第5章　ベルヌーイ多項式とオイラー多項式

ベルヌーイ数やオイラー数に関する性質を調べる上で, それらの数列を係数にもつべき級数, いわゆるベルヌーイ多項式とオイラー多項式を導入すると便利なことがある。本節では, ベルヌーイ多項式とオイラー多項式を導入し, それらの応用例として, 偶数ゼータ関数などの評価が容易にできることを示す。

5.1　ベルヌーイ多項式

ベルヌーイ多項式は, ベルヌーイ数を展開係数に含む x のべき級数である。後に解説するが, ベルヌーイ数は整数のべき乗和と同じ形式の関数である。ベルヌーイ多項式の具体的な形は, 負でない整数 n を用い,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \tag{5.1}$$

なる数式によって定義される。この数式は n 次のベルヌーイ多項式と呼ばれる。この定義式から容易にわかるように, ベルヌーイ多項式は $B_n = B_n(0)$ によってベルヌーイ数と関係づけられる。具体的にベルヌーイ多項式をいくつか書いていくと,

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, & B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, & B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, & B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,
\end{aligned}$$

が得られる。ベルヌーイ多項式のうち, 1 次から 3 次までの多項式は図 5.1 に示す曲線を描く。後に改めて示すが, $n-1$ 次のベルヌーイ多項式は, n 次の多項式の導関数を $1/n$ 倍した値である。

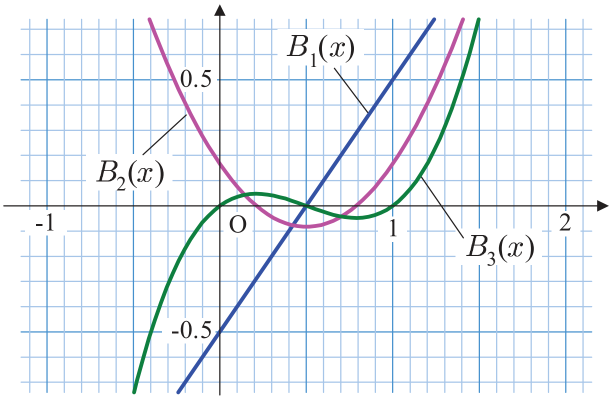

図 5.1: ベルヌーイ多項式

5.1.1 ベルヌーイ多項式の性質

ベルヌーイ多項式には次に示すような性質がある。これらの性質は, ベルヌーイ多項式とベルヌーイ数の関係や, ベルヌーイ数の導関数における関係を表している。

$$B_n(0) = B_n, \tag{5.2}$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), \tag{5.3}$$

$$B_{2n}(1/2) = \frac{2-2^{2n}}{2^{2n}} B_{2n}, \qquad B_{2n+1}(1/2) = 0, \tag{5.4}$$

$$B_n'(x) = n\, B_{n-1}(x), \tag{5.5}$$

まず, 第 1 の性質はベルヌーイ多項式の定義から容易に見出すことができる。第 2 の性質は, ベルヌーイ多項式の値が $x = 1/2$ について線対称であることを表している。その対称性は, 次のようにして証明することができる。

$$\begin{aligned} B_n(1-x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{k!} (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{k!\, j!\, (n-k-j)!} (-1)^{n-k-j} B_k x^{n-k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^{n-k} B_j x^{n-k}. \end{aligned}$$

ここで, $k \geq 2$ に対して成立するベルヌーイ数の漸化式:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} B_j = 0,$$

に注意すると, $B_n(1-x)$ は,

$$\begin{aligned}B_n(1-x) &= (-1)^n B_0 x^n + \binom{n}{0}\binom{1}{0}(-1)^{n-1}B_0 x^{n-1} \\ &\qquad\qquad + \binom{n}{1}\binom{1}{1}(-1)^{n-1}B_1 x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}B_k(-1)^{n-k}x^{n-k} \\ &= (-1)^n\left[x^n - \frac{n}{2}x^{n-1}\right] + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}B_k x^{n-k}.\end{aligned}$$

のように変形できる。この右辺には, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ が代入されている。さらに, ベルヌーイ数 B_k が, $k > 2$ の奇数のときにゼロとなる事実から, $B_n(1-x)$ は,

$$B_n(1-x) = (-1)^n\left[x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\right] = (-1)^n B_n(x),$$

のように書いても不都合は生じない。この証明は $k \geq 2$ を前提に数式変形した結果であるが, 第 2 の性質は, $k = 0, 1$ に対しても成立する。なぜなら, $B_0(x) = 1$ であることから $B_0(1-x) = B_0(x)$, さらに, $B_1(x) = x - 1/2$ であることから $B_1(1-x) = -B_1(x)$ となるからである。よって, 第 2 の性質を証明することができた。

