第2章　変形と運動

剛体とは異なり, 一般の連続体は力の作用を受けて, 運動するだけでなく変形する。変形といっても, 単に収縮/伸長するだけでなく, ねじれやたわみもある。そのような変形は, 連続体を構成する物質によって異なる。物質によって異なるとはいえ, 変形に寄与するパラメータを定義することによって, 連続体における物理を定式化することができる。

2.1　連続体に作用する力

連続体は空間に連続的に広がっているため, 注目する領域を定め, その領域に作用する力を議論すべきである。ここで, 作用する力を考えるための領域を, 単純閉曲面 S で囲まれた体積 V であるとする。その領域の連続体に作用する力は, 体積力と面積力に分類される。

体積力　連続体は質点と同様に, 重力, 電磁気力, 遠心力などの作用を受ける。それらの力は, 遠隔力として連続体を構成する分子, または, 原子の一つ一つに作用する。物質のすべての構成要素に作用するため, その合力は, 物質の体積, または, 質量に比例すると考えてよい。したがって, 遠隔力による力の作用は, 連続体の物理学では, **体積力**と呼ばれる。

体積力は, 場所による力の依存性に比べて十分小さい領域では一定とみなせるため, 領域の体積に比例すると考えてよい。すなわち, 連続体の微小体積素 $\mathrm{d}V$ に作用する力は, $\boldsymbol{K}\rho\,\mathrm{d}V$ のように表現できる。ここで, ベクトル $\boldsymbol{K}$ は, 連続体の単位質量あたりに作用する力である。したがって, 体積 V に作用する力は,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}} = \int_V \rho\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}V,$$

によって与えられる。上で述べたように, 重力, 電磁気力, 遠心力はこの数式で記述できる形態の力である。

面積力　連続体には, 遠隔力だけでなく, 分子間力のような近接力が作用する。近接力は, 物質を構成する分子のうち, 隣り合う分子からの力の作用である。例えば, 外側から連続体を押したときに生じる圧力を考えよう。圧力は連続体の内部に遠隔で作用するのでな

く, 隣り合う分子どうしで力が作用する。作用を受けた分子はさらに隣の分子を押す。そのように隣の分子から受ける力が圧力となるのだ。圧力のような力の作用は, 連続体中にある断面を考えたとき, その断面に作用する力と考えることができる。したがって, 近接力に由来する力の作用は, 連続体の物理学では, 面積力と呼ばれる。

面積力は, 連続体の表面 S (仮想的に設けた面でもよい) に依存する力である。その力の存在が質点との大きな相違点であり, 解析の難しさに関する要因である。面積力をベクトルとして表現するためには, 面が向いている方向が重要になる。また, 体積力と同様に, 変化率に対して十分に小さい表面積の条件では, 面積力は表面積に比例すると考えるべきである。したがって, 面積素 $\mathrm{d}S$ に作用する力は $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S$ であると仮定すればよいだろう。ここで, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ は表面の単位面積あたりに作用する力であり, 表面の法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の関数である。その $\boldsymbol{n}$ への依存性が, 面の向きによる性質を表すのだ。力の要素 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ は**応力** (stress) と呼ばれる。領域 V における連続体に作用する面積力の合力は,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}} = \int_S \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S,$$

で表される。ここで, 積分域 S は対象とする連続体 V の表面全体である。その表面は, 連続体の物体の表面であってもよいし, 連続体中に仮定された部分領域の表面であってもよい。

2.2　応力

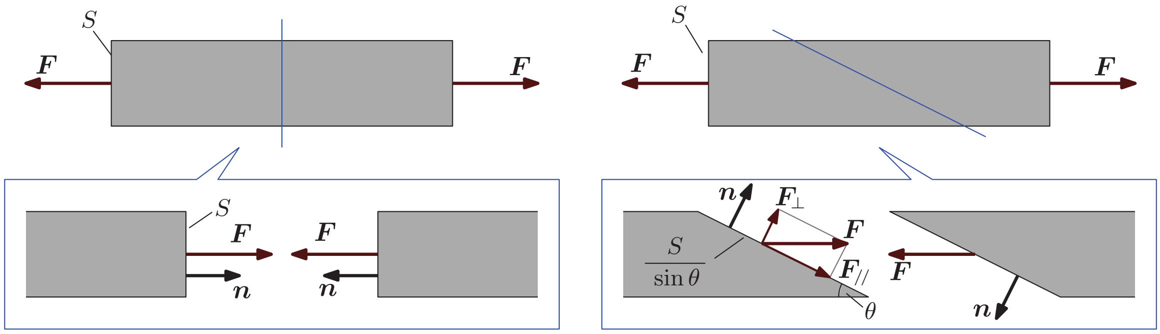
応力は, 前節で説明したように, 単位面積あたりに作用する面積力である。応力の代表例として, 理想気体に関する熱力学で取り扱う圧力がある。圧力は, 対象なる面に対して法線方向に作用する応力である。一般の連続体では, 法線方向だけでなく接線方向にも応力が作用する。

2.2.1　典型的な応力の例

対象とする表面において, 応力は法線ベクトルに沿った成分と, それと垂直をなす成分 (接線成分) に分離できる。つまり, 応力の記述には法線ベクトルとの関係が重要である。本節は, 応力と法線ベクトルの関係を説明するため, 連続体の棒を引っ張る力と, 液体や気体による圧力について説明する。

棒を引っ張る力　図 2.1 のように, 連続体の両端を力 $\boldsymbol{F}$ で引っ張る状態を考えよう。引っ張られた棒は, その内部では, 棒を構成する分子どうしが力を作用させ, 棒を変形させようとする。内部で発生するその力は, 分子間力に起因するので近接力である。そのような近

接力による作用は, 棒のいたる場所で発生するため, 任意の場所に切断面を仮定した場合, 必ず, 切断面を挟んだ連続体どうしで力の作用が発生している。例えば, 図 2.1 (a) のように切断面を力 $\boldsymbol{F}$ に対して垂直にとった場合, 切断面には, 力 $\boldsymbol{F}$ が分割された連続体の外に向かって作用すると考えられる。この場合, 切断面に作用する力は切断面の法線ベクトルと同一方向である。また, 連続体の断面積を S, 両側から引っ張る力の大きさを $F \equiv |\boldsymbol{F}|$ とすれば, 切断面の応力は大きさ F/S で法線方向に作用する。一方, 図 2.1 (b) のように切



(a) Perpendicular section.

(b) Non-perpendicular section.

図 2.1: 切断面の選択と応力

断面を斜めに設定した場合, 応力は上の場合とは異なる。切断面を斜めに設定しても, 切断面に作用する力は $\boldsymbol{F}$ である。その力は切断面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と同一方向でないため, 接線成分 $\boldsymbol{F}_{\perp}$ と接線成分 $\boldsymbol{F}_{/\!/}$ に分離できる。切断面の面積が $S/\sin\theta$ であることから, その切断面における垂直応力 $\boldsymbol{p}_{\perp}$ と接線応力 $\boldsymbol{p}_{/\!/}$ は,

$$|\boldsymbol{p}_{\perp}| = \frac{F}{S}\sin^2\theta, \qquad |\boldsymbol{p}_{/\!/}| = \frac{F}{S}\sin\theta\cos\theta,$$

となる。これらの力の合力は, いうまでもなく,

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{F}}{S}\sin\theta,$$

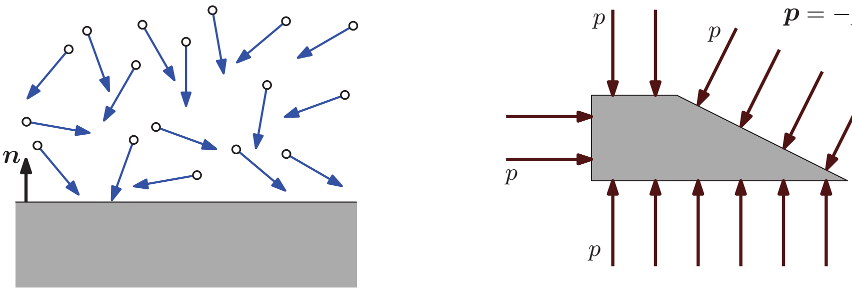
となる。切断面に作用する応力は, 方向が $\boldsymbol{F}$ と同じだが, その大きさは切断面の方向 $\sin\theta$ に依存する。

流体による圧力　液体や気体のような流体では, 連続体の引っ張りとは 応力の性質が異なる。その理由は, 流体が特定の形をもたず, 自由に変形できることに起因する。自由に変形できるゆえに, 静止する流体は任意の表面に対し, 法線方向にしか力を与えない[1]。

静止する流体が任意の表面に対して法線方向の力しか与えないことは, 流体を構成する分子の運動に起因する。自由に変形できる流体では, 流体を構成する分子は図 2.2 (a) に示

[1]表面が流体に対して運動する場合, 粘性によって接線方向に応力が作用する。

すようにに自由に運動する。運動する分子が表面に衝突した際に与える運動量が表面に与える力となる。図に示すように, 表面に衝突する分子の運動方向が任意であるので, それらの合成ベクトルは接線成分が打ち消し合い, 法線成分しか残らない。その結果, 流体から作用を受ける力は図 2.2 (b) に示すように法線成分のみである。この図は, あらゆる表面



(a) Molecules applying pressure to the surface. (b) Pressures acting on the surface.

