

## 第6章 流体の流れ

流体の運動は、流体自身が移動する流れと、その場で振動し、位相だけが伝搬する波に大別される。

### 6.1 ポテンシャル流

非圧縮性の完全流体の流れを考える上で、ポテンシャルの概念は便利である。既に述べたように、完全流体では渦度が発生も消滅もしないので、例えば、静止状態 ( $\mathbf{u} = 0$ ) や一様流 ( $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ) のような渦なしの状態から出発した流れは、常に渦なしである。そのため、渦なし流は一意的な状態でなく、長時間かつ広い空間領域にわたって存在しうる流れである。渦なし流では、速度ポテンシャルが存在するので、その流れはポテンシャル流と呼ばれる。

速度ポテンシャル  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  は、渦なし流の速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  との間に、

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi, \quad (6.1)$$

なる関係が成立する。流れの速度  $\mathbf{u}$  が与えられると、ポテンシャル  $\Phi$  は積分定数を除き、一意的に定まる。一方、 $\Phi$  が与えられると、容易に  $\mathbf{u}$  が特定できる。さらに、ベクトル公式によると、勾配ベクトルの発散は、必ず、ゼロになるので、速度ポテンシャルの概念は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

を必然的に満たす非圧縮性の流体を記述するのに適している。このとき、速度ポテンシャルは、

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (6.2)$$

なるラプラスの方程式を満足する。このことから、非圧縮性流体による渦なし流は、ラプラス方程式の解、すなわち、調和関数によって記述されるポテンシャル  $\Phi$  で表現される。

非圧縮性の流体の運動について、速度ポテンシャル  $\Phi$  が調和関数となるが、具体的に特定するには境界条件が必要である。例えば、静止した固体の壁で囲まれている場合、完全流体は壁に沿って運動するはずだから、速度ベクトルの境界面に対する法線方向の成分が

ゼロでなければならない。つまり、境界面のすべての点において  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  を満たさなければならない。その境界条件を  $\Phi$  を用いて書き換えると、

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0,$$

となる。ここで、 $n$  についての微分は、境界面の法線方向に沿った微分を意味する。そのように境界条件を課すことによって、積分定数を含めポテンシャル  $\Phi$  が特定されるわけだ。

境界条件を考慮したラプラス方程式の解として速度ポテンシャル  $\Phi$  が特定できたとすると、任意の定数  $C$  を用いた  $\Phi(\mathbf{x}) = C$  は空間中の曲面を与える。その曲面は、速度ポテンシャルが特定の値  $C$  となる曲面であるので、**等ポテンシャル面**と呼ばれる。つまり、 $C$  を変化させて描いた曲線を重ねていくと、等高線のようにポテンシャルの分布を表現できるのだ。

等ポテンシャル面に沿った単位ベクトルを  $\mathbf{s}$ 、その方向に沿った速度成分を  $u_s$  とすれば、

$$u_s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0,$$

となるはずだ。ここで、 $s$  についての偏微分は、 $s$  の方向について微分することを意味する。さらに、 $\mathbf{s}$  が等ポテンシャル面のベクトルであるので、当然、この数式の右辺はゼロとなる。したがって、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} = 0$ 、すなわち、速度ベクトルと等ポテンシャル面は直交している。

## 6.2 ポテンシャルの湧き出し

簡単な速度ポテンシャルの例として、原点から湧き出すポテンシャルを考えよう。湧き出したポテンシャルが方向に依存せず、一様に拡散することを仮定すれば、ポテンシャルは点対称である。

点対称のポテンシャルを取り扱うには、球面座標系  $[r, \theta, \varphi]$  を扱うのが好都合である。ここで、 $r$  は動径座標、 $\theta$  は天頂角、 $\varphi$  は方位角である。これらの座標は、カルテシアン座標系  $[x, y, z]$  と

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

によって関係づけられる。球座標系におけるラプラス方程式は、ベクトル幾何学の公式によって、

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad (6.3)$$

なる形で記述される。点対称の場合、動径座標  $r$  の依存性しか残らないので、ラプラス方程式は、

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0, \quad (6.4)$$

なる形に書き換えられる。この微分方程式の解として、

$$\Phi = -\frac{m}{r} + C,$$

が得られる。なお、 $m$  と  $C$  は積分定数である。得られたポテンシャルから速度ベクトル  $\mathbf{u}$  を計算すると、

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi = \frac{m}{r^2}\mathbf{e}_r,$$

