第1章　ベルヌーイ数の導入

本書の主体であるベルヌーイ数を導入するのが本章の目的である。ベルヌーイ数は, 数論でしばしば現れる数列であり, 歴史的には, 整数のべき乗和を計算する公式を一般化したことに端を発する。本章では, 歴史に基づき, べき乗和を一般化することによってよってベルヌーイ数を導入し, ベルヌーイ数の性質を探っていく。

1.1　べき乗和

べき乗和とは連続した整数をべき乗した値の総和である。本節では, $S_k(n) \equiv 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k$ によって定義されるべき乗和のうち, k が 5 以下のケース, すなわち 5 次以下のべき乗和を扱ってみよう。

べき乗和のよく知られた簡単な例は, $S_1 = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)$ のような連続する整数の和である。これは, $k = 1$ としたべき乗和, すなわち, 1 次のべき乗和である。とにかく, 小学生の頃, 1 から 10 まで, あるいは, 1 から 100 までの総和を計算した人は少なくないだろう。この整数和に関しては, あの数学者のガウスが小学生だった頃, 数学的才能を発揮して教師を驚かせた話が有名である。その話は, 1 から 100 までの和を計算する問題に関する話である。まだ 7 歳だったガウスはものの数分で 1 から 100 までの総和を計算したのだ。ガウスは暗算の達人だったわけではない。少年だったガウスは, 彼の数学センスで 1 から 100 までの和を即座に計算できる計算方法を考案したのだ。ガウスは 1 から 100 まで値を直接加算するかわりに, $(1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51) = 50 \times 101 = 5050$ という工夫によって, 短時間で和を計算したのだ。この方法を応用すれば, 1 から 1 000 000 の和であっても即座に計算できるのである。その教師は, 教え子に時間を要する課題を与えておいて, その間に, たまっていた雑用を片付けてしまおうと考えていたのかもしれないが, 天才ガウスには通じなかった。優秀すぎる生徒は, 時として教師には迷惑なものである。

上に示したガウス少年の手法は $k = 1$ のべき乗和に関して有効な手法であるが, $k \geq 2$ のべき乗和には応用できない。これに対し, 任意の k について応用可能なアプローチがあ

るので紹介しよう。まず,

$$\sum_{j=0}^{n-1} j^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2,$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2,$$

なる 2 つの和を比較する。これらの差をとると,

$$\sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) = n^2,$$

が得られる。この式の左辺が $2S_1(n) + n$ であることに注意すると, 1 次のべき乗和 $S_1(n)$ は, $S_1(n) = n(n-1)/2$ によって簡単に計算できることが示される。この結果は, ガウス少年のアプローチで得られる結果と一致する。

連続する整数の自乗和 $S_2(n)$, すなわち, 2 次のべき乗和を計算するには, 上の導出過程を参考にして, $(n+1)^3 - n^3$ の総和を考えればよい。上の導出過程から予想がつくように,

$$3S_2(n) + 3S_1(n) + n = n^3,$$

が成立するはずである。既に求められている $S_1(n)$ を代入すると,

$$S_2(n) = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1),$$

が得られる。 この自乗和があれば, 図 1.1 に示すピラミッドのブロック数を簡単に計算す

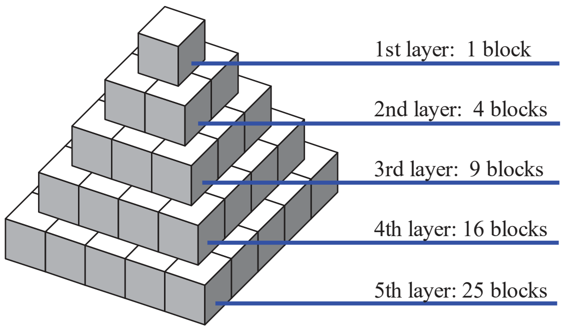


図 1.1: ピラミッドを構成するブロックの数

ることができる。図に示すように, ピラミッドの頂点から数えて第 1 層, 第 2 層, 第 3 層を構成するブロックは, それぞれ, 1 個, 4 個, 9 個, のように層番号の自乗になっている。図に描かれている第 5 層までを構成するブロックの数は, $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ のように計算できる。これを上に示した公式で計算するには, $S_2(n)$ に $n = 6$ を代入すればよい。すると,

$$S_2(6) = \frac{1}{6} \times 6 \times (6-1) \times (12-1) = 55,$$

となり, 単純に各層のブロック数を加算したときと同じ結果を示す。第 5 層くらいではありがたみを感じないが, ピラミッドの層が多くなると上の公式が必要となるだろう。例えば, ピラミッドが 99 層 ($n = 100$) のとき, ピラミッドを構成するブロックの数は,

$$S_2(100) = \frac{1}{6} \times 100 \times (100 - 1) \times (200 - 1) = 328\,350,$$

となる。さすがに, 公式を用いても容易に暗算できる数ではないが, 99 層分の加算を繰り返すことに比べると大きな労力の軽減である。そう考えると, この公式の有効性を理解できるだろう。

次数が 3 以上のべき乗和についても同様, $(n+1)^4 - n^4$ の総和を評価すれば, 連続する整数の 3 乗和 $S_3(n)$ が求まり, $(n+1)^5 - n^5$ を評価すれば, 連続する整数の 4 乗和 $S_4(n)$ が求まる。結果のみを書くと,

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4} n^2 (n-1)^2, \\ S_4(n) &= \frac{1}{30} n(n-1)(2n-1)(3n^2 - 3n - 1), \\ S_5(n) &= \frac{1}{12} n^2 (n-1)^2 (2n^2 - 2n - 1), \end{aligned}$$

となる。同様の操作を繰り返していけば, さらに高次のべき乗和を計算することができる。容易に予想がつくように, k 次のべき乗和は n の $k+1$ 次式で記述できる。

これまでに示したべき乗和 $S_1(n)$ から $S_5(n)$ までを観察すると, 共通した因数をもっていることが容易に見いだせる。その事実を性質として記述するなら, 次の二つの性質を書くことができる。

- 任意の (ただし 1 以上の) 次数のべき乗和 $S_k(n)$ は, $n\,(n-1)$ を因数として因数分解できる。
- 偶数次のべき乗和 $S_{2k}(n)$ は $2n - 1$ を因数として因数分解できる。

第 1 の性質を証明するのは簡単である。まず, 1 次のべき乗和が $S_1(n) = n\,(n-1)/2$ であるので性質 1 を満足している。ここで, $k-1$ 次のべき乗和まですべてが $n\,(n-1)$ で因数分解できると仮定しよう。そのとき, k 次のべき乗和の公式を導出する過程で,

$$n^{k+1} - n = (k+1)\, S_k(n) + \sum_{j=1}^{k-1} \tbinom{k+1}{j} S_j(n),$$

なる数式が得られる。この数式の左辺は,

$$n^{k+1} - n = n\,(n-1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \cdots + n + 1),$$

