第1章　連続体

本書で取り扱う物体は, 質点や剛体とは異なり, 大きさをもち変形をする連続体と呼ばれる物質である。物質の変形は, 微視的には, 物質を構成する分子の配置の変化であり, 個別の分子の間に作用する分子間力が関係する。とはいえ, 物質を構成する分子は 10^{23} オーダの個数があるため, 個別の分子に作用する力を解析することは非効率的である。その代わりに, 分子の大きな集合体として変形を含む運動を取り扱う手法が必要である。本章では, 連続体を取り扱うための数学について説明し, 基本法則である連続方程式を導出する。

1.1　連続体の定義

本書で取り扱う連続体は, 質点や剛体とは異なり, 大きさをもち変形をする物質である。そのような性質をもつ物質は, 固体だけでなく, 液体や気体も含まれる。連続体に含まれるといっても, 固体と液体や気体では性質が大きく異なる。

固体は構成する分子の配列が変化しない物質である。力を加えることによって, 分子間の距離が伸縮や, 配列のねじれが生じるが, 構成分子が単独で移動しない。特に, 力の作用によって生じた変形が, 力を緩めることによって, もとの状態に戻る物体は弾性体と呼ばれる。それに対し, 力を緩めても変形が戻らない物体は塑性体と呼ばれる。本書では, 塑性体は取り扱わない。弾性体の例として, 建築における梁や, 楽器の弦が挙げられる。梁は建物を支える構造体であり, 固定方法や作用する力の分布によって変形をする。変形の度合いを見積もることは建造物の設計において重要なことである。楽器の弦は力の作用によって変形し, 力を解放することによって変形が復元し, その復元が振動となり伝搬する。その振動によって楽器は音を発するのだ。弾性体を伝搬する振動は, 地球規模の例では地震波である。地下で発生する地殻変動によって, 岩盤の歪みが波動として伝搬するのが地震波である。地震波も連続体の物理で取り扱うことができる。

液体や気体は, 弾性体とは異なり, 構成分子が個別に自由に移動できる。とはいえ, 分子間の距離には物質固有の標準値がある。その標準値とのずれが変形に対する復元力になる。液体や気体は流体と呼ばれる。例えば, 回転を加えて投げられたボールは回転方向に応じて軌跡を曲げて飛ぶ。その現象は, ボールが空気という流体の中を運動するからであ

る。流体中を運動する物体は流体から抵抗力の作用を受ける。さらに, 回転する物体は流体の循環を生成するため, その循環によって物体の軌跡を曲げる揚力を作り出す。

弾性体にしても流体にしても, 連続体は膨大な数の分子によって構成されている。構成する分子を個々に運動解析するのでなく, 大域的に見た連続体の振る舞いを取り扱うのが連続体の物理である。その意味で, 連続体の物理は熱力学に類似している。

1.2　数式による記述

分布した物質の運動を記述する手法として, ラグランジュ記述とオイラー記述の二通りを説明する。前者は運動する質点と同様, 連続体の中の特定の点について運動によって移動する場所を逐一追跡し, 記述する方法である。後者は, 連続体の個々の点の動きを気にすることなく, 絶対的な場所において, 連続体がどのように変化するかを表現する。

1.2.1　オイラー記述

オイラー記述は, ある時刻において, 特定の場所の連続体の状態を表現する表記法である。その記述法は, 連続体が運動をしていたとしても, その運動を追うことなく, 淡々と決められた時刻に決められた位置の物理量を観測することに相当する。例えば, 流れる河川に流速計を固定し, その定点における流速を計測することがオイラー記法の例である。

オイラー記法を数式で表現するには, 物理量を位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t の関数で記述するのである。なお, 位置 $\boldsymbol{x}$ は時刻 t における位置であるが, 位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t は独立の変数とみなされる。運動する連続体は, 中に含まれる物質が時間の経過とともに流れていくモデルを考えると, 特定位置 $\boldsymbol{x}$ における物質は時間 t の経過とともに推移していく。しかし, 物質の運動を気にすることなく, ある時刻 t における $\boldsymbol{x}$ での物理量がオイラー記述で表現されるのだ。その場合, 流速 $\boldsymbol{u}$ は, $\boldsymbol{x}$ が時刻 t の関数であるとの前提で,