が得られる。ただし、 $\mathbf{e}_r$  は動径方向の単位ベクトルである。原点から  $R$  だけ離れた球面を通過する流量は、

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta R^2 \cdot \frac{m}{R^2} = 4\pi m,$$

である。このように、球面を通過する流量は半径  $R$  に依存しない。したがって、得られた流量  $4\pi m$  は原点から湧き出す流量である。さらに、原点でなく  $\mathbf{x}_0$  から湧き出す場合は、

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|},$$

であることは容易に推測できる。また、積分定数  $m$  が負であれば、速度  $\mathbf{u}$  が原点に向かうので、吸い込みを意味する。

互いに近接した2点  $\mathbf{x}_0$  と  $\mathbf{x}_1$  から、それぞれ、同じ量の湧き出しと吸い込みがある場合を考察しよう。ラプラス方程式が線形であるので重ね合わせの理が成立し、ポテンシャルは、

$$\Phi(\mathbf{x}) = -m \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} \right) = -m \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right),$$

となる。ただし、 $r_0 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ ,  $r_1 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|$  とした。ここで、 $\mathbf{x}_0$  と  $\mathbf{x}_1$  がともに  $x$  軸上に存在し、それぞれの  $x$  座標が  $-\varepsilon$  と  $\varepsilon$  であるとする。原点から  $\mathbf{x}$  への距離が  $r$ , その方向と  $x$  軸のなす角が  $\theta$  であるならば、

$$r_0 = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 + 2r\varepsilon \cos\theta}, \quad r_1 = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 2r\varepsilon \cos\theta},$$

となる。そのとき、ポテンシャルは、

$$\Phi = \frac{m(r_0 - r_1)}{r_0 r_1} \simeq \frac{2m\varepsilon}{r^2 \cos\theta} = \frac{\mu \cos\theta}{r^2},$$

が得られる。ここで、 $\mu \equiv 2m\varepsilon$  は湧き出しの**双極子モーメント**である。

## 6.3 軸対称のポテンシャル

運動する流体からの作用を評価するには、円筒座標系でポテンシャルを考えるのが便利である。運動する流体が物体の影響を受けて曲がった流線をたどり、物体を通り過ぎると

再び集結して流れていく。その問題は、流体の流れの方向を軸方向にとり円筒座標を設定するのが効果的だ。

円筒座標系におけるポテンシャルを考察するには、ポテンシャルを決定するラプラス方程式を円筒座標で記述することが第一歩だ。流体が  $x$  方向に流れている場合、円筒座標の軸方向を  $x$  軸方向に設定すればよい。さらに、 $x$  軸からの距離を  $r$ 、 $x$  軸まわりの方位角を  $\theta$  とすれば、ラプラス方程式は、

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (6.5)$$

となる。つまり、ここで扱う円筒座標系は  $[r, \theta, x]$  を座標成分とする。流体の中に置かれた物体が球や、 $x$  軸方向に沿った円筒のように軸対称であるならば、 $\theta$  のついで依存性が消えるので、ラプラス方程式は、

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (6.6)$$

のように書き換えられる。ところで、速度  $\mathbf{u}$  の座標成分を  $\mathbf{u} \equiv [u_r, u_\theta, u_x]$  とすれば、

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0, \quad u_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

である。これらの成分をラプラス方程式に代入すると、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,$$

が得られる。任意の関数  $\Psi(r, x)$  を用いて定義した関数:

$$u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad (6.7)$$

はラプラス方程式の解である。その任意の関数  $\Psi$  は **ストークスの流れの関数** と呼ばれる。

円筒座標の軸 ( $x$  軸) まわりの円錐の側面を通過する流量を計算しよう。円錐の設定として、 $x$  軸上の点  $O$  と任意の点  $P$  を結ぶ任意の曲線  $C$  を  $x$  軸周りに回転して得られる立体を考える。流れの速度を  $\mathbf{u}$ 、円錐の側面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすれば、円錐の側面を通過する流量は、

