

第4章 弾性波

外部からの応力によって変形した弾性体は、応力から解放されると復元する。動的に応力が変化する環境にある弾性体は、常に変形と復元を繰り返し、その変化が弾性波として周囲に伝搬する。弾性波の代表例が地震波である。本章では、動的な変形の現象として、弾性波について解析する。

4.1 弾性波の伝搬

弾性体の動的な変形は、波として周囲に伝搬する。その伝搬は、一般の波と同様に、波動方程式によって記述される。本節は、比較的小さな変形を仮定し、弾性体の変形が波動方程式に帰着することを導く。さらに、波動方程式を導出した時点で、弾性体の変形は、縦波成分と横波成分で伝搬速度が異なることも明らかになる。

4.1.1 弾性波の方程式

弾性体の変形が非常に小さく、変位 \mathbf{r} の空間的変化と時間的変化が緩やかである場合を仮定すると、速度 \mathbf{u} は微小量と考えられる。そのような仮定は、微小変形の仮定と呼ばれる。そのとき、ラグランジュ微分演算子:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

の右辺の第2項は第1項に比べ2次の無限小となるので、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t},$$

とみなす。この近似のもとで、連続の方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

となり、 $\partial \rho / \partial t$ は \mathbf{u} と同程度の微小量であることがわかる。そのため、 ρ は、ほぼ一定とみなされる。

上で説明した近似のもとで, 運動方程式は,

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{mn}}{\partial x_n} + K_m, \quad (4.1)$$

のように記述できる。この方程式をさらに時間について微分して得られる方程式:

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P_{mn}}{\partial t \partial x_n} + \frac{\partial K_m}{\partial t}, \quad (4.2)$$

をさらに数式変形しよう。数式変形するにあたって, 等方性の連続体を仮定し, 応力テンソル P_{mn} は,

$$P_{mn} = \lambda E_{kk} \delta_{mn} + 2\mu E_{mn},$$

であるとする。繰り返し補足するが, 数式にはアインシュタインの総和規約が適用されている。なお, E_{mn} は,

$$\frac{\partial E_{mn}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right),$$

によって定義される変形テンソルである。変形テンソルに用いたベクトル u_m は局所的な連続体の速度である。前に書いたように, 速度が場所によって異なることが変形のメカニズムという考え方である。それらの定義に注意して (4.2) を変形すると,

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \mu \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} \right] + \frac{\partial K_m}{\partial t}, \quad (4.3)$$

が得られる。この数式に含まれる微分演算子 $\partial^2 / \partial x_n \partial x_n$ はラプラシアンである。この数式はベクトル表記すると,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \right] + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

なる形となる。この形態ではわかりにくいかもしれないが, この方程式は波動方程式である。方程式 (4.3) が波動方程式であることを示すため, $K_m = 0$ であり, 速度 u_m が x_1 にしか依存しない場合を考えよう。その制限のもとで (4.3) を成分ごとに書くと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

が得られる。これらの数式はいずれも, x_1 軸方向に伝搬する波の波動方程式である。この数式によると, u_1 は伝搬方向と同一方向への変形速度であり, u_2 と u_3 は伝搬方向と垂直

方向への変形速度である。そのため、 u_1 は縦波成分、 u_2 と u_3 は横波成分と呼ばれる。波動方程式 (4.5) によると、縦波成分と横波成分で伝搬速度が異なる。任意の波動関数 f に関して、波動方程式:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

が伝搬速度 c の波動を表現することから類推すると、(4.5) は縦波成分の伝搬速度 \hat{c} と横波成分の伝搬速度 \bar{c} が、それぞれ、

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (4.6)$$

である。ラメの弾性定数について、 $\lambda > 0$, $\mu > 0$ が成立するので、2種類の伝搬速度の間には、少なくとも $\hat{c} > \sqrt{2}\bar{c}$ なる関係が成立する。つまり、縦波成分は横波成分の $\sqrt{2}$ 倍を超える速度で伝搬する。

表 4.1: 密度・弾性定数から計算した縦波と横波の伝搬速度

材質	密度 $\times 10^3 \text{ kg/m}^3$	ヤング率 $\times 10^9 \text{ Pa}$	ポアソン比	縦波速度 m/s	横波速度 m/s
工業用純鉄	7.87	205	0.27	5705	3202
銅	8.7	125	0.34	4702	2315
アルミニウム	2.6	70	0.345	6503	3164
チタン合金	4.4	106	0.32	5975	3009
ガラス	2.4	71.3	0.22	5824	3489

