第2章　スターリング数

前章でべき乗和を定式化したついでに, 上昇階乗における総和がべき乗和の公式に比べ, 美しい形であることを紹介した。本章では, 上昇階乗と下降階乗という概念を紹介し, べき乗との関連づけのためスターリング数を導入する。スターリング数には第1種スターリング数と, 第2種スターリング数の2種類が定義されている。それらの定義は, 本章で説明する。さらに, スターリング数とベルヌーイ数の関係にも言及する。

2.1　上昇階乗と下降階乗

階乗と言えば, $k! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)\,k$ のように, 1を基点として上昇する整数の乗積を思い浮かべるだろう。これに対し, ある数値 x を基点として1ずつ増加させながら乗積を k 回繰り返した結果 $x\,(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$ を k 次の上昇階乗 (rising factorial) と呼ぶ。逆に, 基点となる数値 x から1ずつ減少させながら乗積を k 回繰り返した結果 $x\,(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ を k 次の下降階乗 (falling factorial) と呼ぶ。これらの場合, 基点とする数値 x は整数でなくてもよいとする。

本章では上昇階乗と下降階乗を取り扱うため, そのための記号を定義しておこう。上昇階乗は $x^{\overline{k}}$ のように, 指数にオーバラインを付加した記号で表す。下降階乗は $x^{\underline{k}}$ のように, 指数にアンダラインを付加した記号で表す。その定義を具体的に書くと,

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{k}} &\equiv x\,(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1),\\
x^{\underline{k}} &\equiv x\,(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),
\end{aligned}
$$

のようになる。典型的な例をあげると, $1^{\overline{k}} = k!$ である。また, 正の整数 n, k について, $n^{\overline{k}} = (n+k-1)!/(n-1)!$ が成立する。この類の関係式は, むしろ, 下降階乗の方が簡潔に書ける。下降階乗の場合, $n^{\underline{k}} = n!/(n-k)!$ となる。この関係式から発想できる通り, 二項係数は $\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}/k!$ のように下降階乗を用いると簡潔に書くことができる。

上昇階乗の次数を1だけ増加することを考えよう。その操作は,

$$
x^{\overline{k+1}} = (x+k)\,x^{\overline{k}},
$$

のように書くことができる。この関係式を利用すると, 上昇階乗の次数を 1 だけ減少する操作は,

$$x^{\overline{k-1}} = \frac{x^{\overline{k}}}{x+k-1},$$

であると考えられる。これを利用すると, ゼロ次, 負の次数の上昇階乗も議論することができる。それらを列記すると,

$$x^{\overline{0}} = 1, \quad x^{\overline{-1}} = \frac{1}{x-1}, \quad x^{\overline{-2}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \quad \cdots$$
$$\ldots, \quad x^{\overline{-k}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)} = \frac{x}{x^{\underline{k+1}}} = \frac{1}{(x-1)^{\underline{k}}},$$

となる。同様の操作を下降階乗について実行すると,

$$x^{\underline{0}} = 1, \quad x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}, \quad x^{\underline{-2}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \quad \cdots$$
$$\ldots, \quad x^{\underline{-k}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} = \frac{x}{x^{\overline{k+1}}} = \frac{1}{(x+1)^{\overline{k}}},$$

であることが導かれる。つまり, 上昇階乗と下降階乗は無関係ではないことがわかる。

2.2　第 1 種スターリング数

本節では, 上昇階乗 $x^{\overline{k}}$ や下降階乗 $x^{\underline{k}}$ を x のべき級数で記述しよう。まず, 変数 x についての n 次の上昇階乗 $x^{\overline{n}} \equiv x\,(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ を x のべき級数として展開する。次数 n が小さい場合, 上昇階乗は,

$$x = x,$$
$$x\,(x+1) = x + x^2,$$
$$x\,(x+1)(x+2) = 2x + 3x^2 + x^3,$$
$$x\,(x+1)(x+2)(x+3) = 6x + 11x^2 + 6x^3 + x^4,$$

のように展開される。この展開式を一般化し,

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \tag{2.1}$$

のように書くことにしよう。ここで, 展開係数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ は第 1 種スターリング数と呼ばれる。この展開式の記法は, 二項係数を用いた $(1+x)^n$ の展開を参考にしている。

上昇階乗の展開係数 $\left[{n \atop k}\right]$ の計算法を見つけるため, (2.1) を変形してみよう。数式変形に関し, $x^{\overline{n}} = (x+n-1)\,x^{\overline{n-1}}$ であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{n}} &= (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\left[{n-1 \atop k}\right]x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[{n-1 \atop k}\right]x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]x^k \\
&= (n-1)\left[{n-1 \atop 0}\right] + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]\right)x^k + \left[{n-1 \atop n-1}\right]x^n,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

が得られる。第 1 種スターリング数の初項として, $x^{\overline{0}} = 1$ であることに注意すると, $\left[{0 \atop 0}\right] = 1$ であると言える。次数 n を増加させながら順次 (2.2) を適用すれば, $n \geq 1$ の次数に対して第 1 種スターリング数を計算するための漸化式:

$$
\left[{n \atop 0}\right] = 0, \qquad \left[{n \atop n}\right] = 1, \qquad \left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right],
\tag{2.3}
$$