図 2.2: 流体による圧力

に同一の圧力が作用するという, いわゆるパスカルの原理を表している。つまり, 表面の単位面積あたりに作用する力は $\boldsymbol{p} = -p\boldsymbol{n}$ である。ここで, 法線ベクトルが外向きの力であるので, 圧力を表すため右辺には負の符号を付している。

上で説明した例のように, 固体と, 液体や気体とでは, 表面に作用する力, すなわち, 面積力の性質は異なる。そのように, 物質によって性質が異なる面積力の数学的な取り扱いには, 次項で説明する応力テンソルを用いる。

2.2.2 応力テンソル

前項では例を挙げ, 応力のベクトル表現が対象とする面の法線ベクトルに依存することを説明した。しかも, 固体を引っ張るように力を作用させて生じる応力と, 液体や気体の圧力によって生じる応力では性質が異なる。そのような異なる性質の応力を数学的に記述するには, **応力テンソル**を用いるのが便利である。本項では, 応力の釣り合いを用いて, 一般的な応力を記述するための応力テンソルを導出する。

応力が法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に依存するので, 応力を法線ベクトルの関数として $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ と記述しよう。図 2.3 に示すように, ある微小面に作用する応力を考えたとき, その微小面に作用反作用の法則が成立するはずだ。 微小面の一方の面における法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ とすれば, その裏面における法線ベクトルは $-\boldsymbol{n}$ となるはずだ。つまり, 前者に対応する応力が $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ であり, もう一方の応力は $\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{n})$ である。したがって, 微小面における応力の作用反作用の法則は,

$$\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}), \tag{2.1}$$

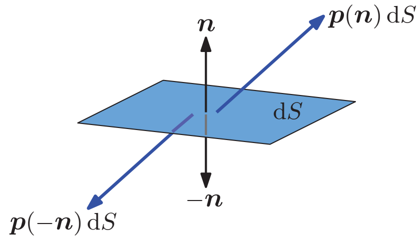


図 2.3: 微小面積に作用する応力の釣り合い

となる。この数式の意味を具体的には, 二つの領域 V_1 と V_2 が接している面積素 $\mathrm{d}S$ での作用反作用を考えればよい。体積 V_1 の表面としての法線単位ベクトルが $\boldsymbol{n}$ であるならば, 体積 V_2 の表面としての法線単位ベクトルは $-\boldsymbol{n}$ である。このとき, V_2 から V_1 に作用する面積力が $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S$ であり, V_1 から V_2 に作用する面積力は $\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S$ となるはずだ。これらの力は作用反作用の関係にあるため, (2.1) が成立する。

一般的な応力の成分間の関係を図 2.4 に示す簡単なモデルによって考察しよう。カルテシアン座標系 $[x_1, x_2, x_3]$ の原点 O を頂点とし, x_1 軸上の $x_1 = \varDelta x$ となる点 A, x_2 軸上の $x_2 = \varDelta x_2$ となる点 B, x_3 軸上の $x_3 = \varDelta x_3$ となる点 C によって張られる四面体 OABC に作用する力を考える。その座標系における x_1, x_2, x_3 軸方向の単位ベクトルを, それぞれ, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ とするとき, 面 OAB の法線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_3$, 面 OBC の法線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_1$, 面 OCA の法線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_2$ となる。面 ABC の法線ベクトルは, それらの 1 次結合によって与えられるが, ここでは $\boldsymbol{n}$ であるとしておこう。 四面体の各面に作用する応力は法線

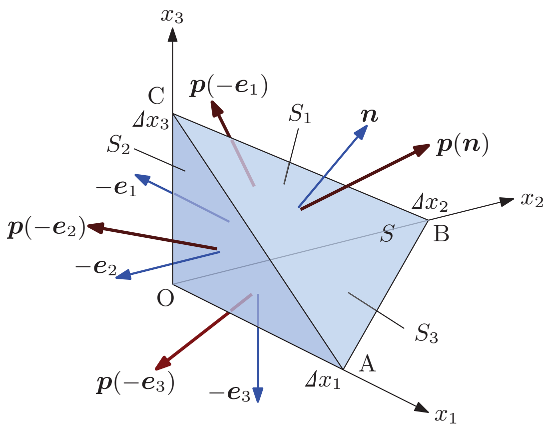


図 2.4: 微小四面体に作用する応力の釣り合い

ベクトルに依存するので, 三角形 OAB に作用する応力は $\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_3)$, 三角形 OBC については $\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_1)$, 三角形 OCA については $\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_2)$, 三角形 ABC については $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ となる。厳密には, 応力は座標にも依存するが, ここでは微小四面体に作用する応力を考えているので座標への依存性は無視できるものとする。上で説明した条件設定によって, 四面体 OABC

に作用する応力の合力は,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_1)\,\mathit{\Delta} S_1 + \boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_2)\,\mathit{\Delta} S_2 + \boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_3)\,\mathit{\Delta} S_3 + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\,\mathit{\Delta} S,$$

となる。ここで, $\mathit{\Delta} S_1$ は三角形 OBC の面積, $\mathit{\Delta} S_2$ は三角形 OAC の面積, $\mathit{\Delta} S_3$ は三角形 OAB の面積である。これらの面積が,

$$\mathit{\Delta} S_1 = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1)\mathit{\Delta} S, \quad \mathit{\Delta} S_2 = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2)\mathit{\Delta} S, \quad \mathit{\Delta} S_3 = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3)\mathit{\Delta} S,$$

と書けることに注意すると, 応力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$ は,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}} = \Big[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_1) + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_2) + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_3) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\Big]\,\mathit{\Delta} S,$$

のように書き換えられる。四面体 OABC には, 面積力と体積力の双方が作用するはずだが, 四面体の大きさを限りなく小さくすれば, 面積力に比べ体積力が無視できるようになる。なぜなら, 面積力が四面体の寸法について 2 次の依存性であることに対し, 体積力は 3 次の依存性であるからだ。つまり, 体積力の方が面積力よりも速くゼロに収束するのだ。したがって, 無限小の四面体を考えると面積力だけで合力がゼロになるべきであり,

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_1) + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_2) + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_3),$$

が成立する。ここで, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3$ が, それぞれ, $\boldsymbol{n}$ の x 成分, y 成分, z 成分であることから, $n_1 \equiv \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1$, $n_2 \equiv \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2$, $n_3 \equiv \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3$ とおけば, 面積力の合力は,

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = n_1\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_1) + n_2\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_2) + n_3\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_3),$$

のように書き換えられる。この応力をカルテシアン座標系で成分分解すると,

$$\begin{aligned} p_1(\boldsymbol{n}) &= n_1\,p_1(\boldsymbol{e}_1) + n_2\,p_1(\boldsymbol{e}_2) + n_3\,p_1(\boldsymbol{e}_3), \\ p_2(\boldsymbol{n}) &= n_1\,p_2(\boldsymbol{e}_1) + n_2\,p_2(\boldsymbol{e}_2) + n_3\,p_2(\boldsymbol{e}_3), \\ p_3(\boldsymbol{n}) &= n_1\,p_3(\boldsymbol{e}_1) + n_2\,p_3(\boldsymbol{e}_2) + n_3\,p_3(\boldsymbol{e}_3), \end{aligned}$$