4.1.2 縦波と横波

縦波と横波は伝搬する情報の性質が異なる。縦波は疎密を伝搬し、横波は体積変化に寄与しない変形、すなわち、横ずれを伝搬する。後に示す数学的考察から、縦波は発散波、横波は回転波とも呼ばれる。

縦波と横波の波動方程式を一般化した形式で記述してみよう。外力を $K_m = 0$ として、波動方程式 (4.3) を、

$$\frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \mu \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} \right] - \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = 0, \quad (4.7)$$

のように記述しておく。この方程式をもとに波動方程式の一般化を試みる。方程式 (4.7) の発散を計算すると、

$$\nabla \cdot (4.7) = \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \mu \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} \right] - \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \\
&= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m},
\end{aligned}$$

が得られる。計算された値はゼロに等しいはずなので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} = 0, \quad (4.8)$$

なる波動方程式に変換される。この方程式はベクトル記法では、

$$\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (4.9)$$

のように記述できる。この方程式は、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ が速度 $\hat{c} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ で伝搬することを意味する。第1章で示したように、非圧縮、すなわち、密度が不変な連続体で $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ となることを考えると、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ の伝搬は密度の疎密が伝搬することを意味する。

波動方程式(4.3)の回転を計算してみよう。ベクトルの回転を成分表示で記述するには、レビ・チビタ記号 ε_{klm} を用いると便利である。レビ・チビタ記号とは、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\
\varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \\
\varepsilon_{klm} &= 0 \quad (\text{その他 } \{k, l, m\} \text{ の組み合わせ}),
\end{aligned} \quad (4.10)$$

のように定義された記号である。実は、レビ・チビタ記号の値には規則性があり、 $\{k, l, m\} = \{1, 2, 3\}$ を基準にして、偶数回の添え字の交換で成り立つ添え字の並び(偶置換)には1を、奇数回の交換で成り立つ添え字の並びには-1を割り当てている。複数の添え字に同じ数字が表れる場合、偶置換でも奇置換でも成り立たないので0を割り当てる。そのような記号を用いると、ベクトルの回転は、

$$(\nabla \times \mathbf{u})_k = \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l},$$

のように成分表記できる。この成分記法に基づいて(4.3)の回転を計算すると、

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (4.3)]_k &= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \mu \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} \right] - \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \\
&= \frac{1}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_n} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \\
&= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l},
\end{aligned}$$

のように数式変形できる。第2行目の第1項が第3行目で消去されているのは次の理由による。添え字 l と m について総和をとる過程で、必ず、 l と m を交換した組み合わせも総和の対象になる。導関数 $\partial^2 u_n / \partial x_l \partial x_m$ は l と m の交換に対して不変であるが、レビ・チビタ記号 ε_{klm} は交換に対して符号反転する。そのため、総和の仮定で第2行目の第1項は相殺され、第3行目のように数式変形されるわけだ。計算された数式はゼロに等しいはずなので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} = 0, \quad (4.11)$$

なる波動方程式として書き換えられる。この波動方程式は、ベクトル表記では、

$$\nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{u}) = 0, \quad (4.12)$$

のように記述できる。この方程式は、 $\nabla \times \mathbf{u}$ が速度 $\hat{c} = \sqrt{\mu/\rho}$ で伝搬することを意味する。回転 $\nabla \times \nabla$ は渦度と呼ばれ、第1章で示したように体積変化に寄与せず、横方向のずれを表す。つまり、横波は渦度の伝搬である。

任意のベクトル \mathbf{u} は回転を伴わないベクトル \mathbf{u}_1 と、発散を伴わないベクトル \mathbf{u}_t の和で表すことが可能¹である。すなわち、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_t \quad \text{where } \nabla \times \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0,$$

のようにベクトル分離ができるのだ。分解されたベクトルについて、 \mathbf{u}_1 は非回転のベクトル場、 \mathbf{u}_t は非発散のベクトル場という名称で呼ばれる。ベクトルの分解 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_t$ を波動方程式 (4.4) に代入し、両辺の発散を計算すると、

$$\nabla \cdot \left(\nabla^2 \mathbf{u}_1 - \frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} \right) = 0,$$