のように $n\,(n-1)$ で因数分解できる。右辺の第 2 項以降は, 現時点で仮定した事実のため $n\,(n-1)$ で因数分解できる。したがって, k 次のべき乗和 $S_k(n)$ は $n\,(n-1)$ で因数分解できるはずである。

第 2 の性質は, ベルヌーイ多項式を利用すると容易に証明できる。ベルヌーイ多項式は第 5 章で取り扱うので, 証明はその時点まで延ばしておきたい。現時点では, 第 2 の性質も成立するものとして受け止めていただきたい。

1.2　二項定理

べき乗和を一般化するための前提情報として, 2 つの変数の和 $a+b$ のべき乗, すなわち, $(a+b)^n$ について考えてみよう。まず, 指数 n をいくつか挙げて具体的にべき乗を計算してみると,

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1,\\
&(a+b)^1 = a+b,\\
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\
&(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\\
&(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,
\end{aligned}
$$

が得られる。この計算結果を見ると, 各項の a の次数と b の次数の和は, 必ず, n に等しい。また, 縦方向にべき乗の次数, 横方向に b についての次数をとり, その展開係数を表にすると表 1.1 に示すように, ゼロでない係数が 3 角形をなす。その 3 角形はパスカルの三角形と呼ばれ, 配置された数値には一定の規則性がある。表 1.1 の第 n 行, 第 k 列に位置する

表 1.1: パスカルの三角形

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

係数を $\binom{n}{k}$ としよう。そのとき, 表に書かれた係数は,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \tag{1.1}$$

の関係を満足する。ただし, 表の外や, 空白の場所に該当する係数はゼロであるとする。漸化式 (1.1) によると, 表 1.1 に書かれる数値は, 左斜め上の数値と上の数値の和である。この規則性を利用してパスカルの三角形を書いていけば, $(a+b)^n$ を実際に計算することなく, その展開係数がわかるのである。パスカルの三角形に関する規則性は, 古い記録では, 11 世紀ペルシアのウマル・ハイヤームによって発見された* ことが知られている。なお, この 3 角形がパスカルの三角形と呼ばれるのは, 17 世紀にこの規則性を再発見したパスカルにちなんでいる。

パスカルの三角形に関する漸化式 (1.1) を証明するのは容易である。パスカルの三角形に書かれる係数 $\binom{n}{k}$ が $(a+b)^n$ の展開係数であるので,

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k-1} b^k,$$

と書くことができる。ところで, この時点では係数 $\binom{n}{k}$ の正体は未知であるとする。上の展開式に $a+b$ を乗じると,

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k-1} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k-1} b^{k+1} \\
&= \binom{n-1}{0} a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] a^{n-k} b^k + \binom{n-1}{n-1} b^n,
\end{aligned}$$

が得られる。この結果によって, 漸化式 (1.1) の成立が示される。また, パスカルの三角形の頂点の値 $\binom{0}{0} = 1$ より, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ であることが漸化式 (1.1) から導かれる。また, $(a+b)^n = (b+a)^n$ から $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ である性質も導かれる。

漸化式 (1.1) を満足する展開係数 $\binom{n}{k}$ は二項係数と呼ばれる。二項係数の具体的な値は, 漸化式 (1.1) から導くのは困難であろう。その代わりに, パスカルの三角形 (表 1.1) を見ると,

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

であることが推測できる。この推測が漸化式 (1.1) を満たすことは容易に示せるはずである。また, 二項係数の値は, 階乗記号 (!) を用いて,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

*E. Hairer, G. Wanner, "解析教程 上," シュプリンガー・ジャパン, 新装版, 蟹江幸博訳, p. 22, 2006.

のように書いてもよい。これで, あえて未知としてきた係数 $\binom{n}{k}$ の正体がはっきりしたわけである。このような展開係数を用いて, $a+b$ のべき乗は,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k, \tag{1.2}$$

のように書くことができる。この関係は二項定理と呼ばれ, 解析学で頻繁に利用される。もちろん, 本書でも二項定理が多用される。よく使う形態としては, $a=1$, $b=x$ とおいた展開式:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \tag{1.3}$$

であろう。解析学では, $x \ll 1$ なる条件において, $(1+x)^n \simeq 1+nx$ なる近似を多用する。ここでは, 指数 n は自然数であるが, 解析学によると n は任意の数 (複素数) であっても, その近似は成立する。一方, 関係式 (1.3) に $x=1$, $x=-1$ を代入すると,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \tag{1.4}$$

なる面白い関係式が導かれる。

二項係数は組み合わせ数学においても意味のある値を与える。具体的には, n 個の要素から k 個を選ぶ組み合わせの数が $\binom{n}{k}$ で与えられるのである。ただし, 各要素には番号がつけられていて互いに区別できるようになっているが, 選んだ順序は気にしないものとする。例えば, 0 から 6 の番号をつけた 7 個のボールから 3 個を選ぶ組み合わせを考えよう。そのとき, 選ばれるボールの組み合わせは,

$$\begin{array}{lllll}
[\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}], & [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{3}], & [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{4}], & [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{5}], & [\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{6}], \\
[\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{3}], & [\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{4}], & [\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{5}], & [\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{6}], & [\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{4}], \\
[\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{5}], & [\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{6}], & [\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{5}], & [\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{6}], & [\mathbf{0},\mathbf{5},\mathbf{6}], \\
[1,2,3], & [1,2,4], & [1,2,5], & [1,2,6], & [1,3,4], \\
[1,3,5], & [1,3,6], & [1,4,5], & [1,4,6], & [1,5,6], \\
[2,3,4], & [2,3,5], & [2,3,6], & [2,4,5], & [2,4,6], \\
[2,5,6], & [3,4,5], & [3,4,6], & [3,5,6], & [4,5,6]
\end{array}$$

の 35 通りである。これらの組み合わせはボールの順序は気にしていない。例えば, $[0,1,2]$ と $[0,2,1]$ は同じ組み合わせが重複していると考える。上に列記した組み合わせは, そのような順序入れ替えによる重複がないように並べている。タネ明かしをすれば, 左より右の番号が大きくなるように番号を並べているのである。仮に, 構成する 3 つの数値のうちの任意の 2 つを入れ替えれば, 左の番号が右の番号より大きくなる。だから, 左より右の番号が大きくなるように並べれば, 順序入れ替えによる重複が発生しないのである。

上記, 35 通りの組み合わせのうち, 太字で記述したのはボール 0 が選ばれる組み合わせである。その組み合わせは 15 通り存在する。このようにボール 0 が選ばれる組み合わせ