第 3 の性質は, 指数型母関数を導入して第 5.1.3 項で証明することにする。第 4 の性質は, 前に述べたように, $n-1$ 次のベルヌーイ多項式が, n 次のベルヌーイ多項式の導関数を $1/n$ 倍すれば得られることを意味している。この性質は, ベルヌーイ多項式の定義式から容易に証明することができる。

5.1.2 べき乗和との関係

ベルヌーイ多項式はべき乗和と深い関係がある。というよりも, 定義域が整数のみであったべき乗和を, 複素数全体を定義域とするように解析接続した関数と言ってもよい。その証拠に n 次のベルヌーイ多項式を変形すると,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k} = B_n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k x^{n-k} = B_n + nS_{n-1}(x),$$

が得られる。この数式の右辺に記述した $S_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次のべき乗和, すなわち, $0^{n-1} + 1^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots + (x-1)^{n-1}$ である。この関係式は,

$$S_k(x) = \frac{B_{k+1}(x) - B_{k+1}}{k+1}, \tag{5.6}$$

のように書き換えることもできる。ベルヌーイ多項式の変数 x は一般に複素数であるが, このようにべき乗和と対応づけるには, x が 0 以上の整数であると解釈すべきである。ま

た, 任意の複素数 x についての関数 $S_k(x)$ はべき乗和を複素数全体に解析接続した関数と解釈することもできる。

ベルヌーイ多項式とべき乗和の関係がわかったので, ベルヌーイ多項式の性質から, 逆にべき乗和の性質を見出そう。ベルヌーイ多項式の性質 (5.2) と (5.3) から,

$$S_k(0) = 0, \qquad S_k(1) = \left[(-1)^{k+1} - 1\right] B_{k+1},$$

が導かれる。特に, 第 2 の等式に注目すると, k が奇数の場合, 確実に $S_k(1) = 0$ が成立する。一方, k が偶数のとき, $S_k(1) = -2B_{k+1}$ となるが, 3 以上の奇数項のベルヌーイ数がゼロであることから, 1 以上の任意の次数 k について $S_k(1) = 0$ が成立することが導かれる。したがって, 1 以上の次数 k について, $S_k(x)$ は $x\,(x-1)$ で因数分解できる。

ベルヌーイ多項式の性質 (5.4) に注目し, $S_k(1/2)$ を評価しよう。性質 (5.4) によると, 次数が偶数か奇数かによって結果が異なるはずだ。その性質を用いて $S_{2m}(1/2)$ と $S_{2m+1}(1/2)$ を計算すると,

$$S_{2m}(1/2) = \frac{B_{2m+1} - B_{2m+1}}{2m+1} = 0,$$
$$S_{2m+1}(1/2) = \frac{B_{2m+2} - B_{2m+2}}{2m+2} = \frac{2 - 2^{2m+3}}{2^{2m+2}} B_{2m+2} \neq 0,$$

が得られる。なお, 上の数式における偶数次とはゼロ次を含まない。得られた数式から, 2 以上の偶数次の場合, $S_k(x)$ は $x - 1/2$ で因数分解できることがわかる。または, $2x - 1$ で因数分解できる, と言い換えてもよい。

本項で導出したべき乗和の性質を要約すると次のようになる。ゼロから $n-1$ までの整数に関する k 次のべき乗和 $S_k(n)$ について,

- ゼロ以外の任意の次数 k について, $S_k(n)$ は $n\,(n-1)$ で因数分解できる。
- 次数 k がゼロ以外の偶数のとき, $S_k(n)$ は $2n-1$ で因数分解できる。

が成立する。なお, べき乗和は整数変数に対して適用されるのだから, 本項で用いた変数 x を整数 n に置き換えておいた。

5.1.3 指数型母関数

ベルヌーイ多項式の性質を調べるために指数型母関数を導入すると便利である。ベルヌーイ多項式の指数型母関数は, あるパラメータ t の関数として書くと,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n,$$

のように定義される。総和をとる順序を並べ替え, 数式変形すると, 指数型母関数は,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_k t^k}{k!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n t^n}{n!} = \frac{t\,e^{xt}}{e^t-1},\end{aligned}$$

のように計算できる。ベルヌーイ多項式の指数型母関数は, ベルヌーイ数の指数型母関数 $t/(e^t-1)$ に類似している。

ベルヌーイ多項式を用いれば前節で紹介した第 3 の性質を証明できる。指数型母関数に $x=1/2$ を代入すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(1/2)}{n!}t^n = \frac{t}{2}\,\operatorname{cosech}\frac{t}{2},$$

