付 録A　微積分の公式

本書では, 数式変形をする過程で, 様々な数学公式を利用している。本文の中で証明を交えている公式もあるが, 本文の流れを妨げる理由で本文中での証明や解説を省略した公式もある。そのような改めて解説が必要であると思われる数学公式について, 本章で取り扱いたい。

A.1　ロピタルの定理

解析学では時として, 分子と分母がともにゼロに近い場合, または, 分子と分母がともに無限大に発散するような分数を計算する必要性に迫られる。そのような局面において便利なツールとなるのがロピタルの定理である。ロピタルの定理を以下に記述する。

ロピタルの定理　関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x = a$ で微分可能であり, $f(a) = g(a) = 0$ であり, かつ, $g'(a) \neq 0$ であるとき,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

が成立する。

ロピタルの定理の証明は容易である。変数 x を $x \equiv a + \varepsilon$ と置き換えると, $x \to a$ は $\varepsilon \to 0$ と置き換えるとよい。また, $f(x)$ と $g(x)$ が $x = a$ で微分可能であるので, $f(a+\varepsilon) = f(a) + \varepsilon f'(a) + o(\varepsilon)$, $g(a+\varepsilon) = g(a) + \varepsilon g'(a) + o(\varepsilon)$ が成立するはずである。したがって, ロピタルの定理の左辺は,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon)}{g(a+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a) + \varepsilon f'(a) + o(\varepsilon)}{g(a) + \varepsilon g'(a) + o(\varepsilon)} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon f'(a) + o(\varepsilon)}{\varepsilon g'(a) + o(\varepsilon)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},
\end{aligned}$$

のように計算できる。なお, この計算を見ると, ε は正でも負でもよいことがわかるだろう。つまり, ロピタルの定理が成立することが証明された。¶

ロピタルの定理は, $f(a) = \pm\infty$, $g(z) = \pm\infty$ のときにも成立するので, それを証明し

よう。今度は, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x=a$ で発散するので, その場所で連続関数ではない。そのため, $x \to a$ ではなく, $x \to a-0$ と $x \to a+0$ のように, 負の方向から a に近づける場合と, 正の方向から近づける場合を個別に考察する必要がある。関数 $f(x)$ と $g(x)$ が, $x \to a-0$ の極限で $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ であるなら,

$$\lim_{x\to a-0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to a-0} \frac{1}{g(x)} = 0,$$

となるので, $f(x)$ と $g(x)$ の代わりに $1/f(x)$ と $1/g(x)$ を使えば, ロピタルの定理を適用することができる。その考え方でロピタルの定理を適用すると,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a-0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a-0} \frac{g'(x)/[g(x)]^2}{f'(x)/[f(x)]^2} \\ &= \lim_{x\to a-0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 = \lim_{x\to a-0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left(\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2,\end{aligned}$$

となる。この結果を $f(x)/g(x)$ の極限について解くと,

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{A.1}$$

が導出できる。つまり, $x \to a-0$ の極限で $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ となる場合にもロピタルの定理がそのまま適用できる。一方, $x \to a+0$ の極限でも同様にロピタルの定理を証明できるはずである。¶

極限値を計算することを考えると, ロピタルの定理が分子と分母がともにゼロである場合と, ともに無限大になる場合の双方で適用できることは重要である。その理由は $x \to 0$ の極限で $x \log x$ を評価することで示すことができる。その値を評価するにあたり, $x/(1/\log x)$ という形にすると分子と分母がゼロになるのでロピタルの定理が適用できる。ロピタルの定理を適用すると,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1/\log x} = -\lim_{x\to 0} x\,(\log x)^2,$$

が得られ, ますます極限値がわかりにくくなる。それに対して, 分子と分母がともに無限大になる形態 $\log x/(1/x)$ でロピタルの定理を適用すると,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} = -\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0,$$

となるので極限が得られた。この例を見ると, ロピタルの定理が分子と分母がゼロである場合だけでなく, 無限大である場合にも成立すると主張することに価値があるのだ。

指数関数の発散速度　指数関数 $e^{\alpha x}$ (ただし, $\alpha > 0$) は, $x \to \infty$ に対して, いかなる多項式よりも速く発散する。これについては, $x \to \infty$ における $e^{\alpha x}$ と x^n の振る舞いを調べれば証明できる。ロピタルの定理を繰り返し使用すれば,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha e^{\alpha x}}{n x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{n!} = \infty,$$