のように書くことができる。この数式は,

$$p_\mu(\boldsymbol{n}) = \sum_{\nu=1}^{3} n_\nu p_\mu(\boldsymbol{e}_\nu),$$

なる記法で表現できる。さらに, $P_{\mu\nu} \equiv p_\mu(\boldsymbol{e}_\nu)$ なる記号を定義すると, 応力の成分は,

$$p_\mu(\boldsymbol{n}) = \sum_{\nu=1}^{3} P_{\mu\nu} n_\nu, \tag{2.2}$$

なる数式で記述できる。ここで定義した $P_{\mu\nu}$ は**応力テンソル**と呼ばれる。言い換えると, 応力テンソルの成分 $P_{\mu\nu}$ は, 法線ベクトル $\boldsymbol{e}_\nu$ となる面に作用する応力ベクトルの第 μ 成分である。

応力テンソル $P_{\mu\nu}$ はテンソル代数学において, 2 階のテンソルに分類される。数学的に記述において, 2 階のテンソルは, 行列として記述するることができるので, 応力テンソルは,

$$[P_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix},$$

のように記述するとイメージしやすい。前に説明したように, 応力テンソルの成分 $P_{\mu\nu}$ は, カルテシアン座標系の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\nu$ を法線ベクトルとする面に作用する応力 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_\nu$ の第 μ 成分である。そのモデルから, 法線応力は $P_{\mu\mu}$ のような対角成分である。法線応力は, $P_{\mu\mu} > 0$ のとき, 外向きの力であり, 張力と呼ばれる。逆に, $P_{\mu\mu} < 0$ であれば圧力と呼ばれる。

2.2.3　応力テンソルの対称性

自明ではないが, 応力テンソルは対称テンソルであり, $P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu}$ が成立する。応力テンソルの対称性は, 数学的な見地でなく, 物理学的な洞察によって導出することができる。本項では, 応力テンソルが対称テンソルであることを示す。

応力テンソルの対称性は, 微小直方体に作用する応力によるモーメントを評価することによって証明できる。カルテシアン座標系の x_1, x_2, x_3 方向に, それぞれ, 長さ $\mathit{\Delta} x_1$, $\mathit{\Delta} x_2$, $\mathit{\Delta} x_3$ の辺をもつ微小直方体を考える。その直方体の中心が原点 O となるように座標が設定されている。その座標系において, 原点を通る座標軸まわりのモーメントの釣り合いに注意すれば応力テンソルの対称性が導出できるのだ。

図 2.5 を参照しながら, x_3 軸周りのモーメントを評価しよう。微小直方体のうち, $x_1 = \mathit{\Delta} x_1/2$ なる側面に作用する接線応力は, 法線ベクトルが $\boldsymbol{e}_1$ である面における x_2 成分であるので, 応力テンソルの定義に注意すると P_{21} であることがわかる。その反対側の面 $x_1 = -\mathit{\Delta} x_1/2$ は, 法線ベクトルが $-\boldsymbol{e}_1$ であるので, 接線応力は $-P_{21}$ となるはずだ。それらの側面の面積が, それぞれ, $\mathit{\Delta} x_2 \mathit{\Delta} x_3$ であるので, $x_1 = \pm\mathit{\Delta} x_1/2$ となる側面に作用する力の法線成分は $\pm P_{21}\mathit{\Delta} x_2 \mathit{\Delta} x_3$ (複合同順) である。したがって, それらの側面に作用する力による x_3 軸周りのモーメントの合計は $P_{21}\mathit{\Delta} x_1 \mathit{\Delta} x_2 \mathit{\Delta} x_3$ となる。 同様に, 二つの面 $x_2 = \pm\mathit{\Delta} x_2/2$ に作用する応力によるモーメントは $-P_{12}\mathit{\Delta} x_1 \mathit{\Delta} x_2 \mathit{\Delta} x_3$ となる。カルテシアン座標系の x_3 軸まわりのモーメントで応力からの寄与は, それらですべてである。したがって, x_3 軸まわ

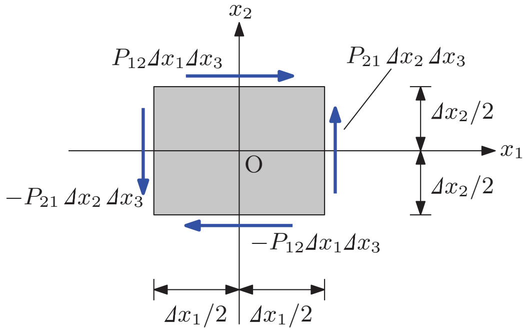


図 2.5: 微小直方体に作用する力の接線成分

りのモーメントで応力からの寄与は,

$$(P_{21} - P_{21})\,\mathit{\Delta}x_1\mathit{\Delta}x_2\mathit{\Delta}x_3,$$

となるわけだ。直方体 V には体積力も作用するので, 体積力によるモーメントも発生しているのだが, 直方体を無限小とすれば, 体積力は面積力に比べて無視できるので, 面積力によるモーメントだけで総和がゼロとならなければならない。したがって, $P_{21} = P_{21}$ が成立すべきである。同様の考察を, x_1 軸周りのモーメントと, x_2 軸周りのモーメントについて実行すると, 必ず, $P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu}$ なる対称性が成立することが導かれる。ゆえに, 応力テンソルは対称テンソルである。

2.3　テンソルに関する数学

テンソルは連続体を取り扱うために必要な数学の手法である。応力テンソルは行列と同様に見えるが, テンソルは単になる数字の 2 次元配列ではない。テンソルは座標系と密接な関係があるのだ。本節では, 数学におけるテンソルの取り扱いを説明する。

本題に入る前に, 以降の数式ではアインシュタインの総和規約を採用しよう。アインシュタインの総和規約は, 1 次変換のような成分の荷重総和を簡略化する記法である。既に示したように, 法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2, n_3]$ である表面において, 応力ベクトル $\boldsymbol{p} \equiv [p_1, p_2, p_3]$ は,

$$p_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} P_{\mu\nu} n_\nu,$$

のように記述できる。応力の成分は, 法線ベクトルの 1 次結合であり, その結合係数が応力テンソルで与えられる。連続体の物理学ではこのような 1 次結合が多く現れる。上の数式のように, 物理学で取り扱う 1 次結合は積をとる二つの物理量で共通に表れる添え字 (この例では ν) について総和がとられる。その結果, 総和の対象となる添え字が消失する。この規則性に着目し, 一つの項にペアとなる共通の添え字が存在する場合, その添え字につい

て総和をとることを暗黙の規則を設ける。すなわち, 応力ベクトルの成分は, $p_\mu = P_{\mu\nu}n_\nu$ なる数式で記述する。これまでの総和記号を用いた記法との対応関係は,

$$p_\mu = P_{\mu\nu}n_\nu \equiv \sum_{\nu=1}^{3} P_{\mu\nu}n_\nu,$$

となるわけだ。このように, 総和記号を省略した記法は**アインシュタインの総和規約**と呼ばれる。その簡略表記は, 一般相対性理論の数学記述の際に, アインシュタインが導入したことに端を発する。さらに, アインシュタインの総和規約では, 同一のテンソルであってもペアになる添え字が存在する場合, その添え字について総和をとるものとする。例えば,

$$A = A_{\mu\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^{3} A_{\mu\mu} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

という具合だ。この例は, 行列の対角成分の和であり, 行列のトレースと呼ばれる量である。

ベクトルの成分表示 $[a_1, a_2, a_3]$ は, 暗黙の座標系が定められている場合を除き, それだけではベクトルの具体的な方向を示していない。具体的なベクトルの方向を示すには, 座標系が明確である必要がある。座標系が定まると, 各座標軸に沿った基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ が決まる。その上で成分表示 $[a_1, a_2, a_3]$ が与えられると, ベクトル:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \equiv a_\mu\boldsymbol{e}_\mu,$$