が得られる。既に余割関数 $\operatorname{cosec} x$ のローラン展開が得られているので, それを参考に上式の展開式を書くと,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(1/2)}{n!}t^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-2^{2n})B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

が得られる。両辺の係数を比較すると,

$$B_{2n}(1/2) = \frac{2-2^{2n}}{2^{2n}}B_{2n},\qquad B_{2n+1}(1/2)=0,\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

なる関係が得られる。よって, 前節で紹介した第 3 の性質が証明できた。ここで,

$$T_{2n-1} = \frac{(-1)^n(2^{2n}-4^{2n})}{2n}B_{2n},\quad T_{2n}=0,$$

なるタンジェント数を用いると, その第 3 の性質は,

$$B_n(1/2) = \frac{(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}}{2^n}T_{n-1},$$

と書くこともできる。ここで, $\lfloor x\rfloor$ は実数 x を超えない最大の整数を表す。

5.1.4　周期ベルヌーイ多項式

ここでは周期ベルヌーイ多項式を紹介しよう。周期ベルヌーイ多項式 $\tilde{B}_n(x)$ は, ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ と区間 $(0,1)$ で一致し, $\tilde{B}_n(x+1)=\tilde{B}_n(x)$ なる周期性をもつ。周期ベルヌーイ多項式を導入することによって, $n\to\infty$ のとき無限次の多項式 $B_n(x)$ が区間 $[0,1]$ で $|B_n(x)|\le 2n!/(2\pi)^n$ を満たすことが導かれる。

周期ベルヌーイ多項式は, $0 < x < 1$ なる条件で,

$$f(z) = \frac{e^{xz}}{e^z - 1} - \frac{1}{z},$$

を部分分数展開することによって得られる。関数 $f(z)$ は, $z_n = 2\pi i n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ を1位の極としてもつ。一方, 第2項があるため $f(z)$ は原点で正則な関数になっている。それらの極 z_n に対する留数は,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=2\pi i n} f(z) &= \lim_{z \to 2\pi i n} (z - 2\pi i n) \frac{e^{xz}}{e^z - 1} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{z\, e^{x(z+2\pi i n)}}{e^z - 1} = e^{2\pi i n x},\end{aligned}$$

のように計算される。関数 $f(z)$ は原点で正則であり, たかだか1位の極しかもたないので付録Bに記載の方法によって部分分数展開できる。

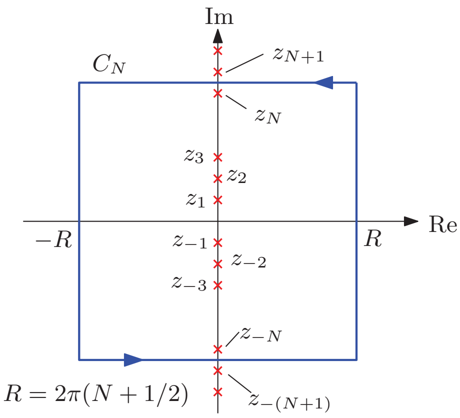

図 5.2: 関数 $f(z)$ の部分分数展開のための閉曲線

極 $z_{\pm 1}$ から $z_{\pm N}$ を囲む閉曲線として, $R = 2\pi\,(N + 1/2)$ として, 4点: $R + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$, $R - iR$ を頂点とする正方形を考える。部分分数展開のため, $N \to \infty$ としたときの閉曲線 C_N の上での関数の絶対値 $|f(z)|$ を評価してみる。まず, C_N のうち実軸に平行な経路, すなわち, $z = \xi \pm iR$ では,

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{x\xi}}{-e^{\xi} - 1} \right| = \frac{e^{x\xi}}{e^{\xi} + 1} \leq x^x (1 - x)^{1-x},$$

となる。ここで, $e^{iR} = e^{i\pi} = -1$ という事実を用いた。関数の絶対値 $|f(z)|$ は, $e^{\xi} = x/(1-x)$ の条件で右辺に示す最大値をとる。このことは, $e^{x\xi}/(e^{\xi} + 1)$ を e^{ξ} について微分することによって得られる。また, $|f(z)|$ の最大値は, R に依存しない定数 (しかもゼロでない) であるので, $|f(z)| = O(1)$ である。もう一方, 虚軸に平行な経路 $z = \pm R + i\eta$ においては,

$$|f(R + i\eta)| = \left| \frac{e^{xR}}{e^{R+i\eta} - 1} \right| = e^{-(1-x)R} = 0 \quad \text{as } R \to \infty,$$

$$|f(-R+i\eta)| = \left|\frac{e^{xR}}{e^{-R+i\eta}-1}\right| = e^{-R} = 0 \quad \text{as } R \to \infty,$$

