第3章　タンジェント数とオイラー数

べき乗和を一般化するために導入されたベルヌーイ数は, べき乗和だけにとどまらず, 数学におけるさまざまな話題において姿を現す。本節では, それの例として, 正接関数 $\tan x$ の級数展開においてベルヌーイ数が現れることを示す。さらに, 正割関数 $\sec x$ の級数展開において, ベルヌーイ数に類似したオイラー数なる数列を導入する。

3.1　タンジェント数

正弦関数 $\sin x$ は, x について微分を繰り返すと $\cos x$ と $\sin x$ を繰り返すため, テイラー級数の展開係数には美しい規則性がある。正接関数 $\tan x$ に対しても, 微分を繰り返していけばテイラー級数展開ができるのだが, その展開係数の規則性を見出すことは難しい。しかし, 正接関数のテイラー級数の展開係数はベルヌーイ数と密接な関係がある。

3.1.1　正接関数のテイラー展開

通常のテイラー級数の処方箋にしたがって級数展開してみよう。任意の関数 $f(x)$ は, $x=0$ を中心にテイラー級数展開すると,

$$f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{1}{2!}f''(0)\,x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)\,x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,x^n,$$

なる形で表される。この展開式において, $f^{(k)}(x)$ は k 階の導関数を表し, 特に, 0 階の導関数は, 微分をしないもとの関数 $f^{(0)}(x)\equiv f(x)$ である。特に, $\tan x$ の展開について, $T_k\equiv f^{(k)}(0)$ なる T_n を定義するとテイラー展開は,

$$\tan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n}{n!}x^n,$$

のように表現される。その展開係数を与える数列 T_n はタンジェント数と呼ばれる。タンジェント数を得るために処方箋にしたがって $\tan x$ を微分していくと,

$$f^{(0)}(x)=\tan x,$$

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= 1 + \tan^2 x, \\
f^{(2)}(x) &= 2\tan x(1 + \tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x, \\
f^{(3)}(x) &= 2(\tan^2 x + 1) + 6\tan^2 x(1 + \tan^2 x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x,
\end{aligned}
$$

が得られる。ここに示したように, $\tan x$ の高階導関数は $\tan x$ のべき級数で表される。そこで,

$$
f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} \tan^k x,
$$

なる形で導関数を表現してみよう。そのとき, 展開係数 A_{nk} は

$$
A_{nk} = (k-1)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k+1},
$$

なる漸化式にしたがう。初期条件として, $A_{00} = 0$, $A_{01} = 1$, $A_{0k} = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$ である。また, この展開係数とタンジェント数は $T_n = A_{n0}$ で対応づけられる。行を導関数の階数 k, 列を $\tan x$ の次数 k として展開係数 A_{nk} を書いていくと, 表 3.1 のような形式に並べることができる。

表 3.1: タンジェント数計算のための表

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1						
1	1	0	1					
2	0	2	0	2				
3	2	0	8	0	6			
4	0	16	0	40	0	24		
5	16	0	136	0	240	0	120	
6	0	272	0	1232	0	1680	0	720

このような形式に並べると, タンジェント数が計算しやすい。この表から, 偶数項のタンジェント数がゼロであることがわかる。さらに, A_{nk} に関する漸化式からタンジェント数は, ベルヌーイ数とは異なり, すべて整数になることもわかる。表 3.1 を用いて, タンジェント数の最初の数項を計算すると,

$$
T_1 = 1, \quad T_3 = 2, \quad T_5 = 16, \quad T_7 = 272, \quad \ldots,
$$

となる。上に示した A_{nk} の漸化式でタンジェント数を計算することができる。

3.1.2 ベルヌーイ数による表現

タンジェント数はベルヌーイ数と密接な関係があり, ベルヌーイ数を導入すれば, タンジェント数の一般項を一意的に記述することができる。タンジェント数とベルヌーイ数の

関係を調べるため, ベルヌーイ数の指数型母関数に注目しよう。既に学んだように, ベルヌーイ数の指数型母関数は,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k=\frac{x}{e^x-1},$$

なる形で与えられる。ここで, $B_0=1$, $B_1=-1/2$ に注意すると, この母関数は,

$$1-\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}+\frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)=\frac{x}{e^x-1},$$

と書き換えられる。ここで, わざわざベルヌーイ数の奇数項と偶数項を分離した理由は後に明らかになるであろう。この関係式において, $x/2$ を右辺に移項すると,

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{\infty}&\left(\frac{B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}+\frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)\\&=\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}=\frac{x}{2}\coth\frac{x}{2},\end{aligned}$$