が特定できるのだ。なお, 右辺にはアインシュタインの総和規約を用いた。ベクトルの成分 a_μ は, ベクトル $\boldsymbol{a}$ を特定するための, 基本ベクトルに対応する重み係数なのだ。このベクトルを, 別の基本ベクトル $\boldsymbol{e}'_\mu$ を基底とする座標系で記述するとき, ベクトルの成分は異なる値 a'_μ になるはずだ。そのとき,

$$\boldsymbol{a} = a'_\mu\boldsymbol{e}'_\mu,$$

が成立する。ただし, $\boldsymbol{e}_\mu$ を基底とする座標系も, $\boldsymbol{e}'_\mu$ を基底とする座標系も, ともに正規直交座標系であるとする。つまり, 基本ベクトルの大きさは 1 であり, 同一座標系の異なる基本ベクトルどうしが直交する条件:

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}, \qquad \boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu = \delta_{\mu\nu},$$

を満たす[2]。異なる正規直交系の間の変換は, 座標回転によって記述できる。つまり, 回転行列 $\alpha_{\mu\nu}$ を用い, 基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}'_\mu = \alpha_{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\nu, \tag{2.3}$$

[2]テンソルの本領を発揮すれば正規直交系以外でも簡潔に数学記述できるのだが, 本書は簡単のため, 正規直交系のみを取り扱う。

によって変換される。この変換式に $\boldsymbol{e}_\lambda$ を内積させると,

$$\boldsymbol{e}_\lambda \cdot \boldsymbol{e}'_\mu = \alpha_{\mu\nu} \boldsymbol{e}_\lambda \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \alpha_{\mu\nu} \delta_{\lambda\nu} = \alpha_{\mu\lambda},$$

となるので, 変換行列 $\alpha_{\mu\nu}$ が,

$$\alpha_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu, \tag{2.4}$$

であることがわかる。この数式からわかるように, $\alpha_{\mu\nu} \neq \alpha_{\nu\mu}$ である。言い換えると, 変換行列 $\alpha_{\mu\nu}$ は対称行列ではない。一方, 変換式 (2.3) は,

$$\boldsymbol{e}_\mu = \alpha_{\nu\mu} \boldsymbol{e}'_\nu, \tag{2.5}$$

と書き換えることができる。なぜなら, (2.5) に $\boldsymbol{e}'_\lambda$ を内積すると (2.4) が得られ, 矛盾が生じないからである。さらに, (2.5) に (2.3) を代入すると,

$$\boldsymbol{e}_\mu = \alpha_{\nu\mu} \boldsymbol{e}'_\nu = \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} \boldsymbol{e}_\lambda,$$

となるので,

$$\alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}, \tag{2.6}$$

が成立しなければならない。つまり, 変換行列 $\alpha_{\mu\nu}$ とその転置行列 $\alpha_{\nu\mu}$ は逆行列の関係にある。さらに, 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ を展開し,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_\mu \boldsymbol{e}_\mu = a_\mu \alpha_{\nu\mu} \boldsymbol{e}'_\nu \\ &= a'_\mu \boldsymbol{e}'_\mu = a'_\mu \alpha_{\mu\nu} \boldsymbol{e}_\nu, \end{aligned}$$

のように書いてみる。この数式の第 1 行目は $\boldsymbol{e}_\mu$ を基底にする座標系で, 第 2 行目は $\boldsymbol{e}'_\mu$ を基底にする座標系で展開した結果である。この数式展開によって,

$$a'_\nu = \alpha_{\nu\mu} a_\mu, \qquad a_\nu = \alpha_{\mu\nu} a'_\mu, \tag{2.7}$$

なる変換式が得られる。つまり, ベクトルの成分は基本ベクトルと同一の座標変換にしたがう。実は, この性質がベクトルの条件なのだ。ベクトルとは, 単に一列に並べた数値の集合でなく, 座標変換によって, 基本ベクトルとともに一定の規則[3]で変換される。

複数のベクトルの積によって得られる数値からテンソルが得られる。ここで述べるベクトルの積とは一般化された積であり, $A_{\mu\nu} \equiv a_\mu b_\nu$ なる値である。二つの数値 a_μ と b_ν がともにベクトルであれば, 座標変換によって, $a'_\mu = \alpha_{\mu\lambda} a_\lambda$, $b'_\nu = \alpha_{\nu\sigma} a_\sigma$ を満たすので,

$$A'_{\mu\nu} = a'_\mu b_\nu = \alpha_{\mu\lambda} a_\lambda \alpha_{\nu\sigma} a_\sigma = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\sigma} A_{\lambda\sigma},$$

[3]正規直交系では基本ベクトルとベクトルの成分は同一の変換となるが, 一般的には同一とは限らない。

のように変換される。このように, 二つのベクトルの積で得られる量は 2 階のテンソルと呼ばれる。上の数式で説明できるように, 2 階のテンソルは座標変換 $\boldsymbol{e}'_\mu = \alpha_{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\nu$ に対して,

$$A'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\alpha_{\nu\sigma}A_{\lambda\sigma}, \qquad A_{\mu\nu} = \alpha_{\lambda\mu}\alpha_{\sigma\nu}A'_{\lambda\sigma}, \tag{2.8}$$

なる変換則を満たす。なお, テンソルの階数とは, 生成するにあたって乗じたベクトルの個数である。例えば, 0 階のテンソルは座標変換に対して不変の値であり, **スカラ**と呼ばれる。また, 1 階のテンソルはベクトルである。

テンソルの縮約について

2.4 運動方程式

連続体の運動方程式は, 運動量保存の法則から得られる。既に導出した質量保存の法則での手法が, 運動方程式を導出する際の参考になる[4]。

連続体の中に仮想的に単純閉曲面 S を考え, それによって囲まれる体積 V の運動量を考える。連続体の密度 ρ と速度 $\boldsymbol{u}$ が与えられたとき, 単位体積当たりの運動量は $\rho\boldsymbol{u}$ となる。したがって, 体積 V の運動量は,

$$\boldsymbol{M} = \int_V \rho\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V, \tag{2.9}$$

で与えられる。質量保存速度と同様に, 体積 V に流入した運動量と流出した運動量の差が運動量の増加分に等しい。単位時間あたりの増加分を数式表現すると,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}V,$$

のようになる。なお, この数式はオイラー記述であり, 体積が時間とともに変化しないので積分と微分の順序を入れ替えることができている。運動量の変化は, 等式:

$$\int_V \frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_S \rho\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S + \int_V \rho\boldsymbol{K}\,\mathrm{d}V + \int_S \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S, \tag{2.10}$$

を満たす。左辺は既に述べたように, 単位時間当たりの運動量の増加分である。一方, 右辺の第 1 項は単位時間あたりに表面 S を通って流入する運動量と流出する運動量の差であり, 第 2 項は体積 V に作用する体積力, 第 3 項は表面積 S に作用する面積力である。このベクトル記法を成分表示すると,

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_\mu)}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_S \rho u_\mu \sum_{\nu=1}^{3} u_\nu n_\nu\,\mathrm{d}S + \int_V \rho K_\mu\,\mathrm{d}V + \int_S \sum_{\nu=1}^{3} P_{\mu\nu}n_\nu\,\mathrm{d}S, \tag{2.11}$$

[4]相対性理論によると, 運動量保存はエネルギー保存則であり, エネルギー保存則と質量保存は同一法則なので同一手法で導出できるのは当然の事実である。

のように書き換えられる。この数式の右辺の第 1 項と第 3 項は, ガウスの定理を適用することができ,

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_\mu)}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \int_V \left[-\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial(\rho u_\mu u_\nu)}{\partial x_\nu} + \rho K_\mu + \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right]\mathrm{d}V,$$

のように体積分に書き換えられる。この方程式が恒等的に成立することは,

$$\frac{\partial(\rho u_\mu)}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial(\rho u_\mu u_\nu)}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \rho K_\mu, \tag{2.12}$$