となる。したがって, 閉曲線 C_N 全体では $|f(z)| = O(1) = o(R)$ である。引き続き, 付録 B に記載した方法にしたがって部分分数展開すると,

$$\frac{e^{xz}}{e^z-1} - \frac{1}{z} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \, e^{2\pi inx}\left(\frac{1}{2\pi in - z} + \frac{1}{2\pi in}\right), \tag{5.7}$$

なる関係が得られる。なお, 総和記号にプライム ($'$) を付しているのは, $n=0$ を総和の対象から除外することを意味する。

部分分数展開された (5.7) を変形すると, 周期ベルヌーイ多項式がフーリエ級数の形態で記述できる。これから, そのフーリエ級数を導出する。数式変形を簡単にするため, 変数 z が実数の場合に限定しよう。そのとき, (5.7) の左辺が実数であるので, 右辺の虚部は計算の過程で打ち消されることが明らかであるので, 計算をする際には, 実部のみに注目すればよい。そのように考えると, 右辺の第 2 項は, n が正と負を動くと, 実部が打ち消されるので省略してもよい。さらに, 第 1 項に二項定理を適用して変形すると,

$$\begin{aligned}\frac{e^{xz}}{e^z-1} &= \frac{1}{z} - \mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in}\frac{1}{1-z/2\pi in} \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \,\mathrm{Re}\,\frac{e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^{k+1}}z^k,\end{aligned}$$

が得られる。上で説明したように, 右辺を計算する際に実部のみを考えればよいので, 演算子 Re によって複素関数から実部のみを取り出して計算している。この両辺に z を乗じるとベルヌーイ多項式の指数型母関数, すなわち,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{B}_k(x)}{k!}z^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \,\mathrm{Re}\,\frac{e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^k}z^k,$$

が得られる。なお, ここで議論するベルヌーイ多項式は, 定義域を $(0,1)$ に制限しているため, 通常のベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ と区別するため, $\tilde{B}_n(x)$ なる記号を用いている。両辺の展開係数を比較すると,

$$\tilde{B}_k(x) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \,\mathrm{Re}\,\frac{k!\,e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^k}, \tag{5.8}$$

なる関係が導出される。この関係式から実部を取り出すと, 次数 k が偶数か奇数かによって形態が異なる。実部を具体的に書きだすと,

$$\tilde{B}_{2k}(x) = 2\,(-1)^{k-1}(2k)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{(2\pi n)^{2k}}, \tag{5.9}$$

$$\tilde{B}_{2k+1}(x) = 2\,(-1)^{k-1}(2k+1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{(2\pi n)^{2k+1}}, \tag{5.10}$$

のように, 偶数次は余弦級数, 奇数次は正弦級数となる。例えば, $\tilde{B}_1(x)$ の表現式は,

$$\tilde{B}_1(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n},$$

であるが, この式が $B_1(x) = x - 1/2$ のフーリエ級数展開になっていることからこの式の正当性が確認できる。フーリエ級数展開によって表現される $\tilde{B}_n(x)$ は周期関数であるので, $\tilde{B}_n(x)$ を**周期ベルヌーイ多項式**と呼ぶ。周期ベルヌーイ多項式は周期が 1 であり, その周期性とベルヌーイ多項式との関係は,

$$\tilde{B}_n(x) = B_n(x - \lfloor x \rfloor), \qquad \tilde{B}_n(x+1) = \tilde{B}_n(x),$$

と表される。周期ベルヌーイ関数のフーリエ級数展開によって, $0 \le x \le 1$ におけるベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ の値域が,

$$|B_k(x)| \le \frac{2\,k!}{(2\pi)^k}\zeta(k), \tag{5.11}$$

のように特定できる。とくに次数 k が大きくなれば $\zeta(k) \approx 1$ とみなせるので,

$$|B_k(x)| \le \frac{2\,k!}{(2\pi)^k} \qquad \text{for } k \text{ such that } \zeta(k) \approx 1,$$