を強調したのは以下の考えによる。太字の組み合わせは, 1 から 6 の番号をつけた 6 個のボールから 2 個を選び, その選択結果にボール 0 を追加した組み合わせと考えてもよい。それ以外の組み合わせは, 1 から 6 の番号をつけた 6 個のボールから 3 個を選んだ結果 (つまり, ボール 0 は選ばれない) である。このように考えると, 7 個のボールから 3 個を選ぶ組み合わせの数は, 6 個のボールから 2 個を選ぶ組み合わせの数と, 6 個のボールから 3 個を選ぶ組み合わせの数との和である。同様に考えると, n 個のボールから k 個を選ぶ組み合わせの数は, $n-1$ 個のボールから $k-1$ 個を選ぶ組み合わせの数と, $n-1$ 個のボールから k 個のボールを選ぶ組み合わせの数との和である。この関係は, まさに, 漸化式 (1.1) が示す関係なのである。そのように考えると, n 個の番号つきのボールから k 個を選ぶ組み合わせの数が二項係数で与えられることが納得できるだろう。

Break: ポーカーの手の数
トランプゲームのポーカーは, 52 枚のカードから引いた 5 枚のカードの組み合わせを競うゲームである。つまり, ポーカーの手の数は,

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

だけの組み合わせがあるのである。そのうち, ロイヤルストレートフラッシュは, 同一マークの 10, J, Q, K, A がそろわなければならないので 4 通りしかない。ストレートフラッシュは, 同一マークの連続する数字でなければならないので全部で 36 通りである。よって, ロイヤルストレートフラッシュの発生確率は 649 740 回に 1 回, ストレートフラッシュの発生確率は 72 193 回に 1 回である。

1.3　べき乗和の一般化

話題をべき乗和に戻そう。次数が小さいべき乗和の公式を導出した。前々節の方法で, 逐次, べき乗和の次数を上げていくと, その都度計算が複雑になることは明らかである。そこで, べき乗和を一般化し, k 次のべき乗和 $S_k(n) \equiv 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k$ の公式を導出しようというのが本節の目的である。実は, べき乗和を一般化する過程で, 本書の主題であるベルヌーイ数が導入されるのである。

べき乗和の一般化した形態として, k 次のべき乗和を導出しよう。これから導出する k 次のべき乗和とは,

$$S_k(n) \equiv \sum_{p=0}^{n-1} p^k,$$

のように定義される。前節では, 1 次のべき乗和を計算するには, $(j+1)^2 - j^2$ の和を評価し, 2 次のべき乗和を計算するには, $(j+1)^3 - j^3$ を評価した。そこから類推すると, k 次

のべき乗和を計算するには,

$$(p+1)^{k+1} - p^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} p^j,$$

を評価すればよい。なお, $(p+1)^{k+1}$ には二項定理を適用した。この数式で示す量について p を 0 から $n-1$ まで増加させて和をとると,

$$n^{k+1} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} p^j,$$

となる。この式の右辺は,

$$\mathrm{RHS} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n) = (k+1)\, S_k(n) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n),$$

のように変形できるので,

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left[n^{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right], \tag{1.5}$$

なる関係が導かれる。この関係式から k 次のべき乗和 $S_k(n)$ は n についての $k+1$ 次式となることが予想できる。その理由は次のとおりである。まず, 一次のべき乗和 $S_1(n) = n(n-1)/2$ が n についての 2 次式であるので, (1.5) によって 2 次のべき乗和 $S_2(n)$ は n についての 3 次式となる。同様に, (1.5) によって 3 次のべき乗和 $S_3(n)$ は n についての 4 次式となり, これを繰り返していくと, k 次のべき乗和 $S_k(n)$ は n についての $k+1$ 次式となるのである。そこで, $S_k(n)$ を,

$$S_k(n) = \sum_{j=0}^{k+1} B_{kj} n^j,$$

なる n のべき級数で表現し, 未知の展開係数 B_{kj} を決定しよう。そのうち, $S_k(n)$ のゼロ次の係数について, $B_{k0} = 0$ なる関係が, 必ず, 成立する。なぜなら, 1 次のべき乗和 $S_1(n) = n\,(n-1)/2$ は n の倍数であり, (1.5) によって $S_2(n)$ が n の倍数であることが示される。さらに, (1.5) を繰り返すと, 任意の k について $S_k(n)$ が n の倍数であることが示せるからである。

展開係数 B_{kj} を決定するために, $S_k(n+1) - S_k(n) = n^k$ なる関係に注目しよう。この関係式の両辺を n について微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}S_k(n+1)}{\mathrm{d}n} - \frac{\mathrm{d}S_k(n)}{\mathrm{d}n} = kn^{k-1},$$

となるが, n を 0 から $N-1$ まで増加させながら和をとると,

$$\frac{\mathrm{d}S_k(N)}{\mathrm{d}n} - \frac{\mathrm{d}S_k(0)}{\mathrm{d}n} = \sum_{n=0}^{N-1} kn^{k-1},$$

が得られる。ただし, $\mathrm{d}S_k(N)/\mathrm{d}n$ なる記号は, S_k を n のべき級数として微分し, その結果に対して, $n=N$ を代入した値である。この式の左辺と右辺を別々に計算すると,

$$\mathrm{LHS} = \frac{\mathrm{d}S_k(N)}{\mathrm{d}n} - B_{k1},$$
$$\mathrm{RHS} = k\sum_{j=1}^{N} j^{k-1} = k\,S_{k-1}(N),$$

となるので,

$$\frac{\mathrm{d}S_k(n)}{\mathrm{d}n} = k\,S_{k-1}(n) + B_{k1}, \tag{1.6}$$

なる関係が得られる。なお, ベルヌーイがべき乗和を一般化した際には, 本書のように微分を利用していなかった。当時のベルヌーイの導出にしたがうより, 微分を用いた導出の方がわかりやすいため, 本書では歴史的な導出にしたがわず, 微分を用いる。関係式 (1.6) を繰り返し適用すれば高階の導関数が得られる。 例えば, p 階の導関数は,

$$\frac{\mathrm{d}^p S_k(n)}{\mathrm{d}n^p} = \frac{k!}{(k-p)!}S_{k-p}(n) + \frac{k!}{(k-p+1)!}B_{k-p+1,1}, \tag{1.7}$$

となる。この結果を用いて, $n=0$ を中心に $S_k(n)$ をテイラー展開すると,

$$\begin{aligned} S_k(n) &= \sum_{p=0}^{k+1} \frac{\mathrm{d}^p S_k(0)}{\mathrm{d}n^p}\frac{n^p}{p!} = \sum_{p=0}^{k+1}\frac{k!}{p!\,(k-p+1)!}B_{k-p+1,1}\,n^p \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{p=1}^{k+1}\binom{k+1}{p}B_{k-p+1,1}\,n^p = \frac{1}{k+1}\sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p}B_{p1}\,n^{k-p+1}, \end{aligned}$$

が得られる。この式を見ると, 導入された未知の展開係数 B_{kj} のうち, B_{k1} だけがテイラー展開の係数として残っている。そこで, $B_p \equiv B_{p1}$ のように置き換えると, テイラー展開は,

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p}B_p\,n^{k-p+1}, \tag{1.8}$$