なる関係が得られる。この関係式の x を $2x$ に置き換えると,

$$\coth x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1}+\frac{2^{2k+1}B_{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k}\right),\tag{3.1}$$

が得られる。見てわかるとおり, この式は $x=0$ を中心にした $\coth x$ のローラン展開である。ここで, 変数 x を複素数に拡張し, $\cot x=i\coth ix$ である関係に注意すると, (3.1) は

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1}+i\,\frac{2^{2k+1}B_{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k}\right),\tag{3.2}$$

であることがわかる。この式は $\cot x$, すなわち, $\tan x$ の逆数のローラン展開である。ところで, x が実数なら $\cot x$ は実数関数であるはずなので, 上記ローラン展開の虚部はゼロなければならない。任意の実数 x についてローラン展開の虚部がゼロになる条件とは,

$$B_{2k+1}=0\qquad(k=1,2,\ldots),\tag{3.3}$$

である。すなわち, ベルヌーイ数の第 3 項以降の奇数項がすべてゼロであることが示された。したがって, 先ほど書いた $\coth x$ と $\cot x$ のローラン展開は,

$$\coth x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1},\tag{3.4}$$

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}x^{2k-1},\tag{3.5}$$

のように書き直すことができる。複素関数の観点から見ると, これらの関数は $x=0$ に一位の極を持ち, その留数が 1 であることがこれらの展開式からわかる。言い換えると, 十

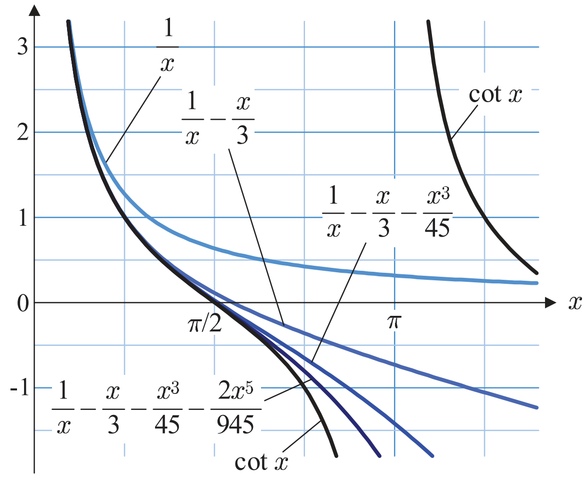

図 3.1: ローラン展開による余接関数 $\cot x$ の近似

分に小さい x において, $\cot x$ は $1/x$ にほぼ等しくなる。それを図 3.1 に描いてみた。確かに, $x < \pi/8$ において $\cot x$ と $1/x$ のグラフが互いに重なっていることが確認できる。変数 x が大きくなると, $\cot x$ は $1/x$ から離れていく。近似に用いるローラン展開の項を増やすと $\cot x$ に近似できる x の範囲が広がることが図からわかる。 また, 後に示すベルヌーイ数とリーマンのゼータ関数の関係によると, ベルヌーイ数は,

$$|B_{2k}| \simeq \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \qquad \text{as } n \to \infty,$$

なる性質があるので, 余接関数と双曲余接関数のローラン展開は $|x| < \pi$ なる収束半径をもつことがわかる。つまり, $x = 0$ から最も近い特異点までの範囲でローラン展開は $\cot x$ に収束するわけだ。

正接関数の展開係数の導出に戻ろう。三角関数の倍角の公式から得られる $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ なる関係を用いれば, 正接関数の展開係数が得られそうである。既に, $k \geq 1$ について $B_{2k+1} = 0$ であることがわかっているので, そのような寄与しない項を省略して, ローラン展開 (3.2) を利用すると,

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2^{2k} - 4^{2k})\, B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \tag{3.6}$$

なる展開式が得られる。これが目的とする $\tan x$ のテイラー展開である。つまり, タンジェント数 T_k は,

$$T_{2k-1} = \frac{(-1)^k (2^{2k} - 4^{2k})\, B_{2k}}{2k}, \qquad T_{2k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

で与えられる。具体的に 7 次の項まで展開すると, 正接関数は

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots,$$

のように近似できることがわかる。後に示すベルヌーイ数とリーマンのゼータ関数の関係によると, タンジェント数 T_{2n-1} には,

$$|T_{2n-1}| \simeq 2\,(2k-1)!\,\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} \qquad \text{as } n \to \infty,$$

なる性質があるため, 正接関数のテイラー展開は $|x| < \pi/2$ なる収束半径をもつことがわかる。これも余接関数と同様に, $x = 0$ から最も近い特異点までの範囲でローラン展開が収束することを意味している。

