付 録A　楕円積分・楕円関数

力学の問題において, しばしば, 初等関数の範囲で積分ができない形に遭遇することがある。その典型的な例が楕円積分である。また, その逆関数は楕円関数と呼ばれる。本書では, 数回ほど楕円積分や楕円関数が登場している。

A.1　楕円積分

一般的な楕円積分ではなく, 代表的な楕円積分として, 第 1 種と第 2 種との楕円積分を紹介しよう。それらの積分は,

$$F_{\mathrm{J}}(k,x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad E_{\mathrm{J}}(k,x)=\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \tag{A.1}$$

のように定義される。これらはヤコビの標準形と呼ばれる形式である。この積分には, 変数 x の他にパラメータ k を伴っている。その k は母数と呼ばれる。また, $k'^2 \equiv 1-k^2$ のように定義される k' は補母数と呼ばれる。ヤコビの標準形に対し, $x=\sin\phi$ とおくと, 楕円積分は,

$$F(k,\phi)=\int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},\qquad E_(k,\phi)=\int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi, \tag{A.2}$$

なる形に書き換えることができる。この形態はルジャンドルの標準形と呼ばれる。ヤコビの標準形とルジャンドルの標準形は,

$$F_{\mathrm{J}}(k,\sin\phi)=F(k,\phi),\qquad E_{\mathrm{J}}(k,\sin\phi)=E(k,\phi),$$

のように対応づけられる。また, これらの楕円積分の特別な形として,

$$K(k)=F(k,\pi/2)=F_{\mathrm{J}}(k,1),\qquad E(k)=E(k,\pi/2)=F_{\mathrm{F}}(k,1), \tag{A.3}$$

なる完全楕円積分が頻繁に使われる。第 1 種完全楕円積分 $K(K)$ は一般振り子の周期が代表的な応用例であり, 第 2 種完全楕円積分 $E(k)$ は楕円の周囲長が代表的である。楕円積分という名称は, 第 2 種楕円積分が楕円の周囲長の計算に用いられることに由来する。

それらの完全楕円積分は,

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6+\cdots\right), \tag{A.4a}$$

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}k^4-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6-\cdots\right), \tag{A.4b}$$

のように級数表現できる。また, 第1種完全楕円積分 $K(k)$ は, 後に紹介するヤコビの楕円関数 (sn 関数) の周期を与える重要な積分である。

A.2 ヤコビの楕円関数

ヤコビの楕円関数 (sn 関数) は第1種楕円関数の逆関数として定義される。例えば, $F(k,x)=u$ とするならば, $x=\mathrm{sn}(u;k)$ と書かれるのだ。この記述法では, 母数 k を明記しているが, 特に明記の必要がない場合, $x=\mathrm{sn}\,u$ のように簡略する。

ヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}\,x$ に対応し, 補助関数 $\mathrm{cn}\,x$ と $\mathrm{dn}\,x$ が定義される。それらの定義は, $\mathrm{cn}^2\,x=1-\mathrm{sn}^2\,x$, $\mathrm{dn}^2\,x=1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,x$ なる形で与えられる。これらの楕円関数をグラフとしてプロットすると図 A.1 のような曲線を描く。そのうち, $\mathrm{sn}\,x$ と $\mathrm{cn}\,x$ は, ゼロを中心とする振幅 1 で, 周期 $4K$ の周期関数である。それに対し, $\mathrm{dn}\,x$ は k' $(=\sqrt{1-k^2})$ から 1 まで変化し, 周期 $2K$ の周期関数だ。なお, K は前節で紹介した完全楕円積分だ。ヤコビ

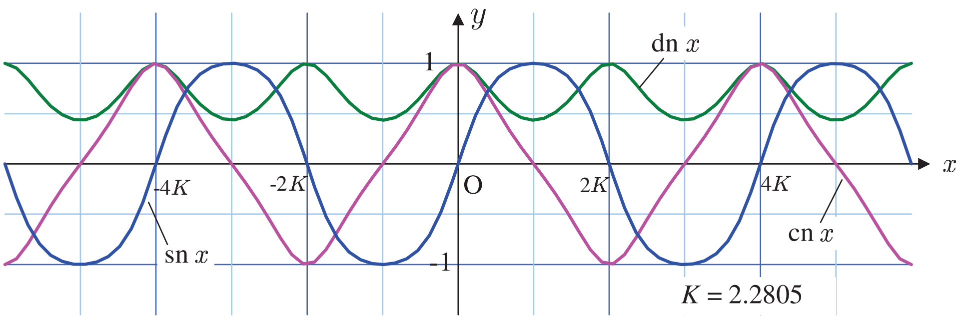

図 A.1: ヤコビの楕円関数と補助関数 $(k=0.9)$

の楕円関数 $\mathrm{sn}\,x$ は $k=0$ のとき $\sin x$ と一致する。その特別な場合の周期は $4K=2\pi$ である。その特別な場合を除き, $4K>2\pi$ となるので, 一般的な楕円関数の周期は 2π より長い。母数 k が大きくなるほど, sn 関数の形状は正弦波からさらにひずんだ形状となり, 周期が長くなる。それに対応し, cn 関数や dn 関数もひずみが大きくなる。

母数 k の設定に対する sn 関数の形状や周期は図 A.2 に示すように変化する。上で述べたように, $k=0$ のとき, ヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}\,x$ は正弦関数 $\sin x$ と一致する。母数 k が大

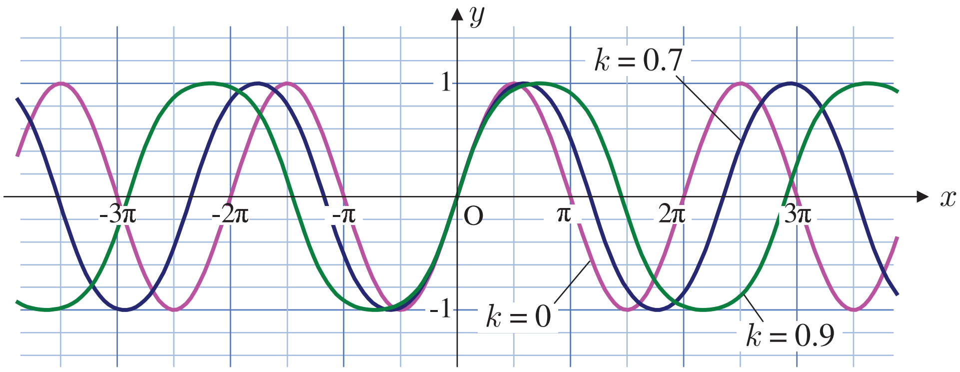

図 A.2: 母数 k と楕円関数 $\mathrm{sn}\,x$ の関係

きくなると, 頂点付近がなだらかに伸び, 周期が長くなっている。例えば, $k=0.9$ のとき, $\mathrm{sn}\,x$ の周期は, $\sin x$ の約 1.45 倍も長くなっている。

蛇足　ヤコビの楕円関数として命名された sn 関数は, $k=0$ のとき正弦関数と一致することに由来する。その事実は, (A.1) が $k=0$ のとき $\arcsin x$ となることから明らかだろう。つまり, ヤコビの楕円関数は, sin の第 2 文字目を削除し, sn 関数と命名された。一方, $\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 x}$ となる関数は, 余弦関数 cos に類似しているため, cn 関数と命名された。この関数名が cs 関数とならなかったことは, いささか不可解である。さらに, $\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 x}$ となる関数は, cn 関数と同様に, sn 関数の補助関数である。関数名は cn に続いて, dn 関数という命名法であろう。