のように書き換えることができる。この残った未知の展開係数 B_p がベルヌーイ数と呼ばれる数列である。

それでは未知の係数であるベルヌーイ数の特定を始めよう。まず, 数列の和 $S_k(n)$ の級数展開 (1.8) に $n=1$ を代入してみる。左辺は $S_k(1)=0$ であるから,

$$\sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p}B_p = 0,$$

なる関係が得られる。この関係式は,

$$\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}B_p = 0, \tag{1.9}$$

あるいは,

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n+1}{p}B_p, \tag{1.10}$$

のように書き換えることもできる。この式はベルヌーイ数を逐次的に得るための漸化式である。まず, 初項として $B_0 = 1$ である。これは, $S_1(n) = n\,(n-1)/2$ の関係から導かれる。続いて, この初項を漸化式に代入し, 計算していくと, 順次, ベルヌーイ数が求められる。初項が有理数であり, 漸化式 (1.10) によって計算されることから, ベルヌーイ数が有理数であることがわかる。漸化式を実行し, 最初の 30 項を計算すると下表のような結果が得られる。

表 1.2: 分数表現によるベルヌーイ数

n	B_n	n	B_n	n	B_n
0	1	10	5/66	20	−174611/330
1	−1/2	11	0	21	0
2	1/6	12	−691/2730	22	854513/138
3	0	13	0	23	0
4	−1/30	14	7/6	24	−236364091/2730
5	0	15	0	25	0
6	1/42	16	−3617/798	26	8553103/6
7	0	17	0	27	0
8	−1/30	18	43867/798	28	−1869628555/58
9	0	19	0	29	0

計算したベルヌーイ数を見ると, B_1 以外の奇数項がゼロである。それ以降のベルヌーイ数も奇数項がゼロであると推測できる。その推測は正しく, ベルヌーイ数には $B_{2k+1} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ なる特徴がある。その特徴は, 第 3.1 節で証明する。

また, ベルヌーイ数が, 元来, べき乗和の一般化のため導入されたことに注目し, これらの係数がべき乗和を与えることを $k = 3$ を例に検証してみよう。ベルヌーイ数を用いて展開した後, 具体的な値を代入すると,

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4}(B_0 n^4 + 4B_1 n^3 + 6B_2 n^2 + 4B_3 n) \\ &= \frac{1}{4}(n^4 - 2n^3 + n^2) = \frac{1}{4}n^2(n-1)^2, \end{aligned}$$

となるので, ベルヌーイ数がべき乗和を与える係数であることが確認できる。当然, さらに高次のべき乗和について検証しても正当性が実証できるはずだ。

歴史的な記述　ヤコブ・ベルヌーイが導出したべき乗和の公式は本書の公式とはわずかに異なる形態である。現代の数式の記述法で書くと, ベルヌーイが導出した公式は,

$$\begin{aligned}1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k &= \frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\frac{k}{2}An^{k-1}+\frac{k\,(k-1)(k-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{k-3} \\ &+\frac{k\,(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{k-5} \\ &+\frac{k\,(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{k-7}+\cdots\end{aligned}$$

であった。この数式は無限に項が続くように見えるかもしれないが, n の指数が正の範囲に限定される。この数式に記載されている展開係数として,

$$A=\frac{1}{6},\quad B=-\frac{1}{30},\quad C=\frac{1}{42},\quad D=-\frac{1}{30},\quad \cdots$$

である。これらの係数がベルヌーイ数である。しかし, ベルヌーイが示した公式には, 本書が取り扱う公式と異なる点がある。それは, 本書が 0^k から $(n-1)^k$ の和を取り扱うのに対し, ベルヌーイの公式は 1^k から n^k の和を取り扱っていることである。日本の和算学者である関孝和が取り扱った公式もベルヌーイと同様であった。その歴史的なべき乗和の公式と本書のべき乗和の公式の関係を調べてみよう。

ベルヌーイや関孝和によるべき乗和を $\hat{S}_k(n)$ としよう。そのべき乗和を一般化したときの展開係数を $\hat{B}_n$ とすると, 歴史的なべき乗和の公式は,

$$\hat{S}_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{p=0}^{k}\hat{B}_p n^{k-p+1}\quad \text{where } \hat{S}_k(n)=\sum_{j=1}^{n}j^k,$$

のように記述できるはずだ。べき乗和 $\hat{S}_k(n)$ は 0^k から $(n-1)^k$ までの和ではなく, 1^k から n^k までの和である。つまり, $\hat{S}_k(n)=S_k(n)+n^k$ なる関係が成立する。この関係に注意すると,

$$\hat{S}_k(n)=\frac{B_0}{k+1}n^{k+1}+(B_1+1)n^k+\frac{1}{k+1}\sum_{p=2}^{k}\binom{k+1}{p}B_p n^{k-p+1},$$

となる。よって, ベルヌーイと関孝和が導入した数列は, $\hat{B}_0=1$, $\hat{B}_1=1/2$, $\hat{B}_k=B_k$ である。また, $\hat{B}_1=-B_1=1/2$, $\hat{B}_{2m+1}=-B_{2m+1}=0\ (m=1,2,\ldots)$ と考えれば, 一般化した関係式として $\hat{B}_n=(-1)^n B_n$ が成立すると考えることもできる。

べき乗和の公式は本書で取り扱うように 0^k から $(n-1)^k$ の和を取り扱うのが現代の主流である。しかし, 歴史的なべき乗和の記述によってベルヌーイ数を導入するテキストがある†ことにも注釈しておく。そのような歴史的な形態に基づくテキストでは, ベルヌーイ数は B_n でなく $\hat{B}_n$ を用いるため, ベルヌーイ数の第 1 項は $-1/2$ でなく, 1/2 と記載されていることに注意を要する。

†例えば, 荒川恒男, 金子昌信, 伊吹山知義, “ベルヌーイ数とゼータ関数,” 牧野書店, 2001.

1.4　母関数による解析

数列を展開係数とする級数を調べるため, 母関数 (generating function) を導入することがある。母関数を導入するとは, 評価対象の数列を展開係数とする級数をつくってみることである。その級数が形成する関数形から対象とする数列の一般項や漸近的振る舞いが考察できるのである。本節ではベルヌーイ数の母関数を評価し, ベルヌーイ数の性質を調べる。

1.4.1　母関数の導入

母関数は級数展開における数列の性質を調べるための数学的ツールである。母関数, つまり, 母なる関数などと, たいそうな名前がついているが, その正体は非常に簡単である。数列 a_n の母関数とは, 単に, その数列を展開係数とする級数[‡]のことである。代表的な母関数として, 次に説明する 3 つの母関数が挙げられる。

通常母関数　単に母関数と言えば, この種類の母関数であることが多い。通常母関数は, 数列 a_n を展開係数とするべき級数であり,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

の形で定義される。例えば, 数列 $\{a_n^{(1)}\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ の通常母関数は,

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

である。また, $\{a_n^{(2)}\} = \{0, 1, 0, -1/3, 0, 1/5, 0, -1/7, \ldots\}$ の通常母関数は,

$$G(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \arctan x,$$

である。この母関数が逆正接関数 (arctangent) となり, その変数に $x = 1$ を代入すれば, 数列 $\{a_n^{(2)}\}$ の無限級数が $\pi/4$ となることが導かれる。