ついでに, 正弦関数の逆数である余割関数 $\operatorname{cosec} x$ のローラン展開の展開係数にもベルヌーイ数が現れることを紹介しておこう。正弦関数の倍角の公式 $\sin 2x = 2\sin x\,\cos x$ の逆数をとれば, $\operatorname{cosec} 2x = (\tan x + \cot x)/2$ なる関係が得られる。既に $\tan x$ と $\cot x$ の展開が得られているので, それを利用すると,

$$\operatorname{cosec} 2x = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2^{2k+1} - 4^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1},$$

が得られる。ここで, x を $x/2$ におきかえると,

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2 - 2^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \tag{3.7}$$

と書き換えられる。この展開式からわかるように, 余割関数 $\operatorname{cosec} x$ は $x = 0$ に一位の極をもち, その留数は 1 である。さらに, この関数の収束半径は, $|x| < \pi$ である。当然のように, 正割関数 $\sec x$ を級数展開したいところだが, その級数展開は次の節に譲る。

3.2 オイラー数

前節でベルヌーイ数を用いて三角関数を展開したが, 正割関数 $\sec x$ の展開は本節に譲った。正割関数の展開はベルヌーイ数を用いて記述できるのだが, 定数倍のような単純な関係ではないので, タンジェント数に類似したセカント数を導入したほうが便利である。本節では, 正割関数を展開するためのセカント数からオイラー数なる数列を定義し, ベルヌーイ数との関係を調べる。

3.2.1 セカント数

正割関数を級数展開するための展開係数としてセカント数 $\hat{E}_n$ を定義しよう。セカント数 $\hat{E}_n$ を用いると正割関数は,

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{E}_k}{k!} x^k,$$

のように書けるものとする。この関数についても, まず, 処方箋にしたがってテイラー級数展開するには, 高次の導関数を計算する必要がある。順次, 導関数を計算していくと,

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \sec x, \\
f^{(1)}(x) &= \sec x \tan x, \\
f^{(2)}(x) &= \sec x \tan^2 x + \sec x\,(1+\tan^2 x) = \sec x\,(1+2\tan^2 x), \\
f^{(3)}(x) &= \sec x \tan x\,(1+2\tan^2 x) + \sec x\,(4\tan x\,(1+\tan^2 x)) \\
&= \sec x\,(5\tan x + 4\tan^6 x),
\end{aligned}$$

が得られる。この計算結果に示すように, $\sec x$ の高次導関数は $\sec x$ と $\tan x$ のべき級数の積で表される。そこで,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} \sec x\ \tan^k x,$$

なる形で導関数を定義してみよう。そのとき, 展開係数 A_{nk} は

$$A_{nk} = kA_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k+1},$$

なる漸化式にしたがう。初期条件として, $A_{00}=1$, $A_{0k}=0$ $(k=1,2,\ldots)$ である。また, この展開係数とセカント数は $\hat{E}_n = A_{n0}$ で関係づけられる。行を導関数の階数 n, 列を $\tan x$ の次数として展開係数 A_{nk} と書いていくと表 3.2 のようになる。

表 3.2: セカント数計算のための表

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	1	0	2				
3	0	5	0	6			
4	5	0	28	0	24		
5	0	61	0	180	0	120	
6	61	0	662	0	1140	0	720

この表によってセカント数の計算がしやすい。この表から奇数項のセカント数がゼロとなることがわかる。さらに, タンジェント数と同様に, A_{nk} の漸化式からセカント数がすべて整数になることもわかる。上の表を用いてセカント数の最初の数項を計算すると,

$$\hat{E}_1 = 1,\quad \hat{E}_3 = 1,\quad \hat{E}_5 = 5,\quad \hat{E}_7 = 61,\quad \ldots,$$

となる。上に示した A_{nk} の漸化式でタンジェント数を計算することができる。

3.2.2 オイラー数

本章を除くと, 習慣的には前節で導入したセカント数よりも, オイラー数を使うことが多い。オイラー数は E_k なる記号で表される数列であり,

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} x^k,$$

によって定義される。この定義式の左辺は $\operatorname{sech} x$ と書くこともでき, しかも, $\sec ix = \operatorname{sech} x$ なる関係が成立するので, セカント数とオイラー数の関係は容易に導けそうである。実際に計算してみると,

$$\begin{aligned}
\sec ix &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{E}_k}{k!} (ix)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\hat{E}_{2k}}{(2k)!} x^k + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\hat{E}_{2k+1}}{(2k+1)!} x^k,
\end{aligned}$$