が得られる。既に分離されたベクトルであるため、この数式の括弧の内部に対する回転は明らかにゼロである。得られた方程式が恒等的にゼロであるためには、括弧の中がゼロであると考えるとすればよく、

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 - \frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = 0, \quad (4.13)$$

が得られる。これが縦波の波動方程式である。一方、 \mathbf{u}_t についても同様に、

$$\nabla^2 \mathbf{u}_t - \frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} = 0, \quad (4.14)$$

が得られる。これは、横波の波動方程式である。これまでに導出したように、等方性弾性体は歪み(変形)が波として伝搬する。その波は、疎密を伝搬する発散波 \mathbf{u}_1 が縦波として、伝搬方向とは垂直の変形による回転波 \mathbf{u}_t が横波として伝搬する。しかも、それらの伝搬速度は異なり、縦波の方が速い。

¹この事実は、ベクトル成分 u_m の導関数 $\partial u_m / \partial x_n$ を考えれば理解できる。導関数のうち、 $m = n$ となる成分が発散に寄与し、 $m \neq n$ となる成分が回転に寄与する。つまり、ベクトル成分を微分して、発散に寄与する(回転を伴わない)成分 \mathbf{u}_1 を特定すればよい。残りが回転に寄与する(発散を伴わない)成分 \mathbf{u}_t である。定数項はどちらにも寄与しないので、どちらに含めるかは自由である。

4.2 表面波

前節で等方弾性体を発散波と回転波が伝搬することを導出した。それらは、数学的に、独立に伝搬するかのように見える。しかし、実際の弾性体の大きさは有限であり、弾性体の表面には表面波が伝搬し、その存在が発散波と回転波を関係づける。本節では表面波について考察しよう。

表面波を解析するため、 $z \leq 0$ の半無限空間を等方弾性体で満たした状態を考えよう。つまり、 $z = 0$ が自由空間との境界である。発散波 \mathbf{u}_1 と回転波 \mathbf{u}_t は、性質が異なり、異なる速度で伝搬するが、波動であることに相違ないので、波動方程式:

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0,$$

にしたがう。ここで、発散波と回転波を同一方程式で書く意味で、それらを区別するための添え字は省略した。一例として、 x 軸方向に伝搬する平面単色波を数式で記述すると、

$$\mathbf{u} \propto f(z) e^{ik(x-\tilde{c}t)}, \quad (4.15)$$

となる。ここで、 \tilde{c} が表面を伝搬する伝搬速度であり、 $f(z)$ は座標に依存する振幅を表す。波動関数の基本形 (4.15) を波動方程式に代入すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k^2 \left(1 - \frac{\tilde{c}^2}{c^2} \right) f, \quad (4.16)$$

が得られる。この2階の微分方程式が表面波を特徴づけるのだ。

方程式 (4.16) の解は、 $1 - \tilde{c}^2/c^2 < 0$ のとき三角関数となり、減衰せずに弾性体の内部に伝搬する波を表現することになる。そのような解は、弾性体内部を3次元的に伝搬する波であるので、本節で取り扱うべき表面波ではない。平面波では $1 - \tilde{c}^2/c^2 > 0$ であることが必要である。つまり、 $\tilde{c} < c$ である。そのとき、波動方程式の解は数学的に、

$$\mathbf{u} \propto e^{\pm \kappa z + ik(x-\tilde{c}t)} \quad \text{where } \kappa = k \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}^2}{c^2}},$$

と書けるが、指数関数の指数に付した符号は正符号でなければ弾性体の無限深 $z \rightarrow -\infty$ で発散してしまう。したがって、波動方程式の解は、

$$\mathbf{u} \propto e^{\kappa z + ik(x-\tilde{c}t)}, \quad (4.17)$$

と書かれるべきである。つまり、平面波は境界からの距離に対して振幅が指数関数的に減少することが特徴である。

平面波も既に議論したように、発散波 $\hat{\mathbf{u}}$ と回転波 $\bar{\mathbf{u}}$ の成分に分解することが可能である。分解した成分は、

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_1 e^{\hat{\kappa}z + ik(x - \hat{c}t)}, \quad (4.18a)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_t e^{\bar{\kappa}z + ik(x - \bar{c}t)}, \quad (4.18b)$$