と等価である。すなわち, 公式 (2.12) が導出すべき運動方程式である。公式 (2.12) の左辺を変形していくと,

$$\begin{aligned}
\text{LHS of (2.12)} &= \frac{\partial\rho}{\partial t}u_\mu + \rho\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_\nu}u_\mu u_\nu + \rho\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}u_\nu + \rho u_\mu\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu}\right)\\
&= \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho\right)u_\mu + \rho\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla u_\mu\right) + \rho u_\mu\nabla\cdot u_\nu\\
&= \left(\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)u_\mu + \rho\frac{\mathrm{D}u_\mu}{\mathrm{D}t} = \rho\frac{\mathrm{D}u_\mu}{\mathrm{D}t},
\end{aligned}$$

が得られる。この計算の最終結果を得るには, (1.8) を利用した。この結果から, 運動方程式が,

$$\frac{\mathrm{D}u_\mu}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + K_\mu, \tag{2.13}$$

のようにラグランジュ微分として書き換えられる。この方程式は, 運動する体積に作用する力は面積力と体積力のみであることを意味している。方程式 (2.12) の左辺の第 2 項は, オイラー記述ゆえに現れる運動量の流れを表している。また, (2.12) の形から, $\rho u_\mu u_\nu$ が応力のように振る舞っているように見える。

連続体の運動を解析する場合, 密度 ρ, 速度 u_μ, 応力テンソル $P_{\mu\nu}$ が未知数となる。導かれた運動方程式は, それらの未知数を決定するには不十分である。未知数の決定には, 応力テンソル $P_{\mu\nu}$ を連続体の運動と関係づけることが必要である。連続体に作用する応力は, 連続体を変形させるので, 変形と応力の関係を定式化することによって運動方程式を解けるようになるのだ。

2.5　連続体の変形

図 2.6 に示すように, 連続体に含まれる 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ を動かした場合を考えよう。これら 2 点は, 互いに近接した点であるとする。一方の点 $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{r}$ だけ移動する間に, もう一方の

点 $\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{r}'$ だけ移動すると仮定する。つまり, 移動後の位置は, それぞれ, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{r}'$ である。そのとき, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ であれば, 連続体は単に平行移動しただけであり, そうでない場合, 連続体は変形したことになる。言いかえると, $\delta\boldsymbol{r}\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ は変形の大きさを表す。注

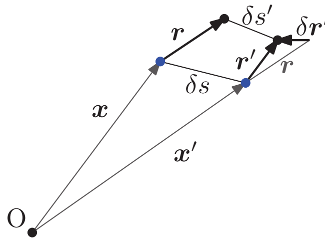


図 2.6: 連続体の変形変形

目する 2 点間の距離 $\delta\boldsymbol{x}$ に対して, $\boldsymbol{r}$ が大きければ, その連続体は柔らかく, 小さければ固いと解釈される。ここで, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{r}$ が無限小だとすると, 解析学の公式から,

$$\delta r_\mu=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial r_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\nu,$$

であることがわかる。この数式は, 変形のベクトルが 2 点間の距離の 1 次結合で表現されることを意味している。そのとき,

$$D_{\mu\nu}=\frac{\partial r_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{2.14}$$

と定義すれば, 変形が $\delta r_\mu=D_{\mu\nu}\delta x_\nu$ で与えられる。

続いて, 連続体の変形による 2 点間の距離 $\delta s\equiv|\delta\boldsymbol{x}|$ の変化について調べよう。変形前の距離が,

$$\delta s^2=\delta x_m\delta x_m,$$

を満足することに注意し, 変形後の距離の自乗 $\delta s'^2$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\delta s'^2&=\left(\delta x_m+\frac{\partial r_m}{\partial x_n}\delta x_n\right)\left(\delta x_m+\frac{\partial r_m}{\partial x_k}\delta x_k\right)\\&\simeq\delta x_m\delta x_m+\frac{\partial r_m}{\partial x_n}\delta x_m\delta x_n+\frac{\partial r_n}{\partial x_m}\delta x_m\delta x_n\\&=\delta x^2+\left(D_{mn}+D_{nm}\right)\delta x_m\delta x_n,\end{aligned}$$

のように, 変形テンソル D_{mn} を用いた数式が得られる。数式変形において, 変形テンソルの 2 次の項は高次の微小量として無視した。変形テンソルは, 一般的に, 対称テンソルでも交代テンソルでもないが, 任意の 2 階テンソルは, 必ず, 対称テンソルと交代テンソルの和:

$$D_{mn}=E_{mn}+F_{mn}, \tag{2.15}$$

で記述することができる。ここで, E_{mn} $(= E_{nm})$ が対称テンソル, F_{mn} $(= -F_{nm})$ が交代テンソルであるとする。具体的には, それらのテンソルは,

$$E_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r_m}{\partial x_n} + \frac{\partial r_n}{\partial x_m}\right), \qquad F_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r_m}{\partial x_n} - \frac{\partial r_n}{\partial x_m}\right), \tag{2.16}$$

のように定義される。そのように変形テンソルを分解すると, 変形後の微小距離 δs^2 は,

$$\delta s'^2 = \delta x^2 + 2E_{mn}\delta x_m \delta x_n, \tag{2.17}$$

のように記述できる。この記述から, 変形テンソル D_{mn} のうち, 交代テンソルの成分 F_{mn} は微小距離の変化に寄与しないことがわかる。変形テンソルの対称テンソルと交代テンソルが物理的にどのような役割を担うかを後の段落で確認しよう。

対角成分について考えよう。明らかに, 対角成分は対称テンソルでしかゼロ以外の値をとらない。変形テンソルに, ゼロでない成分が対角成分しか存在しない場合, 連続体の変形量は,

$$\delta r_1 = E_{11}\delta x_1, \quad \delta r_2 = E_{22}\delta x_2, \quad \delta r_3 = E_{33}\delta x_3,$$

のように, 単純な関係によって与えられる。得られた変形は, カルテシアン座標系のベクトル $[E_{11}, E_{22}, E_{33}]$ 方向への伸縮を表す。

対称テンソルの場合において, 変形テンソルの対角成分以外について考察しよう。簡単のため, $E_{12} = E_{21}$ のみがゼロでない場合を考えよう。そのとき, 変形量は,

$$\delta x_1 = E_{12}\delta x_2, \quad \delta x_2 = E_{12}\delta x_1, \quad \delta x_3 = 0,$$

となる。この変形によって, 図 2.7 に示すように, 直方体の連続体が平行六面体に変形する。具体的には, x_1 軸が x_3 軸について右ねじの方向に角度 $\arctan E_{12} \simeq E_{12}$ だけ回転し,

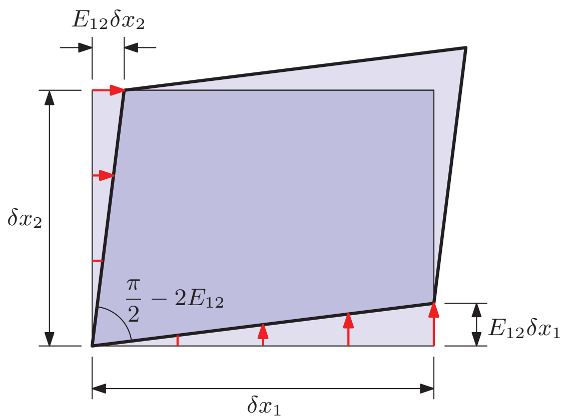


図 2.7: 微小連続体のずれ歪み $(E_{12} = E_{21})$

x_2 軸が逆方向に同じ角度だけ回転した形状に変形する。このような変形は, ずれ歪みと呼

ばれる。ずれ歪みによる体積変化は, 歪みテンソルの 2 次の無限小となるため, 無視できる量である。

反対称テンソルは, 対角成分が, 必ず, ゼロとなる。反対称テンソル F_{mn} について,

$$\mathit{\Omega}_1 = -2F_{23} = 2F_{32}, \quad \mathit{\Omega}_2 = -2F_{31} = 2F_{13}, \quad \mathit{\Omega}_3 = -2F_{12} = 2F_{21}, \tag{2.18}$$

なるベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ を定義する。このベクトルを, 歪み量 r_m を用いて書くと,

$$\mathit{\Omega}_1 = \frac{\partial r_3}{\partial x_2} - \frac{\partial r_2}{\partial x_3}, \quad \mathit{\Omega}_2 = \frac{\partial r_1}{\partial x_3} - \frac{\partial r_3}{\partial x_1}, \quad \mathit{\Omega}_3 = \frac{\partial r_2}{\partial x_1} - \frac{\partial r_1}{\partial x_2}, \tag{2.19}$$

