位相が一定のなる条件は, 形式的に,

$$\delta k \cdot x - \delta\omega \cdot t = \text{const},$$

となる。この数式を全微分すると,

$$\delta k \cdot dx - \delta\omega \cdot dt = 0,$$

が得られる。ここで, dx/dt が, 特定の包絡線位相の伝搬速度であるので, それは包絡線の伝搬速度に他ならない。その意味で, $c_g \equiv dx/dt$ なる記号を用いると,

$$c_g = \frac{\delta\omega}{\delta k},$$

が導かれる。なお, 波数と角速度のずれをゼロに近づけると,

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (7.44)$$

が得られる。それに対し, 位相速度は速い方の波動関数の位相が一定となる条件 $kx - \omega t = \text{const}$ から, $c_p = \omega/k$ なる公式が得られる。いうまでもなく, この公式はこれまで利用してきた公式と同一である。

付録 A 楕円積分・楕円関数

力学の問題において、しばしば、初等関数の範囲で積分ができない形に遭遇することがある。その典型的な例が楕円積分である。また、その逆関数は楕円関数と呼ばれる。本書では、数回ほど楕円積分や楕円関数が登場している。

A.1 楕円積分

一般的な楕円積分ではなく、代表的な楕円積分として、第1種と第2種との楕円積分を紹介しよう。それらの積分は、

$$F_J(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad E_J(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \quad (\text{A.1})$$

のように定義される。これらはヤコビの標準形と呼ばれる形式である。この積分には、変数 x の他にパラメータ k を伴っている。その k は母数と呼ばれる。また、 $k'^2 \equiv 1 - k^2$ のように定義される k' は補母数と呼ばれる。ヤコビの標準形に対し、 $x = \sin \phi$ とおくと、楕円積分は、

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}, \quad E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi, \quad (\text{A.2})$$

なる形に書き換えることができる。この形態はルジャンドルの標準形と呼ばれる。ヤコビの標準形とルジャンドルの標準形は、

$$F_J(k, \sin \phi) = F(k, \phi), \quad E_J(k, \sin \phi) = E(k, \phi),$$

のように対応づけられる。また、これらの楕円積分の特別な形として、

$$K(k) = F(k, \pi/2) = F_J(k, 1), \quad E(k) = E(k, \pi/2) = E_F(k, 1), \quad (\text{A.3})$$

なる完全楕円積分が頻繁に使われる。第1種完全楕円積分 $K(k)$ は一般振り子の周期が代表的な応用例であり、第2種完全楕円積分 $E(k)$ は楕円の周囲長が代表的である。楕円

積分という名称は、第2種楕円積分が楕円の周囲長の計算に用いられることに由来する。それらの完全楕円積分は、

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \dots \right), \quad (\text{A.4a})$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 - \dots \right), \quad (\text{A.4b})$$

のように級数表現できる。また、第1種完全楕円積分 $K(k)$ は、後に紹介するヤコビの楕円関数 (sn 関数) の周期を与える重要な積分である。

A.2 ヤコビの楕円関数

ヤコビの楕円関数 (sn 関数) は第1種楕円関数の逆関数として定義される。例えば、 $F(k, x) = u$ とするならば、 $x = \text{sn}(u; k)$ と書かれるのだ。この記述法では、母数 k を明記しているが、特に明記の必要がない場合、 $x = \text{sn } u$ のように簡略する。

ヤコビの楕円関数 $\text{sn } x$ に対応し、補助関数 $\text{cn } x$ と $\text{dn } x$ が定義される。それらの定義は、 $\text{cn}^2 x = 1 - \text{sn}^2 x$ 、 $\text{dn}^2 x = 1 - k^2 \text{sn}^2 x$ なる形で与えられる。これらの楕円関数をグラフとしてプロットすると図 A.1 のような曲線を描く。そのうち、 $\text{sn } x$ と $\text{cn } x$ は、ゼロを中心とする振幅1で、周期 $4K$ の周期関数である。それに対し、 $\text{dn } x$ は $k' (= \sqrt{1 - k^2})$ から1まで変化し、周期 $2K$ の周期関数だ。なお、 K は前節で紹介した完全楕円積分だ。ヤコビ