となるのだが, x が実数ならば $\operatorname{sech} x$ も実数になるはずなので, オイラー数の奇数項はゼロ, すなわち, $E_{2k+1} = 0$ が成立する。これは, セカント数の奇数項がセロであること $\hat{E}_{2k+1} = 0$ とは矛盾しない。さらに, 偶数項については $\hat{E}_{2k} = (-1)^k E_{2k}$ が成立する。

オイラー数はタンジェント数との間に規則的な関係がある。その関係を導くため, $\operatorname{sech} x = \cosh x - \tanh x \sinh x$ なる関係を用いてオイラー数を調べてみよう。ここで, $\tanh x = -i \tan ix$ なる関係に注目し, タンジェント数 T_k を用いると,

$$\tanh x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{T_{2k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1},$$

と書くことができる。これらの情報を頼りに $\operatorname{sech} x$ を展開すると,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sech} x &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} T_{2k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k T_{2k-1}}{(2k-1)!\,(2n-2k-1)!} x^{2n-2} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k T_{2k-1}}{(2k-1)!\,(2n-2k+1)!} x^{2n} \right] \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \tbinom{2n}{2k-1} T_{2k-1} \right] \frac{x^{2n}}{(2n)!},
\end{aligned}$$

が得られる。このテイラー展開から, オイラー数が

$$E_0 = 1, \quad E_{2n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \tbinom{2n}{2k-1} T_{2k-1}, \quad E_{2n-1} = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

と表されることがわかる。つまり, 奇数添え字をもつオイラー数は, 必ずゼロになる。次に, $\tanh x = \operatorname{sech} x \sinh x$ なる関係を用いて, オイラー数とタンジェント数の関係を逆にたどってみる。すると,

$$\begin{aligned}\tanh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{E_{2k}}{(2k)!} \frac{x^{2n-1}}{(2n-2k-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{2n-1}{2k} E_{2k} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\end{aligned}$$

が得られるので, オイラー数とタンジェント数の関係は,

$$T_{2n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{2n-1}{2k} E_{2k}, \quad T_{2n} = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

と書くこともできる。ここで, タンジェント数が

$$T_{2k-1} = \frac{(-1)^k (2^{2k} - 4^{2k}) B_{2k}}{2k},$$

であることに注意すると, オイラー数はベルヌーイ数との間に,

$$E_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \tbinom{2n}{2k-1} \frac{2^{2k} - 4^{2k}}{2k} B_{2k} + 1, \tag{3.10}$$

$$B_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{2n-1}{2k} \frac{2n}{4^{2n} - 2^{2n}} E_{2k}, \tag{3.11}$$

なる関係があることがわかる。この関係式からオイラー数を計算してもよいのだが, もっと簡単な漸化式によってオイラー数を計算することができる。その漸化式とは,

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{2n}{2k} E_{2k} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.12}$$

である。この関係は, $\operatorname{sech} x \, \cosh x$ を評価することによって得られる。級数展開した形において, その関数の積を評価してみると,

$$\begin{aligned}\operatorname{sech} x \, \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \tbinom{2n}{2k} E_{2k} x^{2n},\end{aligned}$$

となるが, ここで $\operatorname{sech} x \, \cosh x = 1$ であることに注意すると, 上記の漸化式が得られるわけである。この漸化式を用いてオイラー数の最初の数項を計算すると,

$$E_0 = 1, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = -1, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = 5, \quad E_5 = 0, \quad E_6 = -61, \ldots$$

が得られる。また, 前節から記述を引き延ばしにしてきた $\operatorname{sech} x$ と $\sec x$ の展開は,

$$\operatorname{sech} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \cdots,$$

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + \frac{61}{6!}x^6 + \cdots,$$

となる。この展開式において, $E_{2k+1} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ であることを用いた。後に示すベルヌーイ数とリーマンのゼータ関数の関係から, オイラー数には

$$|E_{2k}| \simeq 2\,(2k)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1} \qquad \text{as } k \to \infty,$$

なる漸近的な性質があるので, 正割関数と双曲正割関数のテイラー級数は $|x| < \pi/2$ の収束半径をもつ。いうまでもなく, その収束半径は $x = 0$ から最も近い正割関数の特異点までの距離と一致する。

3.3 タンジェント数と交代順列の組み合わせ

タンジェント数とセカント数は, 異なる n 個の数字がとり得る交代順列の組み合わせの数と一致するという意外な性質がある。順列の要素を a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ としたとき, 交代順列とは, $a_{2k} > a_{2k+1}$, $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ のように, 隣り合う項の大小関係が交互に切り替わりながら配置された順列のことである。