のように記述できる。ここで、

$$\hat{\kappa} = \sqrt{1 - \frac{\bar{c}^2}{\hat{c}^2}}, \quad \bar{\kappa} = \sqrt{1 - \frac{\hat{c}^2}{\bar{c}^2}}, \quad (4.19)$$

である。さらに、 \mathbf{A}_1 と \mathbf{A}_t は定ベクトルである。また、伝搬速度の間に $\bar{c} < \bar{c} < \hat{c}$ なる関係がある。つまり、表面波の位相速度は発散波や回転波の位相速度よりも遅い。弾性体の表面は、半分が開放されているため変形によって作用する応力が弾性体内部より小さいので、表面を小さい速度で伝搬する波が許容されると解釈できる。

無限の等方性弾性体における発散波と回転波は独立であることができたが、弾性体が有限である場合、 $z = 0$ での境界条件を満たすため、それら2種類の波は一定の関係を満たす必要がある。さらに、その場合、発散波と回転波はもはや縦波や横波といった意味をもたなくなる。境界条件として、 $z = 0$ が自由表面であると仮定すると、 $z = 0$ で応力がゼロであるので、

$$p_m = P_{ml}n_l = 0,$$

を満たすべきである。ここで、 P_{ml} は応力テンソル、 n_l は z 軸の正方向に向かう法線ベクトルである。等方性弾性体として応力テンソルを展開すると、

$$p_m = \lambda E_{kk}n_m + 2\mu E_{ml}n_l,$$

と書くことができる。ここで、座標と変形速度を $\mathbf{x} = [x, y, z]$, $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]$ と書くことにしよう。変形速度は y に依存しないとする。また、法線ベクトルが $\mathbf{n} = [0, 0, 1]$ であることに注意して、 $z = 0$ における応力を記述すると、

$$p_1 = 2\mu E_{13} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.20a)$$

$$p_2 = 2\mu E_{23} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad (4.20b)$$

$$p_3 = \lambda(E_{11} + E_{33}) + 2\mu E_{33} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (4.20c)$$

なる境界条件が得られる。得られた第2式から $u_y = 0$ を特定してもよいだろう。改めて残った二つの境界条件を書き出すと、

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad (4.21a)$$

$$\left(1 - \frac{2\bar{c}^2}{\hat{c}^2} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (4.21b)$$

が得られる。ここで、第2式の導出には、

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2\bar{c}^2}{\hat{c}^2},$$

であることを利用した。

導出された境界条件を満たすように、発散波 $\hat{\mathbf{u}}$ と回転波 $\bar{\mathbf{u}}$ を特定しよう。発散波 $\hat{\mathbf{u}}$ の場合、回転がゼロとなるはずなので、

$$\kappa \hat{u}_x - ik \hat{u}_z = 0,$$

を満たすべきである。この条件は、 $\nabla \times \hat{\mathbf{u}}$ の y 成分であり、他の成分は設定した条件によって既にゼロであることが約束されている。この条件から、 $\hat{\mathbf{u}}$ の成分は、

$$\hat{u}_x = k \hat{A} e^{\hat{\kappa}z + ik(x - \hat{c}t)}, \quad \hat{u}_z = -i \hat{\kappa} \hat{A} e^{\hat{\kappa}z + ik(x - \hat{c}t)}, \quad (4.22)$$

のように書くことができる。一方、回転波 $\bar{\mathbf{u}}$ の場合、発散がゼロとなるはずなので、

$$ik \bar{u}_x + \bar{\kappa} \bar{u}_z = 0,$$

を満たすべきである。この条件から、 $\bar{\mathbf{u}}$ の成分は、

$$\bar{u}_x = \bar{\kappa} \bar{A} e^{\bar{\kappa}z + ik(x - \bar{c}t)}, \quad \bar{u}_z = -ik \bar{A} e^{\bar{\kappa}z + ik(x - \bar{c}t)}, \quad (4.23)$$

のように書くことができる。発散波 (4.22) と回転波 (4.23) を境界条件 (4.21a) と (4.21b) に代入し、未知数を決定しよう。境界条件 (4.21a) に必要な導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} &= \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial x} = k \hat{\kappa} \hat{A} e^{\hat{\kappa}z + ik(x - \hat{c}t)}, \\ \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z} &= \bar{\kappa}^2 \bar{A} e^{\bar{\kappa}z + ik(x - \bar{c}t)}, \\ \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial x} &= k^2 \bar{A} e^{\bar{\kappa}z + ik(x - \bar{c}t)}, \end{aligned}$$