なる関係式が成り立つ。周期ベルヌーイ多項式は図 5.3 に示す曲線を描く。この図を見る

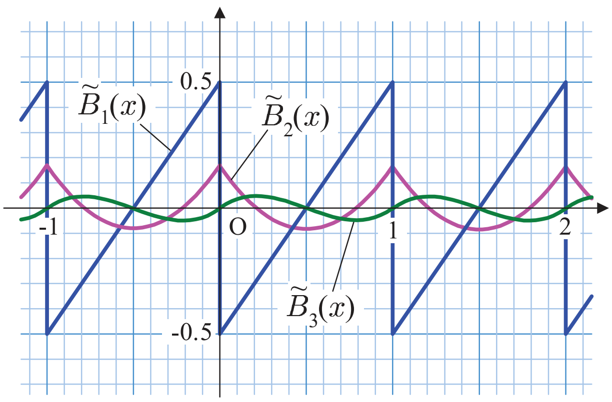

図 5.3: 周期ベルヌーイ多項式

と, 次数が大きくなるにつれて周期ベルヌーイ多項式がとる値が減少するように見えるが正しくない。減少するのは次数が小さいときに限られる。上で示したように, 周期ベルヌーイ多項式の値は次数 k の増加とともに階乗的に増加するのだ。

5.1.5　偶数ゼータ関数

周期ベルヌーイ多項式を利用すると, 偶数ゼータ関数が容易に計算できる。その事実を示そう。計算に用いるのは, 周期ベルヌーイ多項式の余弦級数 (5.9) である。この級数に $x = 0$ を代入すればよい。一方, ベルヌー多項式の性質から $\tilde{B}_{2k}(0) = B_{2k}$ であるので,

$$\frac{2\,(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\,\zeta(2k) = B_{2k},$$

なる等式が成立する。言うまでもなく,

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots$$

である。したがって,

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k}, \tag{5.12}$$

が得られる。この偶数ゼータの計算方法は, 前章で示したフーリエ変換を利用した手法の一般系である。また, $k = 1$ の場合, バーゼル問題の解 $\zeta(2) = \pi^2/6$ を与える。

5.2　オイラー多項式

オイラー数に関しても, ベルヌーイ数と同様, オイラー多項式と呼ばれる多項式が定義されている。オイラー多項式は, オイラー数を展開係数に含む多項式であるが, ベルヌーイ多項式と異なり,

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k},$$

なる形で定義されている。ベルヌーイ多項式に比べ, 複雑な形をしている。ここで, 二項定理を用いて $(x - 1/2)^{n-k}$ を展開すると, オイラー多項式の定義式は,

$$\begin{aligned}
E_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{n!}{k!\,p!\,(n-k-p)!} \frac{(-1)^p E_p}{2^{k+p}} x^{n-k-p} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{k} \frac{n!}{p!\,(k-p)!\,(n-k)!} \frac{(-1)^{k-p} E_p}{2^k} x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{p} \frac{(-1)^{k-p} E_p}{2^k} x^{n-k},
\end{aligned}$$

のように変形される。ここで, オイラー数の奇数項がゼロであることに注意してオイラー多項式は,

$$E_{2n} = x^{2n} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}\binom{2n}{2k+1}\binom{2k+1}{2p}\frac{E_{2p}}{2^{2k+1}}x^{2n-2k-1}$$

$$E_{2n+1} = x^{2n+1} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}\binom{2n+1}{2k+1}\binom{2k+1}{2p}\frac{E_{2p}}{2^{2k+1}}x^{2n-2k},$$

のように変形される。ここで, オイラー数とタンジェント数の関係:

$$T_{2k-1} = (-1)^{k-1}\sum_{p=0}^{k-1}\binom{2k-1}{2p}E_{2p},$$

を思い出すと, オイラー多項式の展開式は,

$$E_{2n}(x) = x^{2n} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k+1}\frac{T_{2k+1}}{2^{2k+1}}x^{2n-2k-1}$$

$$E_{2n+1}(x) = x^{2n+1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\frac{T_{2k+1}}{2^{2k+1}}x^{2n-2k},$$

のように簡略化できる。つまり, オイラー多項式は, その展開係数をタンジェント数によって記述することもできる。この展開式を用いて具体的にオイラー多項式を展開すると,

$$\begin{aligned}
E_0(x) &= 1, & E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
E_2(x) &= x^2 - x, & E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \\
E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x, & E_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

が得られる。オイラー多項式のうち, $E_1(x)$ から $E_3(x)$ までをグラフに描くと図 5.4 のようになる。後に改めて示すが, ベルヌーイ多項式と同様に, $n-1$ 次のオイラー多項式は n 次の多項式の導関数で表される。