3.3.1 交代順列の組み合わせ

交代順列は 19 世紀に Désiré André によって初めて研究された。可能な交代順列の組み合わせの数は, 既に述べたように, タンジェント数やセカント数と関係がある。例えば, 5 以下の n に対して, 互いに異なる整数からつくることができる交代順列の組み合わせは下のようになる。まず, $n = 1, 2$ のときには, 1 通りしか交代順列はつくれないが, $n = 3$ では 2 通りの交代順列が存在する。さらに, $n = 4$ では 5 通り, $n = 5$ では 16 通りとなる。

$n = 1$:	$[1]$				
$n = 2$:	$[2,1]$				
$n = 3$:	$[2,1,3]$,	$[3,2,1]$			
$n = 4$:	$[2,1,4,3]$,	$[2,3,4,1]$,	$[3,1,4,2]$,	$[3,2,4,1]$,	$[4,1,3,2]$
$n = 5$:	$[2,1,4,3,5]$,	$[2,1,5,3,4]$,	$[3,1,4,2,5]$,	$[3,1,4,2,5]$,	$[3,2,4,1,5]$,
	$[3,2,5,1,4]$,	$[4,1,3,2,5]$,	$[4,1,5,2,3]$,	$[4,2,3,1,5]$,	$[4,2,5,1,3]$,
	$[4,3,2,1,5]$,	$[4,3,5,1,2]$,	$[5,1,3,2,4]$,	$[5,1,4,2,3]$,	$[5,1,3,2,4]$,
	$[5,1,4,2,3]$				

上のように 5 以下の n に対して, 交代順列の組み合わせを列挙したが, その組み合わせ数がタンジェント数とセカント数に対応していることに気付いただろう。具体的に述べると,

$$\hat{T}_n = \begin{cases} \hat{E}_n & \text{if } n = 0, 2, 4, \ldots \\ T_n & \text{if } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

のように, タンジェント数とセカント数を互い違いにならべた数列 $\hat{T}_n$ を定義したとき, 異なる n 個の数値による交代順列の組み合わせは $\hat{T}_n$ となることが予想される。本節から次節にわたり, その予想が正しことを検証する。本章では今後, $\hat{T}_n$ が何度も登場するので, これをタンジェント・セカント数と呼ぶことにしよう。

タンジェント・セカント数が, 交代順列の組み合わせの数と一致することを検証するため, まず, 交代順列と逆交代順列の組み合わせが同数であることを述べておく。順列の各項 a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ について, 交代数列が $a_{2k} > a_{2k+1}$, $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ であることに対して, その大小関係を逆にした条件: $a_{2k} < a_{2k+1}$, $a_{2k+1} > a_{2k+2}$ を満たす順列を逆交代順列と呼ぶことにする。このように, 交代順列と逆交代順列は, 最初の 2 項の大小関係が逆であるが, 交互に大小関係が切り替わりながら配置された順列であるという性質は互いに共通である。テキストによっては, 本書の逆交代順列を交代順列と呼んでいるかもしれない。交代順列と逆交代順列は, 表裏一体であり, n 個の異なる数値から構成される順列の組み合わせの数は等しくなると考えられる。なぜなら, 順列を構成するすべての要素に $a_k \mapsto n - a_k + 1$ なる変換を施すと, 交代順列は逆交代順列に変換されるからである。この交代順列から逆交代順列への変換は 1 対 1 の変換であり, 逆交代順列に同一の変換を施すともとの交代順列に戻る。したがって, 逆交代順列の組み合わせ数は, 交代順列の数と同じである。

それでは, n 以下の自然数からなる交代順列の組み合わせの数 A_n を求める方法を考えてみよう。既に示したように, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 2$, $A_4 = 5$, $A_5 = 16$ であることがわかっている。また, ゼロ個の数値からなる交代順列の組み合わせは空集合であるが, 便宜上, $A_0 = 1$ としておく。順列の長さ n を大きくしたとき, 組み合わせの数 A_n はたちまち大きくなり, 先ほどのようにすべてを書き下すことはできないだろう。その代わりに, 組み合わせの数 A_n の規則性を見出してみよう。現時点において A_n までの値がわかっているとの仮定のもと, A_{n+1} を求めよう。例として, 図 3.2 に $n = 8$ の場合を示している。順列に含まれる $n + 1$ 個の数値のうち, 最小値を順列の左から $k + 1$ 番目に配置する。すると, その最小値の左側には k 個, 右側には $n - k$ 個の数値が存在する。また, 最小値以外の数値の配置が任意であるとすると, n 個の数値を左側と右側に, それぞれ, k 個と $n - k$ 個に振り分ける組み合わせは $\binom{n}{k}$ 通りあるはずである。さらに, 最小値より左側では右から左に向かって交代順列となるように数値を配置し, 最大値より右側では左から右に向かって交代順列となるように数値を配置する。そうすれば, 並べた n 個の数値は, 左から右に見たときに交代順列, または, 逆交代順列となっているはずである。