となる。これらの成分表示から明らかなように,

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{r}, \tag{2.20}$$

と書くことができる。つまり, ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は歪みベクトル $\boldsymbol{r}$ の回転である。

回転 $\boldsymbol{\Omega}$ の意味を調べるため, 反対称テンソルの成分のうち F_{12} だけがゼロでない場合を仮定しよう。そのとき, 歪み量は,

$$\delta r_1 = F_{12}\delta x_2, \quad \delta r_2 = -F_{12}\delta x_1, \quad \delta r_3 = 0,$$

となる。この変換によって得られる変形は, 図 2.8 に示すように, x_3 軸についての時計回りに角度 F_{12} だけ回転させることに相当する。微小な直方体に関する限り, 回転はその微小体積の形状を変化させない。

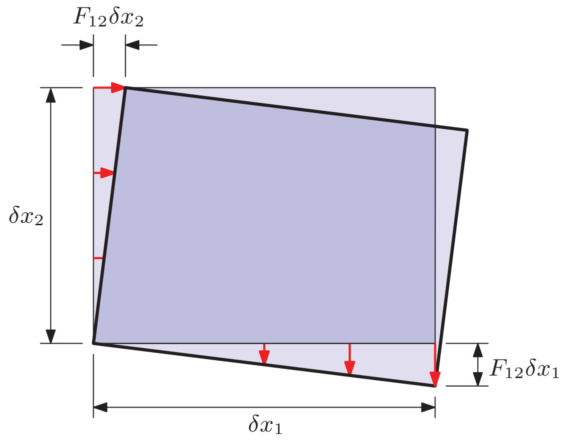


図 2.8: 微小連続体の回転 ($E_{12} = E_{21}$)

歪みテンソル D_{mn} の影響は次のように解釈できる。対称成分 E_{mn} は連続体の形状を歪ませ, 反対称成分 F_{mn} は単独では連続体の形状を変化させないが, E_{mn} と組み合わさることで連続体にねじれが発生する。

2.5.1　歪みの速度

連続体の変形は, 応力によって一瞬で発生するのでなく, 時間の経過ともに連続的に生じる。本節の冒頭で定義したように, 連続体の 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ に注目したとき, それらの点において生じる時間経過のもとでの変位 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ の差異, すなわち, $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ が変形となる。つまり, 単位時間当たりの変形は,

$$\frac{\partial\delta\boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial t} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}',$$

となるはずだ。この数式において, 変位 $\boldsymbol{r}$ を t で微分して得られる量が, 連続体の注目点における速度という意味だ。結果として, 単位時間当たりの変形は, 連続体中の異なる点の速度の違いによって生じる。これまでの記法と同様に, 異なる 2 点間の速度の差を $\delta\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'$ と定義すれば, 連続体中の 2 点間の変形速度は,

$$\delta\boldsymbol{u} = \frac{\partial\,\delta\boldsymbol{r}}{\partial t}, \tag{2.21}$$

なる数式で記述できる。解析学における偏微分の公式を用いて, この関係式を数式変形すると,

$$\delta u_m = \frac{\partial\,\delta r_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial r_m}{\partial x_n}\delta x_n = \frac{\partial^2 r_m}{\partial t\partial x_n}\delta x_n = \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\delta x_n,$$

が得られる。得られた右辺において, δx_n への乗数は 2 階のテンソルであり, それを変形速度テンソル:

$$\dot{D}_{mn} \equiv \frac{\partial u_m}{\partial x_n}, \tag{2.22}$$

として定義する。変形速度テンソルを用いると, 変形速度は $\delta u_m = \dot{D}_{mn}\delta x_n$ のように記述できる。変形速度テンソルについても, 前項と同様に,

$$\dot{E}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right), \tag{2.23a}$$

$$\dot{F}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right), \tag{2.23b}$$

によって対称テンソル $\dot{E}_{mn}$ と交代テンソル $\dot{F}_{mn}$ を定義すれば,

$$\dot{D}_{mn} = \dot{E}_{mn} + \dot{F}_{mn}, \tag{2.24}$$

のように表現できる。そのうち, 対称テンソル $\dot{E}_{mn}$ は歪み速度テンソルと呼ばれる。さらにそのうち, 対角成分 $\dot{E}_{11}$, $\dot{E}_{22}$, $\dot{E}_{33}$ は伸縮歪み速度と呼ばれる。それ以外の成分 $\dot{E}_{mn}$ $(m \neq n)$ は, x_m 軸と m_n 軸方向の 2 辺がなす角度の変化率を表し, ずれ歪み速度と呼ばれる。また, 対角成分の和 (行列のトレース) は,

$$\dot{E}_{mm} = \frac{\partial u_m}{\partial x_m} = \nabla\cdot\boldsymbol{u}, \tag{2.25}$$

のように計算される。この数式は, アインシュタインの総和の規約を用いていることを注釈しておく。得られた量は, 単位時間当たりの体積ひずみを与えるので, 体積歪み速度と呼ばれる。当然の性質であるが, 非圧縮性の連続体では $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ が成立するため, 体積ひずみが存在しないことがこの数式からも確かめられる。

交代テンソル $\dot{F}_{mn}$ から, 渦度 $\boldsymbol{\omega}$ なるベクトルが定義される。その定義は,

$$\omega_1=-2\dot{F}_{23}=2\dot{F}_{32},\quad \omega_2=-2\dot{F}_{31}=2\dot{F}_{13},\quad \omega_3=-2\dot{F}_{12}=2\dot{F}_{21}, \tag{2.26}$$

のように記述できる。渦度は言うまでもなく, ベクトル記述では,

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}, \tag{2.27}$$

で記述できるように, 速度ベクトルの回転であり, また, 連続体の回転ベクトルの時間微分 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ である。

2.5.2　歪みのエネルギー

応力の作用を受けて変形した連続体は, その内部にエネルギーを蓄えている。その事実を示す例として, ボールを地面や机に強く押し付け, その後, 急激にその圧力を開放してみればよい。圧力を開放された途端, ボールは飛び上がるはずだ。その現象は, 応力によって蓄えられていたエネルギーが運動エネルギーに変換されたと考えればよい。本項は, 応力によって蓄えられるエネルギー, すなわち, 歪みのエネルギーを定式化する。

カルテシアン座標系に存在し, 各辺の長さが $\varDelta x_1$, $\varDelta x_2$, $\varDelta x_3$ の微小直方体に作用する応力を考えよう。その直方体は, 重心が原点に位置し, 各辺が座標の x_1 軸, x_2 軸, x_3 軸に平行となる向きに配置されている。直方体の各面には, 応力テンソル P_{mn} で決まる応力が作用している。直方体の面のうち, $x_1=\pm\varDelta x_1/2$ となる二つの面について考えよう。それらの面に作用する応力は,

$$\pm[P_{11},P_{12},P_{13}]\,\varDelta x_2\varDelta x_3,$$

である。ただし, 正符号は $x_1=\varDelta x_1/2$ の面で, 負符号は $x_1=-\varDelta x_1/2$ の面での応力である。その応力を受け, $x_1=\varDelta x_1/2$ の面が $[\varDelta r_1^+,\varDelta r_2^+,\varDelta r_3^+]$ だけ変位を生じ, $x_1=\varDelta-x_1/2$ の面が $[\varDelta r_1^-,\varDelta r_2^-,\varDelta r_3^-]$ だけ変位を生じたとする。それらの変位は, 歪みテンソル E_{mn} を用いて,

$$\begin{aligned}
\varDelta r_1^+&=E_{11}(\varDelta x_1/2)\,\frac{\varDelta x_1}{2}, & \varDelta r_1^-&=-E_{11}(-\varDelta x_1/2)\,\frac{\varDelta x_1}{2},\\
\varDelta r_2^+&=E_{21}(\varDelta x_1/2)\,\frac{\varDelta x_1}{2}, & \varDelta r_2^-&=-E_{21}(-\varDelta x_1/2)\,\frac{\varDelta x_1}{2},\\
\varDelta r_3^+&=E_{31}(\varDelta x_1/2)\,\frac{\varDelta x_1}{2}, & \varDelta r_3^-&=-E_{31}(-\varDelta x_1/2)\,\frac{\varDelta x_1}{2},
\end{aligned}$$