が得られる。ゼロ次以外の上昇階乗べきに対する第 0 次の第 1 種スターリング数は必ずゼロになる。また, 各次数の上昇階乗べきにおける最高次の第 1 種スターリング数は, 必ず, 1 に等しい。漸化式を用いて第 7 次までの上昇階乗べきに対する第 1 種スターリング数を計算した結果が表 2.1 である。その表を見ると, 第 1 種スターリング数の中に簡単な数式で書ける成分があることがわかる。その成分とは, $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$ と, $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2}$ である。これらの関係は, 漸化式 (2.3) を用いれば証明できる。また, 表 2.1 の数値が書かれていない場所がゼロ, すなわち, $n < k$ に対して $\left[{n \atop k}\right] = 0$ と定義すると, この後の解析に都合がよい。当然, そのような定義は漸化式 (2.3) とも矛盾しない。

表 2.1: 第 1 種スターリング数

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

続いて, 下降階乗 $x^{\underline{n}} \equiv x\,(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ を x のべき級数で展開しよう。上昇階乗の展開に倣って,

$$
x^{\underline{n}} \equiv \sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]_{\downarrow} x^k,
$$

と書くことにしよう。次数が小さい下降階乗の例:

$$x^{\underline{2}} = -x + x^2, \quad x^{\underline{3}} = 2x - 3x^2 + x^3,$$

から, $\left[{n \atop k}\right]_{\downarrow} = (-1)^{n+k}\left[{n \atop k}\right]$ であることが推定できる。この推定が正しいことを数学帰納法で証明すれば展開係数の特定ができる。いや, 実はもっと簡単に特定することが可能である。それには,

$$\begin{aligned}(-x)^{\overline{n}} &= (-x)(-x+1)(-x+2)\cdots(-x+n-1)\\ &= (-1)^n \cdot x\,(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = (-1)^n x^{\underline{n}},\end{aligned}$$

の関係を利用すればよい。この式の両辺を個別に展開して等号で結べば,

$$\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right](-1)^k x^k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]_{\downarrow} x^k,$$

が得られる。任意の x についてこの関係が恒等的に成立するには,

$$\left[{n \atop k}\right]_{\downarrow} = (-1)^{n+k}\left[{n \atop k}\right], \tag{2.4}$$

が条件となる。つまり, これは下降階乗の展開係数が特定できたことを意味する。しかも, 先ほどの推定が正しいことも証明できた。下降階乗の展開係数 $\left[{n \atop k}\right]_{\downarrow}$ は, $\left[{n \atop k}\right]_{\downarrow} = (-1)^{n-k}\left[{n \atop k}\right]$ なる関係のため, 符号つき第 1 種スターリング数と呼ばれることがある。

本節の最後に, 第 1 種スターリング数に関する性質をいくつか紹介しておこう。その性質とは,

$$\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right] = n!, \tag{2.5a}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[{n \atop k}\right] = 0, \quad (n \geq 2) \tag{2.5b}$$

である。第 1 の性質 (2.5a) は $1^{\overline{n}} = n!$ であることから導かれる。第 2 の性質 (2.5b) は, $n \geq 2$ のとき $(-1)^{\overline{n}} = 0$ であることから導かれる。これらの数式に書かれている総和の範囲の上限を n の代わりに, $N > n$ としてもよい。

2.3 第 2 種スターリング数

第 1 種スターリング数があるということは, 当然, 第 2 種スターリング数も存在する。第 2 種スターリング数は, x のべき乗を下降階乗で展開するための展開係数として定義される。つまり, 第 2 種スターリング数は,

$$x^n = \sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}, \tag{2.6}$$

に含まれる $\left\{{n \atop k}\right\}$ のことである。第 2 種スターリング数の規則性を調べるため, 次数の低い x のべき乗を下降階乗で表現してみよう。計算するにあたり, $x^{\underline{n}} = (x-n+1)\, x^{\underline{n-1}}$ であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
x &= x^{\underline{1}}, \\
x^2 &= (x-1+1)\, x^{\underline{1}} = x^{\underline{1}} + x^{\underline{2}}, \\
x^3 &= (x-1+1)\, x^{\underline{1}} + (x-2+2)\, x^{\underline{2}} \\
&\qquad\qquad\quad = x^{\underline{1}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{3}}, \\
x^4 &= (x-1+1)\, x^{\underline{1}} + 3\,(x-2+2)\, x^{\underline{2}} + (x-3+3)\, x^{\underline{3}} \\
&\qquad\qquad\quad = x^{\underline{1}} + 7x^{\underline{2}} + 6x^{\underline{3}} + x^{\underline{4}},
\end{aligned}
$$

が得られる。特別な値として $x^0 = 1$ であることから, $\left\{{0 \atop 0}\right\} = 1$ を第 2 種スターリング数の初項としよう。上に示した例の計算過程から,

$$
\left\{{n \atop 0}\right\} = 0, \quad \left\{{n \atop n}\right\} = 1, \quad \left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k\left\{{n-1 \atop k}\right\}, \tag{2.7}
$$

なる漸化式で展開係数が決定できると推測できる。この推測が正しいことを証明しよう。まず, $\left\{{n \atop 0}\right\} = 0$ と $\left\{{n \atop n}\right\} = 1$ は矛盾がなさそうである。次に, x^{n-1} について展開式 (2.6) を適用し, それをもとに x^n を展開すると,

$$
\begin{aligned}
x^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{{n-1 \atop k}\right\}(x-k+k)\, x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{{n-1 \atop k}\right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} k\left\{{n-1 \atop k}\right\} x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k\left\{{k-1 \atop k}\right\}\right) x^{\underline{k}} + \left\{{n-1 \atop n-1}\right\} x^{\underline{n}},
\end{aligned}
$$