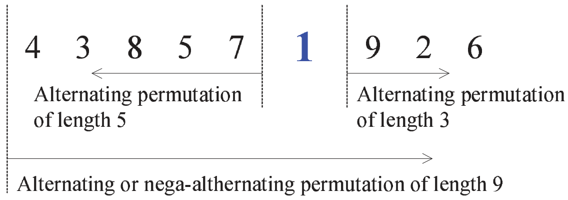

図 3.2: 長さ 9 の交代順列の例

既に設定した仮定によると, 最小値の左に配置された k 個の自然数から交代順列をつくる配置の組み合わせは A_k 通りである。一方, 最小値の右側に配置された $n-k$ 個の自然数から交代順列をつくる配置の組み合わせは A_{n-k} 通りである。よって, 最小値を左から $k+1$ 番目に配置したとき, 並べた $n+1$ 個の自然数が交代順列, または, 逆交代順列になる組み合わせは, これらの条件の積であるので, $\binom{n}{k} A_k A_{n-k}$ 通りである。その組み合わせを, 最小値を配置するすべての位置, すなわち, $k=0,1,\ldots,n$ について加算すると, $n+1$ 個の自然数からつくられる交代順列と逆交代順列の組み合わせの数の和:

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k},$$

が得られる。この式の左辺が $2A_{n+1}$ となっているのは, 計算される値が, 交代順列と逆交代順列の組み合わせ数の和であり, さらに, 交代順列と逆交代順列の組み合わせ数が同じ数だからである。得られた公式を用いて, 交代順列の組み合わせの数を計算していくと,

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2}(A_0A_1 + A_1A_0) = 1,\\
A_3 &= \frac{1}{2}(A_0A_2 + 2A_1^2 + A_2A_2) = 2,\\
A_4 &= \frac{1}{2}(A_0A_3 + 3A_1A_2 + 3A_2A_1 + A_3A_0) = 5,\\
A_5 &= \frac{1}{2}(A_0A_4 + 4A_1A_3 + 6A_2^2 + 4A_3A_1 + A_4A_0) = 16,\\
A_6 &= \frac{1}{2}(A_0A_5 + 5A_1A_4 + 10A_2A_3 + 10A_3A_2 + 5A_4A_1 + A_5A_0) = 61,
\end{aligned}$$

を得ることができる。確かに, A_5 までの計算結果が前に列挙した交代順列の組み合わせの数と一致していることがわかる。さらに, 得られた公式により, $A_6 = 61$ であることも導かれている。次の節で交代順列の組み合わせの数がタンジェント・セカント数と一致することを明らかにする。

3.3.2 タンジェント・セカント数との関係

本節では, いよいよ, 交代順列の組み合わせ数がタンジェント・セカント数と一致することを示す。ここで, $f(x) = \sec x + \tan x$ を考える。原点 $x=0$ で正則である $f(x)$ は, 原

点を中心にテイラー級数できるので, そのテイラー級数を,

$$\sec x + \tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_n}{n!} x^n,$$

とおいてみる。既に, 正接関数と正割関数が,

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{E}_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

なる形で表現できることがわかっている。この級数展開において, T_n はタンジェント数, $\hat{E}_n$ はセカント数である。したがって, 関数 $f(x)$ の展開係数 $\hat{T}_n$ は,

$$\hat{T}_n = \begin{cases} \hat{E}_n & \text{if } n = 0, 2, 4, \dots \\ T_n & \text{if } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

のように, タンジェント数とセカント数を交互に並べた数列, すなわち, タンジェント・セカント数であることがわかる。

関数 $f(x)$ の導関数を計算してみると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x + 1 + \sin^2 x + \cos^2 x}{2\cos^2 x} \\ &= \frac{(\sec x + \tan x)^2 + 1}{2} = \frac{[f(x)]^2 + 1}{2}, \end{aligned}$$

であるので, 関数 $f(x)$ の導関数は,

$$2f'(x) = [f(x)]^2 + 1,$$

なる性質があることがわかる。さて, 展開係数 $\hat{T}_n$ を用いた級数展開を用いて, この関係式の左辺と右辺を計算してみよう。まず, 左辺は,

$$2f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_{n+1}}{n!} x^n, \tag{3.13}$$