が得られる。これらを境界条件 (4.21a) に代入すると、

$$2k \hat{\kappa} \hat{A} + (k^2 + \bar{\kappa}^2) \bar{A} = 0, \quad (4.24)$$

が得られる。第2の境界条件 (4.21b) についても同様の考察で、

$$\left[\frac{\hat{c}^2}{\bar{c}^2} (\hat{\kappa}^2 - k^2) + 2k^2 \right] \hat{A} + 2k \bar{\kappa} \bar{A} = 0,$$

が得られる。ここで、(4.19) から導かれる関係式:

$$(\hat{\kappa}^2 - k^2) \hat{c}^2 = (\bar{\kappa}^2 - k^2) \bar{c}^2,$$

に注意すると、境界条件 (4.21b) は、

$$(\bar{\kappa} + k^2) \hat{A} + 2k\bar{\kappa}\bar{A} = 0, \quad (4.25)$$

のように書き換えられる。任意の振幅 \hat{A} と \bar{A} について境界条件 (4.24) と (4.25) が成立するには、これらの方程式が相似である必要がある²。したがって、

$$(k^2 + \bar{\kappa}^2)^2 = 4k^2\bar{\kappa}\bar{\kappa}, \quad (4.26)$$

なる条件を満たすことが必要だ。この方程式を自乗し、(4.19) を代入すると、

$$\left(2 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right)^4 = 16 \left(2 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right) \left(2 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right),$$

なる方程式に変形される。この方程式をさらに変形すると、

$$\frac{\tilde{c}^6}{\bar{c}^6} - \frac{8\tilde{c}^4}{\bar{c}^4} + \frac{8\tilde{c}^2}{\bar{c}^2} \left(3 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right) - 16 \left(1 - \frac{\tilde{c}^2}{\bar{c}^2}\right) = 0, \quad (4.27)$$

が得られる。方程式 (4.27) は、 \tilde{c}/\bar{c} についての 6 次方程式である。この方程式の中に係数として記述したが、回転波と発散波の伝搬速度の比 \tilde{c}/\bar{c} は、既に議論した内容から、

$$\frac{\tilde{c}}{\bar{c}} = \sqrt{\frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}},$$

のように、ポアソン比だけで表現できることがわかる。ポアソン比は $0 < \sigma < 1/2$ であるので、 $\tilde{c}/\bar{c} < \sqrt{1/2}$ である。その事実に注意すると、方程式の右辺は $\tilde{c}/\bar{c} = 0$ のとき負になり、 $\tilde{c}/\bar{c} = 1$ のとき正になる。しかも、方程式の右辺を微分してわかるように、右辺は $0 < \tilde{c}/\bar{c} < 1$ で単調増加関数である。したがって、方程式 (4.27) は、 $(0, 1)$ の区間において一つだけ解をもつ。方程式 (4.27) を解いて速度の比を計算すると、図 4.1 (a) に示すグラフが得られる。弾性体を伝搬する波は発散波が最も速い。回転波の伝搬速度は、ポアソン比 σ の上昇とともに小さくなり、 $\sigma = 1/2$ で理論的にゼロとなる。表面波の伝搬速度は、回転波よりも遅く、その比率 $\alpha \equiv \tilde{c}/\bar{c}$ は、 σ に依存して $0.875 < \alpha < 0.955$ の範囲である。

表面波の位相速度に関するパラメータ \tilde{c}/\bar{c} が求まると、発散波と回転波の振幅の関係を導出できる。境界条件 (4.24) を利用すると、

$$\frac{\hat{A}}{\bar{A}} = -2\sqrt{\frac{1 - \tilde{c}^2/\bar{c}^2}{2 - \tilde{c}^2/\bar{c}^2}}, \quad (4.28)$$

が得られる。この振幅比は図 4.1 (b) に示す曲線を描く。具体的な値として、 $-0.786 < \hat{A}/\bar{A} < -0.545$ となる。つまり、発散波よりも回転波の方が振幅が大きいのだ。振幅に関するこの性質は地震波で顕著に表れる。地震波における発散波は初期微動と呼ばれ、回転波は主要動と呼ばれる。初期微動という名称は、最初に到達し、振幅が小さいことに起因する。まさに、本節で導出した性質に合致しているということだ。