が得られる。したがって, 指数関数 $e^{\alpha x}$ がいかなる多項式よりも速く発散することが示された。

対数関数の発散速度　対数関数 $\log x$ は $x \to \infty$ に対して, いかなる多項式よりも発散が遅い。これについては, $x \to \infty$ における $\log x$ と x^α (ただし, $\alpha > 0$) の振る舞いを調べれば証明できる。ロピタルの定理を適用すれば,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

となるので, 対数関数 $\log x$ がいかなる多項式よりも発散が遅いことが示された。

余接関数の発散速度　余接関数 $\cot x$ は $x = 0$ で発散するが, その速度は $1/x$ と同程度である。それを示すには, $\cot x/x^{-1}$ が $x \to 0$ の極限で定数になることを証明すればよい。分子も分母も $x \to 0$ の極限で発散するので, ロピタルの定理を用いると,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{1/x} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1,$$

となる。この計算において, $x/\sin x \to 1$ の極限は, 三角関数の微分における基本的な関係式である。後に説明するが, $x/\sin x$ の極限表現はロピタルの定理で導出してはならない。話を戻し, 上に書いた極限表現から,

$$\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = 0,$$

であることが導かれる。この結果は, 余接関数 $\cot x$ が,

$$\cot x = \frac{1}{x} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

のように級数展開できることを示唆している。

ゼロのゼロ乗　ゼロではない数 α のゼロ乗は 1 (形式的には $\alpha^0 = 1$) である。それは, 指数に関して $\alpha^{x-y} = \alpha^x/\alpha^y$ が成り立つことから導かれる。つまり, $\alpha^0 = \alpha^{1-1} = \alpha/\alpha = 1$ ということである。このような計算を使う限り, $\alpha = 0$ に対するゼロ乗が定義できない。その方法に代わり, x^x について $x \to 0$ における極限を評価することによってゼロのゼロ乗を定義すると,

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} \exp(x \log x) = \exp\left(\lim_{x\to 0} x \log x\right) = 1,$$

が得られる。この関係式を得るために, 前に示したように, $x \to 0$ の極限で $x \log x \to 0$ が成立することを利用した。関数 x^x は図 A.1 のような極限を描き, 上で証明したように, $x \to 0$ の極限で 1 に等しいことが確認できる。したがって, ゼロのゼロ乗を x^x の極限の意味で定義すると 1 である。

無限大のゼロ乗　この場合もゼロのゼロ乗に類似の形態 $(1/x)^x$ について $x \to 0$ における極限を評価すればよい。計算を実行すると，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}\exp\left(x\log\frac{1}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log(1/x)}{1/x}\right)$$
$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\,x\,(1/x^2)}{-\,1/x^2}\right) = \exp 0 = 1,$$

が得られる。第 2 行目への数式変形でロピタルの定理を利用した。関数 $(1/x)^x$ は図 A.1 のようなグラフを描き，確かに，$x \to 0$ の極限で 1 に等しい。したがって，無限大のゼロ乗は $(1/x)^x$ の極限の意味で定義すると 1 である。

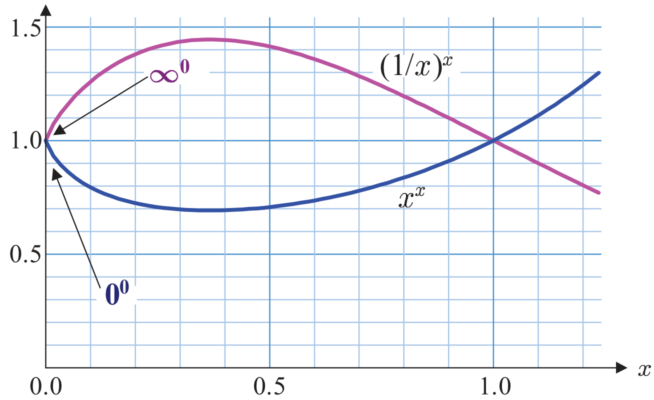

図 A.1: ゼロ乗にむかう関数の極限

ロピタルの定理の注意点　ロピタルの定理は関数の極限を評価するための便利な手段であるが，その適用には注意が必要である。例えば，$x \to 0$ における $\sin x/x$ の極限をロピタルの定理によって評価すると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1,$$

