付 録C　第2種スターリング数の一般項

第 2 種スターリング数は, 漸化式によって計算できることができるが, 一般項を計算する公式も知られている。しかし, 漸化式からその公式を得るのは容易ではなく, むしろ, 組み合わせ数学における考察を用いたほうがよい。本章では, 組み合わせ数学の考察によって, 第 2 種スターリング数の一般項を導出する。

第 2 種スターリング数は, 組み合わせ数学において, n 個のボールを r 個の箱に入れる組み合わせの数を与える。ただし, ボールには番号が書いてあり個体を識別できるようになっていて, 箱は特に固体識別をしないものとする。

第 2 種スターリング数を導出するには, もう少し厳しい条件を課してみよう。すなわち, ボールも箱も個体識別ができるという条件である。すべてのボールを箱に入れた結果として, 空箱が存在してもよければ, 組み合わせの数は, r^n となる。それを示すには表 C.1 のような, ボールと箱の対応表を書くとよいだろう。この対応表は, 5 つのボール (0, 1, 2, 3, 4) を収納する箱の番号 (0,1,2) を示した表である。この表によって, 箱に入れる組み合わせをすべて書くことができる。この表の各行は, 5 桁の 3 進数表現とみなすことができる。そう考えると, 5 個のボールを 3 個の箱に入れる組み合わせは $3^5 = 243$ 通りである。ただし, 前に書いたように, 空箱が存在することも許容する。

表 C.1: ボールを入れる箱の番号 (ボール 5 個, 箱 3 個)

	0	1	2	3	4
0:	0	0	0	0	0
1:	0	0	0	0	1
2:	0	0	0	0	2
3:	0	0	0	1	0
4:	0	0	0	1	1
	⋮				
241:	2	2	2	2	1
242:	2	2	2	2	2

上の例を一般化して, ボールが n 個, 箱が r 個の場合, 各ボールを入れる箱を示した対応表は, n 桁の r 進数とみなすことができる。したがって, n 個のボールを r 個の箱に入れる組み合わせは, 空箱の存在を許容した場合, r^n 通り存在することになる。

空箱を許容しない場合の組み合わせの数を考えよう。まず, 箱が 1 つの場合, 空箱が存在することはありえないので, 組み合わせの数は,

$$S_{n1} = 1^n = 1,$$

である。箱が 2 つの場合, 求める組み合わせの数は,

$$S_{n2} = 2^n - \binom{2}{1} S_{n1},$$

となる。右辺の第 2 項が空箱が生じる組み合わせの数である。前半の乗数 $\binom{2}{1}$ は空箱とする箱を選ぶ組み合わせの数であり, S_{n1} は残った箱に n 個のボールを入れる組み合わせの数である。箱が 3 個の場合, ボールを入れる組み合わせは,

$$S_{n3} = 3^n - \binom{3}{1} S_{n2} - \binom{3}{2} S_{n1},$$

となる。同様に考察すると, 空箱が生じないように n 個のボールを r 個の箱に入れる組み合わせの数は,

$$S_{n1} = 1, \quad S_{nr} = r^n - \sum_{p=1}^{r-1} \binom{r}{p} S_{np}, \tag{C.1}$$

なる漸化式にしたがう。しかし, この漸化式から S_{nr} の一般項を求めるのは容易ではないので, $r = 1, 2, \ldots$ を適用したときの S_{nr} を具体的に求め, 規則性を探ってみよう。具体的に $r = 1, \ldots, 6$ について S_{nr} を計算すると,

$$\begin{aligned}
S_{n1} &= 1^n, \\
S_{n2} &= 1^n - 2 \cdot 2^n, \\
S_{n3} &= 1^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \\
S_{n4} &= 1^n - 4 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n - 4 \cdot 4^n, \\
S_{n5} &= 1^n - 5 \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 4^n + 5 \cdot 5^n, \\
S_{n6} &= 1^n - 10 \cdot 10^n + 15 \cdot 3^n - 20 \cdot 4^n + 15 \cdot 5^n - 6 \cdot 6^n,
\end{aligned}$$

が得られる。この結果から,

$$S_{nr} = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} k^n, \tag{C.2}$$

が成立することが予想される。この予想が正しいことを数学的帰納法によって証明しよう。まず, $r = 1$ のときにこの予想が正しいのは既に示したとおりである。この予想をもとに $S_{n,r+1}$ を計算した結果, (C.2) と同様の数式を得れば, 予想は正しいと判断できるだろ

う。漸化式 (C.1) から始め, $S_{n,r+1}$ を計算すると,

$$
\begin{aligned}
S_{n,r+1} &= (r+1)^n - \sum_{p=1}^{r} \binom{r+1}{p} S_{np} \\
&= (r+1)^n - \sum_{p=1}^{r} \binom{r+1}{p} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n,
\end{aligned}
$$

のように計算できる。ここで, 添え字 p と k の組み合わせに注意して数式を変形すると,

$$
\begin{aligned}
S_{n,r+1} &= (r+1)^n - \sum_{k=1}^{r} \sum_{p=k}^{r} (-1)^{p-k} \binom{r+1}{p} \binom{p}{k} k^n \\
&= (r+1)^n - \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{p=k}^{r+1} (-1)^{p-k} \binom{r+1}{p} \binom{p}{k} - (-1)^{r-k} \binom{r+1}{k} \right] k^n,
\end{aligned}
$$

が得られる。ここで, 二項係数に関する公式 $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{a-b}$ に注意すると,

$$
\begin{aligned}
S_{n,r+1} &= (r+1)^n - \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_{p=k}^{r+1} (-1)^{p-k} \binom{r+1}{k} \binom{r+1-k}{r+1-p} - (-1)^{r-k} \binom{r+1}{k} \right] k^n \\
&= (r+1)^n - \sum_{k=1}^{r} \left[\binom{r+1}{k} \sum_{p=0}^{r+1-k} (-1)^{p-(r-k)} \binom{r+1-k}{p} - (-1)^{r-k} \binom{r+1}{k} \right] k^n,
\end{aligned}
$$

のように計算できる。さらに, 二項係数に関する別の公式:

$$
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,
$$

に注意すると, 上式のブラケット内の第 1 項がゼロであることがわかるので,

$$
S_{n,r+1} = (r+1)^n + \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r+1-k} \binom{r+1}{k} k^n = \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{r+1-k} \binom{r+1}{k} k^n,
$$

が導かれる。この結果は, (C.2) が r を $r+1$ で置き換えても成立することを示している。よって, (C.2) が成立することが帰納的に証明できたことになる。

上で計算した S_{nr} は, ボール n 個を箱 r 個に入れる組み合わせの数であり, しかも, ボールも箱も番号付けされて区別できる条件である。箱に番号がつけられず互いに区別ができない場合, 箱の数に起因する自由度 $r!$ が生じるので, ボール n 個を箱 r 個に入れる組み合わせの数は $S_{nr}/r!$ となる。この組み合わせの数は第 2 種スターリング数 $\left\{ {n \atop r} \right\}$ に等しいので,

$$
\left\{ {n \atop r} \right\} = \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} k^n, \tag{C.3}
$$

なる関係が導かれる。