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\text{OP}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) r ds = 2\pi \int_{\text{OP}} (u_x n_x + u_r n_r) r ds \\ &= 2\pi \int_{\text{OP}} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = 2\pi \int_{\text{OP}} \frac{d\Psi}{ds} ds \\ &= 2\pi \int_{\text{OP}} d\Psi = 2\pi (\Psi(P) - \Psi(O)), \end{aligned}$$

となり、2点を結ぶ曲線  $C$  に依存せず、終点  $P$  の位置にのみ依存する。特に、 $C$  が流線の場合、流れは円錐の側面を横切ることがないので、 $\Psi(O) = \Psi(P)$  が成立する。つまり、ストークスの流れの関数は、流線に沿って一定ということだ。逆に、ストークスの流れの関数を一定にする曲線は流線である。

### 6.3.1 球を通り過ぎる一様流

球の存在によって影響を受ける一様流は、一對の湧き出しと吸い込みを一様流に重ねることによって表現できる。速度ポテンシャルを考える場合、速度  $U$  の一様流はポテンシャル  $Ux$  に対応し、微小な湧き出しと吸い込みの対は  $\mu \cos \theta / r^2 = \mu x / r^3$  に対応する。つまり、一様流の中に球を配置したとき、速度ポテンシャルは、

$$\Phi = \left( U + \frac{\mu}{r^3} \right) x, \quad (6.8)$$

と書くことができる。このポテンシャルが、一様流の中に球を配置した場合に対応することを示そう。

座標系を、一様流の方向を  $x$  軸にとり、その軸を対称軸とする円筒座標系  $[r, \varphi, x]$  を考える。動径座標  $r$  は、 $x$  軸からの距離を表し、 $\varphi$  は  $x$  軸周りの方向を表す座標である。ここでは軸対称のポテンシャルを扱うので  $\varphi$  の依存性は考えなくてもよい。ストークスの流れの関数  $\Psi$  を取り扱う場合、円筒座標系における速度成分は、(6.7) のように記述できるので、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ru_r, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = ru_x,$$

が成立する。これらの数式をポテンシャル  $\Phi$  を用いて書き換えると、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 3\mu \frac{xr^2}{R^5}, \quad (6.9a)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = r \frac{\partial \Phi}{\partial x} = Ur - 3\mu \frac{x^2 r}{R^5} + \mu \frac{r}{R^3}, \quad (6.9b)$$

が得られる。ここで、 $R$  は座標の原点からの距離  $R \equiv \sqrt{x^2 + r^2}$  である。この距離  $R$  については、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R^n} \right) = -\frac{nx}{R^{n+2}}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{R^n} \right) = -\frac{nr}{R^{n+2}},$$

が成立する。この関係式を利用すれば、上に示した  $\partial \Psi / \partial x$  が容易に計算できる。偏導関数 (6.9b) を利用すれば、流れの関数  $\Psi$  が特定できる。流れの関数の特定には、全微分表現:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr,$$

を積分すればよい。積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \Psi &= \int d\Psi = \int \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \int \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr \\ &= 3\mu \int \frac{xr^2}{R^5} dx + \int \left( Ur - 3\mu \frac{x^2 r}{R^5} + \mu \frac{r}{R^3} \right) dr \\ &= -\mu \left[ \frac{r^2}{R^3} \right]_{r=\text{const}} + \left[ \frac{U}{2} r^2 + \frac{\mu x^2}{R^3} - \frac{\mu}{r} \right]_{x=\text{const}} \\ &= \left( \frac{U}{2} - \frac{\mu}{R^3} \right) r^2, \end{aligned}$$

のように数式変形できる。この数式変形には解説が必要だろう。第2行目の数式では、第1項の積分が  $r$  を一定に保ち、 $x$  について積分を実行する。一方、第2項の積分は、 $x$  を一定に保ち、 $r$  について積分を実行する。第1項の積分は、不定積分では  $x$  の依存性が消えてしまうので、 $r$  一定のもとでの積分はゼロになる。つまり、第2の積分しか残らない。その結果として、右辺が得られるのだ。また、被積分関数は原点以外で正則であるので、積分路が原点を通らない限り、積分路によらず、同一の結果が得られるはずだ。したがって、得られた流れの関数は、