が得られる。この計算結果から, 矛盾なく漸化式 (2.7) が成立することが確認できる。漸化式 (2.7) を用いて第 7 次までの第 2 種スターリング数を計算すると, 表 2.2 のようになる。この表によると, $n \geq 1$ に関して, $\left\{{n \atop 1}\right\} = 1$, $\left\{{n \atop n-1}\right\} = \binom{n}{2}$ が成立することがわかる。この性質も, 漸化式 (2.7) から容易に証明することができる。

第 2 種スターリング数は, 符号つき第 1 種スターリング数とは逆行列の関係にある。これは, x^n を $x^{\underline{k}}$ で展開し, さらに, x^j で展開すれば証明できる。実際に数式変形を試みると,

$$
x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \left\{{n \atop k}\right\} \left[{k \atop j}\right]_{\downarrow} x^j,
$$

が得られる。前節で述べたように, $j > k$ に対して $\left[{k \atop j}\right]_{\downarrow} = 0$ のように符号つき第 1 種スターリング数が定義されているので, 上の数式は, 上の式は,

$$
x^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} \left[{k \atop j}\right]_{\downarrow} x^j,
$$

表 2.2: 第 2 種スターリング数

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

のように書いてもよい。第 2 種スターリング数も同様に, $k > n$ に対して $\left\{ {k \atop j} \right\} = 0$ となるように定義しておこう。すると, $N \geq n$ を用いて,

$$x^n = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right]_{\downarrow} x^j,$$

と書くこともできる。この式の右辺は, 当然, x^n に等しくなければならないので,

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop j} \right]_{\downarrow} = \delta_{nj},$$

となるはずである。ここで, δ_{nj} はクロネッカーのデルタである。これら 2 種類のスターリング数 $\left[{n \atop k} \right]$ と $\left\{ {n \atop k} \right\}$ を N 次正方行列の $[n, k]$ 成分とすると, 符号つき第 1 種スターリング数と, 第 2 種スターリング数は逆行列の関係にあることがわかる。

例をあげて, 符号つき第 1 種スターリング数と第 2 種スターリング数が逆行列の関係であることを検証しよう。検証のための例として, 4 次までのスターリング数を並べてつくった 5 次の正方行列を考えよう。第 j 行目, 第 k 列目の成分を $\left[{j \atop k} \right]_{\downarrow}$ とする行列 A と, $\left\{ {j \atop k} \right\}$ とする行列 B, すなわち,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

を定義しよう。これらの行列の積を計算すると,

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となり, 単位行列が得られる。上に一般的な数式を書いたように, いかなる次数についても, このような関係が成立する。

べき乗 x^n を下降階乗 $x^{\underline{k}}$ で展開するときの係数を $\left\{{n \atop k}\right\}$ と書くのと同様に, x^n を上昇階乗 $x^{\overline{k}}$ で展開するときの係数を $\left\{{n \atop k}\right\}_{\uparrow}$ と書こう。この新たな係数は, $(-x)^n$ を考えれば特定できる。この量は, $(-x)^n = (-1)^n x^n$ と書くことができる。この両辺を個別に展開すると,

$$\begin{aligned}(-x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} (-x)^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} (-1)^k\, x^{\overline{k}}, \\ (-1)^n x^n &= (-1)^n \left\{{n \atop k}\right\}_{\uparrow} x^{\overline{k}},\end{aligned}$$

のようになる。これら 2 つの数式のうち, 上の式の変形には前節で示した $(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k\, x^{\overline{k}}$ の関係を用いた。これらの式はもともと同一の量のはずなので, 両者が任意の x に対して恒等的に等しくなる条件を求めると,

$$\left\{{n \atop k}\right\}_{\uparrow} = (-1)^{n+k} \left\{{n \atop k}\right\}, \tag{2.8}$$

が得られる。この関係式は, 第 1 種スターリング数と符号つき第 1 種スターリング数との関係と同一である。漸化式 (2.7) によると第 2 種スターリング数 $\left\{{n \atop k}\right\}$ はゼロか, 正の整数であるので, $\left\{{n \atop k}\right\}_{\uparrow}$ は正と負の数が混在している。よって, $\left\{{n \atop k}\right\}_{\uparrow}$ を符号つき第 2 種スターリング数と呼ぶことにする。

本節の最後に, これまでに述べた以外の第 2 種スターリング数の性質をいくつか紹介しておこう。その性質とは,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (k-1)! \left\{{n \atop k}\right\} = 0, \qquad (n \geq 2) \tag{2.9a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k}\, k! \left\{{n \atop k}\right\} = 1, \tag{2.9b}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} (k+1)! \left\{{n \atop k}\right\} = 2^n, \tag{2.9c}$$

である。第 1 の性質 (2.9a) は, 第 2 種スターリング数の漸化式を利用すれば証明できる。具体的に計算してみると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (k-1)! \left\{{n \atop k}\right\} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (k-1)! \left(\left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k \left\{{n-1 \atop k}\right\} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (k-1)! \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k! \left\{{n-1 \atop k}\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} k! \left\{{n-1 \atop k}\right\} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k! \left\{{n-1 \atop k}\right\} = 0,\end{aligned}$$