²二つの方程式が独立であれば、 \hat{A} と \bar{A} が一意的に決まってしまうので、自由度がなくなる。

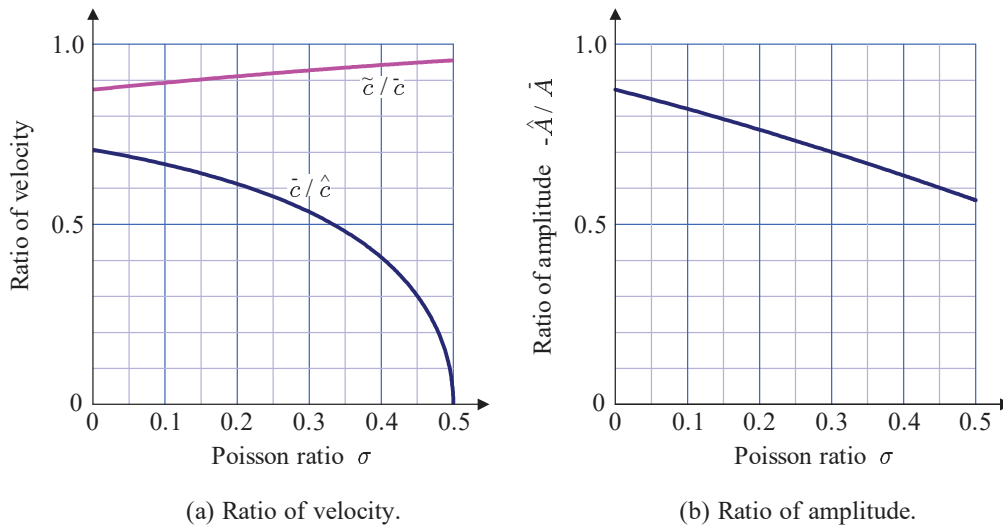


図 4.1: 弾性体を伝搬する波の速度と振幅の比

4.3 有限の弾性体を伝搬する波

これまで無限の弾性体を媒質とする波を取り扱った。現実的には、伝搬する波の波長が無視できるくらい十分に大きな媒質がその問題に相当する。それに対し、本節では、寸法のうち、波長と同程度、もしくは、それより小さな寸法が含まれる形状の弾性体を伝搬する波を取り扱う。モデルとしては、十分な長さをもつが波長に比べて小さな断面をもつ弾性体を想定する。そのモデルに相当する弾性体は棒である。断面積がさらに小さく、曲げ剛性率³が無視できるほど小さいとき、棒は糸に分類される。糸にある一定の張力を与えると直線形状を保つことができる。その張力を変動させると、張力の変動が波として伝搬する。そのような糸は弦と呼ばれる。

4.3.1 弦の振動

一様な弦が、 x 軸上の 2 点で張力 T を与えられた状態で固定されているとする。一方の固定点が原点 O であり、もう一方が $x = L$ であるとする。これからの解析に使用する座標として、 x 軸と直交する座標を y とする。静止状態では、弦は x 軸上に存在し、その各点には張力 T が作用している。弦に含まれる微小区間 $[x, x + \delta x]$ に注目すると、左端 (x) には張力 $-T$ が、右端 ($x + \delta x$) には張力 T が作用しているため、釣り合いを保っている。

弦が y 方向に微小量だけ変位したとする。その y 座標は x の関数として、 $y(x)$ のように記述できるとしよう。弦は曲げ剛性率が無視できるくらい小さいので、弦の長さ方向と垂

³既に定義したように、ヤング率と断面の慣性モーメントの積 YI のことだ。

直をなす方向への応力が存在しない。つまり、弦の運動を支配するのは張力だけである。弦の変位が十分に小さいとすると、弦の伸びは無視できるくらいの微小量であり、弦に作

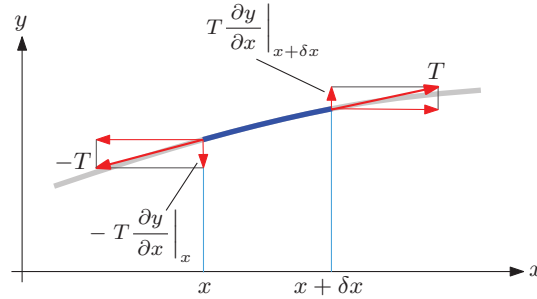


図 4.2: 弦の微小区間に作用する張力

用する張力は T のままだとしよう。弦の微小区間 $[x, x + \delta x]$ に注目し、その区間に作用する力を描くと図 4.2 のようになる。変位 y が十分に小さければ、弦の傾きが非常に小さいため、張力の x 成分は、

$$F_x(x) = -T, \quad F_x(x + \delta x) = T,$$

となり、釣り合いを保っている。一方、 y 成分は、

$$F_y(x) = -T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x, \quad F_y(x + \delta x) = T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\delta x},$$