となる。一方, 右辺は,

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_n}{n!} x^n \right)^2 + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{T}_k}{k!} \frac{\hat{T}_{n-k}}{(n-k)!} x^n + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \hat{T}_k \hat{T}_{n-k} x^n + 1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

のように計算される。前に示したように, (3.13) と (3.14) は等しいはずなので, 展開係数を比較し,

$$\hat{T}_1 = 1, \qquad 2\hat{T}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \hat{T}_k \hat{T}_{n-k}, \tag{3.15}$$

が得られる。この式は前節で導出した交代順列の組み合わせの数を求めるための漸化式そのものである。しかも, 前節で交代順列の組み合わせの数は, $n=5$ まで $\hat{T}_n$ と一致することが示されている。したがって, 5 より大きい任意の n に対しても, タンジェント・セカント数 $\hat{T}_n$ は異なる n この数値による交代順列の組み合わせの数と一致する。

3.3.3 Seidel-Entringer の三角形

前節までに, タンジェント・セカント数を計算するための方法として, テイラー級数展開の処方箋に基づく漸化式と, 交代順列の組み合わせの数に基づく漸化式を導出した。それらの方法とは異なり, 加算だけでタンジェント・セカント数を計算する方法が Seidel と Entringer によって考案されている。本節では, そのような乗算を使用しない計算方法について説明する。

本節で説明する計算方法も, タンジェント・セカント数が交代順列の組み合わせの数と一致することを利用した方法である。異なる n 個の数値から構成される交代順列の組み合わせの数はタンジェント・セカント数 $\hat{T}_n$ と等しい。ここで, 便宜上, 交代順列が 1 から n までの自然数で構成されるものとし, 先頭要素が k である交代順列の組み合わせの数を E_{nk} としよう。この組み合わせの数 E_{nk} は Entringer 数と呼ばれる。Entringer 数を用いると, n までの自然数によって構成される交代順列の組み合わせの数は,

$$\hat{T}_n = \sum_{k=1}^{n} E_{nk},$$

と表されるだろう。ところが, 交代順列の条件 $a_0 > a_1$ より, 先頭要素が 1 である交代順列は存在しない。よって, $E_{n1} = 0$ である。先頭要素が k である交代順列は, 条件 $a_0 > a_1$ より, 第 2 番目の要素が $k-1$ 以下の自然数である場合に限られる。しかも, 交代順列の例 $[3, 2, 5, 1, 4]$ を見ればわかるように, 交代順列は第 2 番目の要素から見ると逆交代順列となる。よって,

$$E_{nk} = \sum_{j=1}^{k-1} (\text{長さ}\, n-1\, \text{で先頭要素が}\, j\, \text{である逆交代順列の組み合わせの数}), \tag{3.16}$$

である。ところで, 長さ n の交代順列のすべての要素を $a_j \mapsto n - a_j + 1$ によって変換すると, その結果は n 以下の自然数で構成される長さ n の逆交代順列となる。この変換規則を, 長さ 5 の交代順列の $[3, 2, 5, 1, 4]$ に適用すると, $[3, 4, 1, 5, 2]$ に変換されることがその一例である。そのような規則性を考えると, 長さ $n-1$ で先頭要素が j である逆交代順列の組み合わせの数は, 長さ $n-1$ で先頭要素が $n-j$ である交代順列の組み合わせの数 $E_{n-1,n-j}$ と等しいことがわかる。したがって, (3.16) は,

$$E_{nk} = \sum_{j=1}^{k-1} E_{n-1,n-j}, \tag{3.17}$$

のように書き換えられる。

上のようにして導かれた E_{nk} のうち, 特別な場合として, $k=1$ のとき, 総和記号が適用されないので $E_{n1}=0$ となる。これは, 上にも書いたように, 先頭要素が 1 である交代順列が不可能なことが理由である。もうひとつの特別な場合として, $k=2$ を挙げよう。これに対応する Entringer 数は,

$$E_{n2}=E_{n-1,n-1}, \tag{3.18}$$

である。先頭要素が 2 である交代順列を考えてみると, 条件 $a_0>a_1$ より, 必然的に, $[2,1,\ldots]$ のように先頭の 2 つの要素が決まってしまい, 自由度があるのは, その後の $n-2$ 個の要素だけである。つまり, 長さ n で先頭要素が 2 である交代順列の組み合わせの数は, 長さ $n-2$ の交代順列の組み合わせの数 $\hat{T}_{n-2}$ と等しい。したがって, 長さ n の交代順列の組み合わせの数 $\hat{T}_n$ は,