が得られるので, 第1の性質が正しいことがわかる。ただし, この数式変形が成立するのは, $n \geq 2$ のときである。また, この数式変形には $n < k$ のとき $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ となることを利用している。第2の性質は, $(-1)^{\underline{k}} = (-1)^k\, k!$ を用いて $(-1)^n$ を展開すれば導出できる。第3の性質は, $(-2)^{\underline{k}} = (-1)^k\, (k+1)!$ を用いて $(-2)^n$ を展開すれば導出できる。

2.4 ベルヌーイ数との関係

上昇階乗の和の公式を利用すれば第1種スターリング数とベルヌーイ数の関係を導出することができる。本節ではその関係を導出しよう。まず, $k+1$ を始点とする m 次の上昇階乗は, 第1種スターリング数を用いて,

$$(k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \sum_{p=1}^{m+1} \left[{m+1 \atop p} \right] k^{p-1} = \sum_{p=0}^{m} \left[{m+1 \atop p+1} \right] k^{p},$$

ように展開できる。上昇階乗の和の公式によって, k を 0 から $n-1$ まで上昇させたときの総和は,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^{m} \left[{m+1 \atop p+1} \right] n^{p+1}, \tag{2.10}$$

のように展開できる。一方, べき乗和がベルヌーイ数を展開係数に含む形式:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j\, n^{p-j+1},$$

によって計算できることを思い出そう。この公式を用いて上昇階乗の和を計算すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+2)\cdots(k+m) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{m} \left[{m+1 \atop p+1} \right] k^p \\
&= \sum_{p=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{j} \left[{m+1 \atop p+1} \right] B_j\, n^{p-j+1} \\
&= \sum_{r=0}^{m} \sum_{p=r}^{m} \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{p-r} \left[{m+1 \atop p+1} \right] B_{p-r}\, n^{r+1},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られる。異なる方法で計算した結果だが, (2.10) と (2.11) は同じ値となるはずである。その考えに基づき, (2.10) と (2.11) を等号で結ぶと,

$$\sum_{r=0}^{m} \sum_{p=r}^{m} \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{p-r} \left[{m+1 \atop p+1} \right] B_{p-r} n^{r+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^{m} \left[{m+1 \atop r+1} \right] n^{r+1},$$

なる関係が導かれる。この関係式において, n の1次の係数だけ取り出すと,

$$\frac{1}{m!} \sum_{p=0}^{m} \left[{m+1 \atop p+1} \right] B_p = \frac{1}{m+1}, \tag{2.12}$$

が得られる。これが第 1 種スターリング数とベルヌーイ数の関係である。この関係式はもう少し数式変形できる。関係式 (2.12) に第 1 種スターリングの漸化式を適用すると,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}\left(\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} m \\ p+1 \end{bmatrix}\right)B_p \\
&\quad = \frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix}B_p + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{p=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ p+1 \end{bmatrix}B_p \\
&\quad = \frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix}B_p + \frac{1}{(m-1)!}\sum_{p=0}^{m-1}\begin{bmatrix} m \\ p+1 \end{bmatrix}B_p \\
&\quad = \frac{1}{m!}\sum_{p=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix}B_p + \frac{1}{m},
\end{aligned}
$$

のように変形できる。この数式の右辺を $1/(m+1)$ と等号で結び, さらに数式変形をすると,

$$
\frac{1}{(m-1)!}\sum_{p=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix}B_p = -\frac{1}{m+1}, \quad (m \geq 1), \tag{2.13}
$$

が導出される。この関係式は, 導出過程で $1/m$ を取り扱い, 右辺に $1/(m-1)!$ が現れているため, 上の式に記載したように $m \geq 1$ を条件とする。関係式 (2.12) の両辺に $m!\left\{ \begin{matrix} N \\ m+1 \end{matrix} \right\}_{\uparrow}$ を乗じると,

$$
\sum_{p=0}^{m}\left\{ \begin{matrix} N \\ m+1 \end{matrix} \right\}_{\uparrow}\begin{bmatrix} m+1 \\ p+1 \end{bmatrix}B_p = \frac{m!}{m+1}\left\{ \begin{matrix} N \\ m+1 \end{matrix} \right\}_{\uparrow},
$$

なる関係が得られる。符号つき第 2 種スターリング数 $\left\{ \begin{matrix} N \\ m+1 \end{matrix} \right\}_{\uparrow}$ は第 1 種スターリング数の逆行列の関係にある係数である。さらに, $N > m$ を満たすように N を選べば, この等式は,

$$
\sum_{p=0}^{N}\left\{ \begin{matrix} N \\ m+1 \end{matrix} \right\}_{\uparrow}\begin{bmatrix} m+1 \\ p+1 \end{bmatrix}B_p = \frac{m!}{m+1}\left\{ \begin{matrix} N \\ m+1 \end{matrix} \right\}_{\uparrow},
$$

と書いても成り立つ。なぜなら, $p > m$ でならば $\begin{bmatrix} m+1 \\ p+1 \end{bmatrix} = 0$ となるようにスターリング数が定義されているからである。この式の両辺を, $m+1 \mapsto m = 1, 2, \ldots, N$ について総和をとると,

$$
\sum_{p=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{ \begin{matrix} s \\ m \end{matrix} \right\}_{\uparrow}\begin{bmatrix} m \\ p+1 \end{bmatrix}B_p = \sum_{m=1}^{N}\frac{(m-1)!}{m}\left\{ \begin{matrix} s \\ m \end{matrix} \right\}_{\uparrow},
$$