$$\Psi = \left( \frac{U}{2} - \frac{\mu}{R^3} \right) r^2, \quad (6.10)$$

である。この関数は、

$$r = 0, \quad R = \left( \frac{2\mu}{U} \right)^{1/3},$$

の条件で  $\Psi = 0$  となる。第2の数式で指定される半径を  $a$ 、すなわち、 $a \equiv (2\mu/U)^{1/3}$  とおこう。流れの関数が一定となる経路は流線であるので、 $\Psi = 0$  は、 $x$  軸上を流れる流体は  $x = -a$  で向きを変え、半径  $a$  の球の表面を流れ、再び、 $x = a$  で向きを変え、 $x$  軸上を流れる状態に対応する。したがって、(6.8) は半径  $a$  の球を通過する一様流の速度ポテンシャルである。改めて、記号  $a$  を用いて  $\Phi$  と  $\Psi$  を書くと、

$$\Phi = Ux \left( 1 + \frac{a^3}{2R^3} \right), \quad (6.11)$$

$$\Psi = \frac{U}{2} r^2 \left( 1 - \frac{a^3}{R^3} \right), \quad (6.12)$$

となる。これらの数式から、球を通過する一様流は図6.1に示す流線で表現できる。その流線を描く方法は、本項の最後に説明する。球の正面に向かう流れは、球の近傍で急激に

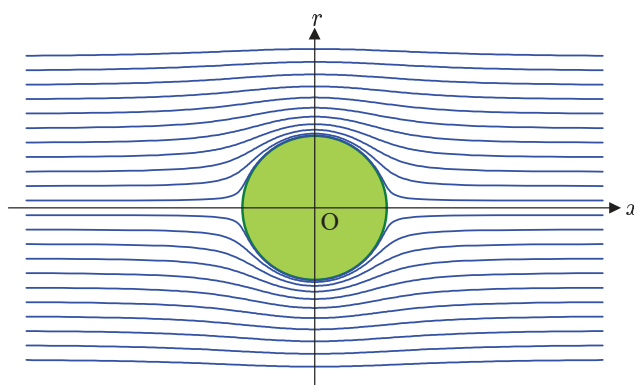


図 6.1: 球を通過する一様流の流線

曲げられ、球面に沿って反対側へ回り込み、遠方に流れていくことが図で表現されている。

数式 (6.11) と (6.12) から、球面を通過する流れは、最大で周囲の流れの 1.5 倍の速度をもつことがわかる。なぜなら、球面を通過する流れの速度は、

$$u_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta},$$

で計算され、その見積もった速度から結論できるからだ。実際に、 $R = a$  となる条件で速度を計算すると、

$$u_\theta = \frac{3}{2} U \sin \theta,$$

が得られ、 $\theta = \pi/2$  で最大値  $u_\theta = 3U/2$  となることが導かれる。つまり、球面を通過する流れは最大で一様流の速度の 1.5 倍なのだ。一方、 $\theta = 0, \pi$  で最小値  $u_\theta = 0$  となる。言い換えると、球面が  $x$  軸と交わる 2 点では、流れがよどんでいるのだ。

球を通過する一様流の流線、すなわち、図 6.1 を描いてみよう。既に説明したように、流線は流れの関数  $\Psi$  が一定となる曲線である。数式 (6.12) の左辺  $\Psi$  を定数として、曲線を特定すればよい。ここで、 $x = R \cos \theta$ ,  $r = R \sin \theta$  とすると、

$$R^3 - \frac{2\Psi}{U \sin^2 \theta} R = a^3, \quad (6.13)$$

なる関係式が得られる。これで、定数  $\Psi$  が与えられると流線を描くことができる。この数式が流線の方程式である。数式に含まれる定数  $\Psi$  の物理的意味を考察しよう。その考察は容易であり、(6.12) に  $R \rightarrow \infty$  を代入すれば、 $\Psi \rightarrow Ur^2/2$  が得られる。つまり、定数  $\Psi$  は無限遠における動径座標  $r$  によって与えられる。その  $\Psi$  を代入すれば、3 次方程式 (6.13) は、