5.2.1 オイラー多項式の性質

オイラー多項式には次に示す性質がある。これらの性質は, オイラー多項式とオイラー数やタンジェント数の関係, さらには, オイラー多項式の導関数における関係を表している。

$$E_n(1/2) = \frac{E_n}{2^n}, \tag{5.13}$$

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x), \tag{5.14}$$

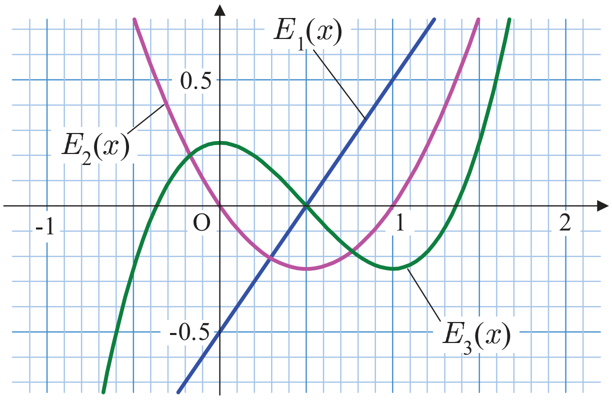

図 5.4: オイラー多項式

$$E_0(0) = 1, \qquad E_n(0) = -\frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} T_n}{2^n} \quad (n \geq 1), \tag{5.15}$$

$$E_0(1) = 1, \qquad E_n(1) = \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} T_n}{2^n} \quad (n \geq 1), \tag{5.16}$$

$$E_n'(x) = nE_{n-1}(x), \tag{5.17}$$

第 1 の性質はオイラー多項式とオイラー数を関係づける公式である。その公式はオイラー多項式の定義式から明らかである。第 2 の性質は, オイラー多項式が $x = 1/2$ を中心として, n が偶数のときに偶関数, n が奇数のときに奇関数であることを意味する。その性質は $E_n(1/2 - x)$ を計算することによって証明できる。計算過程を示すと,

$$\begin{aligned} E_n(1/2 - x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{E_k}{2^k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n} \frac{E_k}{2^k} x^{n-k} = (-1)^n B_n(1/2 + x), \end{aligned}$$

となる。この計算は, k が奇数の場合にオイラー数 E_k がゼロであることを利用している。これによって, $E_n(1/2 - x) = (-1)^n B_n(1/2 + x)$ が示されたわけだが, x を $1/2 - x$ で置き換えると, 第 2 の性質が導かれる。

第 3 の性質はオイラー多項式とタンジェント数の関係を示す公式である。この公式はオイラー多項式に定義式に, $x = 0$ を代入することで導出できる。第 4 の性質は, 第 3 の性質に第 2 の性質を適用すれば得られる。第 5 の性質は, オイラー多項式の定義式を微分することによって証明することができる。

5.2.2　指数型母関数

ベルヌーイ多項式と同様に, オイラー多項式についても指数型母関数を調べよう。指数型母関数を特定すれば, オイラー多項式の性質を調べるのに便利である。オイラー多項式の指数型母関数は,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n,$$

によって定義される。オイラー多項式の指数型母関数を計算すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{E_k}{2^k} \frac{t^k}{k!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{2e^{(x-1/2)t}}{e^{t/2} + e^{-t/2}} = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1},
\end{aligned}$$

のようになる。第 2 行目への数式変形には 2 項定理を利用した。第 3 行目への数式変形には, E_k が双曲線正割関数 (sech 関数) の展開係数であることを利用した。具体的に述べると, 第 2 行目の前半は $\mathrm{sech}(t/2)$ である。一方, 第 2 行目の後半は指数関数のマクローリン展開である。そのような経緯で第 3 行目が得られたのだ。

5.2.3　周期オイラー多項式

オイラー多項式も, ベルヌーイ多項式と同様に, 母関数に基づく関数を部分分数展開することによってフーリエ級数展開を導くことができる。オイラー多項式の場合, 部分分数展開する関数は,

$$f(z) = \frac{2e^{xz}}{e^z + 1},$$

である。つまり, 母関数に基づくというよりも, 母関数そのものである。ここでも, パラメータ x は $0 < x < 1$ のように制限されているとする。関数 $f(z)$ は, 原点で正則であり, $z_n = 2\pi i(n + 1/2)$ に 1 位の極をもつ。それらの極に対応する留数は,

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=2\pi i\,(n+1/2)} f(z) &= \lim_{z \to 2\pi i (n+1/2)} (z - 2\pi i\,(n + 1/2)) \frac{2e^{xz}}{e^z + 1} \\
&= \lim_{z=0} \frac{2z\, e^{2\pi i\,(n+1/2)x}}{-\,e^z + 1} = \,-\,2e^{2\pi i\,(n+1/2)x},
\end{aligned}$$