のようになる。ここで, 符号つき第 2 種スターリング数が第 1 種スターリング数の逆行列の関係にあることに注意すると, この数式は,

$$
B_{N-1} = \sum_{m=1}^{N}\frac{(m-1)!}{m}\left\{ \begin{matrix} s \\ m \end{matrix} \right\}_{\uparrow} = \sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+N}\frac{(m-1)!}{m}\left\{ \begin{matrix} N \\ m \end{matrix} \right\}, \tag{2.14}
$$

のように計算できる。これで, ベルヌーイ数と第 2 種スターリング数の関係を導出できた。ベルヌーイ数と第 2 種スターリング数の関係は (2.14) でよいのだが, この関係式はもう少

し簡略化できるのである。それは, 第 2 種スターリング数の漸化式 $\left\{{N \atop m}\right\} = \left\{{N-1 \atop m-1}\right\} + m\left\{{N-1 \atop m}\right\}$ を利用するのである。そのようにして数式変形すると,

$$
\begin{aligned}
B_{N-1} &= \sum_{m=1}^{N} (-1)^{N+m} \frac{(m-1)!}{m} \left\{{N \atop m}\right\} \\
&= \sum_{m=0}^{N} (-1)^{N+m} \left(\frac{(m-1)!}{m} \left\{{N-1 \atop m-1}\right\} + (m-1)! \left\{{N-1 \atop m}\right\} \right),
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

が得られる。 この式の右辺の第 2 項は, (2.9a) により, $N \geq 3$ のときゼロである。したがって, ベルヌーイ数は,

$$
\begin{aligned}
B_k &= \sum_{m=1}^{k+1} (-1)^{k+m-1} \frac{(m-1)!}{m} \left\{{k \atop m-1}\right\} \\
&= \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k+m} \frac{m!}{m+1} \left\{{k \atop m}\right\}, \qquad (k \geq 2)
\end{aligned}
$$

のように表される。この式は言うまでもなく, $k \equiv N-1$ となるように書き直した式である。しかし, この関係は $k = 0, 1$ のとき成立しない。その条件で (2.15) の第 2 項がゼロにならないからである。そこで, B_0 と B_1 を特別扱いして計算してみると,

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{0!}{1}\left\{{0 \atop 0}\right\} + 0!\left\{{0 \atop 1}\right\} = \frac{0!}{1}\left\{{0 \atop 0}\right\}, \\
B_1 &= -\frac{0!}{1}\left\{{1 \atop 0}\right\} + \frac{1!}{2}\left\{{1 \atop 1}\right\} - 0!\left\{{1 \atop 1}\right\} + 1!\left\{{1 \atop 2}\right\} = -\frac{1!}{2}\left\{{1 \atop 1}\right\},
\end{aligned}
$$

のように書くことができる。ここで, 再び $k \geq 2$ を見返そう。ベルヌーイ数は $k \geq 2$ で k が奇数のとき $B_k = 0$ であったことを思い出すと,

$$
B_k = \begin{cases}
\displaystyle \sum_{m=0}^{k} \frac{m!}{m+1} \left\{{k \atop m}\right\}, & (k = \mathrm{even}) \\
\displaystyle -\sum_{m=0}^{k} \frac{m!}{m+1} \left\{{k \atop m}\right\} = 0, & (k = \mathrm{odd})
\end{cases},
$$

と書いても誤りではない。したがって, $k \geq 0$ に対して,

$$
B_k = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{m!}{m+1} \left\{{k \atop m}\right\},
\tag{2.16}
$$

が成立することが示された。これは前に導出した関係式と比べると, ベルヌーイ数の添え字 k と第 2 種スターリング数の第 1 パラメータが一致していることと, -1 の指数が m のみになっていることで簡略化が図れている。

2.5　組み合わせ数学での意味

本章で導入した第 1 種スターリング数 $\left[{n \atop k}\right]$ と第 2 種スターリング数 $\left\{{n \atop k}\right\}$ は組み合わせ数学において意味のある数値を与える。それは, べき級数の展開係数である二項係数 $\binom{n}{k}$ が, n 個の品物 (または, 状態) から k 個を選ぶ組み合わせの数を与えることに似ている。

2.5.1　第 1 種スターリング数

第 1 種スターリング数 $\left[{n \atop k}\right]$ は n 個の要素を, k 個の巡回列に分割する組み合わせの数を与える。巡回列とは, 山手線の駅のように, 繰り返し通過する地点 (または番号) を定義するデータ列である。例えば, 4 個の整数 (0, 1, 2, 3) から 1 つの巡回列をつくると,

$$(0,1,2,3),\ \ (0,1,3,2),\ \ (0,2,1,3),\ \ (0,2,3,1),\ \ (0,3,1,2),\ \ (0,3,2,1)$$