のようになる。これを見ると，$\sin x/x$ の極限値がロピタルの定理によって評価されたように見えるが，そうではない。上の数式変形にも示されるように，この極限値の評価には $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを利用している。しかし，$\sin x$ の導関数を導くには $\sin x/x \to 1$ である知識が必要なのである。つまり，ロピタルの定理で上の計算が導かれるのは当然の結果であり，ロピタルの定理が導いた結果ではないということである。

A.2 ウォリスの公式

正弦関数のべき乗 (n 乗) を区間 $[0, \pi/2]$ で定積分すると, その結果に面白い法則が成立する。その法則を与えるのがウォリスの公式である。ウォリスの公式によると,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n} \frac{\pi}{2}, \tag{A.2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, \mathrm{d}x = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n+1)}, \tag{A.3}$$

が成立する。べき指数が偶数か奇数かで法則がわずかに異なるが, どちらとも, 類似した法則を示すことが面白い。この公式は次のようにして導出できる。まず, $\sin^n x$ の定積分を I_n とおくと, 部分積分の公式を用いて,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x \\
&= -\Big[\cos x \sin^{n-1} x\Big]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n),
\end{aligned}$$

のように計算できる。よって, 積分 I_n は漸化式 $I_n = (n-1)/n \cdot I_{n-1}$ にしたがう。ここで,

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = 1,$$

であることに注意するとウォリスの公式が得られる。ウォリスの公式は, 余弦関数に対しても同一の法則:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, \mathrm{d}x = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n} \frac{\pi}{2}, \tag{A.4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, \mathrm{d}x = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n+1)}, \tag{A.5}$$

が成立する。余弦関数に対しても同一法則が成立することは, 上と同様の手順で証明できるが, 図を用いても成立することが納得できる。図***には正弦関数と余弦関数のべき乗が描かれている。正弦関数と余弦関数は x 軸方向に平行移動した関係にある。正弦関数のべき乗の積分が山の左半分の面積であるなら, 余弦関数のべき乗の積分は山の右半分の面積である。山が左右対称であるので, 余弦関数のウォリスの公式は正弦関数のウォリスの公式と同一となるのだ。

ウォリスの公式を利用すると円周率に関する面白い公式が得られる。その関係式は, $0 \leq x \leq \pi/2$ において $\sin^{2n-1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n+1} x$ であることを利用すれば得られる。この関係式の等号が成立するのは $x = 0, \pi/2$ のときだけであるので, 関係式を区間

$[0, \pi/2]$ で定積分した結果は, $I_{2n-1} < I_{2n} < I_{2n+1}$ なる関係がある。この定積分に関する不等式にウォリスの公式を代入すると,

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)} < \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)\cdot2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)(2n+1)},$$

なる関係に変形される。ここで, $n\to\infty$ とすると, $2n/(2n+1)\to1$ であるので, この関係式はさらに,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2}{1\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)},$$

のように変形される。この関係式は、

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}, \tag{A.6}$$

のような無限積として書くこともできる。この関係式はウォリス積と呼ばれる。この関係式は, 円周率を計算する効率のよいアルゴリズムではないが, 有理数の積が円周率に収束するという面白い性質を表している。その性質を表 A.1 に示そう。ウォリス積を有限の積で打ち切ったときの打ち切り項数と, ウォリス積を 2 倍した値を表に示している。 この表

表 A.1: ウォリス積の 2 倍の円周率への収束

Num of product	Double of Wallis prod
10^1	3.0677038066
10^2	3.1337874906
10^3	3.1408077460
10^4	3.1415141186
10^5	3.1415847996
10^6	3.1415918681
10^7	3.1415925750
10^8	3.1415926394

によると, 項数の増加とともにウォリス積の 2 倍が円周率に近づいていくのがわかる。しかし, 1 億項の積であっても, 小数点以下の 7 桁までしか正しくないので, 効率よく円周率を計算する手法とはお世辞にも言えない。