$$R^3 - \frac{r_0^2}{\sin^2 \theta} R = a^3, \quad (6.14)$$

のように書き換えられる。なお、無限遠における流線の動径座標を  $r_0$  とおいた。この結果から、流線の方程式は流れの速度  $U$  に依存しないという、意外な事実が得られる。その性質は、実際の物質における振る舞いとは異なる。水などの流体を球に当てると、その速度によって球の背後に乱流が発生し、その振る舞いが速度に依存するのだ。乱流の発生は流体の粘性に依存するのだが、本項の議論には粘性が含まれていない。流れの速度が十分に小さければ粘性が無視できるため、図 6.1 のような流線を描くはずだ。また、具体的に流線を描くには、 $x$  軸となす角度  $\theta$  を設定したうえで (6.14) を  $R$  について解けばよい。方程式 (6.14) は、3 次方程式なので三つの解をもつが、必ず、一つだけ正の実数を解にもつ。つまり、正の実数解を取り出せば図 6.1 が描ける。

### 6.3.2 運動する球で発生する流れ

静止する流体の中を球が運動する場合、その球によって流れが乱される。その流れは、前項の結果から導かれる。前項は、静止する球を一様流が速度  $U$  で通過する場合を取り扱った。今回は、静止する流体に対して速度  $U$  で球が運動する場合を取り扱う。

速度  $U$  で運動する球によって流体に発生する流れを考えるには、前項の問題を流体と並走する観測者から見た現象を考えればよい。つまり、ポテンシャル (6.11) から一様流のポテンシャル  $Ux$  を取り除いたポテンシャル:

$$\Phi = Ux \frac{a^3}{2R^3},$$

が流体と並走する観測者から見たポテンシャルである。この場合、球は速度  $-U$  で運動しているように見えるので、 $U$  で運動する球によるポテンシャルは、 $U$  を  $-U$  に置き換える必要があり、

$$\Phi = -Ux \frac{a^3}{2R^3}, \quad (6.15)$$

となる。得られたポテンシャルは、微小な双極子によるポテンシャルである。前項で説明した手順によって流線を描くと図 6.2 が得られる。運動する球の周囲では、運動の前方から湧き出した流体が、後方に回り込んで吸い込まれていく。数学的に湧き出しと吸い込み

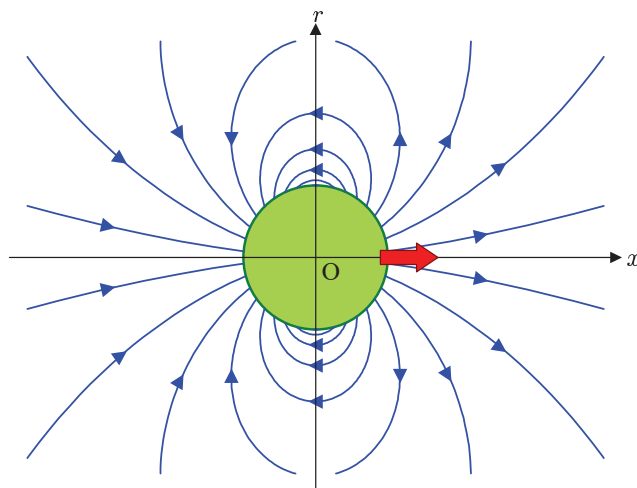


図 6.2: 静止する流体の中を運動する球の周囲の流線

であるが、実際に流体が湧き出しているのではないことに注意が必要だ。この図は、球の中心が原点  $O$  に位置するときの流線であり、球が運動しているため、流線は時間とともに変化するのだ。つまり、この例は非定常流である。湧き出しに相当するのは、球の運動によって押し出される流体である。一方、運動の後方では、球がとり残した空間があり、その空間に流体が流れ込む。それが吸い込みに相当する。なお、前に説明したように、非定常流では、流線と流跡線が一致しないので、図 6.2 は球の中心が原点に位置する瞬間の局所的な流れの方向を連ねて描いた曲線であり、その経路を流体が運動するわけではない。

得られたポテンシャル  $\Phi$  を、観測地点の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  と球の速度  $\mathbf{U}$  を用いてベクトル表記すると、

$$\Phi = -\frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} \frac{a^3}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (6.16)$$



が得られる。ただし、(6.16) は球の中心が原点に位置する主観におけるポテンシャルである。既に述べたように、流体中を運動する球によってつくられる流れは非定常流であり、時間とともに変化する。