指数型母関数　指数型母関数は, $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$ の形を模倣し,

$$G_{\mathrm{E}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n,$$

なる形で定義される。後に示すように, ベルヌーイ数の性質を調べるにはこのタイプの母関数を利用する。

[‡]母関数とは, 単なるべき級数なのだが, それにしてはたいそうな名前である。その名前がゆえに, 母関数に何らかの特別な意味を求め, 母関数をとっつきにくいものにしている印象がある。ちなみに, 英語では母関数を generating function (生成関数) という。英語でもたいそうな名前だ。

ポアソン型母関数　ポアソン型母関数は, パラメータ λ のポアソン分布の確率が $\lambda^k e^{-k}/k!$ であることに模倣した形式:

$$G_{\mathrm{P}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n,$$

で定義される。残念ながら, この型の母関数は本書で取り扱わない。

1.4.2　数列の評価例

母関数による評価対象としてフィボナッチ数列を考えてみよう。フィボナッチ数列は $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ と, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ なる漸化式によって定義される。この漸化式を用いて, フィボナッチ数列を初項から順に列記すると,

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\},$$

のように書くことができる。

フィボナッチ数列の通常母関数を計算し, フィボナッチ数列の性質を調べるのが本節の目的である。通常母関数は,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \cdots, \tag{1.11}$$

のように書くことができる。なお, $F_0 = 0$ であることから, ゼロ次の項は既に取り除いている。次に, この母関数に x を乗じた結果と, x^2 を乗じた結果を並べて書くと,

$$\begin{aligned} xG(x) &= F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + F_4 x^5 + \cdots, \\ x^2 G(x) &= \phantom{F_1 x^2 + {}} F_1 x^3 + F_2 x^4 + F_3 x^5 + \cdots, \end{aligned}$$

が得られる。次に, $F_1 = F_2 = 1$ と漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ に注意しながら, 上の計算結果と (1.11) を比較すると,

$$G(x) = (x^2 + x)\, G(x) + x,$$

なる関係が得られる。この関係式より, ただちに,

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}, \tag{1.12}$$

が導出される。これがフィボナッチ数列の母関数, すなわち, フィボナッチ数列を展開係数とする級数の正体である。言い換えると,

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \cdots,$$

なる級数展開が得られたことを意味する。とは言え, フィボナッチ数列を展開係数とする級数の正体がわかったところで, 有用性を感じないかもしれない。しかし, 次の段落で母関数の有用性を示してみよう。

母関数を利用すると, フィボナッチ数列の一般項を計算する数式を特定できる。そのためには, 母関数 (1.12) を級数展開するのである。とは言っても, 単純にフィボナッチ数列を係数とする級数展開を再確認するのではなく, 別の展開表現を探すのである。フィボナッチ数列の母関数 (1.12) の分母には x の 2 次の項を含むので, (1.12) を部分分数展開し, 2 次の項が現れないようにしておこう。分母が,

$$1-x-x^2=\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right),$$

のように因数分解できることを利用すれば, フィボナッチ数列の母関数は,

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{x}{1-(1-\sqrt{5})\,x/2}-\frac{x}{1-(1+\sqrt{5})\,x/2}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-(1+\sqrt{5})\,x/2}-\frac{1}{1-(1-\sqrt{5})\,x/2}\right),\end{aligned}$$

のように部分分数展開できる。この式の右辺の第 1 項と第 2 項について,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots,$$

を応用して級数展開すれば,

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n,$$

が得られる。もともと, この関数はフィボナッチ数列の母関数であったので, 各次数の係数を比較し,

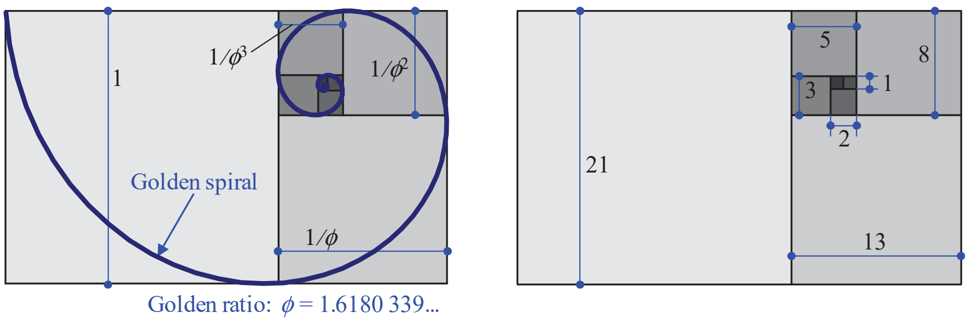
$$\begin{aligned}F_n&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}\right],\end{aligned}\tag{1.13}$$

が得られる。つまり, 母関数はフィボナッチ数列の一般項を特定するために役に立ったのである。フィボナッチ数列は整数しか取らないはずなのに, 一般項を計算する公式には $\sqrt{5}$ のような無理数が含まれていることが奇妙に見えるかもしれない。ところが, (1.13) に順次 n を代入してみると, 正しく一般項を与えることが示せるはずである。

一般項 (1.13) の右辺の第 2 項は n の増加と共に小さくなり, $n \to \infty$ の極限でゼロに収束するので, フィボナッチ数列の隣り合う項の比率は,

$$\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803\,39887\cdots,$$

の関係を満たす。この比率 ϕ は黄金比と呼ばれる比率であり, 幾何学的にも代数的にも対称性をもつ比率である。幾何学的な対称性は, 図 1.2 によって示すことができる。図 1.2 (a) は縦横比が黄金比となる長方形 (黄金長方形) である。この長方形の左側から正方形を切り取ると, 残された右部は縦長の黄金長方形となる。さらにその下側から正方形を切り取ると, 上部に横長の黄金長方形が残る。この正方形分割を繰り返すと, 分割される正方形は操作を重ねるたびに黄金比の逆数 ($= 1/\phi$) 倍のように小さくなっていく。しかも, 残された形状は, 必ず, 黄金長方形である。横長の黄金長方形の高さを 1 とし, 幅を x とする。左側の長方形を切り取ると, 右側に縦長の黄金長方形が残される事実は, $x - 1 = 1/x$ なる方程式に相当する。この方程式は, $x^2 - x - 1 = 0$ なる 2 次方程式に書き換えられるので, 確かに, x は黄金比 ($= \phi$) となる。なお, 図 1.2 (b) に描かれた螺旋は, 黄金長方形を分割した正方形に接する螺旋であり, 黄金螺旋と呼ばれる。黄金螺旋は, 対数螺旋§の一種である。



(a) Partitioning of a golden rectangle. (b) Approximate partitioning with Fibonacci series.