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t},$$

のように定義される。さらに, 質点の物理と同様に, 速度の時間微分によって加速度:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial t^2},$$

が定義される。この加速度は質点の加速度と等しいとは限らない。なぜなら, この加速度はある定点を通過する速度の変化を扱っているのであり, 流体中の特定の小片の速度変化ではないからだ。特定の小片の速度変化は, 次項で説明するラグランジュ法の加速度に相当する。

1.2.2　ラグランジュ記述

ラグランジュ記述は質点の運動の記述と同一の記述法である。ラグランジュ記述とは, 連続体の中の特定の点 $\boldsymbol{x}$ に注目し, その特定の点を追跡した様子を数学表現するのだ。例えば, 位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t の関数 $A(\boldsymbol{x},t)$ を考えよう。ラグランジュ記述では, 変数 $\boldsymbol{x}$ に t の依存性が隠れていることを想定する。例えば, $t=0$ のとき, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ であると仮定し, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0,t)$ と考えればよい。そのような仮定の下では, t についての微分は単に $\partial A/\partial t$ となるのでなく,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}t} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{D}t} \\
&= \frac{\partial A}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)A(\boldsymbol{x},t),
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

のように計算できる。微分を与える演算子は常微分演算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ でもよいのだが, ラグランジュ記法における微分を明示するため, 習慣的に $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ なる演算子が用いられる。ラグランジュ微分の演算子は,

$$
\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla),
\tag{1.2}
$$

数式 (1.1) の導出には, 解析学における陰関数の公式が適用されている。さらに, 位置 $\boldsymbol{x}\equiv[x,y,z]$ には時刻 t の依存性しか含まれていないことから $\mathrm{D}\boldsymbol{x}/\mathrm{D}t=\boldsymbol{u}$ が成立するはずなので, 数式 (1.1) が得られる。

ラグランジュ微分 (1.1) は, 図 1.1 によって説明することができる。この図は, ラグランジュ微分とオイラー微分の違いを示すことができる。この図は, 1 次元空間を流れる連続体を表している。その連続体は物理量 A を伴って流れている。図中の濃い曲線が時刻 t の状態, 淡く太い曲線が時刻 $t-\mathit{\Delta}t$ の状態を表す。 連続体は物理量 A が変化しながら速度 u

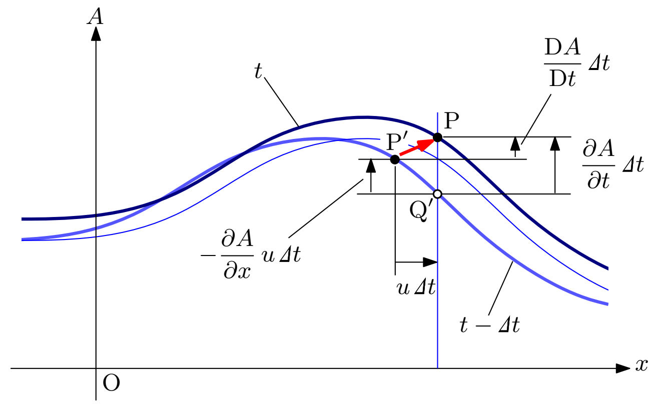

図 1.1: オイラー微分とラグランジュ微分

で運動している。例えば, 時刻 t に点 P に存在する連続体が, 時刻 $t-\mathit{\Delta}t$ に点 P′ に存在していたとする。点 P における偏微分 $\partial A/\partial t$ は点 Q′ から点 P への変化率であり, それはオ

イラー微分である。それに対し, 点 P に存在する連続体の小片に着目して時間について偏微分すると, 点 P′ から点 P への変化率が得られる。それがラグランジュ微分である。この図から, ラグランジュ微分が (1.1) となることが理解できるだろう。

関数 $A(\boldsymbol{x}, t)$ をベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ に拡張することも容易である。ベクトル $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} \equiv [A_x, A_y, A_z]$ のように成分表示できたとき,

