付 録B　部分分数展開

本文の中で, 余接関数やベルヌーイ多項式の母関数などの部分分数展開を扱った。取り扱う関数が, たかだか 1 位の極しかもたない有理型関数は, 本文で実行したような部分分数展開が可能である。本節では, その性質を証明する。

原点で正則で, たかだか 1 位の極しかもたない関数 $f(z)$ があったとする。この関数の極に z_n のような番号付けをし, それに対応する留数を r_n とする。ただし, 極 z_n は $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \cdots$ となるように番号付けされている。さらに, $|z_n| < R_n < |z_{n+1}|$ のような距離 R_n を選び, $|z| = R_n$ となる閉曲線 C_n を考える。閉曲線 C_n は, 極 z_1 から z_n までの極を取り囲む。ここで, 自然数 q が与えられ, 閉曲線 C_n の上で $|f(z)| = o(R^q)$ となるならば, 関数 $f(z)$ は,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{z^j}{z_n^{j+1}} \right), \tag{B.1}$$

のように部分分数展開できる。この関係式において, n についての総和が無限大までとられているが, 極の数が有限であるときは, 総和はすべての極を網羅するまでとられることを意味する。

上に示した部分分数展開は $g(\zeta) \equiv z^q f(\zeta)/\zeta^q(\zeta - z)$ を閉曲線 C_n 上で周回積分することによって証明できる。積分路 C_n の上において, $|f(\zeta)| = o(R^q)$ であることから, 被積分関数の絶対値は $|g(\zeta)| = o(R^{-1})$ となる。したがって, $n \to \infty$ としたとき, $g(\zeta)$ を C_n に沿って積分した結果はゼロとなる。

一方, $f(\zeta)$ の周回積分は留数定理によっても計算することができる。そのために, 被積分関数 $g(\zeta)$ の極 $\zeta = 0, z, z_n$ について留数を評価してみよう。まず, $\zeta = 0$ に対応する留数の評価を始めるが, $\zeta = 0$ は q 位の極, すなわち, 2 位以上の極である可能性があるので留数の評価には注意が必要である。被積分関数の分母が $\zeta^q(\zeta - z)$ のような積になっているので, 被積分関数を $\zeta = 0$ 中心にしたローラン展開となるように変形すると,

$$g(\zeta) = \frac{z^q f(\zeta)}{\zeta^q(\zeta - z)} = -f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{k-q}}{z^{k-q+1}},$$

なる形になる。さらに, 原点で正則な関数 $f(\zeta)$ が $\zeta = 0$ 中心にテイラー展開できることを

利用すると，被積分関数 $g(\zeta)$ の展開式は,

$$g(\zeta) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}}{j!}\zeta^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{k-q}}{z^{k-q+1}} = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}}{j!}\frac{\zeta^{j+k-q}}{z^{k-q+1}},$$

のように変形される。留数がローラン展開における -1 次の係数であることから, $j+k-q=-1$ の条件で係数を集めれば, 被積分関数 $g(\zeta)$ の留数を得ることができる。すなわち, その留数は

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=0} g(\zeta) = -\sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j,$$

である。ここで注意するのは, 添え字 j の範囲である。上にも書いたように, 留数に関係する添え字の条件は $j = q-k-1$ であるが, k を 0 から増加させていったとき, j は $q-1$ から 1 ずつ減少する。添え字 j はゼロ以上の整数であるので, j の可動範囲は 0 から $q-1$ ということになる。

次に, $\zeta = z$ における留数を計算する。この極 $\zeta = z$ は 1 位の極であるので, 先ほどのように真面目にローラン展開しなくても留数を評価できる。その留数は,

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=z} g(\zeta) = \lim_{\zeta\to z}(\zeta - z)g(\zeta) = f(z),$$

のようにして計算できる。最後に, $\zeta = z_n$ についての留数であるが, $\zeta = z_n$ も 1 位の極であるので,

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=z_n} g(\zeta) = \lim_{\zeta\to z_n}(\zeta - z_n)\frac{z^q f(\zeta)}{\zeta^q(\zeta - z)} = -\frac{z^q r_n}{z_n^q(z-z_n)},$$

のようにして計算できる。ただし, この式の右辺は, さらに部分分数展開によって,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{\zeta=z_n} g(\zeta) &= -r_n\left(\frac{z^{q-1}}{z_n^{q-1}(z-z_n)} + \frac{z^{q-1}}{z_n^q}\right)\\ &= -r_n\left(\frac{z^{q-1}}{z_n^{q-1}(z-z_n)} + \frac{z^{q-2}}{z_n^{q-1}} + \frac{z^{q-1}}{z_n^q}\right)\\ &= -r_n\left(\frac{1}{z-z_n} + \sum_{j=0}^{q-1}\frac{z^j}{z_n^{j+1}}\right),\end{aligned}$$

のように変形される。よって, 留数定理により, 積分路 C_n における $g(\zeta) \equiv z^q f(\zeta)/\zeta^q(\zeta - z)$ の周回積分は, $n\to\infty$ としたとき,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{z^q f(\zeta)}{\zeta^q(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta\\ &\quad = f(z) - \sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}z^j - \sum_{n=1}^{\infty} r_n\left(\frac{1}{z-z_n} + \sum_{j=0}^{q-1}\frac{z^j}{z_n^{j+1}}\right),\end{aligned}$$

のように表される。既に述べたように, 積分路 C_n の上で $|f(z)| = o(R^q)$ であれば, その周回積分はゼロであるので,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{z^j}{z_n^{j+1}} \right),$$

が成立する。この証明において, 積分路が複素平面上の円であることを仮定したが, それは単に閉曲線 C_n が z_1 から z_n までの極を囲んでいることを意味しているだけであるので, 積分路とする閉曲線 C_n は必ずしも円である必要はない。積分路上の任意の点における原点からの距離を R としたとき, その場所において $|g(z)| = o(R^{-1})$ であれば, $g(z)$ を C_n に沿って周回積分した結果は必ずゼロとなるので, 任意形状の積分路を仮定したとしても, この部分分数展開は成立する。