のように計算できる。なお, 第 2 行目への数式変形のため, $z \mapsto z + 2\pi i\,(n + 1/2)$ なる置き換えを適用した。このとき, n が整数であるので, $e^z \mapsto -e^z$ のように置き換えられる。

付録 B に記載する部分分数展開を適用するため, 図 5.5 に示す閉曲線 C_N の上で関数の絶対値 $|f(z)|$ を評価してみよう。図に示す閉曲線 C_N は, 極 z_{-N} から z_{N-1} を囲む閉曲線として, 複素平面状の 4 点: $R+iR$, $-R+iR$, $-R-iR$, $R-iR$ を頂点とする正方形の外周である。まず, 実軸に平行な経路 $z=\xi \pm iR$ では, 関数の絶対値は,

$$|f(\xi \pm iR)| = \frac{2e^{x\xi}}{e^{\xi}+1} \leq 2x^x(1-x)^{1-x},$$

のようになる。周期ベルヌーイ多項式を導出したときに説明したが, この絶対値が最大値をとるのは $e^{\xi} = x/(1-x)$ となるときである。また, この最大値は R に依存しない (さらに, ゼロではない) ので, $|f(z)| = O(1)$ と考えればよい。もう一方, 虚軸に平行な経路においては,

$$|f(R+i\eta)| = \left|\frac{2e^{xR}}{e^{R+i\eta}+1}\right| = 2e^{-(1-x)R} = 0 \quad \text{as } R \to \infty,$$

$$|f(-R+i\eta)| = \left|\frac{2e^{-xR}}{e^{-R+i\eta}+1}\right| = 2e^{-R} = 0 \quad \text{as } R \to \infty,$$

となる。したがって, 閉曲線 C_N 全体では $|f(z)| = O(a) = o(R)$ である。

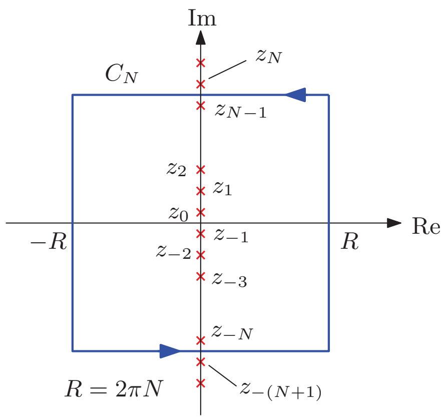

図 5.5: 関数 $f(z)$ の部分分数展開のための閉曲線

引き続き, 付録 B に記載した方法にしたがって部分分数展開すると,

$$\frac{2e^{xz}}{e^z+1} = -2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\,(n+1/2)x}\left(\frac{1}{z-2\pi i(n+1/2)} + \frac{1}{2\pi i\,(n+1/2)}\right),$$

となる。ベルヌーイ多項式の場合と異なり, ここでは $n=0$ も総和の対称となっている。

ここから, 部分分数展開された数式を変形し, フーリエ級数の形態で周期オイラー多項式を記述する。数式変形の便宜上, x と z を実数としよう。そのとき, 上記の左辺が実数関数であるので, 右辺を計算するには実部のみを取り扱えばよい。その意味で, 総和対象と

なる第 2 項は, z_n と $z_{-(n+1)}$ の組み合わせで実部が打ち消されるので省略することができる。また, 残された項に対して二項定理を適用すると,

$$\begin{aligned}\frac{2e^{xz}}{e^z+1} &= -\operatorname{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{2\pi i(n+1/2)x}}{2\pi i(n+1/2)-z}\\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\frac{2e^{2\pi i(n+1/2)x}}{[2\pi i(n+1/2)]^{k+1}}z^k,\end{aligned} \tag{5.18}$$

のように変形される。上で説明したように, 左辺が実数関数であることがわかっているので, 右辺は実部のみを取り出して計算している。この式の左辺はオイラー多項式の指数型母関数であるので,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{E}_k(x)}{k!}t^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\frac{2e^{2\pi i(n+1/2)x}}{[2\pi i(n+1/2)]^{k+1}}z^k,$$

と書くことができる。ここで, オイラー多項式を $\tilde{E}_k(x)$ なる記号で書いたのは, 関数の定義域を $(0,1)$ で制限しているため本来のオイラー多項式 $E_n(x)$ と区別するためである。この指数型母関数の展開係数を比較すれば,

$$\tilde{E}_k(x) = -2k!\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{Re}\frac{e^{2\pi i(n+1/2)x}}{[2\pi i(n+1/2)]^{k+1}}, \tag{5.19}$$