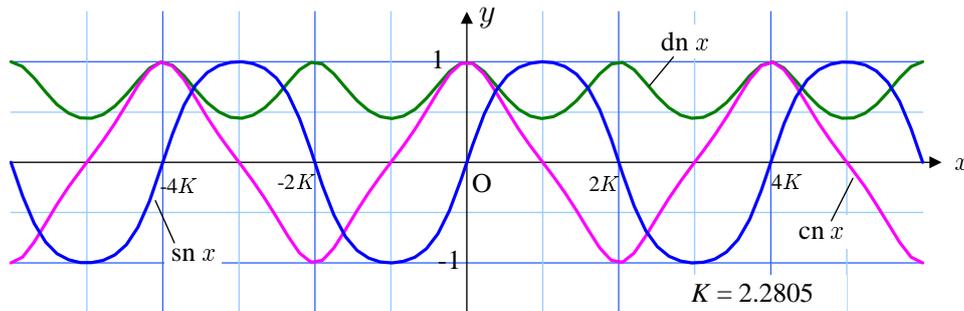
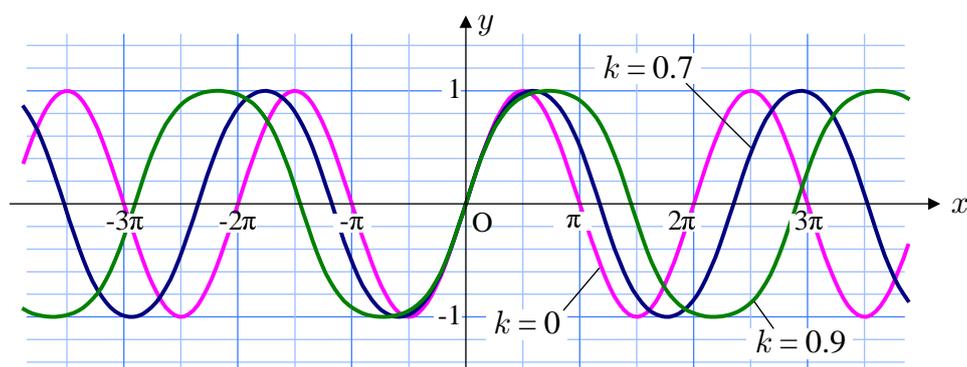


図 A.1: ヤコビの楕円関数と補助関数 ($k = 0.9$)

の楕円関数 $\text{sn } x$ は $k = 0$ のとき $\sin x$ と一致する。その特別な場合の周期は $4K = 2\pi$ である。その特別な場合を除き、 $4K > 2\pi$ となるので、一般的な楕円関数の周期は 2π より長い。母数 k が大きくなるほど、sn 関数の形状は正弦波からさらにひずんだ形状となり、周期が長くなる。それに対応し、cn 関数や dn 関数もひずみが大きくなる。

母数 k の設定に対する sn 関数の形状や周期は図 A.2 に示すように変化する。上で述べたように、 $k = 0$ のとき、ヤコビの楕円関数 $\text{sn } x$ は正弦関数 $\sin x$ と一致する。母数 k が大

図 A.2: 母数 k と楕円関数 $\operatorname{sn} x$ の関係

きくなると、頂点付近がなだらかに伸び、周期が長くなっている。例えば、 $k = 0.9$ のとき、 $\operatorname{sn} x$ の周期は、 $\sin x$ の約 1.45 倍も長くなっている。

蛇足 ヤコビの楕円関数として命名された sn 関数は、 $k = 0$ のとき正弦関数と一致することに由来する。その事実、(A.1) が $k = 0$ のとき $\arcsin x$ となることから明らかだろう。つまり、ヤコビの楕円関数は、 \sin の第 2 文字目を削除し、 sn 関数と命名された。一方、 $\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x}$ となる関数は、余弦関数 \cos に類似しているため、 cn 関数と命名された。この関数名が cs 関数とならなかったことは、いささか不可解である。さらに、 $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x}$ となる関数は、 cn 関数と同様に、 sn 関数の補助関数である。関数名は cn に続いて、 dn 関数という命名法であろう。