のように書くことができる。これらの数式で表される変位と応力の内積が連続体が失うエネルギーであるはずだから, $x_1 = \pm\varDelta x_1/2$ の面に作用する応力によって蓄えられるエネルギーは,

$$\begin{aligned}
&P_{11}\left(E_{11}(\varDelta x_1/2) - E_{11}(-\varDelta x_1/2)\right)\frac{\varDelta x_1\varDelta x_2\varDelta x_3}{2}\\
&+ P_{21}\left(E_{12}(\varDelta x_1/2) - E_{12}(-\varDelta x_1/2)\right)\frac{\varDelta x_1\varDelta x_2\varDelta x_3}{2}\\
&+ P_{31}\left(E_{13}(\varDelta x_1/2) - E_{13}(-\varDelta x_1/2)\right)\frac{\varDelta x_1\varDelta x_2\varDelta x_3}{2}\\
&= \left(P_{11}\,\mathrm{d}E_{11} + P_{21}\,\mathrm{d}E_{12} + P_{31}\,\mathrm{d}E_{13}\right)\varDelta x_1\varDelta x_2\varDelta x_3,
\end{aligned}$$

のように書くことができる。歪みテンソル E_{mn} の対称性に注意し, $x_2 = \pm x_2/2$, $x_3 = \pm x_3/2$ の面に作用する応力についてもエネルギーを加えると, 連続体に蓄えられるエネルギーは $P_{nm}\,\mathrm{d}E_{mn}\,\varDelta x_1\varDelta x_2\varDelta x_3$ となる。したがって, 応力によって単位体積あたりに蓄えられるエネルギーは,

$$\varepsilon = P_{nm}\,\mathrm{d}E_{nm}, \tag{2.28}$$

となる。

2.6 弾性体と流体

連続体は応用の作用を受け変形するが, その変形の振る舞いは連続体の種類によって異なる。すなわち, 実際の物体の応力と変形の関係は, 基本的な原理だけで説明ができず, 物性に立ち入ることが必要である。本書では, 物性に立ち入らない範囲で議論するため, 連続体の典型的なモデルを取り扱おう。典型的なモデルとして, 弾性体と流体と取り扱う。

2.6.1 弾性体

固体に作用する応力が小さければ, 変形が小さく, 力学的に剛体とみなせる。作用する応力が大きくなると変形が生じ, 連続体として取り扱わなければならない。応力に対する反応が早く, 変形や復元がただちに発生する連続体は, 弾性体と呼ばれる。理想的な弾性体のモデルは, 応力と変形が複雑さを排除し, 単純化した関係で表される。

実際の連続体は, 応力がある限界を超えると, 変形後の復元ができず, 永久に変形したままとなる。そのような性質を示す連続体は塑性体と呼ばれる。例えば, 粘土に力を作用させ形状を作る場合が塑性にあたる。塑性が現れる場合, 応力を増加する過程と減少する過

程で変形の振る舞いが異なるのだ。それによって引き起こされる永久変形は, 弾性履歴現象と呼ばれる。

複雑な分子構造をもつ高分子物質では, 応力と変形の間に時間的なずれが生じ, 一定の応力を加えている状況においても, 変形が徐々に増加して一定値に収束する振る舞い (遅延弾性), または, 徐々に変形が減少する振る舞い (応力緩和) などの現象が現れる。そのような応力と変形の間の複雑な関係は, レオロジーと呼ばれる分野で研究される。本書ではレオロジーを取り扱わず, 金属のような固い物質に作用する小さな応力に対して適用可能な単純モデルについて議論する。本項では, 単純なモデルの例として, 線形弾性体と等方弾性体を説明する。

線形弾性体　応力と変形が線形変換で対応づけられる弾性体を考えよう。数学的には, 応力テンソル P_{mn} と歪みテンソル E_{mn} が,

$$P_{mn} = C_{mnkl} E_{kl}, \tag{2.29}$$

で記述できることを想定する。そのような性質をもつ弾性体は線形弾性体と呼ばれる。そのとき, 係数 C_{nmkl} は弾性定数と呼ばれる物質固有のパラメータである。弾性定数 C_{nmkl} は 4 階のテンソルであるので, 形式上, $3^4 = 81$ 個の要素で構成される。しかし, (2.29) によって関係づけられる P_{mn} と E_{mn} が対称テンソルであり, それぞれ, 6 個の独立成分があることから, 弾性定数 C_{nmkl} の独立成分は 36 個まで減少できる。さらに, 後に示すように弾性定数 C_{nmkl} が $\{n, m\}$ と $\{k, l\}$ について対称性を示すので, 独立成分は 21 個である。

等方性弾性体　弾性体の分子構造によって物理的性質は方向に依存する。一方, 金属のように微細分子が均等に整列した構造をもつ場合, 物理的性質は方向に依存しない。方向に依存しない性質は等方性と呼ばれる。

弾性体としての性質が等方性である場合, その弾性体は等方性弾性体と呼ばれる。等方性弾性体の弾性定数テンソル C_{mnkl} は, 座標系の任意の回転に対して不変である。後に示すように, そのような条件を満足するには弾性定数の独立成分は, たかだか 2 個まで減少できる。

等方性を調べるには, 等方テンソルなるテンソルを考えるとよい。等方テンソルは任意の座標回転に対して不変となるテンソルである。これから等方テンソルの条件を満たすテンソルを挙げ, 説明していく。テンソルの階数を 2 階とすれば, δ_{mn} は座標回転によっても形が変わらない。弾性定数のような 4 階テンソルは, 2 階テンソルの積でつくられることを考えると, 座標回転に対して不変である 4 階テンソルは,

$$C_{mnkl} = \lambda \delta_{mn} \delta_{kl} + \mu \delta_{mk} \delta_{nl} + \nu \delta_{ml} \delta_{nk},$$

なる形であると予想される。ここで, 添え字 k と l を交換すると,

$$C_{mnlk} = \lambda\delta_{mn}\delta_{kl} + \mu\delta_{ml}\delta_{nk} + \nu\delta_{mk}\delta_{nl},$$

が得られるが, 弾性定数テンソルが k と l について対称であるので, $C_{mnkl} = C_{mnlk}$ であるはずだ。その要請から, $\nu = \mu$ でなければならない。それゆえに, 弾性定数 C_{mnkl} は,

$$C_{mnkl} = \lambda\delta_{mn}\delta_{kl} + \mu\,(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{nk}), \tag{2.30}$$

のように, 二つの定数 λ, μ を用いて特定する。これらの定数は, ラメの弾性定数と呼ばれる。この弾性定数を用いると, 応力テンソルは,

$$P_{mn} = \lambda\delta_{mn}E_{kk} + 2\mu E_{mn}, \tag{2.31}$$

のように特定できる。右辺の第 1 項にはアインシュタインの総和の規約が適用されていることには注意が必要である。この関係式を用いて応力テンソルのトレースを計算すると,

$$P_{mm} = (3\lambda + 2\mu)E_{mm},$$

が得られる。この関係式によると, 応力テンソルのトレースは歪みテンソルのトレースの定数倍である。得られたトレースを (2.31) に代入すると,

$$E_{mn} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}P_{kk}\delta_{mn} + \frac{1}{2\mu}P_{mn}, \tag{2.32}$$

が得られる。この関係式から, ラメの弾性定数 λ と μ が大きくなると, 大きな応力を与えても小さな歪みしか得らえない。ラメの弾性定数の無限大の極限で歪みはゼロに近づく。その極限が剛体である。

2.6.2　流体

液体や気体のように, 一定の形状をもたず自由に変形することができ, 応力によって膨張/収縮する連続体は流体と呼ばれる。本項では, 流体をいくつかに分類し, その性質を説明する。