$$\hat{T}_n=E_{n+1,n+1}=E_{n+2,2}, \tag{3.19}$$

となる。これで, $\hat{T}_n$ を計算する漸化式がそろった。まず, 長さ 1 で先頭要素が 1 である交代順列から始める。そのような交代順列は [1] しかないので, $E_{11}=1$ である。次に, (3.18) より, $E_{22}=1$ である。再度, (3.18) より, $E_{32}=1$ である。次に, 漸化式 (3.17) を用いて, E_{33} を計算すると,

$$E_{33}=E_{22}+E_{21}=1,$$

となる。続いて, (3.18) によって $E_{42}=1$ が得られ, 漸化式 (3.17) によって E_{43} と E_{44} が計算される。ここで, (3.17) が

$$E_{nk}=E_{n,k-1}+E_{n-1,n-k+1}, \tag{3.20}$$

のように変形されることに気付けば計算しやすい。この規則性したがって計算を進めると表 3.3 を得ることができる。この表を見ると, 対角成分が長さ n の交代順列の組み合わせの総数, すなわち, タンジェント数とセカント数であることがわかる。しかも, この表は加算のみで作成できることが利点である。

表 3.3: 漸化式によって計算した Entringer 数 E_{nk}

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	0	1					
3	0	1	1				
4	0	1	2	2			
5	0	2	4	5	5		
6	0	5	10	14	16	16	
7	0	16	32	46	56	61	61

漸化式 (3.18) と (3.20) は, 整数の加算のみで計算できるため, 計算機でタンジェント数やセカント数を計算するのに使用される。さらに, タンジェント数はベルヌーイ数を用いて

$$T_{2k-1} = \frac{(-1)^k(2^{2k} - 4^{2k})B_{2k}}{2k},$$

と書くことができるので, 上の漸化式を用いて得られたタンジェント数からベルヌーイ数を得ることができる。有理数であるベルヌーイ数を分数表現するには, ベルヌーイ数による漸化式によって計算するには分数計算と乗算が必要である。しかし, タンジェント数からベルヌーイ数を得る方法では, 漸化式の計算は整数の加算だけでよいので, ベルヌーイ数も容易に計算できるようになるのである。

一方, 表 3.3 を手計算に適した形 (表 3.4) に組みかえることもできる。まず, 頂上 (第 0 行 0 列目) に 1 を書く。その数値 1 を真下 (第 1 行 0 列目) に書き, 右隣に 1 を書く。次に, その右下 (第 2 行 2 列目) に 1 を書き, 左に向かってある規則にしたがって数字を書く。その規則とは, 進行方向の斜め上にある数字を加算しながら左に向かって数字を書いていき, 加算する数がなくなるまで続ける。左方向への走査が終わると, 左端の数字を真下に書き, 同様の規則で右に向かって走査する。このように計算していくと表 3.4 のような三角形の領域に数値が埋まっていく。その三角形を Seidel-Entringer の三角形と呼ぶ。具体的に, Seidel-Entringer 三角形の要素 A_{nk} に関する生成規則は,

$$\begin{aligned}
&A_{00} = 1, && \\
&A_{2n,2n} = A_{2n-1,2n-1}, \qquad && A_{2n,k} = A_{2n,k+1} + A_{2n-1,k-1}, \\
&A_{2n+1,0} = A_{2n,0}, && A_{2n+1,k} = A_{2n,k-1} + A_{2n-1,k},
\end{aligned}$$

のように表現できる。この操作を繰り返していくと, 奇数行目の第 0 列目にタンジェント数が, 偶数行目の対角成分にセカント数が並んでいる。

表 3.4: Seidel-Entringer の三角形

$n \setminus k$		0	1	2	3	4	5	6	7
0		**1**							
1	→	1	**1**						
2		**2**	2	1	←				
3	→	2	4	5	**5**				
4		**16**	16	14	10	5	←		
5	→	16	32	46	56	61	**61**		
6		**272**	272	256	224	178	122	61	←
7	→	272	544	800	1024	1202	1324	1385	**1385**

前にも述べたが, 習慣的には, セカント数の代わりにオイラー数を用いた議論が多い。オイラー数 E_n は母関数 $2/(e^x + e^{-x})$ のテイラー級数の n 次の展開係数であるが, セカン

ト数 $\hat{E}_n$ とは, $E_{2k} = (-1)^k \hat{E}_{2k}$ なる関係がある。よって, オイラー数も Seidel-Entringer の三角形で計算できる ($(-1)^k$ を乗じる必要があるが) のである。