図 1.2: 黄金長方形の正方形分割

一方, 図 1.2 (b) はフィボナッチ数列を辺の長さとする正方形を配置した様子を表している。フィボナッチ数列を大きさとする正方形は, この図のように隙間なく並べることができる。しかも, それによって得られる長方形は近似的に黄金長方形となる。

代数的な対称性としては, 連分数表現における対称性である。黄金長方形の分割のときに述べた方程式 $x - 1 = 1/x$ から, 黄金比 ϕ は,

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cdots}}}},$$

§極座標における角度とともに半径が指数関数的に変化する曲線。

のように, 無限に続く連分数で表現できる。この連分数は, 数値計算の目的では役に立たないが, 数値の対称性の意味で興味深い。

黄金比は, その対称性に起因するのか, 自然界に多く見られる。また, 人間の感覚として美を感じる比率らしく, 古代ギリシャのパルテノン神殿の縦横比は黄金比に近い比率である¶と言われている。

1.4.3 ベルヌーイ数の指数型母関数

対象をベルヌーイ数に戻そう。母関数を利用すれば数列の性質がわかることがあるのは前節で例を示したとおりである。ベルヌーイ数の性質を調べるには, 指数型母関数を利用すると都合がよい。ベルヌーイ数の指数型母関数とは,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

のような級数である。指数型母関数は e^x のマクローリン級数を模倣した形をしている。前に導出した関係式:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

に注目し, 指数型母関数に類似した次の関数を計算してみる。

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \right] \frac{x^n}{(n+1)!} \\ &\qquad = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

この関数は次のように計算することもできる。

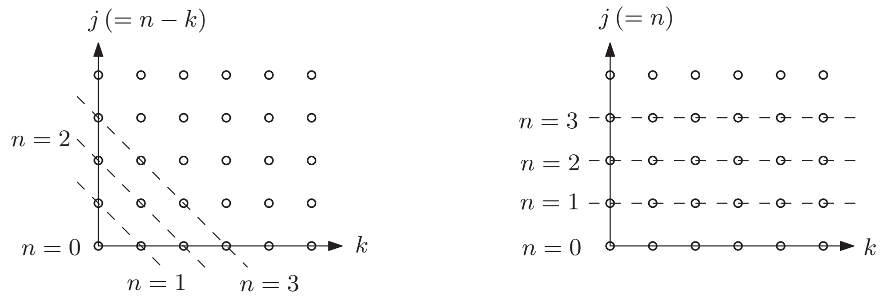
$$\begin{aligned} \mathrm{LHS} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} x^k \, \frac{x^{n-k}}{(n-k+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = \frac{e^x - 1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k. \end{aligned} \tag{1.15}$$

ここで, 第 1 行目から第 2 行目の数式変形について説明しておこう。この数式変形は, 総和における添え字の順序を変更することよって成り立つ。具体的に説明すると, (1.15) で演算される総和は,

$$\sum_{k,j} \frac{B_k}{k!} x^k \cdot \frac{x^j}{(j-1)!},$$

¶Kimberly Elam, “Balance in Design,” Princeton Architecture Press, pp. 6–11, 2001.
渡邉泰治, “黄金比の謎,” 化学同人, pp. 99–102, 2007.

のように書くことができる。ここで, 総和をとるにあたり, 添え字 k と j の組み合わせを図 1.3 に示す格子点で表現してみる。格子点の座標 $[k, j]$ が総和をとるときの添え字に対応している。図 1.3 (a) は, ゼロから始まり順次増加する番号 n に対して, 右下に傾いた破線に沿って総和を計算していく順序を表している。すなわち, この図は (1.15) の第 1 行目の演算に相当する。これに対して, 図 1.3 (b) は, 番号 n に対して水平方向に伸びる破線に沿って総和をとる順序を表している。これは (1.15) の第 2 行目の演算に相当する。図 1.3 の (a) と (b) は経路こそ違うが, どちらともすべての格子点を 1 回だけ通過するため, (1.15) の第 1 行目から第 2 行目への変形が正しいことを意味する。



(a) Order of summation of the first line.

(b) Order of summation of the second line.

図 1.3: 指数型母関数を計算するための総和の順序

さらに, (1.15) の右辺を導出するにあたり, 指数関数のテイラー展開:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

を用いた。もともと (1.14) と (1.15) は同じ数式であるので, これらを等号で結べば,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = \frac{x}{e^x - 1}, \tag{1.16}$$

なる関係式が得られる。つまり, ベルヌーイ数 B_n は $x/(e^x - 1)$ の展開係数を与える数列である。数学的には, この母関数がベルヌーイ数の定義として用いられている。言い換えると, $x/(e^x - 1)$ を $x = 0$ を中心にテイラー展開したときの k 次の展開係数を $B_k/k!$ とおくことによって, ベルヌーイ数 B_k が定義されている。しかしながら, テイラー展開によるベルヌーイ数の定義はベルヌーイ数を計算するには不向きであり, むしろ, 前節で導出した漸化式を利用したほうが容易である。

ベルヌーイ数の指数型母関数が (1.16) なる性質を示すこと重要である。この事実が成立するゆえに, ベルヌーイ数が正接関数 (tangent) のマクローリン展開の展開係数を与えるのだ。後に明らかになるように, ベルヌーイ数が数学的に重要であるのは, この指数型母関数に起因する要素が少なくない。

1.4.4 ベルヌーイ数の一般項

既にベルヌーイ数を順次計算するための漸化式を得ることができたので, ベルヌーイ数を計算できる。本節では, 漸化式ではなく, ベルヌーイ数の任意の項を与える公式を導出してみよう。

ベルヌーイ数の一般項を得るには, 次のような第 2 種スターリング数を知っておくと便利である。第 2 種スターリング数は次章で説明するが, $\left\{{n \atop m}\right\}$ のように 2 つのパラメータをもつ量である。この量の数学的な説明は次章に譲るとして, 第 2 種スターリング数は,

$$m!\left\{{n \atop m}\right\} \equiv \sum_{p=1}^{m}(-1)^{m-p}\binom{m}{p}p^n,$$

なる関係で表される。このパラメータを 2 つもつ数列とベルヌーイ数との関連性を調べてみよう。第 2 種スターリング数を n についての数列とみなし, 指数型母関数を計算してみると,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} m!\left\{{n \atop m}\right\}\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\binom{m}{p}p^n\right]\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\binom{m}{p}\frac{(pt)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\binom{m}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(pt)^n}{n!} \\
&= \sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p}\binom{m}{p}e^{pt} = (e^t-1)^m,
\end{aligned}$$

が得られる。 この結果を改めて書くと,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{{n \atop m}\right\}\frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t-1)^m}{m!}, \tag{1.17}$$

となる。この関係式がベルヌーイ数の一般項を得る便利な公式である。

さて, ベルヌーイ数の指数型母関数を変形して, ベルヌーイ数の一般項を求める等式を得てみよう。前節で, ベルヌーイ数の指数型母関数が $x/(e^x-1)$ となることが導かれたので, その母関数を変形していくと,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{x^n}{n!} &= \frac{x}{e^x-1} = \frac{\log[1-(1-e^x)]}{e^x-1} = -\frac{1}{e^x-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-e^x)^m}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-e^x)^{m-1}}{m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-e^x)^m}{m+1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,(e^x-1)^m}{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} m!\left\{{n \atop m}\right\}\frac{(-1)^m\,x^n}{(m+1)\,n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\,m!}{m+1}\left\{{n \atop m}\right\}\right]\frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