静止流体　容器の内部で静止している気体, または, 液体を考えよう。その連続体 (気体, または, 液体) の容器の壁面に作用する応力を考える。一般的に, 応力は, 接線応力と法線応力に分解できる。気体や液体は応力を受けると自由に変形し, 応力がなくなった状態で静止するはずだ。法線応力については, 容器の壁との作用反作用でせき止められているが, 接線応力を妨げる存在がないので, 連続体が静止するためには接線応力がゼロでなければ

ならない。この現象は, 容器と接する場所だけでなく, 連続体の内部も同様であるので, 静止する気体や液体に作用する応力が法線応力のみである。このように, 法線応力しか存在しない連続体は, 流体と呼ばれる。さらに, 静止状態の流体は静止流体と呼ばれる。

静止流体の応力を考えよう。上で述べたように, 静止流体の応力は法線応力のみであるから,

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = p(\boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

のように表される。ここでは, 法線応力が面の方向 $\boldsymbol{n}$ に依存することを仮定し $p(\boldsymbol{n})$ と書いたが, 実は $\boldsymbol{n}$ に無関係である。その事実を証明しよう。法線ベクトルが x_n 方向の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_n$ であると仮定すると, 流体に作用する応力は,

$$\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{e}_n) = -p(\boldsymbol{e}_n)\,\boldsymbol{e}_n,$$

となるはずだ。これを利用し, 微小 4 面体に作用する応力の応力の釣り合いを記述すると,

$$p(\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \sum_{n=1}^{3} p(\boldsymbol{e}_n)\,\boldsymbol{e}_n\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_n),$$

となる。この数式の両辺と $\boldsymbol{e}_k$ の内積をとり, $\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta_{nk}$ であることを利用すると,

$$p(\boldsymbol{n}) = p(\boldsymbol{e}_k),$$

が得られる。この数式は, $k = 1, 2, 3$ すべてについて成立するので, 静止流体の法線応力 $p(\boldsymbol{n})$ は, 法線ベクトルとは無関係に一定である。したがって, 接線応力は,

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = -p\boldsymbol{n}, \tag{2.33}$$

あるいは,

$$p_m(\boldsymbol{n}) = -pn_m, \tag{2.34}$$

と書くことができる。ここで, p は実定数であり, $p > 0$ のときに圧力を意味するよう, 右辺に負の符号を付加しておいた。上の数式における $\boldsymbol{p}$ は静水圧と呼ばれる。そのとき, 応力テンソルは,

$$[P_{mn}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix},$$

あるいは,

$$P_{mn} = -p\delta_{mn},$$

と記述される。

非常に簡略化されたモデルのように思えるが, 法線ベクトルと無関係に圧力が一定であることは, 気体や液体における実際の現象と合致している。気体や液体に作用する応力は, 常に圧力のみである。

2.7　歪みのエネルギー

応力を受ける連続体は, 歪みを受けることによってエネルギーが内部に蓄えられる。単位体積あたりに蓄えられたエネルギー, すなわち, エネルギー密度を ϵ としよう。エネルギー密度 ϵ は, 歪みの量を表す歪みテンソル E_{mn} の関数によって記述できるはずだ。歪み量が小さいとものとして,

$$\epsilon = [\epsilon]_0 + \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial E_{mn}}\right]_0 E_{mn} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial E_{mn}\,\partial E_{kl}}\right]_0 E_{mn}E_{kl}, \tag{2.35}$$

のように歪みテンソルの 2 次関数で記述できる。ここで, 下付き添え字 0 を伴うブラケット ($[\,]_0$) は, 歪みがない状態 ($E_{mn} = 0$) での量を意味する。歪みなしの状態が平衡状態であると仮定すると, 1 階微分は $[\partial\epsilon/\partial E_{mn}]_0 = 0$ と考えるのが妥当である。また, その平衡状態でのエネルギーがゼロであると考えると, 連続体のエネルギー密度は,

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial E_{mn}\,\partial E_{kl}}\right]_0 E_{mn}E_{kl}, \tag{2.36}$$

となる。歪み量についてのエネルギー密度の 2 階の偏微分は, 4 階のテンソルと考えることができる。この数式から明らかなように, 4 階のテンソル $[\partial^2\varepsilon/\partial E_{mn}\partial E_{kl}]_0$ は, $\{m, n\}$ と $\{k, l\}$ の間で対称である。後の議論のため, (2.36) を微分しておくと,

$$\delta\epsilon = \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial E_{mn}\,\partial E_{kl}}\right]_0 E_{mn}\delta E_{kl}, \tag{2.37}$$

となる。エネルギー密度の微分 (2.37) は, 連続体を微小に変化させたときのエネルギー密度の変化を表現している。それは, 連続体に与えた応力が微小変形をもたらすことによってなした仕事と等しい。

テンソル $[\partial^2\varepsilon/\partial E_{mn}\partial E_{kl}]_0$ を特定するため, 応力のよる微小変形の仕事を計算しよう。既に導出したように, 応力によって微小体積 $\mathrm{d}V$ に作用する力は,

$$f_m\,\mathrm{d}V = \frac{\partial P_{mn}}{\partial x_n}\mathrm{d}V,$$

で与えられる。ここで, P_{mn} は応力テンソルである。その力によって連続体が歪み δr_m だけ移動すると, $f_m\delta r_m\,\mathrm{d}V$ だけ仕事をする。有限の体積 V において応力がなす仕事は, その微小量を積分すれば得られるので,

$$\delta W = \int_V \delta r_m \frac{\partial P_{mn}}{\partial x_n}\mathrm{d}V, \tag{2.38}$$

となる。この数式を計算すると,

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_V \left[\frac{\partial(\delta r_m P_{mn})}{\partial x_n} + P_{mn}\frac{\partial \delta r_m}{\partial x_n}\right]\mathrm{d}V \\ &= \int_{S=\partial V} \delta r_m P_{mk} n_k\,\mathrm{d}S + \int_V P_{mn}\delta E_{mn}\,\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

のように数式変形できる。右辺の第 1 項はガウスの法則を用いて面積分に変換した。その第 1 項は体積 V の表面 S に作用する応力の合力であり, 第 2 項は体積力を表している。

ある体積 V に対する仕事は,

$$\int_V \delta\epsilon \, \mathrm{d}V = \int_{S=\partial V} P_{kl} n_l \, \delta r_k \, \mathrm{d}S,$$

のように書くことができる。ここで, P_{mn} は応力テンソル, n_l は体積 V の表面 S に対する法線ベクトル, δr_k は応力によって与えられた微小変形量である。ベクトル解析におけるガウスの定理を用いると, この数式の右辺は,

$$\mathrm{RHS} = \int_V \frac{\partial P_{kl}\delta r_k}{\partial x_l} \, \mathrm{d}V = \int_V \left(\delta r_k \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l} + P_{kl} \frac{\partial \, \delta r_k}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}V,$$

のように計算できるが, ここで, 変形量 r_k に対して応力テンソル P_{kl} の変化が十分に小さいと仮定すれば,

$$\mathrm{RHS} = \int_V P_{kl} \frac{\partial \, \delta r_k}{\partial x_l} \mathrm{d}V = \int_V P_{kl} \delta E_{kl} \, \mathrm{d}V,$$

のように数式変形できる。任意の体積 V に対してこの関係が恒等的に成立するのであれば,

$$\delta\epsilon = P_{kl}\delta E_{kl} = C_{klmn} E_{mn} \delta E_{kl}, \tag{2.39}$$

であるはずだ。この数式は既に挙げた (2.37) と比較することによって, 弾性定数テンソル C_{klmn} が,

$$C_{klmn} = \left[\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial E_{kl} \, \partial E_{mn}} \right]_0,$$

であると特定できた。したがって, 連続体のエネルギー密度は,

$$\epsilon = \frac{1}{2} C_{klmn} E_{kl} E_{mn}, \tag{2.40}$$

であることが導かれた。この数式によって, 弾性定数テンソル C_{klmn} が添え字 $\{k, l\}$ と $\{m, n\}$ の組み合わせに対して対称でなければならないことがわかる。歪み量テンソル E_{mn} が 6 個の独立成分をもっていることから, C_{klmn} の独立成分の数は, $6 \times (6+1)/2 = 21$ 個であることが導かれる。