### 6.3.3 誘導質量

流体中を運動する球によって、流体に流れた発生することが前項からわかった。発生した流体の流れの運動エネルギーを計算してみよう。流体は半径  $a$  の外部となる無限空間を占めるとし、その無限空間で運動エネルギーを積分するのだ。ポテンシャル  $\Phi$  を用いると、流体の速度は  $\mathbf{u} = \nabla\Phi$  であるから、運動エネルギーは、

$$E = \frac{\rho}{2} \int |\mathbf{u}|^2 dV = \frac{\rho}{2} \int |\nabla\Phi|^2 dV, \quad (6.17)$$

で与えられる。前項で述べたように運動する半径  $a$  の球によるポテンシャルは、球の中心が原点に位置する瞬間に、

$$\Phi = \frac{Ua^3}{2} \frac{x}{R^3},$$

となる。ここで、 $x$  軸を対称軸とする円筒座標系  $[r, \varphi, x]$  を用いている。なお、 $R \equiv \sqrt{x^2 + r^2}$  である。このとき、流れの速度成分は、

$$u_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{Ua^3}{2} \left( \frac{1}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5} \right),$$

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{Ua^3}{2} \frac{3xr}{R^5},$$

となる。しががって、被積分関数  $|\mathbf{u}|^2$  は、

$$|\mathbf{u}|^2 = u_x^2 + u_r^2 = \frac{U^2 a^6}{4} \left( \frac{1}{R^6} + \frac{3x^2}{R^8} \right)$$

$$= \frac{U^2 a^6}{4} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{R^6},$$

のように計算される。ここで、 $\theta$  は原点から観測点までの方向が  $x$  軸となす角度である。得られた被積分関数を (6.17) に代入すると、

$$E = \frac{\rho}{2} \int_a^\infty dR \int_0^\pi R d\theta \int_0^{2\pi} R \sin \theta d\varphi \frac{U^2 a^6}{4} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{R^6}$$

$$= \frac{\rho a^6}{8} U^2 \int_a^\infty \frac{dR}{R^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (1 + 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi \rho a^3}{12} U^2 \int_0^\pi (1 + 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi \rho a^3}{3} U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi \rho a^3}{3} U^2,$$

が得られる。この計算では、円筒座標の代わりに球面座標系  $[R, \theta, \varphi]$  を用いた。この計算によると、流体の運動エネルギーの総和は、

$$m = \frac{2\pi\rho a^3}{3}, \quad (6.18)$$

なる質量による運動エネルギーに等しい。その質量は、球が排除する流体の質量のちょうど半分に等しい。球の質量を  $M$  とすると、流体を含めた系全体の運動エネルギーは  $(M + m)U^2/2$  となるので、エネルギーの観点で質量  $M + m$  の物体の運動と等価である。

球のみならずいかなる形状の物体においても、上の議論のように、物体の運動によって流体の運動エネルギーが発生するので、同様に、付加的な質量  $m$  を定義できる。その付加的質量  $m$  は、**誘導質量** と呼ばれる。さらに、流体中を運動する物体のみの質量  $M$  と誘導質量の和、すなわち、 $M + m$  は見かけの質量と呼ばれる。誘導質量は、物体の形状によって異なる。例えば、軸方向に運動する円筒は単位長さあたり  $\pi\rho a^2$  の誘導質量をもつ。この場合は、物体が排除する流体の質量と等しい。対称性をもたない一般的な形状の場合、誘導質量による運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l m_{kl} U_k U_l,$$

のように計算される。ここで、 $U_k$  は速度ベクトルの成分であり、 $m_{kl}$  が誘導質量である。つまり、一般の形状については、誘導質量はテンソルとなる。このとき、見かけの質量は  $M\delta_{kl} + m_{kl}$  なるテンソルで記述される。

誘導質量は、流体中の物体を加速するとき、その周囲の流体もともに加速されるため、それに相当する分だけ余分にエネルギーを消費することを意味している。誘導質量の概念は、流体中における抵抗力を説明できるように思えるかもしれないが、それは正しくない。誘導質量は加速に対する抵抗力を説明することができるが、等速度では力の発生に起因しない。しかし、現実には、流体中の物体は等速度であっても抵抗力を受けるのだ。等速度運動における流体からの抵抗力は、粘性を考慮しなければならない。