この式の右辺も指数型母関数の形になっている。つまり, 右辺の括弧内の第 2 種スターリング数を含む項がベルヌーイ数 B_n である。右辺からベルヌーイ数の部分だけを抜き出し, 第 2 種スターリング数を定義にしたがって分解していくと,

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{m!}{m+1} \left\{ {n \atop m} \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} p^n, \end{aligned}$$

となる。この式がベルヌーイ数の一般項を与える式である。もう少し整理して書くと,

$$B_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \, p^n \sum_{m=p}^{n} \frac{1}{m+1} \binom{m}{p}, \tag{1.18}$$

が得られる。ここに得られたベルヌーイ数 B_n の一般項は, 総和記号が二重に組まれているので, しかも, 整数 p に関する総和の被加算項に p^n が含まれているので, 手軽な計算手法とはいえない。むしろ, ベルヌーイ数の漸化式, あるいは, 次章で紹介するタンジェント・セカント数を用いたほうが手軽にベルヌーイ数を計算することができる。

1.5 数列の和と畳み込み和

数列の和を計算するには畳み込み和 (telescoping sum)[‖]を利用すると便利なことが多い。畳み込み和とは, $1/(4k^2-1)$ の和を計算する問題が典型的な例である。その問題となる数式は部分分数展開によって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right], \end{aligned}$$

のように展開される。展開した隣り合う括弧の中の第 2 項と第 1 項が互いに打ち消しあっているのが, この式から明らかである。この打ち消し合いが数式の先頭から最後尾まで伝播し, 結局,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1},$$

が得られる。このように, 数列の和を計算する過程において, 打ち消し合いが伝播し, 両端の値しか残らない総和を畳み込み和と呼ぶ。本節では, 畳み込み和の応用例を紹介する。

[‖]実は, 「畳み込み和」が一般的な用語か定かではない。英語の telescoping sum に対応する言葉を書いた和文書籍が見当たらないのだ。インタネットの Wikipedia で, 「畳み込み和」と「望遠鏡和」が見つかったので, 本書では前者の名称を用いる。

1.5.1　べき乗和

畳み込みは, 本節で新たに導入した技法ではなく, べき乗和を一般化する時点で既に登場していた。本章の前半で, k 次のべき乗和を求めるには, $(p+1)^{k+1}-p^{p+1}$ について p を 0 から $n-1$ まで増加させた和をとっていたことを思い出そう。簡単のため, $k=1$ の場合について, 書いてみると,

$$\sum_{p=0}^{n-1}\Big[(p+1)^2-p^2\Big]=(1^2-0^2)+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\cdots$$
$$\cdots+\Big((n-1)^2-(n-2)^2\Big)+\Big(n^2-(n-1)^2\Big)=n^2,$$

となる。これが畳み込み和になっているのである。ところが, この式の左辺が,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big[(p+1)^2-p^2\Big]=2\sum_{k=0}^{n-1}p+2\sum_{k=0}^{n-1}1=2\sum_{k=0}^{n-1}p+n,$$

と書ける。この式と畳み込み和の結果を等号で結ぶことによって,

$$\sum_{k=0}^{n-1}p=\frac{1}{2}n\,(n-1),$$

が得られたというわけである。既に示したように, 次数 k が大きくなっても, この畳み込み和を応用してべき乗和の公式が得られる。そのような考察の結果としてベルヌーイ数が導入されたのである。

1.5.2　フィボナッチ数列

畳み込み和の応用の練習材料としてフィボナッチ数列を扱ってみよう。フィボナッチ数列 F_k は, $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$ なる漸化式から畳み込み和を利用した関係式をつくりやすい。フィボナッチ数列の漸化式が, $F_k=F_{k+1}-F_{k-1}$ のように書き換えられることに注意すると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}F_k&=F_0+(F_2-F_0)+(F_3-F_1)+(F_4-F_2)+\cdots\\&\qquad\cdots+(F_{n-1}-F_{n-3})+(F_n-F_{n-2})\\&=F_n+F_{n-1}-1=F_{n+1}-1,\end{aligned}$$

が得られる。つまり, 先頭から連続するフィボナッチ数列の和は, 総和計算に用いた最終項の 2 つ後の項から 1 を減じた値に等しい。

畳み込み和を応用したフィボナッチ数列の性質はこれだけではない。漸化式が, $F_{2k+1} = F_{2k+2} - F_{2k}$ のように書き換えられることに注意すると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} &= (F_2 - F_0) + (F_4 - F_2) + \cdots + (F_{2n} - F_{2n-2}) \\ &= F_{2n},\end{aligned}$$

が得られる。この結果が意味しているのは, フィボナッチ数列の奇数項の総和は, 総和計算に用いた最終項の次に現れる偶数項に等しいということである。偶数項の総和でも類似の関係式がある。フィボナッチ数列の漸化式は $F_{2k} = F_{2k+1} - F_{2k-1}$ のように書き換えてもよいので,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} &= F_0 + (F_3 - F_1) + (F_5 - F_3) + \cdots + (F_{2n-1} - F_{2n-3}) \\ &= F_{2n-1} - F_1 + F_0 = F_{2n-1} - 1,\end{aligned}$$

が成立するはずである。しがたって, フィボナッチ数列の偶数項の総和は, 総和計算に用いた最終項の次に現れる奇数項から 1 を減じた結果に等しい。

続いて, 漸化式 $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$ の両辺に F_k を乗じた積 $F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1})$ について畳み込み和を適用すると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} F_k^2 = F_0^2 + (F_1F_2 - F_0F_1) + (F_2F_3 - F_1F_2) + \cdots \\ \cdots + (F_{n-1}F_n - F_{n-2}F_{n-1}) = F_{n-1}F_n,\end{aligned}$$

が得られる。つまり, フィボナッチ数列の自乗和は, 総和計算に用いた最終項 F_{n-1} とその次に現れる項 F_n の積に等しい。

いささかトリッキーであるが, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ を考えてみよう。この漸化式を使うと, 和が畳み込めない。その代わりに, $(-1)^k F_k$ の総和はどうであろうか? 隣り合う項の間で漸化式の符号が入れ替わるので, 和が畳み込めるはずである。計算してみると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k F_k = F_0 - F_1 + (F_1 + F_0) - (F_2 + F_1) + \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-1}(F_{n-2} + F_{n-3}) = (-1)^{n-1}F_{n-2} - 1,\end{aligned}$$

のように, 和の畳み込めている。よって, フィボナッチ数列を交代的に (符号を入れ替えながら) 加算した総和は, 最終項の直前の項に符号を付加し 1 を減じた結果に等しい。なお, 付加した符号は, 総和を求める際に最終項に与えた符号と同一の符号である。