の 6 通りの組み合わせが出てくる。上に示した例は, 巡回列が通過する数値を左から右に記している。右端に達した後, 左端に戻って再び左から右に数値をたどる。巡回列は始点を特に規定しないので, 巡回置換したデータ列の組み合わせは同一の組み合わせとみなす。例えば, $\{0,1,2,3\}$ から巡回置換で得られる組み合わせ: $(0,1,2,3)$, $(1,2,3,0)$, $(2,3,0,1)$, $(3,0,1,2)$ は同一の組み合わせであると考える。よって, 巡回列の組み合わせをくまなく列記するには, 便宜上, 先頭の数値を固定し, 残された数値の順序を並べ替えた組み合わせを列記すればよい。上に示した例では, 先頭の数値を 0 に固定し, 残りの 3 つの数値を並べ替えた組み合わせを書いているのである。すなわち, n 個の数値から得られる巡回列の組み合わせは, $n-1$ 個の数値の順序入れ替えの組み合わせの数と同一であるので, $(n-1)!$ 通りとなる。また, 数値 1 つだけの順列 (0) も, 繰り返し 0 を通過する巡回列とみなす。

それでは, 例として 4 個の整数を複数の巡回列に分離する組み合わせを列挙してみよう。下に記述するように, 4 個の整数は, 1 個から 4 個の巡回列に分離できる。分離した巡回列の数に対応し, 下に説明を記述する。

巡回列 1 個に分割 : 6 通り
$[(0,1,2,3)],\quad [(0,1,3,2)],\quad [(0,2,1,3)],\quad [(0,2,3,1)],\quad [(0,3,1,2)],\quad [(0,3,2,1)]$

巡回列 2 個に分割 : 11 通り
$[(0),(1,2,3)],\quad [(0),(1,3,2)],\quad [(1),(0,2,3)],\quad [(1),(0,3,2)],$
$[(2),(0,1,3)],\quad [(2),(0,3,1)],\quad [(3),(0,1,2)],\quad [(3),(0,2,1)],$
$[(0,1),(2,3)],\quad [(0,2),(1,3)],\quad [(0,3),(1,2)]$

巡回列 3 個に分割 : 6 通り
$[(0),(1),(2,3)],\quad [(0),(2),(1,3)],\quad [(0),(3),(1,2)],$
$[(1),(2),(0,3)],\quad [(1),(3),(0,2)],\quad [(2),(3),(0,1)]$

巡回列 4 個に分割 : 1 通り
$[(0),(1),(2),(3)]$

巡回列 1 個に分離する場合とは, 4 個の整数で巡回列をつくることである。前に説明したように, 4 個の整数からつくられる巡回列の組み合わせの数は $(4-1)! = 6$ 通りである。その組み合わせを列挙するには, 始点を 0 に固定し, 残りの 3 個の整数を並べ替えた組み合わせをすべて挙げればよい。

巡回列 2 個に分離する場合とは, 長さ 1 と長さ 3 の巡回列に分離, および, 長さ 2 の巡回列 2 個に分離する組み合わせとなる。前者の分離に関して, 長さ 1 の巡回列を選ぶ組み合わせが 4 通りある。その各組み合わせに対して, 長さ 3 の巡回列をつくらなければならない。長さ 3 の巡回列は $(3-1)! = 2$ とおり存在する。よって, 前者の分離は $4 \times 2 = 8$ 通りの組み合わせがある。後者の分離に関して, 4 個の整数から 2 個を選ぶ組み合わせを考える。その組み合わせは, 6 通りある。ところが, $(0, 1)$ を選ぶことは, $(2, 3)$ を選ぶことと同一の組み合わせを与えるので, 後者の分離は 3 通りの組み合わせが存在する。したがって, 巡回列 2 個に分離する組み合わせは, $8 + 3 = 11$ 通りの組み合わせが存在する。

巡回列 3 個に分離する場合とは, 長さ 1 の巡回列 2 個と長さ 2 の巡回列 1 個に分離する組み合わせとなる。組み合わせを列記するには, 長さ 1 の巡回列を 2 個選べば, 長さ 2 の巡回列が 1 通りしか現れない。よって, この分離の組み合わせの数は, 4 個の整数から 2 個を選ぶ組み合わせの数である。したがって, 巡回列 3 個に分離する組み合わせは 6 通り存在する。

最後に, 巡回列 4 個に分離するのは, 長さ 1 の巡回列 4 個に分離することである。したがって, 上に示した 1 通りの組み合わせしか存在しない。

上に列挙したとおり, 4 個の整数から k 個の巡回列に分離する組み合わせの数は $\left[{4 \atop k}\right]$ 通りになっている。この例から, 複数の巡回列に分離する組み合わせは, 第 1 種スターリング数で表されると推測できるかもしれない。その推測が正しいことを検証しよう。その検証のため, 5 個の整数 (0, 1, 2, 3, 4) を 3 個の巡回列に分離する組み合わせを列挙しよう。巡回列は次のように 2 段階の手順でつくることができる。

手順 1 整数 4 個 (0, 1, 2, 3) から 3 個の巡回列をつくり, 生成された巡回列のどれか 1 個に新たな整数 4 を追加する。

手順 2 整数 4 個 (0, 1, 2, 3) から 2 個の巡回列をつくり, 整数 4 を 3 番目の巡回列として追加する。

これらの手順の結果, 5 個の整数から 3 個の巡回列に分離する組み合わせとして, 下に示す 35 通りの組み合わせが得られた。この組み合わせの数は $\left[{5 \atop 3}\right]$ に等しい。