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \cdot \nabla A_x \\ \boldsymbol{u} \cdot \nabla A_y \\ \boldsymbol{u} \cdot \nabla A_z \end{bmatrix},$$

のように記号を定義する。その定義された記号によって, ラグランジュ微分は,

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.3}$$

のように拡張される。ラグランジュ記法によると, 位置 $\boldsymbol{x}$ における連続体の加速度 $\boldsymbol{a}$ は,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}, \tag{1.4}$$

のように記述できる。得られた数式の右辺の第 1 項はオイラー記述による加速度である。つまり, 第 2 項 $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$ がオイラー記述とラグランジュ記述による加速度の違いである。例えば, 速度 $\boldsymbol{u}$ が場所によらず一定, すなわち, 一様流ならば二つの記法による加速度は等しい。

1.3　連続の方程式

時刻 t_0 において体積 V_0 に含まれる連続体が移動し, 時刻 t において体積 V を占めるように変化したとする。また, 位置 $\boldsymbol{x}$ における連続体の密度が $\rho(\boldsymbol{x})$ であるとする。連続体の質量が時刻 t_0 と t で一定であるはずなので,

$$\int_{V_0} \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V_0 = \int_V \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V,$$

が成立する。この数式は, 移動する連続体を追跡して得られる数式であるのでラグランジュ記述である。時刻 t における連続体の位置 $\boldsymbol{x} \equiv [x_1, x_2, x_3]$ が, 時刻 t_0 における位置 $\boldsymbol{x}_0 \equiv [x_{01}, x_{02}, x_{03}]$ に座標変換されると仮定すれば, 連続体の質量は,

$$\int_V \rho(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}V = \int_V \rho(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})}\,\mathrm{d}x_{01}\,\mathrm{d}x_{02}\,\mathrm{d}x_{03}, \tag{1.5}$$

のように書ける。右辺に記述した記号:

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_{01},x_{02},x_{03})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{01}} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{02}} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{03}} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{01}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{02}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{03}} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{01}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{02}} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_{03}} \end{vmatrix},$$

はヤコビアンと呼ばれる行列式である。数式 (1.5) が質量保存則を満たすためには,

$$\rho_0(\boldsymbol{x}_0) = \rho(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_{01},x_{02},x_{03})}, \tag{1.6}$$

でなければならない。方程式 (1.6) はラグランジュ記述における質量保存側である。この方程式はラグランジュの連続方程式とも呼ばれる。

連続体が非圧縮の連続体の場合, 密度が運動によって変化しないので, $\rho(\boldsymbol{x}) = \rho_0(\boldsymbol{x}_0)$ なる等式が成立する。すなわち,

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_{01},x_{02},x_{03})} = 1,$$

が非圧縮の連続体を特徴づける数式である。

オイラー記述における連続方程式は, 異なるアプローチで導かれる。ある体積 V を考え, その表面が S であるとする。その表面における外向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。そのとき, 連続体の運動速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ の外向き成分は $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ となるはずだ。つまり, 連続体は表面 S の特定の場所から, 単位時間あたりに $\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ だけ質量が流出する。したがって, $\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ を S 全体にわたって積分すると, 体積 V に含まれる連続体の質量の単位時間あたりの減少に等しくなる。その性質を数式表現すると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = -\int_S \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

となる。この数式は, ガウスの積分公式を用いて,

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_V \nabla\cdot\rho\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V,$$

のように書き換えられる。この積分は,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{u} = 0, \tag{1.7}$$

なる数式で表現することもできる。この数式がオイラー記述における連続方程式である。連続方程式 (1.7) は, 当然, ラグランジュ微分を用いて記述することもできる。微分演算子 (1.2) とベクトルの微分公式:

$$\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u} = \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho,$$

に注意すると, 連続方程式は,

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{1.8}$$

のように書き換えることができる。連続方程式 (1.7) と (1.8) はともにオイラーの連続方程式と呼ばれる。

非圧縮の連続体では連続方程式がかなり簡素化できる。既に示したように, 非圧縮の連続体では $\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t = 0$ となる。この性質を (1.8) に代入すると,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{1.9}$$

が得られる