となるはずだ。これらの力の合力が、微小区間の運動を決定する。弦の密度を ρ 、断面積を S とすれば、運動方程式は、

$$\begin{aligned} \rho S \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= F_y(x) + F_y(x + \delta x) \\ &= T \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right) = T \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

となる。両辺に δx の逆数を乗じると、この方程式は、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho S}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4.29)$$

のように書き換えられる。この方程式は波動方程式であり、弦の変位が速さ $c = \sqrt{T/\rho S}$ で伝搬することを示唆している。波動方程式 (4.29) の一般解は、

$$y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

のような関数形で記述できる。ここで、 f と g は、それぞれ、任意の関数である。物理的な意味として、 $f(x - ct)$ は x の正方向に伝搬する波、 $g(x + ct)$ は x の負方向に伝搬する波である。

正弦関数による表現 フーリエ変換によると、任意関数は正弦関数の重ね合わせで表現できるので、弦の振動を正弦関数として解析しよう。減の振動は、 $0 \leq x \leq L$ の区間で制限されているため、伝搬する波は弦の端点で反射を繰り返すだろう。弦の端点 $x = 0, L$ が固定端なので、

$$y(0) = y(L) = 0, \quad (4.30)$$

なる境界条件を満たさなければならない。少なくとも、この条件を満たすには、反射時に波の位相が π だけシフトすることが要求される。このような位相シフトを仮定すると、進行波と反射波の重ね合わせとして、必ず、端点で波動関数がゼロになる。

任意の位置 x における波動関数を考えよう。その位置での波動関数は、いくつもの反射波の重ね合わせである。例えば、ある時刻 t において、位置 x における波動関数が $\cos(\omega t - kx)$ であるとする。この波動は、 x の正方向に伝搬している。この波が $x = L$ で反射すると、 $\cos(\omega t - k(2L - x) + \pi)$ となる。この波は x の負方向に伝搬する。この波は、 $x = 0$ で再び反射すると、波動関数 $\cos(\omega t - (2L + x))$ で表される波となる。このように端点での反射を繰り返した波の重ね合わせが位置 x で観測されるとすれば、波動関数 $f(x)$ は、

$$f(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos[\omega t - k(2jL + x)] + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \cos[\omega t - k(2jL - x)],$$

となるはずだ。ここで、右辺の第1項の総和は端点で偶数回だけ反射し、 x の正方向に伝搬する波であり、第2項の総和は端点で奇数回だけ反射し、 x の負方向に伝搬する波である。また、 a_j と b_j は振幅である。このような波は、概して、 j の変化とともに位相が変化する。異なる位相の正弦波を加算すると正負で相殺するので、 $f(x)$ がゼロでない値をもつためには、少なくとも、第1項の総和が同一位相の三角関数の重ね合わせであるべきだ。第2項も同様に、同一位相の三角関数の重ね合わせであるべきだ。その条件を満たすには、

$$2kL = 2\pi m, \quad (4.31)$$

でなければならない。ここで、 m は任意の整数である。ここで、波数が $k = 2\pi/\lambda$ であることに注意すると、

$$L = \frac{m\lambda}{2}, \quad (4.32)$$

であることが導かれる。つまり、弦の固定端の間の距離は半波長 ($= \lambda/2$) の整数倍である。この結果を反映すると、波動関数 $f(x, t)$ は、

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \cos(\omega t - kx) + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \cdot \cos(\omega t + kx) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) \cdot \cos \omega t \cos kx + \sum_{j=0}^{\infty} (a_j - b_j) \cdot \sin \omega t \sin kx, \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで、 $x = 0, L$ で $f(x, t) = 0$ であるという、いわゆる、固定端の境界条件を満たすには、 $\sum a_j = -\sum b_j$ でなければならない。この性質が成立するための厳しい条件 $a_j = -b_j$ を仮定すると、波は固定端で反射するたびに符号が入れ替わる。言い換えると、位相が π だけ変化する。したがって、波動関数 $f(x, t)$ は、

$$f(x, t) = A \sin \omega t \sin kx, \quad (4.33)$$

である。ここで、 $A = 2 \sum a_j$ である。この波形は、空間波形が一定であり、その中を時間に依存して波が振動する形態を示す。このような波形は、**定在波**と呼ばれる。