手順 1 の結果 : 24 通り

$[(0,4),(1),(2,3)]$, $[(0,4),(2),(3,1)]$, $[(0,4),(3),(1,2)]$,
$[(1),(2),(0,4,3)]$, $[(1),(3),(0,4,2)]$, $[(2),(3),(0,4,1)]$,
$[(0),(1,4),(2,3)]$, $[(0),(2),(3,1,4)]$, $[(0),(3),(1,4,2)]$,
$[(1,4),(2),(3,0)]$, $[(1,4),(3),(0,2)]$, $[(2),(3),(0,1,4)]$,
$[(0),(1),(2,4,3)]$, $[(0),(2,4),(3,1)]$, $[(0),(3),(1,2,3)]$,
$[(1),(2,4),(3,0)]$, $[(1),(3),(0,2,4)]$, $[(2,4),(3),(0,1)]$,
$[(0),(1),(2,3,4)]$, $[(0),(2),(3,4,2)]$, $[(0),(3,4),(1,2)]$,
$[(1),(2),(3,4,0)]$, $[(1),(3,4),(0,2)]$, $[(2),(3,4),(0,1)]$

手順 2 の結果 : 11 通り

$[(4),(0),(1,2,3)]$, $[(4),(0),(1,3,2)]$, $[(4),(1),(0,2,3)]$, $[(4),(1),(0,3,2)]$,
$[(4),(2),(0,1,3)]$, $[(4),(2),(0,3,1)]$, $[(4),(3),(0,1,2)]$, $[(4),(3),(0,2,1)]$,
$[(4),(0,1),(2,3)]$, $[(4),(0,2),(1,3)]$, $[(4),(0,3),(1,2)]$

上記の巡回列への分解方法を一般的な場合: n 個の整数を k 個の巡回列に分解する組み合わせに拡張するのは容易である。まず, n 個の整数を k 個の巡回列に分解する組み合わせの数を s_{nk} としよう。すると, s_{nk} は, $s_{n-1,k}$ を $n-1$ 倍した数と, $s_{n-1,k-1}$ との和である。つまり,

$$s_{n,k} = (n-1)\, s_{n-1,k} + s_{n-1,k-1},$$

なる漸化式で組み合わせの数を計算できるということだ。この漸化式は第 1 種スターリング数の漸化式と同一である。また, 1 個の整数を 1 個の巡回列に分解する組み合わせは 1 通りしかないのは明らかであるので, $s_{11} = 1$ である。この値は, 第 1 種スターリング数 $\left[{1 \atop 1}\right]$ と一致する。初項が第 1 種スターリング数と等しく, 第 1 種スターリング数の漸化式で一般項が導かれるので, 一般的な場合: n 個の整数を k 個の巡回列に分解する組み合わせの数は $s_{nk} = \left[{n \atop k}\right]$ となり, 第 1 種スターリング数と一致するのだ。

2.5.2 第 2 スターリング数

第 2 スターリング数 $\left\{{n \atop k}\right\}$ は, n 個の要素を k 個のグループに分ける組み合わせの数を与える。分ける要素には番号がついていて, 各要素が区別できる。しかし, グループには特に番号付けをせず, グループの順序は考えないものとする。また, グループは 1 個以上の要素で構成すればよく, すべてのグループに平等に要素を割り当てる必要はない。

例として, 4 個の要素 $\{0,1,2,3\}$ をグループに分割する組み合わせを考えよう。要素が 4 個なので, 構成されるグループは 1 個から 4 個までが考えられる。考えられる組み合わせを列挙すると以下のようになる。

1 個のグループ : 1 通り

$[0,1,2,3]$

2 個のグループ : 7 通り

$[(0),(1,2,3)],\quad [(1),(0,2,3)],\quad [(2),(0,1,3)],\quad [(3),(0,1,2)]$

$[(0,1),(2,3)],\quad [(0,2),(1,3)],\quad [(0,3),(1,2)]$

3 個のグループ : 6 通り

$[(0),(1),(2,3)],\quad [(0),(2),(1,3)],\quad [(0),(3),(1,2)],$

$[(1),(2),(0,3)],\quad [(1),(3),(0,2)],\quad [(2),(3),(0,1)]$

4 個のグループ : 1 通り

$[(0),(1),(2),(3)]$

まず, グループ 1 個に分ける場合, これはすべての要素を 1 つグループに入れてしまえばよいので, 1 通りしか組み合わせがない。もっとも, グループ 1 個では分けたとは言わないかもしれないが。

グループ 2 個に分けるには, 1 個と 3 個に分けるか, 2 個のグループ 2 つに分けるかの組み合わせがある。その中で, 1 個と 3 個に分ける場合, 1 個のグループを構成する要素を選ぶ組み合わせを考えればよい。残りの 3 個は選ぶ余地がなく一意的に決まる。よって, 1 個と 3 個のグループに分けるのは 4 通りである。次に 2 個と 2 個のグループに分けるには, 4 個の要素から 2 個を取り出す組み合わせを考える。その組み合わせは 6 通りある。残りの 2 つは選ぶ余地がなく一意的に決まる。それで, 6 通りと答えたいところだが, 実は違う。分割するグループの要素が 2 個と 2 個で対称性があるため, その 6 通りは重複があるのだ。重複を取り除くと組み合わせの数が半分になる。つまり, 2 個と 2 個のグループに分割すのは 3 通りの組み合わせがある。したがって, グループ 2 個に分割するには 7 通りの組み合わせがある。