が得られる。この結果は, オイラー多項式のフーリエ級数展開である。演算子 Re にとって取り出される実部は, 偶数次か奇数次かによって異なり,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{2k}(x) &= 4\,(-1)^{k-1}(2k)!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\pi(2n+1)x}{[\pi(2n+1)]^{2k+1}},\\ \tilde{E}_{2k+1}(x) &= 4\,(-1)^{k-1}(2k+1)!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n+1)x}{[\pi(2n+1)]^{2k+2}},\end{aligned}$$

となる。偶数次はフーリエ正弦級数, 奇数次はフーリエ余弦級数である。もともと, $0<x<1$ である仮定から考察を始めたのだが, この結果は, 奇数倍波によって合成された周期が 2 の周期関数である。特に, $\tilde{E}_1(x)$ の展開式を書くと,

$$\tilde{E}_1(x) = -4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n+1)x}{[\pi(2n+1)]^2},$$

となる。この関数 $E_1(x)$ は周期 2 の三角波であるが, $0\le x\le 1$ の条件でオイラー多項式 $x-1/2$ と一致するので, この結果の正当性が確認できる。フーリエ級数展開によって表現される $\tilde{E}_k(x)$ は周期関数であるので, **周期オイラー多項式**と呼ばれる。周期オイラー多項式は周期が 2 であり, その周期性とオイラー多項式との関係は,

$$\tilde{E}_n(x) = E_n(x-\lfloor x\rfloor), \qquad \tilde{E}_n(x+1) = (-1)^{n+1}\tilde{E}_n(x),$$

と表される。周期オイラー多項式のフーリエ級数展開によって, $0 \leq x \leq 1$ におけるオイラー多項式 $E_k(x)$ の値域が

$$|E_k(x)| \leq \frac{8\,k!\,(2^k-1)}{(2\pi)^{k+1}}\zeta(k), \tag{5.20}$$

のように特定できる。とくに次数 k が大きくなれば $\zeta(k) \approx 1$ とみなせるので,

$$|E_k(x)| \leq \frac{4\,k!}{\pi^{k+1}} \qquad \text{for } k \text{ such that } \zeta(k) \approx 1$$

なる関係式が成り立つ。この関係式は, 後に紹介するオイラー・ブールの和公式において剰余項の評価をするために有用な関係式である。

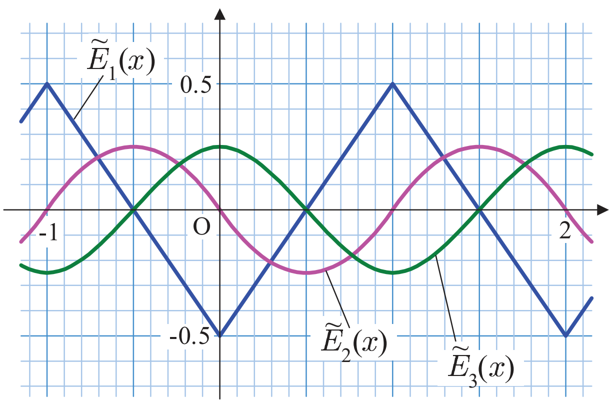

図 5.6: 周期オイラー多項式

5.2.4 奇数ゼータ関数類似の級数

奇数ゼータ関数を解析に取り扱うことは現代の数学では成功していないが, 奇数次の調和級数の奇数項から再構成した交代級数は周期オイラー多項式を用いて評価できる。そのような奇数次の交代級数を $\xi(2k+1)$ なる記号で書くことにすると,

$$\xi(2k+1) = 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots$$

なる定義ができる。この関数を評価するには, 周期オイラー多項式 $\tilde{E}_{2k}(x)$ のフーリエ正弦級数 (5.20) を利用すればよい。そのとき, 変数には $x = 1/2$ を代入する。その条件で方程式をつくると,

$$(-1)^k 4\,(2k)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\pi\,(2n+1)]^{2k+1}} = \frac{(-1)^k 4\,(2k)!}{\pi^{2k+1}}\xi(2k+1) = \frac{E_{2k}}{2^{2k}},$$

が得られる。なお, 右辺はオイラー多項式の特殊値 (5.17) を用いて記述した。この関係式からただちに,

$$\xi(2k+1) = \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{2^{k+2}(2k)!} E_{2k},$$

が得られる。記号 $\xi(2k+1)$ を戻すと, この数式は,

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots = \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!} E_{2k}, \tag{5.21}$$

のように書き換えることができる。この公式は, 前章で紹介した公式である。前章で予告したように, 周期オイラー多項式を用いて公式を導出することができた。