波動方程式 (4.33) は、任意の自然数 m を用いて、波数が $k = m\pi/L$ を満たせば、両端を固定した長さ L の弦の振動を表す関数となる。ここで、 $k_m = m\pi/\lambda$ とおくと、線形結合:

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \omega t \sin k_m x, \quad (4.34)$$

も弦の振動を表す解である。この波動関数はフーリエ級数の形態で書かれている。フーリエ級数によると、係数 a_m が適切に選ばれれば任意形状の関数を記述できるのだ。

4.3.2 棒の振動

棒は弦と異なり、曲げ剛性率が無視できない。そのため、張力を与えなくても、弾性波を伝えることができる。曲げ剛性があると、変形に対して応力が発生する。応力が復元力となり、その際に作用反作用の法則で、周囲に応力を引き起こすため、変形が伝搬するのだ。それが弾性波である。どんなに細長い物体であろうとも、曲げ剛性率が無視できなければ、弦でなく棒に分類される。

棒の伸縮波 一定の断面形状と断面積 S を有するまっすぐな棒が、長さ方向に力 F で引っ張られたとする。そのとき、棒の断面には F/S の一様な応力発生が、張力として作用する。カルテシアン座標系 $[x_1, x_2, x_3]$ において、棒の長さ方向を x_1 軸にとれば、応力テンソル P_{nm} には、 $P_{11} = F/S$ だけがゼロでない成分となる。棒の伸縮において、応力テンソル P_{mn} は、変形テンソル E_{mn} との関係 (3.3) にて表現できる。特に棒の長さ方向 (x_1 方向) については、ヤング率 Y を用いて、

$$P_{11} = Y E_{11} = Y \frac{\partial r_1}{\partial x_1}, \quad (4.35)$$

なる関係が成立する。ここで、 r_1 は x_1 方向の変形の大きさである。

棒の長さ方向に与えた力によって生じた変形は、波として棒を伝搬するのだ。その現象を数式で示そう。弾性体の運動方程式 (4.1) に棒の長さ方向の応力 (4.35) を代入すると、

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 r_1}{\partial x_1^2},$$

が得られる。ここで、 u_1 は変形に起因する棒の速度である。簡単のため、外力は無視した。この数式両辺を時間 t で偏微分し、 $u_1 = \partial r_1 / \partial t$ であることに注意すると、

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},$$

なる波動方程式が得られる。ここで、長さ方向の座標と速度成分を、それぞれ、 x_1 から x に、 u_1 から u に書き換えると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.36)$$

が得られる。この波動方程式は、棒の伸縮速度 u が棒の長さ方向に伝搬することを示唆している。この波動方程式の形態から、その伝搬速度が、

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\rho}},$$

であることがわかる。ここで、 λ と μ はラメの弾性定数である。

波動方程式 (4.36) に起因する波は、棒の伸縮速度 u を伝搬するため、棒の伸縮波である。伝搬する u は棒の長さ方向、すなわち、波の伝搬方向に振動するので、伸縮波は縦波である。しかし、長さ方向に引き伸ばされた弾性体は、断面方向に細くなるので、厳密には、横波成分も含んでいるはずだ。つまり、棒の伸縮波は縦波と横波の両方の成分を含む混合波である。

伸縮波が混合波であることは波の伝搬速度を調べてもわかる。既に導出したように、縦波 (発散波) の速度 \hat{c} と、横波 (回転波) の速度 \bar{c} は、

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

である。これらの速度と、棒における伸縮波の速度 c を比べてみると、

$$\hat{c}^2 - c^2 = \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu)\rho} > 0,$$

$$\bar{c}^2 - c^2 = -\frac{(2\lambda + \mu)\mu}{(\lambda + \mu)\rho} < 0,$$

であるので、 $\bar{c} < c < \hat{c}$ であることがわかる。つまり、伸縮波の伝搬速度は、横波より速く、縦波より遅い。この速さは、伸縮波が合成波であることに起因している。