グループ 3 個に分けるには, 1 個と 1 個と 2 個のグループに分ければよい。そのように分割する組み合わせは, 1 個のグループをなす要素を 2 つ選択する組み合わせを求めればよい。残りの 2 個は選ぶ余地もなく一意的に決まる。よって, グループ 3 個に分割するには 6 通りの組み合わせがある。

グループ 4 個に分割するのは非常に簡単である。すべてのグループが 1 個の要素しか含まないのだから, 1 通りしか組み合わせが存在しない。

次に, 5 個の要素をグループ 3 個に分割する場合を考えよう。上と同じように考えるなら, 1 個と 1 個と 3 個のグループに, 1 個と 2 個と 2 個のグループに分けることができる。そのように計算を始めてもよいのだが, 先ほどより, 計算が少し複雑になるだろう。実は, もっと簡単に組み合わせを列挙する方法がある。それには, 次の 2 段階の手順を使うのだ。

手順 1　要素 0, 1, 2, 3 をグループ 2 個に分割し, 要素 4 を単独で第 3 のグループとして追加する。

手順 2　要素 0, 1, 2, 3 をグループ 3 個に分割し, 要素 4 を分割したどれかのグループに加える。

まず, 4 個の要素 $(0,1,2,3)$ がグループ 2 個に分割される組み合わせは 7 通りある。それに要素 4 を単独のグループとして追加する組み合わせは特に選ぶ余地もないので, 手順 1 による組み合わせは 7 通りである。次に, 4 個の要素 $(0,1,2,3)$ がグループ 3 個に分割する組み合わせは 6 通りある。新たな要素 4 をいづれかのグループに追加するには, 構成されたグループの数 $(=3)$ だけの自由度がある。したがって, 手順 2 による組み合わせは $3 \times 6 = 18$ 通りの組み合わせがある。つまり, 5 個の要素をグループ 3 個に分割する組み合わせは全部で 25 通りあることになる。手順 1 と手順 2 に対応し, それら 25 通りの組み合わせを列挙すると次のようになる。

手順 1 の結果 : 7 通り

$[(4),(0),(1,2,3)],\quad [(4),(1),(0,2,3)],\quad [(4),(2),(0,1,3)],\quad [(4),(3),(0,1,2)]$
$[(4),(0,1),(2,3)],\quad [(4),(0,2),(1,3)],\quad [(4),(0,3),(1,2)]$

3 個のグループ : 18 通り

$[(0,4),(1),(2,3)],\quad [(0,4),(2),(1,3)],\quad [(0,4),(3),(1,2)],$
$[(1,4),(2),(0,3)],\quad [(1,4),(3),(0,2)],\quad [(2,4),(3),(0,1)],$
$[(0),(1,4),(2,3)],\quad [(0),(2,4),(1,3)],\quad [(0),(3,4),(1,2)],$
$[(1),(2,4),(0,3)],\quad [(1),(3,4),(0,2)],\quad [(2),(3,4),(0,1)],$
$[(0),(1),(2,3,4)],\quad [(0),(2),(1,3,4)],\quad [(0),(3),(1,2,4)],$
$[(1),(2),(0,3,4)],\quad [(1),(3),(0,2,4)],\quad [(2),(3),(0,1,4)]$

上記の手順を一般の場合: n 個の要素をグループ k に分割する組み合わせに応用するのは容易である。その組み合わせの数を S_{nk} としよう。まず, 手順 1 によって, $n-1$ 個の要素をグループ $k-1$ 個に分割する。その組み合わせは $S_{n-1,k-1}$ 通りである。そのグループに加え, n 番目の要素を第 k 番目のグループとして追加する。その組み合わせは特に選ぶ余地もなく, 一意的に決まるので, 手順 1 によってグループ k 個を構成する組み合わせは $S_{n-1,k-1}$ 通りである。手順 2 によって $n-1$ 個の要素をグループ k 個に分割する組み合わせは $S_{n-1,k}$ 通り存在する。そのように構成されたグループの 1 つに n 番目の要素を追加する。要素の追加は, グループの数 k だけの自由度があるので, 手順 2 によってグループ k 個を構成する組み合わせは $k\,S_{n-1,k}$ 通り存在する。したがって, n 個の要素をグループ k 個に分割する組み合わせの数は, $S_{nk} = S_{n-1,k-1} + k\,S_{n-1,k}$ となる。この漸化式は第 2 種スターリング数の漸化式と一致する。しかも, 1 個の要素をグループ 1 個に分割する組み合わせの数は $S_{11} = 1$ であり, 第 2 種スターリング数 $\left\{{1 \atop 1}\right\}$ と同じ値であるので, n 個の要素をグループ k 個に分割する組み合わせの数は第 2 種スターリング数 $\left\{{n \atop k}\right\}$ に等しい。

第 2 種スターリング数は, 一般項を計算する公式が知られている。一般項は, 漸化式から導出するのは容易でないため, 組み合わせ数学における考察によって導かれる。導出は付録に譲るが, 第 2 種スターリング数は,

$$\left\{{n \atop k}\right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n, \tag{2.17}$$

なる式で計算することができる。この式は総和記号を含んでいるため, 漸化式を用いて計算することより簡単とは言いがたい。むしろ, 漸化式を用いたほうが速いかもしれない。