誘導質量による加速度への抵抗力は日常でも感じることもある。水中で歩行する場合、踏み出す足が重く感じるのは誘導質量に起因している。加速度に対する抵抗力とは、減速の際、減速を妨げる方向に力が作用する。そのため、水中での急激な加速や減速は、空気中よりも困難である。

誘導質量は、物体の体積が排除する流体の質量に比例するので、運動する物体の密度と流体の密度の関係が重要である。一般の固体と空気では密度が数千倍も異なるため、誘導質量は無視できる。一方、水中での人体や、空気中での熱気球のように、密度が同程度の場合、誘導質量による影響が顕著になる。さらに、水中での気泡のように、物体の密度の方が小さい場合には、真空中での質点の物理学では考えられない現象が起きる。

**流体中の球の加速度** 質量  $M$  の球が密度  $\rho$  の流体中に重力の作用を受けているとする。球の体積を  $V$  とすれば、誘導質量は  $\rho V/2$  となる。重力加速度を  $g$  とすれば、球には  $Mg$  の重力が鉛直下方に、 $\rho Vg$  の浮力が鉛直上方に作用する。球の鉛直上方の速度成分を  $u$  とすれば、流体中の球の運動方程式は、

$$\left(M + \frac{\rho V}{2}\right) \frac{du}{dt} = -Mg + \rho Vg,$$

となる。球の平均密度を  $\sigma \equiv M/V$  とおけば、運動方程式は、

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\sigma - \rho}{\sigma + \rho/2}g, \quad (6.19)$$

のように書き換えられる。これが、流体中の球に作用する見かけの重力加速度である。

気体中の一般の固体を考えたとき、 $\rho/\sigma$  は  $10^{-3}$  程度であるので、気体の密度  $\rho$  はほぼ無視できる。その場合、

$$\frac{du}{dt} \simeq -g,$$

であるため、真空中での重力作用とほとんど変わらない。

物体に密度と流体の密度がほぼ等しい場合 ( $\sigma \simeq \rho$ ) を考えよう。密度の差を  $\Delta\sigma \equiv \sigma - \rho$  とおくと、物体に作用する加速度は、

$$\frac{du}{dt} \simeq -\frac{2}{3} \frac{\Delta\sigma}{\sigma}g,$$

となる。この結果は、誘導質量を考慮しない場合の3分の2の加速度である。この状況は、熱気球がバラストを落として上昇する場合や、潜水艦が排水して上昇する場合に相当する。そのような場合には、誘導質量の影響を受けるのだ。

水中の気泡のように、 $\sigma \ll \rho$  である場合、さらに面白い現象が起きる。加速度 (6.19) において  $\sigma$  をゼロとすると、

$$\frac{du}{dt} \simeq 2g,$$

となるのだ。つまり、水中の気泡は  $2g$  の加速度で鉛直に上昇するのだ。実は、この場合、誘導質量を考慮しなければ気泡が重力加速度の1000倍の加速度で上昇するという、とんでもない結果を算出するところだったのだ。実際には、誘導質量の効果によって、気泡の上昇は重力加速度の2倍の加速度となる。

## 6.4 粘性流

流体中を運動する物体に作用する抵抗力の説明には粘性が必要である。しかし、粘性をもつ流体、すなわち、粘性流体の取り扱うは様々な困難を伴う。その大きな理由が、粘性流体の運動方程式が非線形であることである。

粘性流体の取り扱いに関する大きな困難は、完全流体の特異性に代わる特異領域の発生と、乱流の発生が挙げられる。前者を取り扱うには、非線形問題の特異摂動法などの解析手法と高度な数値計算が必要になる。後者の困難は、解の不安定性、分岐、カオスかな喉非線形減少と結びついている。

本節では、粘性流の一般的な性質を取り扱う。粘性の影響だけを考察するため、本節では、特に断らない限り、非圧縮性の流体を仮定する。

### 6.4.1 粘性流体の基本方程式

非圧縮性の流体では、連続方程式は  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  となり、運動方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K}, \quad (6.20)$$