さらに, 漸化式を $F_k = F_{k+2} - F_{k+1} = 2F_{k+2} - F_{k+3}$ のように変形してみる。この式に関して, 畳み込み和が成立させるには, $F_k/2^{k+1}$ の総和を考えればよいだろう。計算してみ

ると,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F_k}{2^{k+1}}=\left(F_2-\frac{F_3}{2}\right)+\left(\frac{F_3}{2}-\frac{F_4}{4}\right)+\left(\frac{F_4}{4}-\frac{F_5}{8}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{F_n}{2^{n-2}}-\frac{F_{n+1}}{2^{n-1}}\right)+\left(\frac{F_{n+1}}{2^{n-1}}-\frac{F_{n+2}}{2^n}\right)=1-\frac{F_{n+3}}{2^n},$$

が得られる。この関係式は興味深い。これに類似した漸化式の変形として, $F_{2k}=F_{2k+2}-F_{2k+1}=F_{2k+3}-2F_{2k+1}$ を利用すると異なる結果が得られる。この場合は, $F_{2k}/2^{k+1}$ の総和を考えると畳み込み和の形になる。具体的に計算してみると,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F_{2k}}{2^{k+1}}=\left(\frac{F_3}{2}-F_1\right)+\left(\frac{F_5}{4}-\frac{F_3}{2}\right)+\left(\frac{F_7}{8}-\frac{F_5}{4}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{F_{2k+1}}{2^{n-1}}-\frac{F_{2k-1}}{2^{n-2}}\right)+\left(\frac{F_{2k+3}}{2^n}-\frac{F_{2k+1}}{2^{n-1}}\right)=\frac{F_{2k+3}}{2^n}-1,$$

が得られる。類似した形をしているが, これら 2 つの結果は意味が異なる。実は, $n\to\infty$ の極限で, $F_k/2^{k+1}$ の総和が 1 に収束するのだが, $F_{2k}/2^{k+1}$ の総和は発散するのである。前に説明したように, F_{k+1}/F_k は $k\to\infty$ の極限で黄金比 ($\phi\simeq 1.618$) に近づく。ところで, $k\to\infty$ の極限で, $F_k/2^{k+1}$ は $(\phi/2)^k$ に比例し, $F_{2k}/2^{k+1}$ は $(\phi/\sqrt{2})^{2k}$ に比例する。上で値を記載したとおり, $\sqrt{2}<\phi<2$ であるので, 前者の級数が収束し, 後者が発散するのである。

1.5.3 上昇階乗の和

前に示したように, べき乗和はベルヌーイ数を展開係数とする級数で計算できる。これに対し, 上昇階乗の和は, さらに簡単で美しい形で記述できることがわかっている。上昇階乗とは, ある実数 x を与えたとき, $x\,(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$ のように, 1 ずつ増加させて乗じる操作を k 回繰り返した結果を k 次の上昇階乗 (rising factorial) という。

まず, $m+1$ 次の上昇階乗 $k\,(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$ と, k を $k+1$ で置き換えた式 $(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1)$ の差を計算すると,

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1)-k\,(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$$
$$=(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m)\cdot(m+1),$$

となる。次章で導入する記法を先取りして, 上昇階乗を $k^{\overline{m}}=k\,(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)$ のように書くことにすると, 上の式は,

$$(m+1)\,(k+1)^{\overline{m}}=(k+1)^{\overline{m+1}}-k^{\overline{m}},$$

のように書くことができる。この式の両辺について, $k=0$ から $n-1$ にわたって和をとると,

$$
\begin{aligned}
(m+1)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{\overline{m}} = \left(1^{\overline{m+1}} - 0^{\overline{m+1}}\right) + \left(2^{\overline{m+1}} - 1^{\overline{m+1}}\right) + \cdots \\
\cdots + \left((n-1)^{\overline{m+1}} - (n-2)^{\overline{m+1}}\right) + \left(n^{\overline{m+1}} - (n-1)^{\overline{m+1}}\right) = n^{\overline{m+1}},
\end{aligned}
$$

が得られる。つまり, この総和は畳み込み和の関係になっている。上昇階乗の和は, 畳み込み和によって,

$$
\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{\overline{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, \tag{1.19}
$$

であることが導かれたのである。この数式は, 上昇階乗の記号を元に戻すと,

$$
\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \frac{n\,(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1}, \tag{1.20}
$$

のように書くことができる。また, この関係式は, $k+1 \mapsto k$ の置き換えによって,

$$
\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1) = \frac{n\,(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1},
$$

のように書き換えることもできる。この結果は, 興味深く, 美しい形をしている。前に示したように, べき乗和はベルヌーイ数を展開係数とするべき級数で表現されていた。しかし, 上昇階乗の和はべき級数でなく, 上昇階乗 (1 項のみ) で書けるのだ。

上昇階乗の和の公式は, 数学的に美しいだけで, それほど有用な公式でもないのだが, せっかく導出したので, 利用できる例を示しておこう。その例として, 上昇階乗の公式を利用して 3 次のべき乗和を計算しよう。計算をするには, 3 次のべき乗 k^3 を上昇階乗の和に分解して, 公式を利用するのである。すると,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}\left[k^2(k+1) - k^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[k\,(k+1)(k+2) - 3k\,(k+1) + k\right] \\
&= \frac{n\,(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{3n\,(n+1)(n+2)}{3} + \frac{n\,(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4},
\end{aligned}
$$

が得られる。この結果に対して, $n \mapsto n-1$ の置き換えをすると, 前に計算した $S_3(n) = n^2(n-1)^2/4$ が得られる。実は, 上昇階乗の和とべき乗和の関係から, ベルヌーイ数の性質を導くことができる。その議論は, 次章に譲ることにする。

1.5.4 上昇階乗の逆数

上昇階乗だけでなく, その逆数も畳み込み和が適用できる。例として, $k+1$ を基点とする m 次の上昇階乗の逆数 $1/(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$ と, k を $k+1$ で置き換えた量 $1/(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1)$ の差を計算すると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} &- \frac{1}{(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1)} \\ &= \frac{m}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)(k+m+1)},\end{aligned}$$

が得られる。この式は, 上昇階乗を表す記法を用いて簡略表記すると,

$$\frac{m}{(k+1)^{\overline{m+1}}} = \frac{1}{(k+1)^{\overline{m}}} - \frac{1}{(k+2)^{\overline{m}}},$$

となる。この式の両辺について, $k=0$ から $n-1$ の範囲で和をとると,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\overline{m+1}}} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)^{\overline{m}}}\right), \tag{1.21}$$

が得られる。上昇階乗に関する記号を元に戻すと, この計算結果は,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m+1)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right), \tag{1.22}$$

のように書くことができる。さらに, $k+1 \mapsto k$ のように置き換えると, この公式は,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\cdots(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right),$$

のように書くことができる。本節で示したように, 上昇階乗の逆数の和も, 上昇階乗の和に類似した美しい性質がある。