で与えられる。ただし、 $\nu \equiv \eta/\rho$  は運動粘性率と呼ばれる定数である。また、 $\mathbf{K}$  は外力である。

運動方程式はベクトルを成分に分解すると三つの方程式で構成され、連続方程式と合わせると、四つの連立方程式となる。それに対し、未知数が速度の成分  $[u_x, u_y, u_z]$  と圧力  $p$  であるので、方程式は未知数を決定する必要十分な数だけそろっていることになる。したがって、連続方程式と運動方程式が非圧縮の粘性流体の基礎方程式となるのだ。

流体の運動を決定するには、適法とな境界条件と初期条件が必要である。粘性流体は、流体が固体表面に付着するという境界条件:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w,$$

を満たさなければならない。ここで、 $\mathbf{u}_w$  は固体表面の速度であるとした。特に、静止した固体表面を取り扱うのであれば、その境界において、流体は  $\mathbf{u} = 0$  を満たさなければならない。このような、固体表面での滑りを容認しないことが完全流体との大きな違いである。この違いが、粘性流と完全流体の流れの違いをもたらし、また、問題の取り扱いを困難にしている。

### 6.4.2 レイノルズの相似則

粘性流体を取り扱うにはレイノルズの相似則が重要である。本書では詳しく取り扱わないが、乱流を議論するにも、レイノルズの相似則を用いることが乱流の分類等が容易になる。また、工学の分野ではレイノルズ数を応用し、巨大なシステムを建造する前に小規模な実験環境で流体解析を実行している。

外力が保存力である場合, すなわち,  $\mathbf{K} = -\nabla\Lambda$  を考えよう。そのとき, 運動方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{u},$$

のように書き換えられる。ここで,  $p^* \equiv p + \nabla\Lambda$  である。このように, 外力が保存力である場合, 外力は圧力の一形態と考えられ, 流れに直接関係しない。そのとき, 非圧縮の粘性流体の基礎方程式は, 唯一のパラメータ  $\nu$  を含むだけである。ここで, 流れの場を特徴づける代表的な長さを  $L$ , 速度を  $U$  とし, 変数を変換則:

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' = \frac{t}{L/U}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p' = \frac{p^*}{\rho U^2},$$

によって無次元化しよう。これらの無次元化した物理量で基礎方程式を書き換えると,

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = \nabla' p' + \frac{1}{R} \nabla'^2 \mathbf{u}', \quad (6.22)$$

が得られる。ここで,  $\nabla'$  は無次元化された座標  $\mathbf{x}'$  についての微分演算子である。さらに, 新たに定義された定数:

$$R \equiv \frac{LU}{\nu} = \frac{\rho LU}{\eta}, \quad (6.23)$$

はレイノルズ数と呼ばれる無次元数である。当然であるが, 無次元化された物理量においても境界条件  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_w$  は満足しなければならない。したがって, 無次元化された基礎方程式と境界条件は, レイノルズ数  $R$  を唯一のパラメータとして含むのだ。

その事実から, 幾何学的な形状が相似形であり, かつ, レイノルズ数が等しい系であれば, 発生する流れも相似形である, といえる。この主張がレイノルズの相似則である。この主張によると, 幾何学的な形状が相似なだけでは流れが相似形にならない。流れを相似形にするにはレイノルズ数が等しくなければならないのだ。

レイノルズの相似側は工学的に有意義である。例えば, 大型船舶やジャンボジェット機のような流体解析を必要とする巨大構造物の設計において, 設計時の流体実験は小規模な検証用模型で済ませたい。例えば, 完成品のレイノルズ数を  $R_1 = L_1 U_1 / \nu_1$ , 検証用模型のレイノルズ数を  $R_2 = L_2 U_2 / \nu_2$  であるとしよう。完成品が適用されるものと同じ流体 ( $\nu_1 = \nu_2$ ) で実験する場合, 検証用模型を完成品の 100 分の 1 スケールでつくるならば, 検証用模型に現実の 100 倍の流速を印加しなければならない。実際の速度  $U_1$  が大きい場合, 検証は非常に困難になる。しかし, 完成品の適用が空気 ( $\nu_1 = 0.15$ ) に対し, 水 ( $\nu_2 = 0.01$ ) で検証するのであれば, 速度に対する条件が緩和できるだろう。他にも, 実際より高い気圧で実験するなど,  $\nu_2$  を小さくすることによって速度の条件を緩和する措置がとられる。

